計算理論期末報告

Theory of Computation, NTHU 107021129 黃明瀧

此份報告的內容基於教科書 [1] 編寫，符號與定義多與教科書相同。部分證明細節取自上課教材 [2]。

1 TM = NTM

定理 1 (TM $=$ NTM)**.** 給定任意的非確定型圖靈機[1] N，存在確定型圖靈機[2] D 使得 $L(N) = L(D)$。

Proof. 令 N 為一非確定型圖靈機。已知多帶圖靈機[3]與確定型圖靈機具有相同的計算能力，故若我們可以建構出多帶圖靈機 D 使得 $L(N) = L(D)$，則定理得證。以下我們以一多帶圖靈機 D 來模擬 N 的運算。

令 D 為一包含三條紙帶的多帶圖靈機，其中

- 紙帶 1 記錄原始輸入字串 ω。
- 紙帶 2 記錄模擬的過程；類似於記憶體。

  舉例來說，`0#01` 代表目前紙帶上的字串為 `001`，且讀寫頭位於第二個字符的位置。
- 紙帶 3 記錄在計算樹[4]應選擇的分支。

  舉例來說，`231` 代表應依序選擇根節點的第二個子節點、該子節點的第三個子節點、該子節點的第一個子節點來做運算。

紙帶 3 的字符集合 Γ_b 大小由 N 的計算樹的分歧度[5] b 所決定。b 可以由 N 的狀態集及字符集推得。

$$b = \left| Q \times \Gamma \times \{L, R\} \right|$$

以下給出 D 的演算法文字敘述。對於輸入字串 ω，

1. 將 ω 寫至紙帶 1。初始化紙帶 2 及 3 為空。
2. 複製紙帶 1 的內容至紙帶 2，作為模擬用的輸入字串。
3. 依照紙帶 3 記錄的內容，在紙帶 2 上模擬 N 的運算。在模擬每一步驟之前，確認以下條件。

[1] 非確定型圖靈機 = Nondeterminstic Turing machine
[2] 確定型圖靈機 = Deterministic Turing machine
[3] 多帶圖靈機 = Multitape Turing machine
[4] 計算樹 = Computation tree
[5] 分歧度 = Degree

a. 根據 N 之轉移函數 δ，若此步驟為非法，則跳至步驟 4。
b. 若紙帶 3 上已無任何字符，則跳至步驟 4。
c. 根據 N 之拒絕狀態 q_{reject}，若目前模擬的狀為為拒絕狀態，則拒絕。
d. 根據 N 之接受狀態 q_{accept}，若目前模擬的狀態為接受狀態，則接受。

4. 依照字典序，將紙帶 3 上的字串改為下一個字串。跳至步驟 2。

上述多帶圖靈機 D 會依序模擬 N 執行 0 步 $\to$ 執行 1 步 $\to$ 執行 2 步……，以廣度優先的方式嘗試所有運算路徑，故 D 接受（拒絕）字串 ω 若且唯若 N 接受（拒絕）字串 ω。因此，$L(N) = L(D)$。 □

2 Rice's Theorem

定理 2 (Rice's Theorem)**.** 令 P 為一語言，使得下列兩條件成立，則 P 是不可判定[6]的。

1. P 是非平凡[7]的；亦即存在圖靈機 M 使得 $\langle M\rangle \in P$，但不是所有的圖靈機的敘述都屬於 P。
2. P 是語言的性質；亦即若 $\mathrm{L}(M_1) = \mathrm{L}(M_2)$，則 $\langle M_1\rangle \in P \Leftrightarrow \langle M_2\rangle \in P$。換句話說，一個圖靈機的敘述是否屬於 P，只與該圖靈機對應的語言有關。

Proof. 我們以反證法證明 Rice's Theorem。假設 P 是可判定的。令 M_P 為判定 P 的圖靈機。我們將使用 M_P 來建構出可判定 A_{TM} 的圖靈機。

令 $T_\emptyset$ 為一拒絕所有輸入的圖靈機。$\mathrm{L}(T_\emptyset) = \emptyset$。不失一般性[8]，假設 $\langle T_\emptyset\rangle \notin P$。由條件 1，令 T 為圖靈機，使得 $\langle T\rangle \in P$。

利用 P 可以「分辨」出 $T_\emptyset$ 與 T 之間差異的能力，對於輸入 $\langle M, \omega\rangle$，設計以下圖靈機 S，作為 A_{TM} 的判定器。

1. 利用 M 與 ω 來建構圖靈機 M_ω：

   對於輸入 x，

   a. 以 ω 作為輸入模擬 M 的執行。若 M 拒絕，則拒絕。
   b. 以 x 作為輸入模擬 T 的執行。若 T 接受，則接受。

2. 以 M_P 來判斷 $\langle M_\omega\rangle$ 是否屬於 P。若 $\langle M_\omega\rangle \in P$，則接受。若 $\langle M_\omega\rangle \notin P$，則拒絕。

為什麼 S 可以判定 A_{TM} 呢？我們可以討論兩種情形，分析 S 的行為。

- 若 M 接受 ω，則 M_ω 會進入步驟 1b $\implies \mathrm{L}(M_\omega) = \mathrm{L}(T) \implies \langle M_\omega\rangle \in P$
- 若 M 拒絕 ω，則 M_ω 會拒絕所有輸入字串 $x \implies \mathrm{L}(M_\omega) = \mathrm{L}(T_\emptyset) \implies \langle M_\omega\rangle \notin P$

[6] 不可判定 = Undecidable
[7] 非平凡 = Nontrivial
[8] 若 $\langle T_\emptyset\rangle \in P$，則整個證明可以改以 $\overline{P}$ 來進行，使得 $\langle T_\emptyset\rangle \notin P$。

我們可以看出 $\langle M_\omega \rangle \in P$ 若且唯若 M 接受 ω，因此 S 可以判定 A_{TM}。然而我們已知 A_{TM} 是一個不可判定的語言，所以此結論為矛盾。因此，P 不可判定。 □

以下舉例說明如何使用 Rice's Theorem 證明 $\text{INFINITE}_{\text{TM}} = \left\{ \langle M \rangle \middle| |\mathrm{L}(M)| = \infty \right\}$ 的不可判定性。

Proof. 要使用 Rice's Theorem，我們需要驗證 $\text{INFINITE}_{\text{TM}}$ 是否符合定理的兩個前提。

1. 令 T_{all} 為接受所有輸入字串的圖靈機。因 $\langle T_{\text{all}} \rangle \in \text{INFINITE}_{\text{TM}}$ 且 $\langle T_\emptyset \rangle \notin \text{INFINITE}_{\text{TM}}$，故 $\text{INFINITE}_{\text{TM}}$ 是非平凡的。
2. $\text{INFINITE}_{\text{TM}}$ 的定義只與 $\mathrm{L}(M)$ 有關，故 $\text{INFINITE}_{\text{TM}}$ 是語言的性質。

$\text{INFINITE}_{\text{TM}}$ 符合 Rice's Theorem 的兩個前提，因此 $\text{INFINITE}_{\text{TM}}$ 是不可判定的。 □

3 Post Correspondence Problem

3.1 PCP 問題簡述

PCP 問題建立在一個以骨牌進行的益智遊戲上。每張骨牌形如

$$\left[\frac{t}{b}\right] = \left[\frac{\text{a}}{\text{ab}}\right]$$

分為上下兩個部分，分別載有一個字串。令 P 為一個骨牌的集合，例如

$$P = \left\{ \left[\frac{\text{b}}{\text{ca}}\right], \left[\frac{\text{a}}{\text{ab}}\right], \left[\frac{\text{ca}}{\text{a}}\right], \left[\frac{\text{abc}}{\text{c}}\right] \right\}$$

。對於某些 P，我們可以找到一個（可重複的）骨牌排列方式，使得「骨牌上半的所有字符所組成的字串」與「骨牌下半的所有字符鎖組成的字串」相等。以前述 P 為例，

$$\left[\frac{\text{a}}{\text{ab}}\right]\left[\frac{\text{b}}{\text{ca}}\right]\left[\frac{\text{ca}}{\text{a}}\right]\left[\frac{\text{a}}{\text{ab}}\right]\left[\frac{\text{abc}}{\text{c}}\right]$$

即為一個合法的**對應**[9]。判斷一個骨牌的集合 P 是否存在這樣的排列方式，即為波斯特對應問題。以形式語言的方式來說：

$$\text{PCP} = \{\langle P \rangle \mid |P\text{為一個存在對應的 Post Correspondence Problem 的實例}\}$$

[9]對應 = Match

可以證明 PCP 是一個不可判定的語言。

3.2 使用 PCP 做計算

給定一個圖靈機 M，我們可以設計出一組特別的骨牌 P，使得在解 PCP 的過程中，骨牌排出的字串模擬了圖靈機的運算過程。

以下以舉例的方式說明用 (M)PCP 模擬計算的方法。令 M 為一台「只接受 `01` 並改寫為 `10`」的圖靈機。我們可以給出它的轉移函數 δ，以供設計骨牌時參考。

$$\begin{cases} q(q_0, 0) & = (q_1, 1, R) \\ q(q_1, 1) & = (q_{\text{accept}}, 0, R) \\ q(q, x) & = (q_{\text{reject}}, \_, R) \text{ otherwise} \end{cases}$$

依據教科書 [1] 第 229 頁所述之骨牌設計方式，P 包含下列骨牌。

- Part 1: $\left[\frac{\#}{\#\mathtt{q_0}\mathtt{01}\#}\right]$
- Part 2: $\left[\frac{\mathtt{q_0 0}}{\mathtt{1 q_1}}\right], \left[\frac{\mathtt{q_1 1}}{\mathtt{0 q_{accept}}}\right]$
- Part 3: 此圖靈機無向左移動的可能，故不適用。
- Part 4: $\left[\frac{\mathtt{0}}{\mathtt{0}}\right], \left[\frac{\mathtt{1}}{\mathtt{1}}\right]$
- Part 5: $\left[\frac{\#}{\#}\right], \left[\frac{\#}{\_\#}\right]$
- Part 6: $\left[\frac{\mathtt{0 q_{accept}}}{\mathtt{q_{accept}}}\right], \left[\frac{\mathtt{q_{accept} 0}}{\mathtt{q_{accept}}}\right], \left[\frac{\mathtt{1 q_{accept}}}{\mathtt{q_{accept}}}\right], \left[\frac{\mathtt{q_{accept} 1}}{\mathtt{q_{accept}}}\right]$
- Part 7: $\left[\frac{\mathtt{q_{accept}}\#\#}{\#}\right]$

以 $\left[\frac{\#}{\#\mathtt{q_0}\mathtt{01}\#}\right]$ 作為開頭，則一開始我們會得到上下不相等的骨牌：

$$\left[\frac{\#}{\#\color{red}{\mathtt{q_0}\mathtt{01}\#}}\right]$$

注意紅色的部分以 $q_0 0$ 開頭。若我們想要上下相等的字串，則需要上半部以 $q_0 0$ 開頭的骨牌作為下一張骨牌。在 P 中，這樣的骨牌只有一張，故我們得到：

$$\left[\frac{\#}{\#\mathtt{q_0 0 1 \#}}\right]\left[\frac{\mathtt{q_0 0}}{\mathtt{1 q_1}}\right]$$

按照相同的邏輯，在每個步驟我們都尋找 P 中符合目前「多出來」的字串的骨牌，依序排上，則最後可以得到：

$$\left[\frac{\#}{\#\mathtt{q_0 0 1}\#}\right]\left[\frac{\mathtt{q_0 0}}{\mathtt{1 q_1}}\right]\left[\frac{\mathtt{1}}{\mathtt{1}}\right]\left[\frac{\#}{\#}\right]\left[\frac{\mathtt{1}}{\mathtt{1}}\right]\left[\frac{\mathtt{q_1 1}}{\mathtt{0 q_{accept}}}\right]\left[\frac{\#}{\#}\right]\left[\frac{\mathtt{1}}{\mathtt{1}}\right]\left[\frac{\mathtt{0 q_{accept}}}{\mathtt{q_{accept}}}\right]\left[\frac{\#}{\#}\right]\left[\frac{\mathtt{1 q_{accept}}}{\mathtt{q_{accept}}}\right]\left[\frac{\#}{\#}\right]\left[\frac{\mathtt{q_{accept}}\#\#}{\#}\right]$$

注意藍色部分以井字號 $\#$ 分隔，對應到的即是 $q_0 01 \vdash 1 q_1 1 \vdash 01 q_{\text{accept}}$ 的計算；後方冗餘的項只是因應上下對應所需。

在這個例子中為了舉例方便，我們使用了 MPCP 版本，亦即第一張骨牌被指定為 $\left[\frac{\#}{\#\mathtt{q_0 0 1}\#}\right]$。若要使用 PCP 來進行計算，則需要事先在每張骨牌上插入一些 $\star$ 字符，用以強迫任何對應必須要以該骨牌開頭。

引用

[1] M. Sipser, *Introduction to the theory of computation, third edition*. Cengage, 2013.

[2] W.-K. Hon, “Lecture notes in theory of computation.” 2007.