

研究進捗報告書

ミーティング日：2021 年 6 月 11 日

学年 D2 氏名 吉田 皓太郎

注意：ミーティング時には、必ず本報告書を作成し、一部を教員に提出すると共に、一部を自分用に持参して下さい。本報告書の提出がない場合、ミーティングは実施しません。また、項目 1) から項目 3) について未記入の箇所がある場合にも、ミーティングは実施しません。なお、本報告書は手書きでも構いません。

MTG を行うにあたってのねらい

今回の MTG では、D 論の構成を現状までに達成された項目に基づき考察・再構築したものを記載しており、先生の意見を踏まえ D 論構成を確定させたいと考えている。また、その D 論構成に基づいた時、残りの少ない時間で何を行うべきかを議論し、今後の計画へと繋げたいと考えている。

今週のミーティング事項について

目次

1	曲線の表現	1
1.1	位置情報を基にした表現方法	1
2	自由曲面の表現	2
2.1	クーンズ曲面	2
2.2	ベジエパッチ	2
2.3	B-spline 曲面	3
2.4	曲線の内在的性質	3
3	次回の MTG について（終了後記載）	4
ミーティング事項の具体的な内容について		

1 曲線の表現

本章では、既存の曲線および曲面表現の概観について述べる。曲線形状の表現方法には、位置に関する情報を基にした表現方法と曲線の局所的情報を基にした表現方法の 2 種類に分類できると考えられる。そのため、この 2 種類についてそれぞれ述べる。

1.1 位置情報を基にした表現方法

位置情報を基にした表現方法に関して、今回は CAD システム等で広く用いられるベジエ曲線や B-spline 曲線、3 次元スプライン曲線に関して説明を行う。

■ベジエ曲線についてベジエ曲線はある n 個の制御点集合 C_{set} から得られる $n-1$ 次曲線である。フランスの自動車メーカー、シトロエン社のド・カステリョとルノー社のピエール・ベジエにより独立に考案された表現方法であり、CAD だけでなく Inkscape などのベクターグラフィクスソフトなどにも採用されている手法である

に対する曲線を生成する手法で、以下のように記述されるパラメータ $t \in [0, 1]$ を持つ曲線 $\mathbf{x}_{\text{bezier}}$ である。

$$\mathbf{x}_{\text{bezier}} = \sum_{i=0}^n B_{i,n} C_{\text{set},i} \quad (1)$$

ただし、 $B_{i,n}$ はバーンスタインの基底関数と呼ばれ、 $(t + (1-t))^n$ を二項展開した際に得られる一般項によって定義される。

$$B_{i,n} = {}_nC_i t^i (1-t)^{n-i} \quad (2)$$

曲線の特徴として、両端の制御点 $C_{\text{set},0}, C_{\text{set},n-1}$ は通るが、それ以外の制御点は通らない。始端および終端の接線ベクト

ルは $\mathbf{C}_{\text{set},1} - \mathbf{C}_{\text{set},0}$ および $\mathbf{C}_{\text{set},n-1} - \mathbf{C}_{\text{set},n}$ の方向に一致するといった特徴がある。また、制御点の変更に対して疑似局所変形性（変更した点の周辺の曲線が大きく変形し、そのほかの部分は変形が抑えられる）がある。

■ NURBS 曲線についてベジエ曲線では、制御点の個数に対して常に $n-1$ 次式の多項式で表される。しかし、表現性を確保するために制御点を増やすと、その分曲線を表現する多項式の次数が増加するという欠点がある。そこで、ベジエ曲線を複数接続して曲線を区分的な多項式によって表現しようとする試みによって提案されたのが、B-spline 曲線である。適当な任意の区間 $[t_k, t_{k+1}]$ において変数変換 $\tau = (t - t_k)/(t_{k+1} - t_k), t \in [t_k, t_{k+1}]$ を用いると、 $\tau \in [0, 1]$ であることから、 τ をパラメータとする n 次ベジエ曲線が定義できる。

$$\mathbf{x}_{\text{bezier},n} = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(\tau) \mathbf{C}_{\text{set},i} \quad (3)$$

制御点は始端と終端を通るため、 $k \in [0, n]$ として式 (3) で定義された曲線の始端と終端を結ぶと、区分的に表現された n 次 B-spline 曲線が定義される。B-spline 曲線の基底関数を新たに $N_{k,p}(t)$ と表すと、基底関数は区分的な多項式で

$$N_{k,0}(t) := \begin{cases} 1 & \text{if } t \in [t_k, t_{k+1}) \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (4)$$

$$N_{k,p}(t) := \frac{t - t_k}{t_{k+p} - t_k} N_{k,p-1}(t) + \frac{t_{i+p+1} - t}{t_{i+p+1} - t_{i+1}} N_{k+1,p-1}(t) \quad (5)$$

と表される。この点列 $\mathbf{t} = [t_0, t_1, \dots, t_n]$ はノットベクトルと呼ばれ、 i に対して単調増加するように選ばれる。一様な B-spline 曲線の場合は、 \mathbf{t} は公差 Δt の等差数列である。

2 自由曲面の表現

2.1 クーンズ曲面

計算機で曲面を定義するための方法として、四辺形の四隅の点と境界曲線（四辺形領域の端点での位置ベクトル、接線ベクトル、ツイストベクトル）によって部分的な曲面を定義し、パッチの連続で曲面全体を表現しようとするものである。しかし、生成される形状との対応が直観的でわかりにくいツイストベクトルを指定する必要があり、隣り合う曲面パッチ間の滑らかな連続性についてなどに問題があった。

2.2 ベジエパッチ

n - m 次ベジエパッチは、

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,n}(u) B_{j,m}(v) \mathbf{P}_{i,j} \quad (6)$$

と定義されている。ここで、 u, v は、 $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$ で変化する実数のパラメータで、 $\mathbf{P}_{i,j}$ は制御点を表す。また、 $B_{i,n}(u)$ はバーンスタインの基底関数である。二つのバーンスタイン基底関数の積の総和は 1 になる。

ベジエパッチ上の点は、 $\mathbf{P}_{i,j}$ に対する凸包の中に存在することが知られている他、以下の特性を持っている。

- ▼ アフィン変換（回転移動・平行移動・拡大・縮小・ずれ変換）に対して不変である。
- ▼ 境界はベジエ曲線になる。
- ▼ 疑似局所変形性（制御点を移動させると、曲線全体にわたって曲面形状は変化するが、その制御点付近の面が一番大きく変化する。
- ▼ ベジエパッチ偏導関数の式も、ベジエパッチの式の形で次の通りに書くことができる。

$$\frac{\partial S}{\partial u} = n \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m B_{i,n-1}(u) B_{j,m}(v) \mathbf{P}_{i,j} \quad (7)$$

$$\frac{\partial S}{\partial v} = m \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} B_{i,n}(u) B_{j,m-1}(v) \mathbf{P}_{i,j} \quad (8)$$

2.3 B-spline 曲面

B-spline 曲面は B-spline 曲線を拡張したもので、

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,k}(u) N_{j,k}(v) \mathbf{P}_{i,j} \quad (9)$$

として表される。ここで、 $\mathbf{P}_{i,j}$ は制御点で、 $N_{i,k}(u)$ は基底関数で、DeDoor アルゴリズムにより求められる。B-spline 曲面に関する特徴は、以下にまとめられる。

- ▼ 凸閉包性（曲面の凸閉包は、 \mathbf{P} からなる凸包になる）
- ▼ 局所性（ベジエ曲線ととこなり、制御点の移動は曲線の全体形状に影響を及ぼさない）
- ▼ 連続性（多重度を k とすると、 $N_{i,p}(t)$ は C^{p-k} 連続である。

2.4 曲線の内在的性質

3次元ユークリッド空間における曲線は、任意のパラメータ t を用いて $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$ と表される。ある区間 $[t_{\text{init}}, t_{\text{init}}]$ に対して、曲線の長さを表す弧長 s は以下のように求められる。

$$s = \int_{t_{\text{init}}}^{t_{\text{init}}} \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt \quad (10)$$

弧長 s は、座標系の取り方やパラメータの取り方に問わず一定である性質を持っており、以後では曲線のパラメータには弧長パラメータをとる。また、以後ことわりがない限り、 s に関する微分をプライム記号で表現する。次に、この曲線の各点ごとに局所座標系 $\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ を設定する。ただし、 \mathbf{e}_i は正規直交基底である。この時、各基底 \mathbf{e}_i の微小変化量 $\delta \mathbf{e}_i$ は、適当な重み $\omega_{i,j}$ を用いた基底の重みつき線形和で表現できることから

$$\delta \mathbf{e}_i = \sum \omega_{i,k} \mathbf{e}_k \quad (11)$$

を得る。 \mathbf{e}_i は正規直交基底であるから、各基底同士の内積は

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (12)$$

と計算される。 $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ の微小変化量を考えると、 $\delta \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \cdot \delta \mathbf{e}_j = 0$ を得る。この等式から、重み $\omega_{i,j}$ の関係式を、

$$\omega_{i,j} = -\omega_{j,i}, \quad \omega_{i,i} = 0 \quad (13)$$

と得る。この関係式を踏まえて、 $\delta \mathbf{e}$ の関係式を

$$\delta \mathbf{e} = \mathbf{\Omega} \mathbf{e} \quad (14)$$

と書き直す。ただし、 $\mathbf{\Omega}$ は

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{1,2} & -\omega_{3,1} \\ -\omega_{1,2} & 0 & \omega_{2,3} \\ \omega_{3,1} & -\omega_{2,3} & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

と定義している。

δ を作用素 d/ds に対応させ、 $\mathbf{e}_1 = \mathbf{r}'$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{r}''/|\mathbf{r}''|$ に対応させると、 $\omega_{1,3} = 0$ となり、 $\omega_{1,2}, \omega_{2,3}$ はそれぞれ曲線の曲率 κ と捩率 τ に対応する。このように定めた \mathbf{e} をフレネ・セレ標構と呼び、明確に区別するため、各基底 \mathbf{e}_i を $\mathbf{t}, \mathbf{m}, \mathbf{b}$ と表現し、式 16 をフレネ・セレの式と呼ぶ。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{m} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{m} & \mathbf{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

フレネ・セレの式から、曲線の形状は、曲線の曲率 κ と捩率 τ によって平行移動や回転を除いて一意に決定できることが示されている。また、 κ および τ は平行移動や回転に対して不変であることから、曲線の持つ内在的性質として、重要な意味を持っている。

ところで、弧長の性質として、式 10 から明らかであるように $s \geq 0$ や単調的に増加することから、パラメータの性質は、ちょうど物体の運動における時刻 T と同じ性質である。この性質と式 14 の形から、物体の角運動に関する運動方程式

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (17)$$

とのアナロジーを考える事ができる。つまり、フレネ・セレの式と同じように d/dt を d/ds に対応させて考えると、 $\omega_{1,2}, \omega_{2,3}, \omega_{3,1}$ はそれぞれ単位弧長あたりの $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 軸回りの回転率であるという解釈を与えることができる。

このように $\boldsymbol{\omega} = [\omega_{1,2}, \omega_{2,3}, \omega_{3,1}]$ を各軸回りの回転率と解釈し、 $\mathbf{e}_3 = \mathbf{r}'$ と定めた局所座標系 \mathbf{e} を物体標構と名付ける。以後では、この物体標構を表す \mathbf{e} を明確に区別するため、各基底を $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}$ と表現し、各軸周りの回転率を $\omega_{\xi}, \omega_{\eta}, \omega_{\zeta}$ と表記する。

物体標構とフレネ・セレの関係を Fig.X に示す。次に、曲線の曲率 κ および捩率 τ と、各軸の回転率 $\omega_{\xi}, \omega_{\eta}, \omega_{\zeta}$ の関係式について述べる。この 2 つの標構は、基底のうち $\boldsymbol{\zeta}$ と \mathbf{t} は常に同じ向きではあるが、他の基底は同じ向きであるとは限らない。そのため、Fig.X に示すように $\boldsymbol{\xi}$ と \mathbf{n} のなす角度を β と置く。こうすると、 \mathbf{n}, \mathbf{b} はそれぞれ $\mathbf{n} = \boldsymbol{\xi} \cos \beta + \boldsymbol{\eta} \sin \beta, \mathbf{b} = -\boldsymbol{\xi} \sin \beta + \boldsymbol{\eta} \cos \beta$ と表現できる。これをフレネ・セレの式 $\mathbf{t}' = \kappa \mathbf{n}$ に代入すれば、

$$\mathbf{t}' = \kappa (\boldsymbol{\xi} \cos \beta + \boldsymbol{\eta} \sin \beta) \quad (18)$$

を得る。 $\boldsymbol{\zeta}' = \mathbf{t}'$ および $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}$ が直交基底であることから κ は

$$\kappa^2 = \omega_{\xi}^2 + \omega_{\eta}^2 \quad (19)$$

と求めることができ、 β は

$$\beta = \tan^{-1} \left(-\frac{\omega_{\xi}}{\omega_{\eta}} \right) \quad (20)$$

となる。 $\mathbf{b} = -\boldsymbol{\xi} \sin \beta + \boldsymbol{\eta} \cos \beta$ の両辺を微分すると $\mathbf{b}' = -(\beta' + \omega_{\zeta})\mathbf{n}$ となることから、

$$\tau = \beta' + \omega_{\zeta} = \frac{\omega_{\xi}\omega'_{\eta} - \omega'_{\xi}\omega_{\eta}}{\kappa^2} + \omega_{\zeta} \quad (21)$$

が成り立つ。式 19,21 から分かる通り、フレネ・セレよりも、物体標構の方がより表現力の高いモデルだということが分かる。そのため、本研究では、物体標構を用いて曲線を表現する。

3 次回の MTG について（終了後記載）

▼
▼

###