計算理論期末報告

Theory of Computation, NTHU 107021129 黃明瀧

1 TM = NTM

定理 1 (TM = NTM)**.** 給定任意的非確定型圖靈機[1] N，存在確定型圖靈機[2] D 使得 $L(N) = L(D)$。

Proof. 令 N 為一非確定型圖靈機。已知多帶圖靈機[3]與確定型圖靈機具有相同的計算能力，故若我們可以建構出多帶圖靈機 D 使得 $L(N) = L(D)$，則定理得證。以下我們以一多帶圖靈機 D 來模擬 N 的運算。

令 D 為一包含三條紙帶的多帶圖靈機，其中

- 紙帶 1 記錄原始輸入字串 ω。
- 紙帶 2 記錄模擬的過程；類似於記憶體。

  舉例來說，`0#01` 代表目前紙帶上的字串為 `001`，且讀寫頭位於第二個字符的位置。
- 紙帶 3 記錄在計算樹[4]應選擇的分支。

  舉例來說，231 代表應依序選擇根節點的第二個子節點、該子節點的第三個子節點、該子節點的第一個子節點來做運算。

紙帶 3 的字符集合 Γ_b 大小由 N 的計算樹的分歧度[5] b 所決定。b 可以由 N 的狀態集及字符集推得。

$$b = \Big| Q \times \Gamma \times \{L, R\} \Big|$$

以下給出 D 的演算法文字敘述。對於輸入字串 ω，

1. 將 ω 寫至紙帶 1。初始化紙帶 2 及 3 為空。
2. 複製紙帶 1 的內容至紙帶 2，作為模擬用的輸入字串。
3. 依照紙帶 3 記錄的內容，在紙帶 2 上模擬 N 的運算。在模擬每一步驟之前，確認以下條件。
   a. 根據 N 之轉移函數 δ，若此步驟為非法，則跳至步驟 4。
   b. 若紙帶 3 上已無任何字符，則跳至步驟 4。
   c. 根據 N 之拒絕狀態 q_{reject}，若目前模擬的狀為為拒絕狀態，則拒絕。

[1] 非確定型圖靈機 = Nondeterminstic Turing machine
[2] 確定型圖靈機 = Deterministic Turing machine
[3] 多帶圖靈機 = Multitape Turing machine
[4] 計算樹 = Computation tree
[5] 分歧度 = Degree

d. 根據 N 之接受狀態 q_{accept}，若目前模擬的狀態為接受狀態，則接受。

4. 依照字典序，將紙帶 3 上的字串改為下一個字串。跳至步驟 2。

上述多帶圖靈機 D 會依序模擬 N 執行 0 步 $\rightarrow$ 執行 1 步 $\rightarrow$ 執行 2 步……，以廣度優先的方式嘗試所有運算路徑，故 D 接受（拒絕）字串 ω 若且唯若 N 接受（拒絕）字串 ω。因此，$L(N) = L(D)$。 □

2 Rice Theorem

定理 2 (Rice's Theorem)**.** 令 P 為一語言，使得下列兩條件成立，則 P 是不可判定[6]的。

1. P 是非平凡[7]的；亦即存在圖靈機 M 使得 $\langle M \rangle \in P$，但不是所有的圖靈機的敘述都屬於 P。
2. P 是語言的性質；亦即若 $\mathrm{L}(M_1) = \mathrm{L}(M_2)$，

   則 $\langle M_1 \rangle \in P \Leftrightarrow \langle M_2 \rangle \in P$。換句話說，一個圖靈機的敘述是否屬於 P，只與該圖靈機對應的語言有關。

Proof. 我們以反證法證明 Rice's Theorem。假設 P 是可判定的。令 M_P 為判定 P 的圖靈機。我們將使用 M_P 來建構出可判定 A_{TM} 的圖靈機。

令 $T_\emptyset$ 為一拒絕所有輸入的圖靈機。$\mathrm{L}(T_\emptyset) = \emptyset$。不失一般性[8]，假設 $\langle T_\emptyset \rangle \notin P$。由條件 1，令 T 為圖靈機，使得 $\langle T \rangle \in P$。

利用 P 可以「分辨」出 $T_\emptyset$ 與 T 之間差異的能力，對於輸入 $\langle M, \omega \rangle$，設計以下圖靈機 S，作為 A_{TM} 的判定器。

1. 利用 M 與 ω 來建構圖靈機 M_ω：

   對於輸入 x，

   a. 以 ω 作為輸入模擬 M 的執行。若 M 拒絕，則拒絕。
   b. 以 x 作為輸入模擬 T 的執行。若 T 接受，則接受。

2. 以 R_P 來判斷 $\langle M_\omega \rangle$ 是否屬於 P。若 $\langle M_\omega \rangle \in P$，則接受。若 $\langle M_\omega \rangle \notin P$，則拒絕。

為什麼 S 可以判定 A_{TM} 呢？我們可以討論兩種情形，分析 S 的行為。

- 若 M 接受 ω，則 M_ω 會進入步驟 1b $\implies \mathrm{L}(M_\omega) = \mathrm{L}(T) \implies \langle M_\omega \rangle \in P$
- 若 M 拒絕 ω，則 M_ω 會拒絕所有輸入字串 $x \implies \mathrm{L}(M_\omega) = \mathrm{L}(T_\emptyset) \implies \langle M_\omega \rangle \notin P$

[6] 不可判定 = Undecidable
[7] 非平凡 = Nontrivial
[8] 若 $\langle T_\emptyset \rangle \in P$，則整個證明可以改以 $\overline{P}$ 來進行，使得 $\langle T_\emptyset \rangle \notin P$。

我們可以看出 $\langle M_\omega \rangle \in P$ 若且唯若 M 接受 ω，因此 S 可以判定 A_{TM}。然而已知 A_{TM} 是一個不可判定的語言，所以此為矛盾 $\implies P$ 不可判定。 □

以下舉例說明如何使用 Rice's Theorem 證明 $\mathsf{INFINITE}_{\mathsf{TM}} = \left\{ \langle M \rangle \middle| |\,\mathrm{L}(M)| = \infty \right\}$ 的不可判定性。

Proof. 要使用 Rice's Theorem，我們需要驗證 $\mathsf{INFINITE}_{\mathsf{TM}}$ 是否符合定理的兩個前提。

1. 令 T_{all} 為接受所有輸入字串的圖靈機。因 $\langle T_{\mathsf{all}} \rangle \in \mathsf{INFINITE}_{\mathsf{TM}}$ 且 $\langle T_\emptyset \rangle \notin \mathsf{INFINITE}_{\mathsf{TM}}$，故 $\mathsf{INFINITE}_{\mathsf{TM}}$ 是非平凡的。
2. $\mathsf{INFINITE}_{\mathsf{TM}}$ 的定義只與 $\mathrm{L}(M)$ 有關，故 $\mathsf{INFINITE}_{\mathsf{TM}}$ 是語言的性質。

$\mathsf{INFINITE}_{\mathsf{TM}}$ 符合 Rice's Theorem 的兩個前提，因此 $\mathsf{INFINITE}_{\mathsf{TM}}$ 是不可判定的。 □

3 Post Correspondence Problem