超弾性体の形状最適化について

2020 年 2 月 28 日

1　超弾性体とは

本章では，超弾性体の基本的な事項および，その弱形式の導出までを行う．

1.1　はじめに

ある物体の実座標系 $\boldsymbol{x}$ に対し，物質座標系 $\boldsymbol{X}$ の微小変化の関係が

$$d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F} d\boldsymbol{X} \tag{1}$$

と表されるとする．この $\boldsymbol{F}$ を変形勾配テンソルと呼ぶ．このテンソルを用いて，$\boldsymbol{C}, \boldsymbol{B}$ を以下のように定義する．

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{F} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}^T \tag{3}$$

この $\boldsymbol{C}$ を右コーシーグリーン変形テンソル，$\boldsymbol{B}$ を左コーシーグリーン変形テンソルと呼ぶ．

これを用いてグリーン・ラグランジュひずみテンソル $\boldsymbol{E}$ は

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{I}) \tag{4}$$

と表される．また，アルマンドひずみテンソル $\boldsymbol{A}$ は

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}^{-1}) \tag{5}$$

と表される．この二つのひずみは変位 $\boldsymbol{u}$ と物体の位置ベクトル $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}$ を用いて以下のように表される．

$$\boldsymbol{E} = E_{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial X_i} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial X_j} \right\} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \tag{6}$$

$$\boldsymbol{A} = E_{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_j} \right\} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \tag{7}$$

1.2　超弾性体とは

超弾性体とは，変形やひずみの成分で微分することにより，共役な応力成分が得られる弾性ポテンシャル関数 W が存在する物質として，以下のように定義される．

$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} \tag{8}$$

(4) より，$\boldsymbol{C}$ を用いて表現すると

$$S_{ij} = 2 \frac{\partial W}{\partial C_{ij}} \tag{9}$$

テンソル $\boldsymbol{C}$ に関する不変量として，以下の関数を定義する．

$$I_C = \mathrm{tr}\boldsymbol{C} \tag{10}$$

$$I\!I_C = \frac{1}{2}(I_C^2 - \mathrm{tr}(\boldsymbol{C}^2)) \tag{11}$$

$$I\!I\!I_C = \mathrm{det}\boldsymbol{C} \tag{12}$$

これらの C_{ij} に関する偏微分は次式らであらわされる．

$$\frac{\partial I_C}{\partial C_{ij}} = \delta_{ij} \tag{13}$$

$$\frac{\partial I\!I_C}{\partial C_{ij}} = I_C\delta_{ij} - C_{ij} \tag{14}$$

$$\frac{\partial I\!I\!I_C}{\partial C_{ij}} = I\!I\!I_C(\boldsymbol{C}^{-1})_{ij} \tag{15}$$

これらを用いて W が表現されるとすれば，応力成分 S_{ij} は微分の連鎖律を用いて次のように表現される．

$$S_{ij} = 2\left\{\frac{\partial I_C}{\partial C_{ij}}\frac{\partial W}{\partial I_C} + \frac{\partial I\!I_C}{\partial C_{ij}}\frac{\partial W}{\partial I\!I_C} + \frac{\partial I\!I\!I_C}{\partial C_{ij}}\frac{\partial W}{\partial I\!I\!I_C}\right\} \tag{16}$$

$$= 2\left\{(\frac{\partial W}{\partial I_C} + \frac{\partial W}{\partial I\!I_C}I_C)\delta_{ij} - \frac{\partial W}{\partial I\!I_C}C_{ij} + \frac{\partial W}{\partial I\!I\!I_C}I\!I\!I_C(\boldsymbol{C}^{-1})_{ij}\right\} \tag{17}$$

以降では，定式化において非圧縮性を仮定する．

非圧縮性の物質の場合，等方的な外力を加えると，体積が変化しないまま内部応力が生じる．この場合，変位とは別に非決定応力（不定静水圧）を独立な変数としてとる必要があり，これを p と置く．この場合，適切なひずみエネルギー密度 W を選択しなければ，無変形状態 ($C_{ij} = \delta_{ij}$) においては p が初期値を持つという不具合が生じる．このようなことが起こらないために，例えば Mooney-Rivlin 体などでは，(10) に対し，次のような不変量を用いることで，この問題を解決する手法が提案されている．

$$\tilde{I}_C = I_C I\!I\!I_C^{-\frac{1}{3}} \tag{18}$$

$$\tilde{I\!I}_C = I\!I_C I\!I\!I_C^{-\frac{2}{3}} \tag{19}$$

この二つもまた不変量であり，低減不変量と呼ばれる．

1.3 超弾性体における有限要素法の弱形式

非圧縮の超弾性体でモデル化される物体について，次のような境界値問題を考える．物体が占める領域を Ω，その境界を $\partial\Omega$ として，$\partial\Omega_D$ の変位境界条件が与えられているとする．表面力を $\boldsymbol{t}$,

体積力を $\rho_0\boldsymbol{g}$ が作用するとき，全ポテンシャルエネルギー Φ は次式であらわされる．

$$\Phi = \int_\Omega W d\Omega - \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{u} dS - \int_\Omega \rho_0\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{u} d\Omega \tag{20}$$

非圧縮性に関する制約式は $I\!I\!I_C = 0$ で表現されることから，ラグランジュ関数を用いて，ポテンシャルエネルギー式は次のように再表現される．

$$\Phi = \Phi + \lambda \int_\Omega f(I\!I\!I_C) d\Omega \tag{21}$$

ただし $f(x)$ は $f(1) = 0$ を満たし，$\frac{\partial f}{\partial x} = 1$ を満たす関数である．停留ポテンシャルエネルギーの原理により，次式を満たす．

$$\delta\Phi = \int_\Omega \frac{\partial W}{\partial C_{ij}} \delta C_{ij} d\Omega + \int_\Omega \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial C_{ij}} \delta C_{ij} + \delta\lambda f\right) d\Omega - \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{t}\cdot\delta\boldsymbol{u} dS - \int_\Omega \rho_0\boldsymbol{g}\cdot\delta\boldsymbol{u} d\Omega \tag{22}$$

$$= \int_\Omega \left(\frac{\partial W}{\partial C_{ij}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial C_{ij}}\right) \delta C_{ij} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{t}\cdot\delta\boldsymbol{u} dS - \int_\Omega \rho_0\boldsymbol{g}\cdot\delta\boldsymbol{u} d\Omega \tag{23}$$

また，以下の式が成り立つ．

$$\int_\Omega \delta\lambda f d\Omega = 0 \tag{24}$$

この式を簡単に表記すると以下のようになる．

$$\int_\Omega \delta E_{ij} S_{ij} d\Omega = \delta R \tag{25}$$

左辺については，$\delta E_{ij} S_{ij}$ が i, j に関して対称であることから，要素ベクトル $\{\delta\boldsymbol{E}\}, \{\boldsymbol{S}\}$ を用いて次式のように表される．

$$\delta E_{ij} S_{ij} = \begin{pmatrix} \delta E_{11} & \delta E_{22} & \delta E_{33} & \delta E_{12} & \delta E_{23} & \delta E_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{23} \\ S_{31} \end{pmatrix} = \{\delta\boldsymbol{E}\}^T \{\boldsymbol{S}\} \tag{26}$$

(25) の積分区間を分割する．

$$\int_\Omega \delta E_{ij} S_{ij} d\Omega = \sum_e \int_{\Omega_e} \{\delta\boldsymbol{E}\}^T \{\boldsymbol{S}\} d\Omega \tag{27}$$

ただし，δE_{ij} は以下のように表される．

$$\delta E_{ij} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial\delta u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial\delta u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial\delta\boldsymbol{u}}{\partial X_i}\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial X_j} + \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial X_i}\frac{\partial\delta\boldsymbol{u}}{\partial X_j}\right\} \triangleq [\boldsymbol{Z}_1]\left\{\frac{\partial\delta u}{\partial X}\right\} \tag{28}$$

さらに，変位の微分を以下のように補間関数 $N^{(n)}$ を用いて補完することを考える．

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_j} u_i^{(n)} \tag{29}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{X}} = [\boldsymbol{Z}_2]\{\delta u^{(n)}\} \tag{30}$$

となり，$[\delta \boldsymbol{E}]$ はこれらを用いて以下のように表される．

$$\{\delta \boldsymbol{E}\} = [\boldsymbol{Z}_1][\boldsymbol{Z}_2]\{\delta u^{(n)}\} \triangleq [\boldsymbol{B}]\{\delta u^{(n)}\} \tag{31}$$

(31) を用いて (32) を書き直すと次式で表される．

$$\sum_e \int_{\Omega_e} \{\delta \boldsymbol{E}\}^T \{\boldsymbol{S}\} d\Omega = \sum_e \{\delta u^{(n)}\}^T \int_{\Omega_e} [\boldsymbol{B}]^T \{\boldsymbol{S}\} d\Omega \tag{32}$$

また，(22) の外力項は以下のように表される．

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{t} \cdot \delta \boldsymbol{u} dS + \int_{\Omega} \rho_0 \boldsymbol{g} \cdot \delta \boldsymbol{u} d\Omega = \sum_e \{\delta u^{(n)}\}^T \left(\int_{\partial\Omega_e} [\boldsymbol{N}]^T \boldsymbol{t} dS + \int_{\Omega_e} [\boldsymbol{N}]^T \rho_0 \boldsymbol{g} d\Omega \right) \tag{33}$$

さらに，ラグランジュの変位に関する式は

$$\int_{\Omega} \delta\lambda f d\Omega = \sum_e \int_{\Omega_e} \delta\lambda f d\Omega = \sum_e \{\delta\lambda^{(m)}\}^T \int_{\Omega_e} \{\boldsymbol{M}\} f d\Omega \tag{34}$$

と計算される．ここで，$\{\delta u\}^T = \{\{\delta u^{(n)}\}^T \ \ \{\delta\lambda^{(m)}\}^T\}$ を定義すると，(25) は一つの弱形式の式として次式で表される．

$$\sum_e \{\delta u\}^T [\boldsymbol{U}(u) - \boldsymbol{F}(u)] = 0 \tag{35}$$

ただし，$\boldsymbol{U}(u), \boldsymbol{F}(u)$ は次式らで定義している．

$$\boldsymbol{U}(u) = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} [\boldsymbol{B}]^T \{\boldsymbol{S}\} \\ \{\boldsymbol{M}\} \end{bmatrix} d\Omega \tag{36}$$

$$\boldsymbol{F}(u) = \int_{\partial\Omega_e} \begin{bmatrix} [\boldsymbol{N}]^T \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}^{(m)} \end{bmatrix} dS + \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} [\boldsymbol{N}]^T \rho_0 \boldsymbol{g} \\ \boldsymbol{0}^{(m)} \end{bmatrix} d\Omega \tag{37}$$

2　力法 (Traction Method) とは

本章では，形状最適化における ABAQUS の標準モジュールとして実装されてある力法について紹介する．

2.1　領域変動の表現手法

変動が許されているすべての領域を含む固定された開領域を許容領域 Ω と定義する．許容領域の境界 $\partial\Omega$ はなめらかであると仮定する．領域の変動は，変動に対する写像 $T_s(\boldsymbol{X})$ を用いて以下のように表される．

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}_s(\boldsymbol{X}) \tag{38}$$

ただし，D を変動させないために，境界 ∂D 上の特異点は変動しないとし，変動を拘束する猟奇 Ψ では次の関係を仮定する．

$$n_i V_i = 0 \text{ on } \partial D \ \ , \ \ \boldsymbol{V} = \boldsymbol{0} \text{ in } \Psi \in \bar{D} \tag{39}$$

ここで，s は変動の履歴を表すとし，$\boldsymbol{X}$ は物質座標系（局所座標），$\boldsymbol{x}$ は実座標系（絶対座標）とする．

領域の微小変動は，テイラー展開に基づいて，その変化量 $\boldsymbol{V}$ を用いて次のように近似表現される．

$$\boldsymbol{T}_{s+\Delta s}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{T}_s(\boldsymbol{X}) + \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})\Delta s + O(\Delta s) \tag{40}$$

ただし，O はランダウの記号を表す．

この $\boldsymbol{V}$ を用いて領域変動に伴う分布関数の履歴 s についての導関数について考える．物質座標系における分布関数を $\Psi_s(\boldsymbol{X})$，実座標系における分布関数を $\psi_s(\boldsymbol{x})$ とするとき，両者の間には，以下で示すような関係がある．

$$\Psi_s(\boldsymbol{X}) = \psi_s(\boldsymbol{T}_s(\boldsymbol{X})) \tag{41}$$

この等式を s について微分してやると

$$\frac{\partial \Psi_s}{\partial s} = \frac{\partial \Psi_s}{\partial \psi_s}\frac{\partial \psi_s}{\partial s} + \frac{\partial \Psi_s}{\partial \boldsymbol{T}_s}\frac{\partial \boldsymbol{T}_s}{\partial s} \tag{42}$$

$$= \frac{\partial \psi_s}{\partial s} + \frac{\partial \Psi_s}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{V} \tag{43}$$

が得られる．

これを用いて，実際に汎関数 J の導関数例について考える．J が分布関数 ψ_s の領域積分

$$J(\Omega_s, \psi_s) = \int_{\Omega_s} \psi_s dx \tag{44}$$

として与えられている場合を考える．偏微分に関する連鎖則を用いることで J の導関数は

$$\frac{\partial J}{\partial s} = \int_{\Omega_s} \frac{\partial \psi_s}{\partial s} dx + \int_{\Gamma_s} \psi_s \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n} d\Gamma \tag{45}$$

$$= \int_{\Omega_s} \frac{\partial \psi_s}{\partial s} + \frac{\partial (\psi_s \boldsymbol{V})}{\partial \boldsymbol{x}} dx \tag{46}$$

$$= \int_{\Omega_s} \frac{\partial \Psi_s}{\partial s} + \psi_s \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{x}} dx \tag{47}$$

と表される．また，境界積分で以下のような形で与えられている J について考える．

$$J(\Gamma_s, \psi_s) = \int_{\Gamma_s} \psi_s dS \tag{48}$$

この場合も，同様の手順を踏むことで以下のように計算できる．

$$\frac{\partial J}{\partial s} = \int_{\partial \Omega_s} \frac{\partial \psi_s}{\partial s} + (\frac{\partial \psi_s}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{n} + \psi_s \kappa) \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n} dS \tag{49}$$

$$= \int_{\partial \Omega_s} \frac{\partial \Psi_s}{\partial s} + \psi_s \kappa \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n} dS \tag{50}$$

ただし，κ は二次元の場合は曲率，三次元の場合には平均曲率を表している．

この領域変動の表現方法を用いて，実際の最適化問題について考える．ある変位 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ に対する境界値問題 $Q(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}) = 0$ が (35) のような弱形式で与えられているとし，領域に関する不等式制約 $\int_\Omega \boldsymbol{I} d\Omega$ 下で，ある目的関数 $\Pi(\boldsymbol{u})$ を最小化するような最小化問題を考える．このとき，ラグランジュ乗数法を用いてこの問題を表現することを考える．$\boldsymbol{\lambda}$ を等式制約に関するラグランジュ乗数，$\boldsymbol{\mu}$ を不等式制約に関するラグランジュ乗数法であるとすると，そのラグランジュ関数 $L(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ は，次のように表される．

$$L(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \Pi(\boldsymbol{u}) - Q(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{I}(\Omega_s) \tag{51}$$

ここで，$Q(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda})$ を，以下の式で示すように領域積分を行う被積分関数 $\boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{Y}_1$ および境界積分を行う被積分関数 $\boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{Y}_2$ によって表現しなおす．

$$Q(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \int_\Omega \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{Y}_1 d\Omega + \int_{\partial\Omega_2} \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{Y}_2 dS \tag{52}$$

これを用いてラグランジュ関数の物質導関数 L' の表現は，(**??**) を用いることによって以下のように表される．

$$L' = (\Pi(\boldsymbol{v}))' - Q(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}') - R(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{\mu}' \int_\Omega \boldsymbol{I} d\Omega + l_G(\boldsymbol{V}) \tag{53}$$

ただし，s に関する偏微分は全て統一してダッシュを用いて表現している．また，式中に現れる $R(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{\lambda}), l_G(\boldsymbol{V})$ に関しては次式らで定義している．

$$R(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{\lambda}) \triangleq \int_\Omega \boldsymbol{\lambda} \frac{\partial \boldsymbol{Y}_1}{\partial s} d\Omega + \int_{\partial\Omega_2} \boldsymbol{\lambda} \frac{\partial \boldsymbol{Y}_2}{\partial s} dS \tag{54}$$

$$l_G(\boldsymbol{V}) = \int_\Omega \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{V} d\Omega \tag{55}$$

$$\boldsymbol{G} \triangleq \left[\left\{ \gamma_{\Omega_2} \left(\boldsymbol{\lambda} \frac{\partial \boldsymbol{Y}_2}{\partial \boldsymbol{X}} \boldsymbol{n} + \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial \boldsymbol{X}} \boldsymbol{Y}_2 \right) \cdot \boldsymbol{n} + \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{Y}_2 \kappa \right\} + \gamma_\Omega \left\{ \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{Y}_1 + \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{I} \right\} \right] \boldsymbol{n} \tag{56}$$

この $\boldsymbol{G}$ は形状勾配ベクトルと呼ばれるベクトル量であり，履歴に対する形状や外力による条件で決定される．また，γ_Ω はトレース作用素で，領域 Ω で定義された関数 v から，その境界 $\partial\Omega$ の上の成分だけを取り出した関数を与える線形作用素である．$(\Pi(u))' = \tilde{\Pi}(u')$ と定義すれば，ラグランジュ関数の停留条件は次式で表される．

$$\tilde{\Pi}(u') - R(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{\lambda}) = 0 \tag{57}$$

$$Q(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}') = 0 \tag{58}$$

$$l_G(\boldsymbol{V}) = 0 \tag{59}$$

$$\boldsymbol{\mu}' \int_\Omega \boldsymbol{I} d\Omega = 0 \tag{60}$$

$$I_i \leqq 0 \tag{61}$$

2.2 力法とは

力法とは，初期領域 Ω から k 回目の領域変動を表す速度場 $\boldsymbol{V}^{(k)}$ を次の支配方程式によって解析する手法である．

$$\int_{\Omega_s} U(\boldsymbol{V^{(k)}}, \boldsymbol{w})dx = -l_G^{(k)}(\boldsymbol{V^{(k)}}) \tag{62}$$

この支配方程式で決定された領域変動は，ラグランジュ関数 L を減少させることを示す．(35) およびキューン・タッカー条件がすべて満たされる場合，L の摂動展開は次式で表される．

$$\Delta L^{(k)} = l_G^{(k)}(\Delta s \boldsymbol{V}^{(k)}) + O(|\Delta s|) \tag{63}$$

ここで，(63) に (62) を代入する．さらに，$U(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ に関する正定値性を示す次式

$$\exists\alpha:\ U(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) \geqq \alpha||\boldsymbol{\xi}||^2 \tag{64}$$

が満たされているとすると，Δs が十分小さいとき，次の関係を得ることができる．

$$\Delta L^{(k)} \quad = -U(\Delta s \boldsymbol{V}^{(k)}, \Delta s \boldsymbol{V}^{(k)}) < 0 \tag{65}$$

この式は，凸性が保証されている問題において，L が必ず減少することを示している．

3 本研究のモデル化

本研究では，固定されたバスト領域 Ω_B において，脂肪領域 Ω_F および乳腺領域 $\Omega_B \backslash \Omega_F$ という二つの材料領域が占めているとする．この二つの材料特性は超弾性体であるとし，本研究では Neo-Hooken 体を利用する．

$$W \triangleq c_1(\tilde{I}_C - 3) \tag{66}$$

この式は，大ひずみを生じる物体についてはその挙動を表すことができないことが知られているが，$\tilde{I\!I}_C$ を含む項を持たないため，関数の凸性を保証することが知られている．[*1] この定義を用いて，第二 Piora 応力は次式で表現される．

$$\boldsymbol{S} = -\left(p + \frac{1}{3}c_1\tilde{I}_C\right)\boldsymbol{C}^{-1} + c_1 I\!I\!I_C^{-\frac{1}{3}}\boldsymbol{I} \tag{67}$$

ただし $\boldsymbol{I}$ は 3×3 の単位行列を表す．材料の境界面における相互作用を考慮しない場合，材料特性パラメータ $\Theta = [\rho \ \ c_1]$ は物質座標 $\boldsymbol{X}$ の関数として，$\Theta(\boldsymbol{X})$ のように表現でき，脂肪の材料パラメータを Θ_A，乳腺の材料パラメータを Θ_B とすると，次式のように表される．

$$\Theta(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} \Theta_A(\boldsymbol{X}) & \boldsymbol{X} \in \Omega_F \\ \Theta_B(\boldsymbol{X}) & \boldsymbol{X} \in \Omega_B \backslash \Omega_F \end{cases} \tag{68}$$

[*1] 一般に，低減不変量 $\tilde{I\!I}_C$ は，凸性を保証しないことが知られている．

本研究では，簡単な問題にするため，表面力は働かないとし，重力による体積力が働くとする．また，目的関数には，離散化された要素のひずみエネルギ密度の和を選択し，これを最小化するようにする．これを定式化すると次のように表される．

$$W(\boldsymbol{u}) = \sum_i W(\boldsymbol{u}^{(i)}) \tag{69}$$

以上より，(57) で示されている $R(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{\lambda})$ を表すと次式のように表される．

$$R(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{\lambda}) = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\lambda} \begin{bmatrix} [\boldsymbol{B}]^T\{\boldsymbol{S}\}' \\ \{\boldsymbol{M}\} \end{bmatrix} d\Omega \tag{70}$$

Piora 応力の履歴による微分は次式で表される．

$$\{\boldsymbol{S}\}' = \left(-p' + \frac{1}{9}c_1\tilde{I}_C\mathrm{tr}(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}') - \frac{1}{3}c_1 I\!I\!I_C^{-\frac{1}{3}}\mathrm{tr}\boldsymbol{C}'\right)\boldsymbol{C}^{-1} - \left(p + \frac{1}{3}c_1\tilde{I}_C\right)\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}^{-1} - \frac{1}{3}c_1 I\!I\!I_C^{-\frac{1}{3}}\mathrm{tr}(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}') \tag{71}$$

なお，式の計算過程では，以下に示すように行列式および行列のトレースの微分公式を用いている．

$$(\det\boldsymbol{A})' = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}') \tag{72}$$

$$(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})' = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}') \tag{73}$$

また，離散化された要素のひずみエネルギ密度の和の微分は次式で表される．

$$(\Pi(\boldsymbol{u}))' = \sum_i (W(\boldsymbol{u}^{(i)}))' = \sum_i c_1 I\!I\!I^{-\frac{1}{3}}\left(\mathrm{tr}(\boldsymbol{C}') - \frac{1}{3}I_C\mathrm{tr}(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}')\right) \tag{74}$$

$\boldsymbol{C}'$ については，(4) および (6) を用いて次式のように $\boldsymbol{u}', \boldsymbol{u}$ の関数で表される．

$$\boldsymbol{C}' = \frac{\partial\boldsymbol{u}'}{\partial\boldsymbol{X}} + \left(\frac{\partial\boldsymbol{u}'}{\partial\boldsymbol{X}}\right)^T + \frac{\partial\boldsymbol{u}'}{\partial\boldsymbol{X}}\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{X}}\right)^T + \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{X}}\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}'}{\partial\boldsymbol{X}}\right)^T \tag{75}$$

以上の式から，離散化した変位パラメータの微分 $\{\boldsymbol{u}'\}$ を有限要素法により求めることができることを示した．