Recognition of Fanout-free Functions

Presentation Report for Introduction to CAD 107021129 黃明瀧

簡介

這篇論文討論了有效率地判別布林函數是否為 Fanout-less（無扇出）的方法。作者基於原有的演算法，利用 Disappearance（消失）性質與 Adjacency（相鄰）性質之間的關係，設計出了更高效率的演算法，並以實驗證明該演算法的優勢。

常用符號與問題定義

Fanout-less 布林函式 $f(X)$ 為 fanout-less 的，若且唯若存在一 f 的表示方法，使得 $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ 中每個元素在 f 中出現恰一次。

值得一提的是，在 [1] 中，fanout-free 有一個等價的遞迴定義：

1. Constant 與 x 及 $\overline{x}$ 為 fanout-free。
2. 兩個 fanout-free functions $f_1(X_1)$ 與 $f_2(X_2)$，其中 $X_1 \cap X_2 = \emptyset$，經過 AND/OR/NOT 運算後仍為 fanout-free。

Cofactor 布林函式 $f(X)$ 對於 $x_i = c$（此處 $c = 0$ 或 $c = 1$）的 cofactor，代表將 f 中 x_i 代入值 c 所得之新的布林函式。本文中記作 $f(x_i = c)$。

Adjacency 布林函式 $f(X)$ 中兩個變數 $x_i, x_j \in X$ 為 adjacent，若且唯若 $f(x_i = c) = f(x_j = c)$。本文中記作 $x_i =_a x_j$。

此關係在其他文獻中被證明為集合 X 上的一等價關係，因此 $=_a$ 將集合 X 劃分為一或多個類，稱為 adjacency classes。

Disappearance 變數 x 消失於（disappears in）布林函式 $f(X)$，若且唯若 f 之值不受 x 影響。

JPH 演算法

JPH 演算法為 John P. Hayes 在 [1] 中提出的 fanout-free 判別演算法。該算法主要利用了 adjacency 關係與以下定理（該論文中定理 4）。

定理. 以 *adjacency* 關係將 $f(X)$ 的輸入變數集合 X 劃分為等價類 $X_1, X_2, \ldots, X_m$，則存在 $\phi_1(X_1), \phi_2(X_2), \ldots, \phi_m(X_m)$ 以及函式 F，其中 ϕ_i 為 *AND* 或 *OR* 函式，使得 $f(X) = F(\phi_1(X_1), \phi_2(X_2), \ldots, \phi_m(X_m))$。

JPH 演算法執行過程為一個迴圈，每次迭代都利用上述定理，如圖 1所示，將當前的輸入函式 f_i 之輸入 X_i 劃分為 adjacency classes 後，從 f 分離出 $\phi_{i_1}, \ldots, \phi_{i_r}$ 等邏輯閘，再以檢視真值表的方式來建構出剩餘部分的新函式 f_{i+1}。

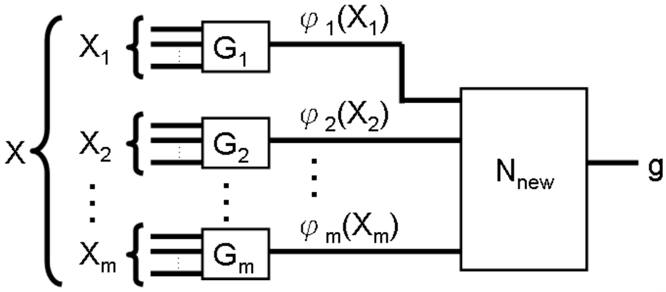

圖 1: 利用 adjacency 關係進行函式的拆解

圖 2展示了 JPH 演算法的流程。注意此演算法在每次迭代中，都需要實行兩兩 cofactor 之間的等效性檢查，以確認 f_i 的輸入變數之間的 adjacency 關係。本篇論文提出了不需等效性檢查的替代做法。

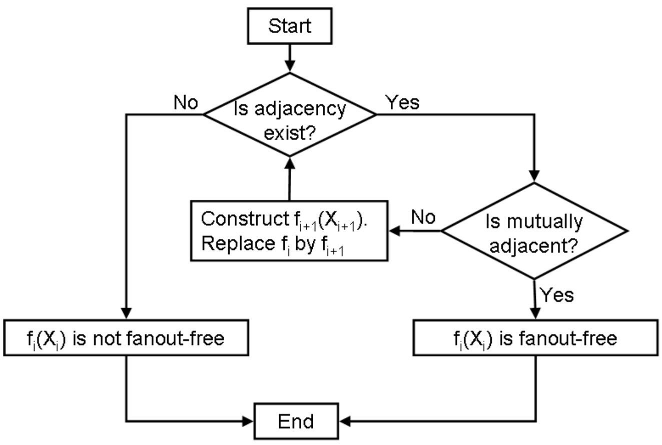

圖 2: JPH 演算法流程

新提出的方法

本篇論文提出的演算法大部分基於 JPH 演算法。作者推導出了下列 disappearance 與 adjacency 之間的等同關係，並根據這個關係，將判斷 adjacency 的問題化簡為判斷 disappearance 的問題。

引理. 令 $x_i \neq x_j$ 為 $f(X)$ 之輸入變數。若 $x_i =_a x_j$，則 x_j 消失於 $f(x_i = a)$ 中，且 x_i 消失於 $f(x_j = a)$。

[1] J. P. Hayes, "The fanout structure of switching functions," *J. ACM*, vol. 22, no. 4, pp. 551–571, Oct. 1975, doi: 10.1145/321906.321918.