

Билеты к экзамену по теории графов
2022 год
факультет Математики и Компьютерных наук,
СПбГУ
(лекции Карпова Дмитрия Валерьевича)

Вячеслав Тамарин

8 июня 2022 г.

Оглавление

1	Пути и циклы	7
1.1	Существование гамильтонова пути и цикла: теорема Оре .	7
1.2	Существование гамильтонова пути и цикла: замыкание Хватала	9
1.3	Критерий существования гамильтонова цикла через связность.	10
1.4	Теорема Хватала о гамильтоновых последовательностях. .	12
1.5	Гамильтонов цикл в кубе связного графа.	14
1.6	Теорема Татта о существовании регулярного графа степени k с обхватом g	15
2	Паросочетания	19
2.1	Независимые множества, паросочетания и покрытия в графе. Теорема Галлаи.	19
2.2	Максимальное паросочетание и дополняющие пути: теорема Бержа.	21
2.3	Теорема Татта о совершенном паросочетании.	22
2.4	Теорема Петерсена о паросочетании в кубическом графе. .	24

2.5	Теорема Плесника о совершенном паросочетании в регулярном графе.	25
2.6	Теорема Петерсена о выделении 2-фактора в $2k$ -регулярном графе и ее следствие о регулярных факторах.	26
2.7	Теорема Томассена о почти регулярном факторе почти регулярного графа.	27
2.8	Теорема Ловаса о разбиении графа.	28
3	Связность	29
3.1	Блоки и точки сочленения. Лемма о пересечении блоков.	29
3.2	Дерево блоков и точек сочленения и его свойства.	30
3.3	Крайние блоки	32
3.4	Алгоритм разбиения графа на блоки.	33
3.4.1	Алгоритм разбиения связного графа на блоки	34
3.5	Следствие о веере путей из теоремы Менгера. Теорема Дирака о цикле, содержащем заданные k вершин.	34
3.6	Разделяющие множества в k -связном графе, части разбиения. Внутренность и граница части разбиения.	37
4	Раскраски	39
4.1	Лемма о галочке	39
4.2	Теорема Брукса	41
4.3	Списочное хроматическое число k -редуцируемого графа.	42
4.4	Две леммы о d -раскрасках (о избыточной вершине и о удалении вершины с сохранением связности).	43
4.5	Теорема Бородина о d -раскрасках	45
4.6	Списочная теорема Брукса.	46

4.7	k -критические графы. Простейшие свойства.	46
4.8	Теорема Галлаи о k -критических графах.	47
4.9	Лемма Дирака о разделяющем двухвершинном множестве в критическом графе.	48
4.10	Гипотеза Хайоша, случай $k = 4$	49
4.11	Конструкция графа с произвольным хроматическим чис- лом без треугольников.	51
4.12	Оптимальные раскраски ребер и их свойства. Хроматиче- ский и покрывающий индексы двудольного графа.	53
4.13	Теорема Визинга.	55

Исходный код на https://github.com/tamarinvs19/theory_university

Глава 1

Пути и циклы

1.1 Существование гамильтонова пути и цикла: теорема Оре

lm 1. Пусть $n > 2$, $a_1 \dots a_n$ — максимальный путь (по ребрам) в графе G , причем $d_G(a_1) + d_G(a_n) \geq n$. Тогда в графе есть цикл длины n .

$N_G(v)$ — все вершины смежные с вершиной v в графе G .

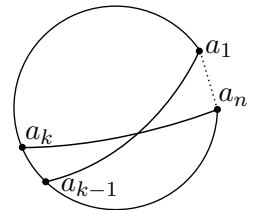
$d_G(v)$ — степень вершины v в графе G .

proof. Разберем несколько случаев:

- Если a_1 и a_n смежны, то $a_1 a_2 \dots a_n$ — искомый цикл.
- Иначе $N_G(a_1), N_G(a_n) \subset \{a_2, \dots, a_{n-1}\}$, так как удлинить путь нельзя.

Если есть вершина a_k смежная с a_n и вершина a_{k+1} смежная с a_1 , то в графе есть цикл из n вершин

$$a_1 a_2 \dots a_k a_n a_{n-1} \dots a_{k+1}.$$



Пусть $N_G(a_n) = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_l}\}$.

Если хотя бы одна из вершин $a_{i_1+1}, \dots, a_{i_l+1}$ лежит в $N_G(a_1)$, то, согласно утверждению выше, в графе есть цикл длины n .

Иначе $d_G(a_1) \leq n - 1 - d_G(a_n)$, а это противоречит условию.

□

thm (Критерий Оре, 1960). 1. Если для любых двух несмежных вершин $u, v \in V(G)$ выполняется

$$d_G(u) + d_G(v) \geq v(G) - 1,$$

то в графе G есть гамильтонов путь.

2. Если $v(G) > 2$ и для любых двух несмежных вершин $u, v \in V(G)$ выполняется

$$d_G(u) + d_G(v) \geq v(G),$$

то в графе G есть гамильтонов цикл.

proof.

1. Докажем первое утверждение

- Для двух вершин все очевидно. Далее предположим, что $v(G) > 2$.
- Рассмотрим две вершины a и b и предположим, что они несмежные. По условию $d_G(a) + d_G(b) \geq v(G) - 1$, поэтому $N_G(a) \cap N_G(b) \neq \emptyset$, следовательно, a и b связаны. Тогда граф G связан.
- Теперь найдем наибольший простой путь $a_1 \dots a_n$ в графе G . Так как вершин больше двух, и граф связан, $n \geq 3$. Предположим, что это не гамильтонов путь, то есть $n \leq v(G) - 1$.
- Если $a_1 \dots a_n$ не цикл, то по лемме 1 существует цикл Z из n вершин, так как

$$d_G(a_1) + d_G(a_n) \geq v(G) - 1 \geq n.$$

- Так как граф связан, существует не вошедшая в этот цикл вершина, смежная с хотя бы одной из вершин цикла. Тогда из нее и цикла можно получить путь длиной $n + 1$, противоречие.

2. По первому пункту уже есть гамильтонов путь, обозначим его за $a_1 \dots a_n$, где $n = v(G)$.

Если a_1 и a_n смежны, то мы нашли гамильтонов цикл. Иначе

$$d_G(a_1) + d_G(a_n) \geq v(G) = n.$$

А тогда по лемме 1 в графе есть гамильтонов цикл.

□

cor 1 (Критерий Дирака, 1952). 1. Если $\delta(G) \geq \frac{v(G)-1}{2}$, то в графе G есть гамильтонов путь.

2. Если $\delta(G) \geq \frac{v(G)}{2}$, то в графе G есть гамильтонов цикл.

1.2 Существование гамильтонова пути и цикла: замыкание Хватала

lm 2. Пусть вершины a и b не смежны и $d_G(a) + d_G(b) \geq v(G)$. Тогда граф G гамильтонов, тогда граф $G + ab$ тоже гамильтонов.

proof.

- Если G гамильтонов, то и граф с дополнительным ребром ab тоже гамильтонов.
- Докажем следствие в обратную сторону. Пусть граф $G + ab$ гамильтонов.
 - Если гамильтонов цикл не проходит по ребру ab , то он есть и в графе G .
 - Если проходит по ab , то в G есть гамильтонов путь, причем сумма степеней его концов не меньше $v(G)$, тогда по лемме 1 в графе G есть гамильтонов цикл.

□

def (Замыкание графа). Рассмотрим произвольный граф G . Пока существуют две вершины $a, b \in V(G)$, для которых $d_G(a) + d_G(b) \geq v(G)$, добавим в граф соответствующее ребро ab . Полученный граф называется замыканием графа G , обозначается $C(G)$.

cor 2 (Хватал, 1974). *Граф G гамильтонов, тогда его замыкание $C(G)$ — гамильтонов граф.*

lm 3 (о единственности замыкания). *Замыкание графа G определено однозначно, то есть не зависит от порядка добавления ребер.*

proof. Пусть в результате двух различных цепочек добавления ребер были получены различные графы G_1 и G_2 .

Тогда есть ребра, добавленные при построении G_1 , которых нет в G_2 . Найдем такое ребро ab , которое было добавлено первым.

Обозначим граф, к которому мы добавили ab , за G_0 . Тогда $d_{G_0}(a) + d_{G_0}(b) \geq v(G)$.

С другой стороны, все ребра, добавленные к G при построении G_0 , добавлены и G_2 . Поэтому, $d_{G_2}(a) + d_{G_2}(b) \geq v(G)$, следовательно, в G_2 нет ребра, которое мы должны были добавить. Противоречие. \square

1.3 Критерий существования гамильтонова цикла через связность.

lm 4. *Пусть граф G гамильтонов. Тогда для любого множества $S \subset V(G)$ выполняется неравенство $c(G - S) \leq |S|$ ¹.*

proof. Пусть $c(G - S) = c$ и U_1, \dots, U_c — компоненты связности графа $G - S$, Z — гамильтонов цикл графа G .

Начнем обходить цикл Z , начиная с вершины из множества S . Пусть s_i — вершина, которая предшествует первому входу цикла в компоненту U_i .

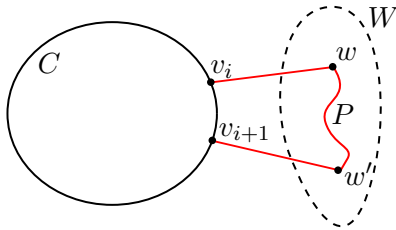
Все s_i различны, причем принадлежат S , так как не могут входить ни в одну из компонент (иначе это одна компонента, а тогда вершина неправильная). Отсюда следует требуемое неравенство. \square

¹ $c(G)$ — число компонент связности в графе G

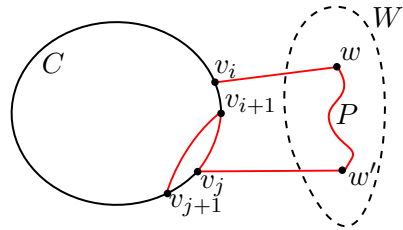
thm (Хватал, Эрдёшь, 1972). Пусть $v(G) \geq 3$ и $\kappa(G) \geq \alpha(G)^2$, тогда G гамильтонов.

proof.

- Если в графе нет циклов, то есть $\kappa(G) = 1$. Тогда точно $\alpha(G) \geq 2$, так как вершин не меньше трех. По условию такой случай невозможен.
- Пусть $\kappa(G) = k$. Выберем цикл C максимальной длины в графе G . Пусть $C = v_1 v_2 \dots v_n$ ³.
- Пусть C не гамильтонов. Рассмотрим компоненту связности W графа $G - V(C)$. Заметим, что $N_G(W) \subset V(C)$.



(a)



(b)

- (a) Обозначим за $M = \{v_{i+1} : v_i \in N_G(W)\}$. Докажем, что $M \cap N_G(W) = \emptyset$.
 - Пусть $v_i, v_{i+1} \in N_G(W)$ и $w, w' \in W$, $v_i w, v_{i+1} w' \in E(G)$, $P - ww'$ -путь по вершинам из W .
 - Тогда можно удлинить цикл C хотя бы на одно ребро, заменив ребро $v_i v_{i+1}$ на ребро $v_i w$, далее путь P , потом ребро $w' v_{i+1}$. Но цикл C должен был быть максимальным. Противоречие.

Это означает, что $N_G(W)$ отделяет непустое множество M от W , следовательно $|M| = |N_G(W)| \geq k$

² $\kappa(G)$ — вершинная связность, $\alpha(G)$ — размер максимального независимого множества

³Считаем, что нумерация циклическая

- (b)
 - Теперь предположим, что вершины $v_{i+1}, v_{j+1} \in M$ смежны. Пусть $w, w' \in W$ и $v_i w, v_j w' \in E(G)$ и P — ww' -путь по вершинам компоненты W .
 - Рассмотрим цикл Z , проходящий сначала участок $v_{j+1}v_{j+2} \dots v_i$ цикла C , затем ребро $v_i w$, далее путь P и ребро $w' v_j$, потом участок $v_j v_{j-1} \dots v_{i+1}$ по циклу C и ребро $v_{i+1} v_{j+1}$. Построенный цикл Z длиннее C , противоречие.

Из этого следует, что $M \cup \{w\}$ — независимое множество с $|M|+1 > k$ вершин. А это противоречит условию $\alpha(G) \leq k$.

- В итоге, цикл C должен быть гамильтоновым.

□

1.4 Теорема Хватала о гамильтоновых последовательностях.

- def.** 1. Пусть $a_1 \leq a_2 \leq \dots a_n$ и $b_1 \leq b_2 \leq \dots b_n$ — две упорядоченные последовательности. Последовательность $\{a_i\}_{i \in [1..n]}$ **мажорирует** последовательность $\{b_i\}_{i \in [1..n]}$, если $\forall i \in [1..n]: a_i \geq b_i$.
2. Пусть G — граф на n вершинах. **Степенная последовательность** графа G — упорядоченная последовательность степеней его вершин $d_1 \leq \dots d_n$.
3. Будем говорить, что граф G **мажорирует** граф H , если $v(G) = v(H)$ и степенная последовательность графа G мажорирует степенную последовательность графа H .
4. Последовательность $a_1 \leq a_2 \leq \dots a_n$ называется **гамильтоновой**, если $a_n \leq n-1$ и любой граф на n вершинах, степенная последовательность которого мажорирует $a_1, \dots a_n$, имеет гамильтонов цикл.

thm (Критерий Хватала, 1972). Пусть $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq n-1$, $n \geq 3$. Следующие два утверждения равносильны:

1. Последовательность a_1, \dots, a_n гамильтонова.
2. Для каждого $s < \frac{n}{2}$ из $a_s \leq s$ следует $a_{n-s} \geq n - s$.

proof.

2 \implies 1 Предположим, что наша последовательность негамильтонова.

Рассмотрим негамильтонов граф G на n вершинах с максимальным числом ребер, степенная последовательность $\{d_i\}_{i \in [1..n]}$ которого мажорирует $\{a_i\}_{i \in [1..n]}$.

По лемме 2 граф G совпадает со своим замыканием, так как граф максимальный, и сумма степеней любых двух несмежных вершин менее n .

Рассмотрим две несмежные вершины $x, y \in V(G)$ с максимальной суммой $d_G(x) + d_G(y)$, такие есть, иначе граф полный, и точно гамильтонов. Не умаляя общности $d_G(x) \leq d_G(y)$.

Так как $d_G(x) + d_G(y) < n$, имеем $d_G(x) = s < \frac{n}{2}$, поэтому $d_G(y) \leq n - 1 - s$.

Пусть W_x — множество всех вершин графа G , отличных от x и не смежных с x , W_y — аналогично для y .

$$|W_x| = n - 1 - d_G(x) = n - 1 - s; \quad |W_y| = n - 1 - d_G(y) \geq d_G(x) = s.$$

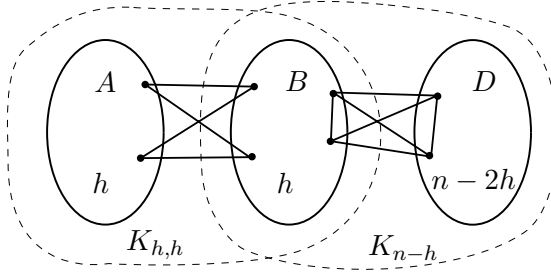
Степени всех вершин множества W_y не превосходят s , так как s дает максимальную сумму с $d_G(y)$. Поэтому $a_s \leq d_s \leq s$. В множестве $W_x \cup \{x\}$ будет $n - s$ вершин, причем их степени не превосходят $d_G(y) \leq n - 1 - s$, поэтому $a_{n-s} \leq d_{n-s} \leq n - s - 1$.

Но это противоречит условию. Следовательно, последовательность $\{a_i\}$ гамильтонова.

1 \implies 2 Докажем, что последовательность $\{a_i\}$ не может быть гамильтоновой, если не выполнено второе условие.

Пусть $h < \frac{n}{2}$, $a_h \leq h$ и $a_{n-h} \leq n - h - 1$. Построим негамильтонов граф $G_{n,h}$, степенная последовательность которого мажорирует $\{a_i\}$.

Пусть $A = \{v_1, \dots, v_h\}$, $B = \{v_{n-h+1}, \dots, v_n\}$, $D = \{v_{h+1}, \dots, v_{n-h}\}$. Граф $G_{n,h}$ будет объединением $K_{h,h}$ с долями A и B и K_{n-h} на вершинах $B \cup D$:

Рис. 1.2: Граф $G_{n,h}$

Здесь все степени в A равны h , в B — $n-1$, в D — $n-h-1$. Степенная последовательность выглядит следующим образом:

$$\underbrace{h, \dots, h}_h, \underbrace{n-h-1, \dots, n-h-1}_{n-2h}, \underbrace{n-1, \dots, n-1}_h.$$

Эта последовательность мажорирует a_1, \dots, a_n .

Всего компонент связности $c(G_{n,h} - B) = h + 1 = |B|$, это D и отдельные вершины в A .

Так как $c(G_{n,h} - B) > h = |B|$, можем применить лемму ?? и получить, что $G_{n,h}$ не является гамильтоновым.

□

1.5 Гамильтонов цикл в кубе связного графа.

def. Для графа G и натурального числа d обозначим через G^d граф на вершинах из $V(G)$, в котором вершины x и y смежны, когда $\text{dist}_G(x, y) \leq d$.

thm (Чартранд, Капур, 1969). Для любого связного графа G с $v(G) \geq 3$ и ребра $e \in E(G)$ в графе G^3 существует гамильтонов цикл, содержащий ребро e .

proof. Достаточно доказать теорему для дерева, так как иначе можем просто выделить остовное.

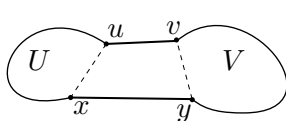
Будем доказывать индукцией по количеству вершин.

База: для трех или четырех вершин очевидно, так как G^3 — полный граф.

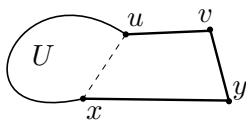
Переход: пусть для меньших деревьев теорема доказана.

Рассмотрим ребро uv . G — дерево, поэтому в $G - uv$ разбивается на две компоненты связности $U \ni u$ и $V \ni v$. Пусть $G_u = G(U)$, $G_v = G(V)$. НУО $|U| \geq 3$. Тогда в G_u^3 по предположению индукции есть гамильтонов цикл, содержащий ребро $ux \in E(G(U))$.

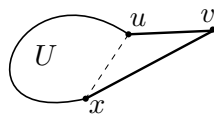
- (a) Если $|V| \geq 3$, аналогично строим гамильтонов цикл в G_v^3 , содержащий инцидентное вершине v ребро $vy \in E(G(V))$, и соединяем эти циклы в один, заменив ux и vy на uv и xy (ребро $xy \in E(G^3)$, так как $\text{dist}_G(x, y) \leq 3$).
- (b) Если $|V| = 2$, точно есть ребро $vy \in E(G)$, которое мы просто присоединяем к циклу из U вместо ребра ux .
- (c) Если $|V| = 1$, заменяем ребро ux на uv и vx .



(a)



(b)



(c)

□

1.6 Теорема Татта о существовании регулярного графа степени k с обхватом g .

def. Обхват графа G (обозначение $g(G)$) — длина наименьшего цикла в графе G .

thm (Татт). Пусть $k, g, n \in \mathbb{N}$, причем $k, g \geq 3$, kn четно и

$$n > \frac{k(k-1)^{g-1} - 2}{k-2}.$$

Тогда существует регулярный граф G степени k с $g(G) = g$ и $v(G) = n$.

proof. Пусть $\mathcal{G}(n, g, k)$ — множество всех графов на n вершинах с обхватом g и максимальной степенью вершин не более k .

Пусть $v_{<k}(G)$ — количество вершин степени менее k в графе G , $\text{dist}_{<k}(G)$ — максимальное из расстояний между парами вершин степени менее k в графе g , при $v_{<k}(G) < 2$ положим $\text{dist}_{<k}(G) = 0$.

Если $n > g$, $\mathcal{G}(n, g, k) \neq \emptyset$, например, есть граф из цикла на g вершинах и нескольких изолированных вершинах.

Будем выбирать в $\mathcal{G}(n, g, k)$ граф следующим образом:

1. сначала возьмем все графы с максимальным количеством ребер,
2. затем из них выберем графы с максимальным $v_{<k}$,
3. из оставшихся выберем граф G с максимальным $\text{dist}_{<k}(G)$.

Докажем, что G — регулярный граф степени k .

- Пусть не так. Рассмотрим пару его максимально удаленных вершин степени менее k . Пусть это x и y (возможно $x = y$).
- Если $\text{dist}_G(x, y) \geq g - 1$, то соединим x и y и получим граф $G' \in \mathcal{G}(n, g, k)$ с $e(G') > e(G)$, а такого не должно быть. Следовательно, $\text{dist}_G(x, y) \leq g - 2$.
- Так как степени x и y меньше k , а степени всех остальных не больше k , то на расстоянии не более $g - 1$ от y находится не более чем $\frac{(k-1)^{g-1} - 1}{k-2}$ вершин, а на расстоянии не более $g - 2$ от x не более $\frac{(k-1)^{g-1} - 1}{k-2}$ вершин.
- По условию теоремы существует такая вершина z , что $\text{dist}(x, z) \geq g - 1$ и $\text{dist}(y, z) \geq g$.

- Так как $\text{dist}_G(x, y) \leq g - 2$, степень $d_G(z) = k \geq 3$. Следовательно, есть ребро $zu \in E(G)$, через которое проходят не все простые циклы длины g графа G . Тогда $g(G - zu) = g(G) = g$.
- $d_G(u) = k$, так как:

$$\text{dist}_G(y, u) \geq \text{dist}_G(y, z) - 1 \geq g - 1 > \text{dist}(x, y) = \text{dist}_{<k}(G).$$

- Пусть $G' = G - zu + zx$. $g(G') = g$, $e(G') = e(G)$, $d_{G'}(x) = d_G(x) + 1$, $d_{G'}(u) = d_G(u) - 1 = k - 1$, степени остальных вершин совпадают. Итого, $G' \in \mathcal{G}(n, g, k)$.
- Заметим, что $v_{<k}(G') \geq v_{<k}(G)$. По алгоритму выбора графа G должно быть равенство, поэтому $d_{G'}(x) = k$ и $d_G(x) = k - 1$.
- Так как kn чётно, вершина x не может быть единственной вершиной степени меньше k в графе G , следовательно, $x \neq y$.

Докажем, что $\text{dist}_{G'}(y, u) > \text{dist}_G(y, x)$.

- Найдём yu -путь P , который реализует расстояние между y и u в G' .
- Если P проходит только по ребрам G , то

$$\text{dist}_{G'}(y, u) = \text{dist}_G(y, u) \geq g - 1 > \text{dist}_G(y, x).$$

- Следовательно, P проходит по новому ребру zx . Тогда P содержит путь по ребрам графа G от y до x или z и само ребро zx .

И, так как $\text{dist}_G(y, z) \geq g > \text{dist}_G(y, x)$:

$$\text{dist}_{G'}(y, u) \geq \min(\text{dist}_G(y, x) + 1, \text{dist}_G(y, z) + 1) > \text{dist}_G(y, x).$$

- Таким образом,

$$\text{dist}_{<k}(G') \geq \text{dist}_{G'}(y, u) > \text{dist}_G(y, x) = \text{dist}_{<k}(G).$$

Противоречие. Значит, G — k -регулярный граф.

Глава 2

Паросочетания

2.1 Независимые множества, паросочетания и покрытия в графе. Теорема Галлаи.

def. Множество вершин $U \subset V(G)$ называется **независимым**, если никакие две его вершины не смежны. Обозначим через $\alpha(G)$ количество вершин в максимальном независимом множестве графа G .

def. Множество ребер $M \subset E(G)$ называется **паросочетанием**, если никакие его два ребра не имеют общей вершины. Обозначим через $\alpha'(G)$ количество ребер в максимальном паросочетании графа G .

def. Паросочетание M графа G называется **совершенным**, если оно покрывает все вершины графа.

def. Будем говорить, что множество вершин $W \subset V(G)$ покрывает ребро $e \in E(G)$, если существует вершина $w \in W$, инцидентная e . Будем говорить, что множество ребер $F \subset E(G)$ покрывает вершину $v \in V(G)$, если существует ребро $f \in F$, инцидентное v .

def. Множество вершин $W \subset V(G)$ называется **вершинным покрытием**, если оно покрывает все ребра графа. Обозначим через $\beta(G)$ количество вершин в минимальном вершинном покрытии графа G .

def. Множество ребер $F \subset E(G)$ называется **реберным покрытием**, если оно покрывает все вершины графа. Обозначим через $\beta'(G)$ количество ребер в минимальном реберном покрытии графа G .

lm 5. 1. $U \subset V(G)$ — независимое множество, тогда $V(G) \setminus U$ — вершинное покрытие.

2. $\alpha(G) + \beta(G) = v(G)$.

proof.

1. Если U — независимое множество, то все ребра из этих вершин выходят в $V(G) \setminus U$, значит все ребра покрываются $V(G) \setminus U$. Если $V(G) \setminus U$ — вершинное покрытие, ребер внутри U быть не может, следовательно U — независимое множество.
2. Применяем первый пункт для максимального независимого множества и минимального вершинного покрытия.

□

thm (Галлаи, 1959). Пусть G — граф с $\delta(G) > 0$. Тогда

$$\alpha'(G) + \beta'(G) = v(G)$$

proof. Докажем неравенство в обе стороны.

- Пусть M — максимальное паросочетание, U — множество не покрытых M вершин графа. $|U| = v(G) - 2\alpha'(G)$.

Так как $\delta(G) > 0$, можно выбрать множество F из $|U|$ ребер, покрывающее U .

Тогда $M \cup F$ — покрытие,

$$\beta'(G) \leq |M \cup F| \alpha'(G) + v(G) - 2\alpha'(G).$$

Из этого получаем неравенство $\alpha'(G) + \beta'(G) \leq v(G)$.

- Пусть L — минимальное реберное покрытие, $|L| = \beta'(G)$, Рассмотрим подграф $H = G(L)$, порожденный ребрами покрытия.

Все компоненты связности в H — звезды, иначе L не минимально. В каждой компоненте можем выбрать только одно ребро в паросочетание.

Следовательно, $\alpha'(G) \geq c(H)$ и $\beta'(G) = |L| = e(H) \geq v(H) - c(H) = v(G) - c(H)$. Сложим два неравенства и получим $\alpha'(G) + \beta'(G) \geq v(G)$.

□

2.2 Максимальное паросочетание и дополняющие пути: теорема Бержа.

def. Пусть M — паросочетание в графе G .

- Назовем путь M -чередующимся, если в нем чередуются ребра из M и ребра, не входящие в M .
- Назовем M -чередующийся путь M -дополняющим, если его начало и конец не покрыты паросочетанием M .

thm (Берж, 1957). Паросочетание M в графе G является максимальным, когда нет M -дополняющих путей.

proof.

\Rightarrow Пусть в графе G существует M -дополняющий путь $S = a_1 a_2 \dots a_{2k}$.

Тогда мы можем заменить все входящие в M ребра $a_2 a_3, \dots, a_{2k-2} a_{2k-1}$ на не входящие в M ребра $a_1 a_2, \dots, a_{2k-1} a_{2k}$, увеличив паросочетание. Противоречие.

\Leftarrow Пусть M — не максимальное паросочетание, тогда рассмотрим максимальное M' .

Пусть $N = M \triangle M'$ и подграф $H = G(N)$. Для любой вершины $v \in H$ имеем $d_H(v) \in \{1, 2\}$, поэтому H — объединение путей и циклов.

Причем в каждом пути или цикле ребра из M и M' чередуются. Так как ребер из M' больше, есть хотя бы одна компонента P графа H — путь нечетной длины, где ребер из M' больше. Получается, что мы нашли M -дополняющий путь. Противоречие.

□

2.3 Теорема Татта о совершенном паросочетании.

def. Для произвольного графа G через $o(G)$ обозначим количество нечетных компонент связности графа G .

thm (Татт, 1947). В графе G существует совершенное паросочетание, когда для любого $S \subset V(G)$ выполняется условие $o(G - S) \leq |S|$.

proof.

\Rightarrow Пусть $S \subset V(G)$, M — совершенное паросочетание. Тогда одна из вершин каждой нечетной компоненты связности графа $G - S$ должна быть соединена с вершиной из S ребром паросочетания M , при этом все такие вершины различны, так как входят в паросочетание только один раз.

\Leftarrow Предположим, что граф удовлетворяет условию, но не имеет совершенного паросочетания.

Подставим пустое S в условие: $o(G) \leq |\emptyset| = 0$, то есть $v(G)$ четно.

Пусть G^* — максимальный надграф G на том же множестве вершин, не имеющий совершенного паросочетания. Хотим построить совершенное паросочетание в G^* , тем самым получив противоречие.

Для любого $S \subset V(G)$ выполняется неравенство

$$o(G^* - S) \leq o(G - S) \leq |S|.$$

Пусть $U = \{u \in V(G): d_{G^*}(u) = v(G) - 1\}$. Очевидно, что G^* не может быть полным, поэтому $U \neq V(G)$.

lm 6. Граф $G^* - U$ представляет собой объединение нескольких несвязных друг с другом полных подграфов.

proof.

- Предположим противное. Тогда существуют такие вершины $x, y, z \in V(G) \setminus U$, что $xy, yz \in E(G^*)$, но $xz \notin E(G^*)$.
- Так как $y \notin U$, существует такая вершина $w \notin U$, что $yw \notin E(G^*)$.

- Так как граф G^* максимален, в графе $G^* + xz$ существует паросочетание M_1 , а в графе $G^* + yw$ — M_2 . При этом $xz \in M_1$ и $yw \in M_2$, иначе в G^* будет совершенное паросочетание.
- Пусть $H = (V(G), M_1 \Delta M_2)$. Граф H — несвязное объединение четных циклов, в каждом из которых чередуются ребра из M_1 и M_2 , поэтому в каждой компоненте есть совершенные паросочетания на ребрах M_1 и на ребрах M_2 .
- Ребра xz и yw принадлежат ровно одному паросочетанию, поэтому лежат и $E(H)$.

Разберем два случая:

1. Ребра xz и yw лежат в разных компонентах C_1 и C_2 графа H . Тогда можем выбрать на вершинах C_1 выбрать паросочетание из M_2 , в C_2 из M_1 , в остальных из любых. Так мы получили совершенное паросочетание в графе G^* . Противоречие.
2. Ребра xz и yw лежат в одной компоненте C графа H . НУО, считаем, что в цикле C вершины расположены в порядке $ywzx$. Рассмотрим простой путь $P = xC''yzC'w$. Заметим,

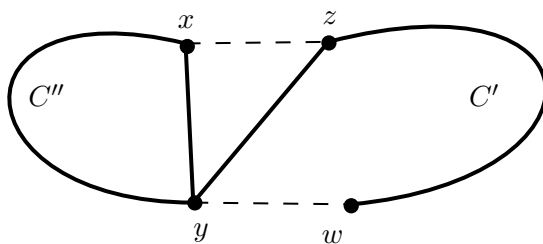


Рис. 2.1: Случай 2

что $V(P) = V(C)$ и $E(P) \subset E(G^*)$. Следовательно, существует совершенное паросочетание $M_C \subset E(G^*)$ на вершинах компоненты связности C .

В остальных компонентах можем выбрать ребра любого из M_1 и M_2 . Так мы построили совершенное паросочетание графа G^* . Противоречие.

Будем использовать лемму.

- Среди несвязных полных графов не более $|U|$ имеет нечетное число вершин по условию теоремы.
- В каждой четной компоненте графа $G^* - U$ мы построим полное паросочетание, в каждой нечетной — паросочетание на всех вершинах кроме одной, оставшуюся мы соединим с вершиной из U . Мы используем различные вершины из U , их хватит.
- Наконец, разобьем на пары оставшиеся вершины из U : это можно сделать, так как каждая из них смежна в G^* со всеми остальными.

Так мы построили совершенное паросочетание в графе G^* . Противоречие.

□

2.4 Теорема Петерсена о паросочетании в кубическом графе.

def. Кубический граф — граф, все вершины которого имеют степень 3.

def. Мост графа — ребро, не входящее ни в один цикл.

thm (Петерсон, 1891). Пусть G — связный кубический граф, в котором не более двух мостов. Тогда в графе есть совершенное паросочетание.

proof. Пусть совершенного паросочетания нет. Тогда по Теореме Татта существует такое множество $S \subset V(G)$, что $o(G - S) > |S|$.

Так как в кубическом графе четное число вершин, $S \neq \emptyset$ и $o(G - S) \equiv |S| \pmod{2}$.

Пусть U_1, \dots, U_n — все нечетные компоненты связности графа $G - S$. $n \geq |S| + 2$.

Пусть $m_i = e_G(U_i, S)$. Это число нечетное, так как:

$$m_i = \sum_{v \in U_i} d_G(v) - 2e(G(U_i)) = 3|U_i| - 2e(G(U_i)).$$

В G не больше двух мостов, поэтому не более, чем два числа из m_i равны 1, а остальные не меньше 3, так как нечетные.

$$3|S| = \sum_{v \in S} d_G(v) \geq \sum_{i=1}^n m_i \geq 3n - 4 \geq 3(|S| + 2) - 4 > 3|S|.$$

Противоречие. □

2.5 Теорема Плесника о совершенном паросочетании в регулярном графе.

thm (Плесник, 1972). Пусть G — регулярный граф степени k с четным числом вершин, причем $\lambda(G) \geq k-1$, а граф G' получен из G удалением не более, чем $k-1$ ребра. Тогда в графе G' есть совершенное паросочетание.

proof. Пусть множество $F \subset E(G)$ таково, что $G' = G - F$. Тогда $|F| \leq k-1$.

Предположим, что условие теоремы Татта не выполняется. Рассмотрим множество Татта $S \subset V(G')$. Так как

$$o(G' - S) + |S| \equiv v(G) \pmod{2},$$

из $o(G' - S) > |S|$ следует, что $o(G' - S) \geq |S| + 2$.

Пусть U_1, \dots, U_n — нечетные, а U_{n+1}, \dots, U_t — четные компоненты связности графа $G' - S$.

Для каждого $i \in [1..t]$ пусть:

- α_i — количество ребер из $E(G')$, соединяющих U_i с S ;
- β_i — количество ребер из F , соединяющих с U_i с S ;
- γ_i — количество ребер из F , соединяющих U_i с остальными компонентами связности $G' - S$;
- $m_i = \alpha_i + \beta_i + \gamma_i$ — количество ребер графа G , соединяющих U_i с $V(G) \setminus U_i$.

Для нечетных компонент связности имеем $m_i \equiv k \pmod{2}$. Также $m_i \geq \lambda(G) \geq k - 1$, поэтому $m_i \geq k$. Отсюда:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{i=1}^n \beta_i + \sum_{i=1}^n \gamma_i \geq kn \quad (2.1)$$

Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^t \alpha_i + \sum_{i=1}^t \beta_i \leq k \cdot |S|$$

и

$$2 \sum_{i=1}^t \beta_i + \sum_{i=1}^t \gamma_i \leq 2 \cdot |F| \leq 2k - 2.$$

Сложим:

$$\sum_{i=1}^t \alpha_i + 3 \sum_{i=1}^t \beta_i + \sum_{i=1}^t \gamma_i \leq k(|S| + 2) - 2 \quad (2.2)$$

Из неравенств 2.1 и 2.2 получаем $kn \leq k(|S| + 2) - 2$, следовательно, $o(G' - S) < |S| + 2$. А мы выше доказали противное. Противоречие. \square

cor 3. Пусть G — регулярный граф степени k с четным числом вершин, причем $\lambda(G) \geq k - 1$. Тогда для любого ребра $e \in E(G)$ существует совершенное паросочетание графа, содержащее e .

proof. Пусть $e = ab$, e_1, \dots, e_{k-1} — остальные ребра, инцидентные вершине a .

По теореме Плесника в графе $G - \{e_1, \dots, e_{k-1}\}$ есть совершенное паросочетание, которое должно содержать e , так как содержит a . \square

2.6 Теорема Петерсена о выделении 2-фактора в $2k$ -регулярном графе и ее следствие о регулярных факторах.

def. k -фактором графа G называется его остовный регулярный подграф степени k .

thm (Петерсон, 1891). У регулярного графа степени $2k$ есть 2-фактор.

proof. Так как все степени четные, есть эйлеров цикл. Обойдем его в некотором направлении и ориентируем каждое ребро в направлении обхода. Теперь в каждую вершину \bar{G} входит и выходит ровно по k стрелок.

Построим граф G^* следующим образом: разделим каждую вершину $v \in V(G)$ на две вершины v_1 и v_2 , если ребро $xy \in E(G)$ было ориентировано от x к y , то проведем в графе G^* ребро x_1y_2 .

Таким образом, существует биекция $\varphi: E(G) \rightarrow E(G^*)$, заданная правилом $\varphi(xy) = x_1y_2$.

G^* — регулярный двудольный граф степени k с долями $\{v_1\}_{v \in V(G)}$ и $\{v_2\}_{v \in V(G)}$.

По следствию 3 в графе G^* есть совершенное паросочетание M^* .

Пусть $M = \varphi^{-1}(M^*)$. Для любой вершины $x \in V(G)$ каждая из вершин $x_1, x_2 \in V(G^*)$ инцидентна ровно одному ребру из M^* .

Поэтому x инцидентна ровно двум ребрам из M , то есть M — 2-фактор графа G . \square

cor 4. 1. Регулярный граф степени $2k$ есть объединение k своих 2-факторов.

2. Для любого $r \leq k$ регулярный граф степени $2k$ имеет $2r$ -фактор.

2.7 Теорема Томассена о почти регулярном факторе почти регулярного графа.

thm (Томассен, 1981). Пусть G — граф, степени всех вершин которого равны или k или $k + 1$, а $r \leq k$. Тогда существует остовный подграф F графа G , степени всех вершин которого равны либо r , либо $r + 1$.

proof. Индукция по r .

База: $r = k$, очевидно, подойдет $H = G$.

Переход: от k к $k - 1$. Пусть граф имеет остовный подграф F , степени вершин которого равны r или $r + 1$.

Будем удалять из графа F по очереди ребра, соединяющие вершины степени $r + 1$. В какой-то момент мы получим граф F' , степени вершин которого равны r или $r + 1$, при этом любые две вершины степени $r + 1$ несмежны. Пусть V_{r+1} — множество всех вершин степени $r + 1$ в F' . Если $V_{r+1} = \emptyset$, то F' уже подходит.

Пусть $V' = V(G) \setminus V_{r+1}$, B — двудольный граф с долями V_{r+1} и V' , ребра которого — $E_{F'}(V_{r+1}, V')$.

Для каждой вершины $x \in V_{r+1}$ мы имеем $d_B(x) = r + 1$, для каждой $y \in V'$ имеем $d_B(y) \leq r$.

По следствию из теоремы Холла в графе B есть паросочетание M , покрывающее все вершины из V_{r+1} .

Тогда удалим его и все вершины степени $r + 1$ потеряют по одному ребру, а степени r не более одного. Итого получится граф $H = F' - M$, где степени равны r или $r - 1$.

□

2.8 Теорема Ловаса о разбиении графа.

cor 5 (Ловас, 1970). Пусть $s, t \in \mathbb{N}$. Тогда любой граф максимальной степени $s+t-1$ представляется в виде объединения графа максимальной степени не более s и графа максимальной степени не более t .

proof. Пусть G — граф с $\Delta(G) = s + t - 1$. Добавим в граф вершины и ребра, чтобы он стал регулярным степени $k = s + t - 1$.

По теореме Томассена граф H имеет остовный подграф H_1 , степени вершин которого равны t или $t - 1$.

Тогда оставшиеся ребра графа H образуют подграф H_2 , степени вершин которого равны $s - 1$ или s .

Теперь удалим из подграфов H_1 и H_2 добавленные вершины и ребра, получим подграфы G_1 и G_2 графа G с $\Delta(G_1) \leq t$ и $\Delta(G_2) \leq s$. При этом $G = G_1 \cup G_2$. □

Глава 3

СВЯЗНОСТЬ

3.1 Блоки и точки сочленения. Лемма о пересечении блоков.

Здесь граф G связан.

def. Вершина $a \in V(G)$ называется *точкой сочленения*, если граф $G - a$ несвязен.

def. Блок — максимальный по включению подграф графа G .

def. Блоки и точки сочленения несвязного графа — блоки и точки сочленения его компонент.

lm 7. Пусть B_1 и B_2 — два разных блока графа G , причем $V(B_1) \cap V(B_2) \neq \emptyset$. Тогда $V(B_1) \cap V(B_2)$ состоит из одной точки сочленения a графа G , причем a — единственная точка сочленения, отделяющая B_1 от B_2 .

proof.

Единственность Пусть $|V(B_1) \cap V(B_2)| \geq 2$. Тогда для любой вершины $x \in V(B_1 \cup B_2)$ граф $B_1 \cup B_2 - x$ связан, так как $B_1 - x$ связан, $B_2 - x$ связан, плюс остается хотя бы одна общая вершина. Следовательно, $B_1 \cup B_2$ содержится в блоке B графа G , но тогда B_1 и B_2 не максимальные по включению.

Пусть $V(B_1) \cap V(B_2) = \{a\}$. Так как a — общая вершина блоков B_1 и B_2 , отделять B_1 от B_2 в графе G может только a .

Точка сочленения Если a не отделяет B_1 от B_2 , в графе G должен быть $V(B_1)V(B_2)$ -путь P .

Пусть $H = B_1 \cup B_2 \cup P$. Граф $H - x$ связан для любой вершины $x \in V(H)$. Поэтому H содержится в одном блоке графа G . Но блок B_1 — его собственный подграф. Противоречие.

В итоге a — единственная вершина, отделяющая B_1 от B_2 , следовательно, граф $G - a$ несвязен, поэтому a — точка сочленения.

□

3.2 Дерево блоков и точек сочленения и его свойства.

def. Построим двудольный граф $B(G)$, вершины которого — точки сочленения a_1, \dots, a_n графа G , а вершины другой доли — его блоки B_1, \dots, B_m . Вершины a_i и B_j будут смежны, если $a_i \in V(B_j)$.

Такой граф называется **деревом блоков и точек сочленения**.

lm 8. Пусть B_1 и B_2 — два разных блока графа G , а P — путь между ними в графе $B(G)$. Тогда точки сочленения графа G , отделяющие B_1 от B_2 — это в точности те точки сочленения, что лежат на пути P . Остальные не разделяют даже объединение блоков пути P .

- Пусть x — точка сочленения графа G , не лежащая на пути P , H — объединение всех блоков на пути P .

Для любого блока B на пути P граф $B - x$ связан. Если B — не B_1 и не B_2 , то в нем можно пройти между двумя точками сочленения, входящими в P , так как x не входит в P . Поэтому $H - x$ — связный граф.

- Пусть a — точка сочленения, лежащая на P , и она входит в блоки B'_1 и B'_2 на пути P .

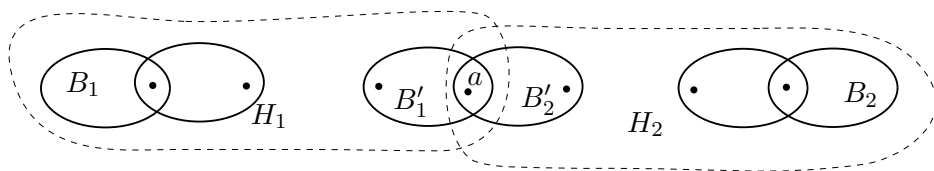


Рис. 3.1

Обозначим через H_1 объединение всех блоков на пути P до a , через H_2 — объединение всех блоков после a .

Применим рассуждения первого пункта отдельно к H_1 и к H_2 . Получаем, что a не разделяет ни одного из них.

С другой стороны, по лемме 7 точка сочленения a отделяет блок B'_1 от B'_2 , а значит, a отделяет H_1 от H_2 , следовательно и B_1 от B_2 .

- thm.** 1. Дерево блоков и точек сочленения — это дерево, все листья которого соответствуют блокам.
2. Точка сочленения a разделяет два блока B_1 и B_2 , тогда a разделяет B_1 и B_2 в $B(G)$.

proof.

1. Докажем первый пункт.

Связность. Для любых двух вершин $B(G)$ рассмотрим путь Q в G между ними.

Перестроим его в путь в $B(G)$: участок пути Q , проходящий по одному блоку графа G , заменим на соответствующую блоку вершину в $B(G)$, переход Q между различными блоками по лемме 7 осуществляется через их общую точку сочленения — вершину $B(G)$.

Дерево. Пусть в $B(G)$ есть простой цикл Z . Рассмотрим подграф H — объединение всех блоков этого цикла.

Между любыми двумя входящими в Z блоками есть два независимых пути в $B(G)$.

По лемме 8 граф H не имеет точек сочленения, иначе они должны лежать на одновременно на двух путях по циклу.

Следовательно, существует блок B , содержащий H , блоки цикла Z — собственные подграфы B , что невозможно.

Листья. Если лист соответствует точке сочленения a , то по лемме 8 граф $G - a$ связан. Противоречие.

2. Докажем второй пункт: в дереве $B(G)$ есть единственный путь между блоками B_1 и B_2 , по лемме 8 в точности точки сочленения с этого пути отделяют B_1 от B_2 в исходном графе G .

□

3.3 Крайние блоки

def. Назовем блок B **крайним**, если он соответствует листу дерева блоков и точек сочленения.

def. **Внутренность** $\text{Int}(B)$ блока B — множество всех его вершин, не являющихся точками сочленения в графе.

- Блок недвусвязного графа крайний, тогда он содержит ровно одну точку сочленения.
- Внутренность некрайнего блока может быть пустой, а крайнего всегда непуста.
- Если у связного графа есть точки сочленения, то он имеет хотя бы два крайних блока.
- Если B — блок графа G , $x \in \text{Int}(B)$, то граф $G - x$ связан.

lm 9. Пусть B — крайний блок связного графа G с $v(G) \geq 2$, $G' = G - \text{Int}(B)$. Тогда граф G' связан, а блоки G' — все блоки G , кроме B .

proof. Пусть $a \in V(B)$ — точка сочленения, отрезающая крайний блок B от остального графа G . Тогда $\text{Int}(B)$ — это одна из компонент связности графа $G - a$, следовательно, сам граф G' будет связан.

Отличные от B блоки графа G — подграфы G' , не имеют точек сочленения и являются максимальными подграфами G' с таким свойством, так как были максимальными в G . Следовательно, они все — блоки G' .

Пусть B' — блок G' . Очевидно, что $v(G') \geq 2$, поэтому B' содержит хотя бы одно ребро e , которое в графе G лежит в некотором блоке $B^* \neq B$, так как блок максимальный по включению, $B^* = B'$. \square

3.4 Алгоритм разбиения графа на блоки.

Пусть U_1, \dots, U_k — все компоненты связности графа $G - a$, $G_i = G(U_i \cup \{a\})$. Разрежем граф G на графы G_1, \dots, G_k .

lm 10. 1. Пусть $b \in U_i$. Тогда b разделяет вершины $x, y \in U_i$ и G_i , тогда b разделяет их в G .

2. Все точки сочленения графов G_1, \dots, G_k — в точности все точки сочленения графа G , кроме a .

proof.

1. Если $G - b$ не содержит xy -пути, то его нет и в $G_i - b$.

Наоборот, пусть x и y лежат в разных компонентах связности графа $G_i - b$. НУО можно считать, что компонента связности $W \ni x$ не содержит a . Тогда W — компонента связности графа $G - b$, следовательно, в $G - b$ тоже не было xy -пути.

2. Так как $G_i - a$ — компонента графа $G - a$, вершина a не является точкой сочленения ни в одном из графов G_1, \dots, G_k .

Любая другая точка сочленения графа G лежит ровно в одном из графов G_1, \dots, G_k и является в нем точкой сочленения по прошлому пункту.

Так же из прошлого пункта следует, что других точек сочленения в графах G_1, \dots, G_k нет.

3.4.1 Алгоритм разбиения связного графа на блоки

- Выберем точку сочленения a и разрежем по ней G : заменим граф G на полученные G_1, \dots, G_k .
- Каждый следующий шаг берем один из имеющихся графов, выбирает точку сочленения и разрезаем по ней.
- И так далее, пока хотя бы один из полученных графов имеет точку сочленения.

thm. В результате описанного алгоритма вне зависимости от порядка действий получатся блоки графа G .

proof. По лемме 10 мы вне зависимости от порядка проведем разрезы только по всем точками сочленения и только по ним.

Пусть B — блок графа G . Тогда в графе G множество $V(B)$ не было разделено ни одной из точек сочленения. Тогда по первому пункту леммы 10 множество $V(B)$ не было разрезано алгоритмом.

Так как в результате алгоритма получились индуцированные подграфы графа G , один из них обозначим за H — надграф B .

Если $H \neq B$, то рассмотрим вершину $c \in V(H) \setminus V(B)$. В графе G существует точка сочленения a , отделяющая c от $V(B)$. Тогда по лемме 10 при разрезе по a вершина c была отделена от блока B . Противоречие.

□

3.5 Следствие о веере путей из теоремы Менгера. Теорема Дирака о цикле, содержащем заданные k вершин.

def. Пусть $X, Y \subset V(G)$, $R \subset V(G) \cup E(G)$.

1. Через $G - R$ обозначим граф, полученный из G в результате удаления всех вершин и ребер из R , а также всех ребер инцидентных вершинам из R .

2. Назовем множество R **разделяющим**, если граф $G - R$ несвязен. Обозначим за $\mathfrak{R}(G)$ множество всех разделяющих множеств.

def. Граф G является k -**связным**, если $v(G) \geq k + 1$ и минимальное вершинное разделяющее множество в графе G содержит хотя бы k вершин.

def. 1. Пусть $x, y \in V(G)$ — несмежные вершины. Обозначим за $\kappa_G(x, y)$ размер минимального множества $R \subset V(G)$ такого, что R разделяет x и y . Если x и y смежны, положим $\kappa_G(x, y) = +\infty$. Назовем $\kappa_G(x, y)$ **связностью** вершин x и y .

Пусть $X, Y \subset V(G)$. Обозначим через $\kappa_G(X, Y)$ размер минимального множества $R \subset V(G)$ такого, что R разделяет X и Y . Если такого множества нет, положим $\kappa_G(X, Y) = +\infty$.

В k -связном графе G для любых двух множество вершин $X, Y \subset V(G)$ выполнено $\kappa_G(X, Y) \geq k$.

thm (Менгер, 1927). Пусть $X, Y \subset V(G)$, $\kappa_G(X, Y) \geq k$, $|X| \geq k$, $|Y| \geq k$. Тогда в графе G существуют k непересекающихся XY -путей.

cor 6. Пусть $x \in V(G)$, $Y \subset V(G)$, $x \notin Y$, $k = \min(|Y|, \kappa_G(x, Y))$. Тогда существуют k путей от x до различных вершин множества Y , не имеющих общих внутренних вершин.

proof. Пусть $X = N_G(x)$. Так как $\kappa_G(x, Y) \geq k$, $|N_G(x)| \geq k$.

Так как $x \notin Y$, любое множество вершин R , отделяющее X от Y отделяет вершину x от множества Y . Следовательно, $|R| \geq k$.

Так как $|Y| \geq k$ по теореме Менгера существует k непересекающихся путей от x до различных вершин множества Y . □

thm (Уитни, 1932). Пусть G — k -связный граф. Тогда для любых двух вершин $x, y \in V(G)$ существует k независимых xy -путей.

proof. Индукция по k .

База: $k = 1$, очевидно

Переход: пусть мы доказали для меньших k . Если вершины x и y несмежны, то утверждение следует из следствия 6.

Разберем случай смежных x и y .

Если $G - xy$ — это $(k - 1)$ -связный граф, то по индукционному предположению существует $k - 1$ независимый xy -путь в графе $G - xy$ и еще один путь — ребро xy .

Теперь предположим, что в $G - xy$ существует разделяющее множество T , $|T| \leq k - 2$. Так как T не разделяет G , в графе $G - (T \cup \{xy\})$ ровно две компоненты связности: $U_x \ni x$ и $U_y \ni y$.

Пусть $T_x = T \cup \{x\}$. Если $U_x \neq \{x\}$, то T_x отделяет $U_x \setminus \{x\}$ от U_y в G , но это невозможно, так как $|T_x| \leq k - 1$.

Тогда $U_x = \{x\}$ и, аналогично, $U_y = \{y\}$. Получается, что в графе G не более k вершин: T , x и y . Но такой граф не может быть k -связным.

□

thm (Дирак). Пусть $k \geq 2$. В k -связном графе для любых k вершин существует простой цикл, содержащий все эти вершины.

proof. Индукция по k .

База: $k = 2$, следует из теоремы Уитни.

Переход: $k - 1 \rightarrow k$. Рассмотрим k -связный граф G и его вершины v_1, \dots, v_k . Так как G и $k - 1$ -связный тоже, по индукционному предположению есть простой цикл Z , содержащий вершины v_1, \dots, v_{k-1} .

Разберем два случая:

1. Пусть $v(Z) < k$. Тогда $V(Z) = \{v_1, \dots, v_{k-1}\}$, по следствию 6 существуют непересекающиеся пути от v_k до всех вершин Z . Теперь можно вставить в Z еще одну вершину v_k между двумя соседними.
2. $v(Z) > k$. По следствию 6 существует k непересекающихся путей от v_k до Z .

Обозначим концы этих путей $x_1, \dots, x_k \in V(Z)$. Они делят круг на k -дуг и внутренность еще одной из этих дуг. Поэтому хотя бы одна не содержит ни одной из вершин v_1, \dots, v_{k-1} . Ее мы можем заменить на путь от начала до v_k и от v_k до конца, тем самым получив искомый цикл.



3.6 Разделяющие множества в k -связном графе, части разбиения. Внутренность и граница части разбиения.

Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}(G)$.

def. Множество $A \subset V(G)$ — часть \mathfrak{S} -разбиения, если никакие две вершины из A нельзя разделить никаким множеством из \mathfrak{S} , но любая другая вершина графа G отделена от множества A хотя бы одним из множеств набора \mathfrak{S} .

Множество всех частей разбиения графа G набором разделяющих множеств \mathfrak{S} мы будем обозначать через $\text{Part}(\mathfrak{S})$. Если граф не очевиден $\text{Part}(G; \mathfrak{S})$.

Вершину части $A \in \text{Part}(\mathfrak{S})$ назовем **внутренней**, если она не входит ни в одно из множеств набора \mathfrak{S} . Множество таких вершин — $\text{Int}(A)$ — **внутренность** части A .

Вершины, входящие в какие-либо множества из \mathfrak{S} , будем называть **граничными**, а все их множество **границей** и обозначать через $\text{Bound}(A)$.

Внутренняя вершина части $A \in \text{Part}(\mathfrak{S})$ может быть концом ребра, входящего в множество $S \in \mathfrak{S}$.

Пусть $A, B \in \text{Part}(\mathfrak{S})$, $A \neq B$, $A \cap B \neq \emptyset$. Тогда существует такое $S \in \mathfrak{S}$, что $A \cap B \subset S$.

Разделяющее множество $S \subset V(G)$ в k -связном графе G должно содержать на менее k вершин. Мы обозначим через $\mathfrak{R}_k(G)$ множество всех k -вершинных разделяющих множеств графа G .

Пусть $S \in \mathfrak{R}_k(G)$, $A \in \text{Part}(\mathfrak{S})$. Тогда $\text{Int}(A) \neq \emptyset$, $G(\text{Int}(A))$ связан — это компонента графа $G - S$. Для любой вершины $x \in S$ существует вершина $y \in \text{Int}(A)$, смежная с x (иначе $S \setminus \{x\}$ отделяет $\text{Int}(A)$ от $G - A$).

Однако, если $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_K(G)$, $B \in \text{Part}(\mathfrak{S})$, то возможно, что $\text{Int}(B) = \emptyset$.

Кроме того, при $\text{Int}(B) \neq \emptyset$ индуцированный подграф $G(\text{Int}(B))$ не обязательно связан.

lm 11. Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$, $A \in \text{Part}(\mathfrak{S})$. Тогда верно:

1. Вершина $x \in \text{Int}(A)$ не смежна ни с одной другой из вершин множества $V(G) \setminus A$.
2. Если $\text{Int}(A) \neq \emptyset$, то $\text{Bound}(A)$ отделяет $\text{Int}(A)$ от $V(G) \setminus A$.

proof.

1. Пусть вершина $x \in \text{Int}(A)$ смежна с вершиной $y \in V(G) \setminus A$. Существует множество $S \in \mathfrak{S}$, отделяющее y от $\text{Int}(A)$ в G . Тогда $x, y \notin S$, причем они смежны. Противоречие.
2. Следует из прошлого пункта.

□

thm. Пусть G — k -связный граф, $\mathfrak{S}, \mathfrak{T} \subset \mathfrak{R}_k(G)$.

1. Пусть $A \in \text{Part}(\mathfrak{S})$. Тогда $\text{Bound}(A)$ — множество всех вершин части A , смежных хотя бы с одной из $V(G) \setminus A$.
2. Пусть $A \in \text{Part}(\mathfrak{S})$ и $A \in \text{Part}(\mathfrak{T})$. Тогда граница A как части $\text{Part}(\mathfrak{S})$ совпадает с границей A как части $\text{Part}(\mathfrak{T})$.

proof.

1. Пусть $x \in \text{Bound}(A)$. Существует такое множество $S \in \mathfrak{S}$, что $x \in S$. Множество вершин S не разделяет A , следовательно A может пересекать внутренность не более чем одной части $\text{Part}(S)$. Тогда существует такая часть $B \in \text{Part}(S)$, что $\text{Int}(B) \cap A = \emptyset$. Тогда существует вершина $y \in \text{Int}(B)$, смежная с x .

По следствию ?? ни одна из вершин множества $\text{Int}(A)$ не может быть смежна с вершиной из $V(G) \setminus A$.

2. В первом пункте мы построили $\text{Bound}(A)$ вне зависимости от \mathfrak{S} или \mathfrak{T} , поэтому совпадать с границей обоих будет совпадать.

□

Глава 4

Раскраски

4.1 Лемма о галочке

def. Раскраска вершин графа G в k цветов — функция $\rho: V(G) \rightarrow M$, где $|M| = k$. Раскраска ρ называется **правильной**, если $\rho(v) \neq \rho(u)$ для любой пары смежных вершин u и v .

Через $\chi(G)$ обозначим **хроматическое число** графа G — наименьшее натуральное число, для которого существует правильная раскраска вершин графа G в такое количество цветов.

Раскраска ребер графа G в k цветов — функция $\rho: E(G) \rightarrow M$, где $|M| = k$. Раскраска называется **правильной**, если $\rho(v) \neq \rho(u)$ для любой пары смежных ребер u и v .

Через $\chi'(G)$ обозначим **хроматический индекс** графа G — наименьшее натуральное число, для которого существует правильная раскраска ребер графа G в такое количество цветов.

lm 12. Пусть G — связный граф, $\Delta(G) \leq d$, причем хотя бы одна из верши графа имеет степень менее d . Тогда $\chi(G) \leq d$.

proof. Индукция по количеству вершин.

База: Если в графе не более d вершин, его точно можно покрасить в d цветов.

Переход: Пусть мы уже доказали утверждение для любого меньшего связного графа с меньшим числом вершин.

Пусть $u \in V(G)$ — вершина степени менее d . Рассмотрим граф $G - u$. Пусть G_1, \dots, G_k — компоненты $G - u$.

В каждом из графов G_i есть вершина u_i , смежная с u в графе G . Тогда у u_i в G_i степень не более $d - 1$, и $\Delta(G_i) \leq d$.

По индукционному предположению, каждый G_i можно покрасить в d цветов. Далее докрашиваем u , мы можем это сделать, так как у нее только $d - 1$ ребро.

□

Im 13. Если G — двусвязный неполный граф с $\delta(G) \geq 3$, существуют такие вершины $a, b, c \in V(G)$, что $ab, bc \in E(G)$, $ac \notin E(G)$ и граф $G - a - c$ связан.

proof.

- Пусть G трехсвязен.

Так как G неполный, существуют такие вершины $a, b, c \in V(G)$, что $ab, bc \in E(G)$ и $ac \notin E(G)$. Граф $G - a - c$ точно связан.

- Пусть G не трехсвязен, тогда существует вершина $b \in V(G)$, что граф $G' = G - b$ не двусвязен.

Граф G' имеет хотя бы два крайних блока. Так как исходный G двусвязен, вершина b должна быть смежна хотя бы с одной внутренней вершиной каждого крайнего блока G' . Пусть a и c — смежные с b внутренние вершины двух разных крайних блоков B_a и B_c графа G' .

Тогда графы $B_a - a$ и $B_c - c$ связны, поэтому и $G' - a - c$ связан.

Так как $d_G(b) \geq 3$, вершина b смежна с $G' - a - c$, а значит, и граф $G - a - c$ связан.

□

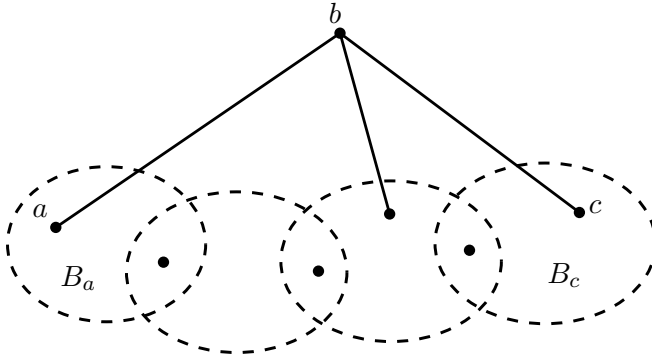


Рис. 4.1

4.2 Теорема Брукса

thm (Брукс, 1941). Пусть $d \geq 3$, G — связный граф, отличный от K_{d+1} , $\Delta(G) \leq d$. Тогда $\chi(G) \leq d$.

proof. Достаточно рассмотреть случай регулярного графа степени d , иначе можно воспользоваться леммой 12. Рассмотрим два случая.

- Пусть в графе G есть точка сочленения a . Тогда $G = G_1 \cup G_2$, где $V(G_1) \cap V(G_2) = \{a\}$, а сами G_1 и G_2 связны.

Так как a смежна хотя бы с одной вершиной и из G_1 и из G_2 , то $d_{G_1}(a) < d$ и $d_{G_2}(a) < d$. По лемме 12 можем покрасить G_1 и G_2 в d цветов.

Согласуем раскраски, чтобы цвет вершины a был одинаковый, и получим правильную раскраску всего G .

- Теперь пусть G двусвязен. По лемме 13 существуют такие $a, b, c \in V(G)$, что $ab, bc \in E(G)$, $ac \notin E(G)$ и граф $G - a - c = G'$ связен.

Рассмотрим такой G' и его остовное дерево T .

Подвесим дерево за b . Пронумеруем уровни так, чтобы номер совпадал с расстоянием от корня.

Пусть $\rho(a) = \rho(c) = 1$. Будем красить остальные вершины дерева в порядке убывания номеров их уровней, начиная с листьев.

Пусть $x \neq b$ — очередная вершина, причем на момент ее рассмотрения мы покрасили все вершины больших уровней, но не красили вершины меньших. Тогда ее предок еще не имеет цвета, поэтому соседи покрашены максимум в $d - 1$ цвет. Следовательно, хотя бы один свободный останется.

Посмотрим на момент, когда осталась только вершина b . У нее два соседа a и c имеют один цвет, поэтому опять есть свободный цвет.

Так мы покрасили все вершины графа G в d цветов.

□

4.3 Списочное хроматическое число k -редуцируемого графа.

def (Списочные раскраски). Каждой вершине $v \in V(G)$ сопоставляется список $L(v)$, после чего раскраска считается правильной, если цвет каждой вершины входит в ее список.

Минимальное такое $k \in \mathbb{N}$, что для любых списков из k цветов существует правильная раскраска вершин графа G , обозначается через $\text{ch}(G)$ и называется **списочное хроматическое число**.

Аналогично определяются **списочная раскраска ребер** и **списочный хроматический индекс**.

note. Известны графы, где $\text{ch}(G) > \chi(G)$, но не известны такие, где $\text{ch}'(G) > \chi'(G)$.

def. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Граф называется **k -редуцируемым**, если его вершины можно занумеровать v_1, \dots, v_n так, что каждая вершины смежна менее чем с k вершинами с бóльшим номером.

lm 14. Пусть G — k -редуцируемый граф. Тогда $\chi(G) \leq \text{ch}(G) \leq k$.

proof. Пусть v_1, \dots, v_n — нумерация вершин графа из определения, причем каждой вершине v_i соответствует список $L(v_i)$ длины $l(v_1) \geq k$.

Покрасим вершины в порядке, обратном нумерации. При покраске вершины v_i количество запретов на цвет не превосходит количество соседей

среди вершин с бóльшим номером, а таких не более $k - 1$. Значит, мы можем покрасить вершину v_i в цвет из ее списка. \square

Im 15. *Граф G является редуцируемым, когда для любого его подграфа H выполняется $\delta(H) \leq k - 1$.*

proof.

\Rightarrow Пронумеруем вершины графа G как в определении. Пусть какой-то подграф H имеет $\delta(H) \geq k$.

Рассмотрим вершину с наименьшим номером $v_i \in V(H)$. Она смежна не менее чем с $d_H(v_i) \geq \delta(H) \geq k$ вершинами с бóльшими номерами. Противоречие.

\Leftarrow Пусть v_1 — вершина графа G наименьшей степени. Она смежна не более чем с $d_G(v_1) = \delta(G) \leq k - 1$ вершиной.

Пусть вершины v_1, \dots, v_{i-1} уже построены.

Рассмотрим граф $G_i = G - \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$. В нем должна быть вершина степени не более $\delta(G_i) \leq k - 1$, которую мы и возьмем в качестве v_i .

\square

4.4 Две леммы о d-раскрасках (о избыточной вершине и о удалении вершины с сохранением связности).

def. Граф G называется d -раскрашиваемым, если для любого набора списков L , удовлетворяющего условию $l(v) \geq d_G(v)$ для каждой вершины $v \in V(G)$, существует правильная раскраска вершин в цвета из списков.

Список цветов, удовлетворяющий указанному условию, будем называть d -списком.

def. Назовем вершину $v \in V(G)$ нормальной, если $l(v) \geq d_G(v)$, избыточной, если $l(v) > d_G(v)$.

lm 16. Пусть G — связный граф, L — d -список, в котором вершина a избыточная. Тогда существует правильная раскраска вершин графа G в соответствии со списком L .

proof. Индукция по количеству вершин.

База: граф с одной избыточной вершиной, очевидно.

Переход: пусть мы уже доказали утверждение для графов с меньшим числом вершин.

Рассмотрим граф $G - a$. Пусть G_1, \dots, G_k — все компоненты графа $G - a$. В каждом графе G_i должна быть вершина a_i , смежная с a .

Рассмотрим отдельно граф G_i с исходными списками вершин. Тогда a_i станет избыточной, так как $d_{G_i}(a) \leq d_G(a_i) - 1 \leq l(a_i) - 1$.

По индукционному предположению вершины всех G_i можно покрасить в соответствии со списками. Так как a избыточная, мы можем раскрасить ее в какой-то цвет из списка $L(a)$, не нарушив правильности раскраски.

□

lm 17. Пусть G — связный граф, L — d -список. Предположим, что существуют две смежные вершины a и b такие, что граф $G - a$ связан и $L(a) \not\subseteq L(b)$. Тогда существует правильная раскраска вершин графа G в соответствии со списком L .

proof. Пусть $1 \in L(a) \setminus L(b)$.

В связном графе $G - a$ из всех списков вершин множества $N_G(a)$, содержащих цвет 1, удалим этот цвет, остальные оставим без изменений. Получим новые списки $L'(v)$ графа $G - a$.

Все вершины графа $G - a$ нормальны: вершины не из $N_G(a)$ не изменились, а для $v \in N_G(a)$ имеем

$$l'(v) \geq l(v) - 1 \geq d_G(v) - 1 = d_{G-a}(v).$$

Так как $1 \notin L(b)$, $l'(b) = l(b)$. Так как $d_{G-a}(b) = d_G(b) - 1$, вершина b избыточная.

По лемме 16 существует правильная раскраска вершин графа $G - a$ в цвета из L' . Далее докрашиваем a в цвет 1, получаем правильную раскраску вершин графа G в цвета списка L . \square

4.5 Теорема Бородина о d-раскрасках

def. Граф, в котором каждый блок — нечетный цикл или полный граф называется **лесом Галлаи**.

thm (Бородин, 1977). Если G не является лесом Галлаи, то G d -раскрашиваем.

proof. Пусть каждой вершине v соответствует список $L(v)$. НУО $l(v) = d_G(v)$ для каждой вершины $v \in V(G)$. Считаем граф связными.

Индукция по размеру графа.

База: G двусвязен.

Если не все списки одинаковые, то существуют две смежные вершины a и b с $L(a) \neq L(b)$ и G раскрашиваем по лемме 17.

Значит, все списки одинаковы, состоят из d цветов. Тогда и все степени вершин равны d .

По условию граф отличается от полного графа и нечетного цикла, поэтому, по теореме Брукса раскраска существует.

Переход: G недвусвязен. Пусть для меньшего чем G графа теорема доказана.

Рассмотрим крайний блок B графа G , отделяемый от остального графа точкой сочленения a .

Граф $B - a$ связан, все вершины нормальны по условию, а все смежные с a вершины избыточны, причем такие должны быть, иначе это не точка сочленения. По лемме 14 его вершины можно покрасить согласно спискам.

Пусть $G' = G - \text{Int}(B)$. Граф G' имеет те же блоки, что и G , кроме B . Поэтому среди этих блоков должен быть еще один блок, отличный от нечетного цикла и полного графа.

Списки отличных от a вершин не менялись, степени — тоже.

Составим новый список $L'(a)$ из всех цветов $L(a)$, кроме использованных для раскраски $\mathbb{N}_B(a)$. Таких цветов не более $d_B(a)$. Так как $d_G(a) = d_B(a) + d_{G'}(A)$, получаем $l'(a) \geq d_{G'}(a)$.

По индукционному предположению существуют правильная раскраску вершин G' в цвета из списка. Далее дополняем ее раскраской $B - a$ и получаем искомую раскраску вершин G .

□

4.6 Списочная теорема Брукса.

thm (Визинг, 1976). Пусть $d \geq 3$, G — связный граф, отличный от K_{d+1} , $\Delta(G) \leq d$. Тогда $\text{ch}(G) \leq d$.

proof. Пусть каждой вершине $v \in V(G)$ соответствует список $L(v)$, причем $l(v) \geq d$.

- Если G — не лес Галлаи, по теореме Бородина он раскрашивается.
- Пусть G — лес Галлаи. По условию G не двусвязен, поэтому его блоки точно отличны от K_{d+1} .

Посмотрим на крайний блок B и его вершину b , не являющуюся точкой сочленения. Так как этот блок не является полным подграфом:

$$l(b) \geq d > d_B(b) = d_G(b).$$

Значит, вершина b избыточна, по лемме 16 существует искомая раскраска.

□

4.7 k -критические графы. Простейшие свойства.

def. Назовем граф k -критическим, если $\chi(G) = k$, но $\chi(H) < k$ для любого собственного подграфа H графа G .

lm 18. Если G — k -критический граф, то $\delta(G) \geq k - 1$.

proof. Пусть $a \in V(G)$, $d_G(a) \leq k - 2$. По определению $\chi(G - a) \leq k - 1$.

Покрасим граф $G - a$ в $k - 1$ цвет, так как степень a в исходном графе меньше $k - 1$, мы сможем докрасить ее и получить раскраску в $k - 1$ цвет. Противоречие. \square

lm 19. Пусть G — k -критический граф, $S \subset V(G)$ — разделяющее множество $|S| < k$. Тогда $G(S)$ — не полный.

proof. Пусть $G(S)$ — полный, $S = \{a_1, \dots, a_m\}$, $\text{Part}(S) = \{F_1, \dots, F_n\}$, $G_i = G(F_i)$.

Так как G_i — собственный подграф G , то $\chi(G_i) \leq k - 1$, пусть ρ_i — правильная раскраска G_i в $k - 1$ цвет.

Так как вершины S попарно смежны в G_i , то все цвета $\rho(a_1), \rho(a_2), \dots, \rho(a_m)$ различны. Теперь согласуем раскраски в G_1, \dots, G_n и получим общую раскраску в $k - 1$ цвет для вершин графа G . Противоречие. \square

4.8 Теорема Галлаи о k -критических графах.

thm (Галлаи, 1963). Пусть $k \geq 3$, G — k -критический граф. Пусть V_{k-1} — множество всех вершин графа G , имеющих степень $k - 1$, а $G_{k-1} = G(V_{k-1})$. Тогда G_{k-1} — лес Галлаи.

proof. По лемме 18 $\delta(G) \geq k - 1$. Будем считать, что $G_{k-1} \neq \emptyset$, иначе доказывать нечего.

Предположим, что G_{k-1} не лес Галлаи. Тогда этот граф имеет компоненту G' , у которой есть блок, отличный от полного графа и нечетного цикла. Пусть $V(G') = V'$.

Для собственного подграфа $H = G - V'$ графа G мы имеем $\chi(H) \leq k - 1$, так как G — k -критический.

Пусть ρ — раскраска графа H в $k - 1$ цвет. Рассмотрим любую вершину $x \in V'$, пусть она имеет n_x соседей в $V(H)$. Поместим в список $L(x)$ в

точности те цвета из $[1..k-1]$, что не встречаются среди n_x . Тогда длина списка $l(x) \geq k-1-n_x = d_{G'}(x)$.

По теореме Бородина граф G' является d -раскрашиваемым, следовательно, существует правильная раскраска ρ^* графа G' в цвета из построенных списков.

Вместе ρ и ρ^* дают правильную раскраску вершин G в $k-1$ цвет. Противоречие. Значит G_{k-1} — лес Галлаи. \square

4.9 Лемма Дирака о разделяющем двухвершинном множестве в критическом графе.

def. Пусть $x, y \in V(G)$ — две несмежные вершины. Определим операцию слияния вершин x и y графа G следующим образом: эти вершины объединяются в одну новую $x\#y$, которая будет смежна со всеми вершинами, смежными в графе G хотя бы с одной из вершин x и y . Полученный граф обозначим через $G\#xy$.

lm 20 (Дирак, 1953). Пусть G — k -критический граф, $S = \{a, b\} \in \mathfrak{R}(G)$, $\text{Part}(S) = \{F_1, \dots, F_m\}$ и $G_i = F(F_i)$. Тогда $m = 2$, $ab \notin E(G)$ и части $\text{Part}(S)$ можно занумеровать так, что графы $G_1 + ab$ и $G_2\#ab$ — k -критические.

proof. Пусть $U_i = \text{Int}(F_i)$ — компонента связности графа $G - S$, $G'_i = G - U_i$, $M_j = V(G'_j)$.

Так как G — k -критический, то его подграф G'_i имеет правильную раскраску в $k-1$ цвет. Пусть ρ'_i — такая раскраска.

Назовем ρ'_i раскраской типа 1, если $\rho'_i(a) = \rho'_i(b)$, и раскраской типа 2, иначе.

st. Если для некоторых различных i, j существуют правильные раскраски в $k-1$ цвет одного типа ρ'_i графа G'_i и ρ'_j графа G'_j , то $\chi(G) \leq k-1$.

proof. Пока нет \square Предположим, что $m \geq 3$. Рассмотрим правильные раскраски ρ'_i графов G'_i в $k-1$ цвет для $i \in [1..3]$.

Какие-то две имеют один тип, следовательно, по утверждению 4.9 $\chi(G) \leq k - 1$, но это не так.

Тогда, $m = 2$. $G_1 = G'_2$ и $G_2 = G'_1$.

По утверждению 4.9 у графов G_1 и G_2 не может быть правильных раскрасок в $k - 1$ цвет одного и того же типа. НУО у всех тип 1 в G_1 и 2 в G_2 .

Так как существует правильная раскраска типа 1, $ab \notin E(G)$.

st. Граф $G_1^* = G_1 + ab$ — k -критический.

proof. Пока нет □

st. Граф $G_2^* = G_2 \# ab$ — k -критический.

proof. Пока нет □

4.10 Гипотеза Хайоша, случай $k = 4$.

def. Пусть H — произвольный граф. Назовем граф H' подразбиением графа H , если H' может быть получен из H заменой нескольких ребер на простые непересекающиеся пути.

thm (Дирак, 1953). Если $\chi(G) = 4$, то граф содержит в качестве подграфа подразбиение K_4 .

proof. Достаточно доказать для 4-критических графов. Рассмотрим такой граф G . Будем доказывать по индукции по количеству вершин в графе.

База: G — трехсвязный граф. $\delta(G) \geq 3$, тогда в графе G существует простой цикл $Z = a_1 a_2 \dots a_n$, длины хотя бы 4.

Так как $G - \{a_1, a_3\}$ связан, существует простой путь P от a_2 до a_m , не проходящий по другим вершинам цикла.

Эти две вершины делят цикл на две непустые дуги: $B = \{a_3, \dots, a_{m-1}\}$ и $B' = \{a_{m+1}, \dots, a_1\}$.

Так как $G - \{a_2, a_m\}$ связан, существует BB' -путь Q , не проходящий через a_2 и a_m . Пусть $a_x \in B$ и $a_y \in B'$ — концы Q .

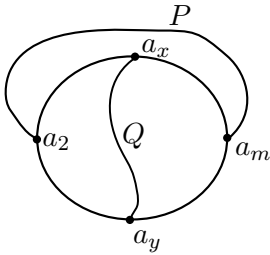
Рассмотрим два случая

- $V(P) \cap V(Q) = \emptyset$.

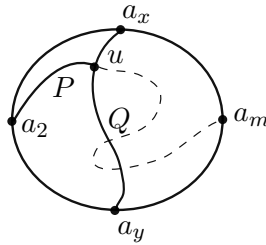
Рассмотрим подграф H графа G — объединение цикла Z и путей P и Q . Этот граф — подразбиение K_4 . См. рис. 4.2a.

- $V(P) \cap V(Q) \neq \emptyset$.

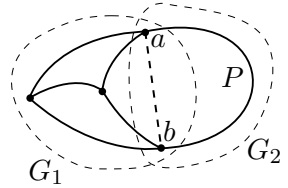
Пусть u — первая точка пересечения с Q на пути P (от a_2). Тогда подграф H , равный объединению цикла Z , пути Q и участка a_2Pu — подразбиение K_4 . См. рис. 4.2b.



(a)



(b)



(c)

Переход: граф G не трехсвязен.

Пусть S — минимальное разделяющее множество графа G . Тогда $|S| \leq 2$. Пусть $S = \{a, b\}$.

По лемме 20 вершины a и b несмежны, $\text{Part}(S) = \{F_1, F_2\}$, $G_i = G(F_i)$, причем части можно занумеровать так, что граф $G_1^* = G_1 + ab$ — 4-критический.

По индукционному предположению, в графе G_1^* есть подграф H , являющийся подразбиением K_4 . Если H — уже подграф G , то переход доказан.

Предположим, что H не подграф G , тогда $ab \in H$.

Граф G_2 связан, поэтому существует ab -путь P с $\text{Int}(P) \cap V(H) = \emptyset$. Тогда граф $H' = H - ab \cup P$ — подграф G и подразбиение K_4 . См. рис. 4.2c.

□

4.11 Конструкция графа с произвольным хроматическим числом без треугольников.

def. Кликовое число графа G (обозначение $\omega(G)$) — это количество вершин в максимальной клике.

thm (Мычельский, 1955). Для любого $k \in \mathbb{N}$ существует граф G , удовлетворяющий условиям $\chi(G) = k$, $g(G) \geq 4$.

proof. Для $k = 1$ и $k = 2$ подойдут полные графы K_1 и K_2 .

Построим следующие графы G_3, G_4, \dots без треугольников с $\lambda(G_k) = k$.

Пусть построен граф G_k , причем $V(G_k) = \{u_1, \dots, u_n\}$. Этот граф будет частью графа G_{k+1} , в котором будут добавлены вершины v_1, \dots, v_n, w .

Ребра между новыми вершинами проведем так: v_i будет смежна со всеми вершинами из $N_{G_k}(u_i)$ и только с ними, а w — со всеми вершинами v_1, \dots, v_n и только с ними (см. рис. ??).

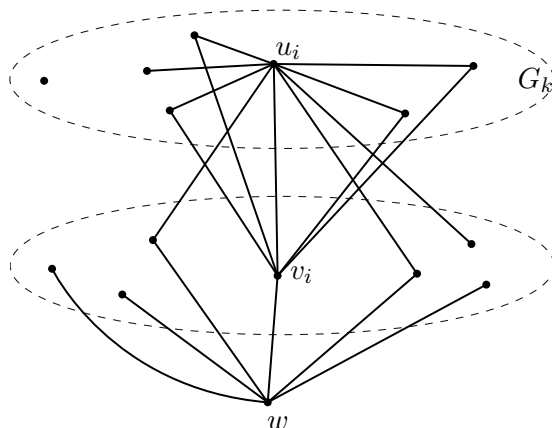


Рис. 4.3

Понятно, что треугольников в графе G_{k+1} нет.

Далее заметим, что $\chi(G_{k+1}) \leq k + 1$: если ρ – правильная раскраска вершин G_{k+1} в k цветов, то можно продолжить ее на G_{k+1} , используя только один дополнительный цвет, для этого положим $\rho(v_i) = \rho(u_i)$ и $\rho(w) = k + 1$.

Предположим, что $\chi(G_{k+1}) \leq k_i$, и рассмотрим правильную раскраску ρ вершин графа G_{k+1} в k цветов.

НУО $\rho(w) = k$. Построим правильную раскраску ρ' вершин G_k в $k - 1$ цвет, получим противоречие.

Для каждой вершины положим, $\rho'(u_i) = \rho(u_i)$, если $\rho(u_i) \neq k$, и $\rho'(u_i) = \rho(v_i)$, если $\rho(u_i) = k$.

Так как вершины v_1, \dots, v_n смежны с вершиной w цвета k , то их цвета отличны от k , следовательно, $\rho': V(G_k) \rightarrow [1..k - 1]$.

Докажем правильность раскраски ρ :. Предположим противное, пусть $\rho'(u_i) = \rho'(u_j)$, вершины u_i и u_j смежны.

Очевидно, хотя бы одна из них перекрашена, пусть это u_i , тогда $\rho'(u_i) = \rho(v_i)$.

Мы перекрашивали только вершины, имеющие цвет k в раскраске ρ , среди них не было смежных, следовательно, $\rho'(u_j) = \rho(u_j)$.

По построению, из $u_j \in N_{G_k}(u_i)$ следует $u_j \in N_{G_k}(v_i)$ и мы можем сделать вывод, что

$$\rho'(u_i) = \rho(v_i) \neq \rho(u_j) = \rho'(u_j).$$

Противоречие.

Таким образом, ρ' – правильная раскраска вершин графа G_k , противоречие. Следовательно, $\chi(G_{k+1}) = k + 1$.

4.12 Оптимальные раскраски ребер и их свойства. Хроматический и покрывающий индексы двудольного графа.

def. Хроматический индекс графа G — наименьшее натуральное число $\chi'(G)$, для которого существует правильная раскраска ребер графа G в такое количество цветов.

Назовем раскраску *покрывающей*, если ребра каждого цвета образуют покрытие, то есть покрывают все вершины.

Покрывающий индекс графа G — наибольшее натуральное число $\kappa'(G)$, для которого существует покрывающая раскраска ребер графа G .

def. Пусть ρ — раскраска ребер графа G в k цветов.

Будем говорить, что в раскраске ρ цвет i *представлен* в вершине v , если существует инцидентное v ребро e такое, что $\rho(e) = i$. Обозначим за $\rho(v)$ количество цветов, представленных в вершине v .

Введем обозначение $\rho(G) = \sum_{v \in V(G)} \rho(v)$. Назовем раскраску ρ *k -оптимальной*, если для любой другой раскраски ρ' ребер графа G в k цветов $\rho(G) \geq \rho'(G)$.

Пусть ρ — правильная раскраска ребер графа G в не более чем k цветов. Тогда для каждой вершины $v \in V(G)$ имеем $\rho(v) = d_G(v) \geq \rho'(v)$ для любой другой раскраски ρ' . Поэтому правильная раскраска всегда k -оптимальна.

lm 21. Пусть G — связный граф, отличный от простого цикла нечетной длины. Тогда существует такая раскраска ребер G в два цвета, что в каждой вершине степени не менее двух представлены оба цвета.

proof.

- Если все вершины имеют степень 2, то это четный цикл, утверждение верно.
- Если графе есть вершины нечетной степени, то добавим новую вершину w и соединим со всеми вершинами нечетной степени. Получим граф со всеми четными степенями \tilde{G} .

- Если в графе G есть вершины нечетной степени, то положим $a = w$.
- Если все степени четные, то $\tilde{G} = G$, а в качестве a возьмем вершину степени хотя бы 4, такая есть, так как G не является четным циклом.

В графе \tilde{G} есть эйлеров цикл. Покрасим ребра в порядке обхода по нему, начиная с a и чередуя цвета.

Пусть $x \neq a$. Если $d_G(x) \geq 2$, мы прошли через x не меньше раза, поэтому у x есть два ребра G разных цветов.

Если $a = w$, то ничего проверять не нужно. Тогда остался случай, когда a — вершина степени хотя бы 4. Тогда есть в G есть два ребра инцидентных a разных цветов. \square

Любая раскраска ρ ребер графа в цвета $[1..k]$ — разбиение множества $E(G)$ в объединение непересекающихся множеств E_1, \dots, E_k , где ρ принимает значение i на ребрах E_i .

lm 22. Пусть ρ — k -оптимальная раскраска ребер графа G . Предположим, что вершина w и цвета i и j таковы, что в вершине w хотя бы два раза представлен цвет i и не представлен цвет j . Пусть $H = G(E_i \cap E_j)$, а H_w — компонента графа H , содержащая вершину w . Тогда H_w — простой цикл нечетной длины.

proof. Пусть H_w не является простым циклом нечетной длины.

Построим новую раскраску ρ' , отличающуюся только раскраской ребер H_w : раскрасим из в цвета i и j так, чтобы в каждой вершине x степени $d_{H_w}(x) \geq 2$ были представлены оба цвета, это возможно по лемме 21.

Тогда $\rho'(w) \geq \rho(w) + 1$, а для любой другой вершины x , очевидно, что $\rho'(x) \geq \rho(x)$. Тогда $\rho'(G) > \rho(G)$, поэтому ρ не может быть k -оптимальной. Противоречие. \square

note. Очевидно, что $\chi'(G) \geq \Delta(G)$: все ребра, инцидентные одной вершине наибольшей степени должны быть разноцветными.

thm (Кениг, 1916). Пусть G — двудольный граф (возможно, с кратными ребрами). Тогда $\chi'(G) = \Delta(G)$.

proof. Пусть $\Delta = \Delta(G)$. Рассмотрим Δ -оптимальную раскраску ρ ребер графа G .

Предположим, что ρ — неправильная. Тогда существует вершина v и цвет i такие, что i дважды представлен в вершине v .

Так как $d_G(v) \leq \Delta$, существует цвет j , который не представлен в вершине v . По лемме 22 в G есть нечетный цикл, противоречие. \square

thm (Гупта, 1966). Если граф G двудольный, то $\kappa'(G) = \delta(G)$.

proof. Рассмотрим $\delta(G)$ -оптимальную раскраску ρ ребер графа G .

Предположим, что ρ не является покрывающей. Тогда существует вершина v и цвет i такие, что i не представлен в вершине v .

Так как $d_G(v) \geq \delta$, существует цвет j , который представлен в вершине v дважды. По лемме 22 в G есть нечетный цикл, противоречие. \square

4.13 Теорема Визинга.

def. Через $\mu(G)$ обозначим максимальную кратность ребра графа G , то есть максимум $e_G(\{x\}, \{y\})$ для всех пар $x, y \in V(G)$.

thm (Визинг, 1964). Для любого графа G выполнено $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + \mu(G)$.

proof. Пусть $\mu = \mu(G)$, $\Delta = \Delta(G)$. Достаточно доказать существование правильной раскраски ребер G в $\Delta + \mu$ цветов.

Рассмотрим $(\Delta + \mu)$ -оптимальную раскраску ρ ребер G . Предположим, что эта раскраска неправильная.

Тогда существует вершина u и цвет i_1 , который дважды представлен в вершине u . Так как $d_G(u) < \Delta + \mu$, существует цвет j , не представленный в u .

Пусть $uv_1 \in E(G)$ и $\rho(uv_1) = i_1$. Так как $d_G(v_1) < \Delta + \mu$, существует цвет i_2 , не представленный в v_1 .

Опишем один шаг построения.

Пусть различные цвета i_1, \dots, i_l и ребра $e_1, \dots, e_l \in E(G)$ таковы, что $e_t = uv_t$, $\rho(e_t) = i_t$, цвет i_{t+1} не представлен в вершине v_t .

Будем говорить, что цвет i_{t+1} *выбран для вершины v_t* . Также вершины v_1, \dots, v_t не обязательно различны.

Рассмотрим вершину $v = v_l$. Пусть в наборе v_1, \dots, v_l она встречается m раз. Очевидно, $m \leq \mu$.

Тогда на предыдущих шагах мы рассматривали вершину v и $m - 1$ раз выбирали цвет, не представленный в этой вершине. Поскольку

$$d_G(v_l) + m - 1 < \Delta + \mu,$$

существует цвет i_{l+1} , не представленный в вершине v_l и не выбранный для нее на предыдущих шагах, его мы и выберем.

Определим раскраску данного шага ρ_l : $\rho_l(e_s) = i_{s+1}$ при $s \in [1..l]$ и $\rho_l(e) = \rho(e)$ на остальных ребрах.

st. Раскраска ρ_l k -оптимальна. Цвет i_{l+1} представлен в вершине u .

proof. Для вершин $x \notin \{u, v_1, \dots, v_l\}$ цвета ребер не менялись, поэтому $\rho_l(x) = \rho(x)$.

Рассмотрим вершину w , которая входит в $\{v_1, \dots, v_l\}$ ровно n раз. Пусть $W = v_{s_1} = \dots = v_{s_n}$.

По построению все выбранные для вершины w цвета $i_{s_1+1}, \dots, i_{s_n+1}$ различны, не представлены в вершине w в раскраске ρ и представлены в раскраске ρ_l .

Цвета i_{s_1}, \dots, i_{s_n} представлены в вершине w в раскраске ρ .

Все отличные от e_{s_1}, \dots, e_{s_n} ребра, инцидентные w , не изменили свой цвет, поэтому остальные цвета одинаково представлены в w в раскрасках ρ и ρ_l , поэтому $\rho_l(w) \geq \rho(w)$.

Рассмотрим вершину u . В результате перекрашивания инцидентных u ребер e_1, \dots, e_l из их цветов исчез i_1 , и появился i_{l+1} . Но так как цвет i_1 был представлен в u в раскраске ρ хотя бы дважды, он представлен и в раскраске ρ .

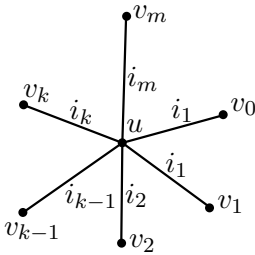
Тогда $\rho_l(u) \geq \rho(u)$ и $\rho_l(G) \geq \rho(G)$, следовательно, раскраска ρ_l оптимальна. Так как ρ тоже оптимальная, $\rho(G) = \rho_l(G)$, поэтому цвет i_{l+1} был представлен в вершине u и в раскраске ρ . \square Пусть $e_{l+1} = uv_{l+1}$ — ребро цвета $\rho(e_{l+1}) = \rho(G)$.

Так мы завершили еще один шаг.

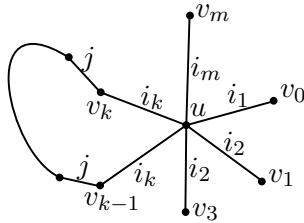
Поскольку у u конечное число соседей, на некотором шаге мы получим $i_{m+1} = i_k$. То есть v_m не совпадает с v_{k-1} (иначе мы выбрали бы $i_{m+1} \neq i_k$). Так как в вершинах v_{k-1} и v_m в раскраске ρ не представлен цвет i_k , а в v_k представлен, все три вершины v_{k-1}, v_k, v_m различны.

Рассмотрим $(\Delta + \mu)$ -оптимальные раскраски ρ_{k-1} и ρ_m (считаем, что $\rho_0 = \rho$):

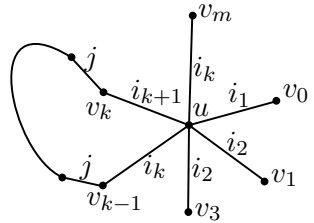
- В обеих раскрасках в вершине u дважды представлен цвет i_k .
- Цвет j не представлен в вершине u ни в одной из раскрасок.



(a) Раскраска ρ



(b) Раскраска ρ_k



(c) Раскраска ρ_m

Пусть E_s — множество всех ребер цвета s в раскраске ρ_{k-1} , E'_s — множество всех ребер цвета s в раскраске ρ_m . $H = G(E_{i_k} \cup E'_j)$ и $H' = G(E'_{i_k} \cup E'_j)$.

По лемме 22 из оптимальности раскрасок следует, что содержащие вершину u компоненты связности графов H и H' — простые циклы нечетной длины.

Тогда $d_H(v_k) = 2$: из v_k выходит ребро uv_k цвета $\rho_{k-1}(uv_k) = i_k$ и ребро цвета j . Для всех ребер e цикла H , кроме uv_k цвет $\rho_{k-1}(e) = \rho_m(e)$, поэтому $d_{H'}(v_k) = d_H(v_k) - 1 = 1$.

Вершины v_k и u лежать в одной компоненте связности H' , которая должна быть нечетным циклом. Противоречие.

Следовательно, ρ — искомая правильная раскраска в $\Delta + \mu$ цветов. \square

4.14 Теорема Гупты.

thm (Гупта, 1974). Для любого графа G выполняется неравенство $\kappa'(G) \geq \delta(G) - \mu(G)$.

proof. Пока нет \square

4.15 Хроматический многочлен графа.

def. Для любого натурального числа k обозначим через $\chi_G(k)$ количество правильных раскрасок вершин графа G в k цветов.

Функция $\chi_G(k)$ называется хроматическим числом графа G .

note. • $\chi_G(\chi(G)) \neq 0$

• $\forall k < \chi(G): \chi_G(k) = 0$

lm 23. Пусть G — непустой граф, а $e = uv$ — его ребро. Тогда

$$\chi_{G-uv}(k) = \chi_G(k) + \chi_{G \cdot uv}(k).$$

proof. Разобьем правильные раскраски графа $G - e$ в k цветов на два типа:

1. где вершины u и v разного цвета;
2. где вершины u и v одного цвета.

Количество раскрасок первого типа равно $\chi_G(k)$, а второго — $\chi_{G \cdot ab}(k)$.

\square

thm. Для любого графа G без петель выполнены следующие утверждения:

1. Функция $\chi_G(k) \in \mathbb{Z}[k]$ — унитарный многочлен с целыми коэффициентами степени $v(G)$;
2. Знаки коэффициентов $\chi_G(k)$ чередуются, причем старший не меньше нуля.

proof. Индукция по размеру графа G и количеству ребер.

База: Для пустого графа на n вершинах $\overline{K_n}$, очевидно, $\chi_{\overline{K_n}}(k) = k^n$, поэтому все утверждения верны.

Переход: Пусть G — непустой граф, e — его ребро. По лемме ??

$$\chi_G(k) = \chi_{G-e}(k) - \chi_{G \cdot e}(k).$$

Для меньших графов $G \cdot e$ и $G - e$ утверждения доказаны:

- $\chi_{G-e}(k)$ — многочлен степени $v(G)$;
- $\chi_{G \cdot e}(k)$ — многочлен степени $v(G \cdot e) = v(G) - 1$.

Старший коэффициент $\chi_G(k)$ равен старшему коэффициенту $\chi_{G-e}(k)$, то есть 1.

Так как $\deg(\chi_{G \cdot e}) = \deg(\chi_{G-e}) - 1$, в χ_G чередование знаков сохранится.

□

4.16 Хроматический многочлен и компоненты связности. Кратность корня 0 хроматического многочлена графа.

lm 24. Пусть G_1, \dots, G_n — все компоненты графа G . Тогда $\chi_G(k) = \prod_{i=1}^n \chi_{G_i}(k)$.

proof. Очевидно □

thm. Для любого графа G число 0 является корнем $\chi_G(k)$ кратности, равной количеству компонент связности.

proof. 0 — корень любого хроматического многочлена, так как раскрасок в 0 цветов быть не может.

Докажем, что для связного графа G кратность корня 0 у $\chi_G(k)$ равна 1. Далее по лемме ?? получим утверждение теоремы.

Пусть $v(G) = n$. Индукцией по количеству вершин докажем для связного графа G , что коэффициент при k многочлена $\chi_G(k)$ не равен 0 и имеет такой же знак как $(-1)^n$.

База: $n = 0$, очевидно.

Переход: пусть G — связный граф с $v(G) = n \geq 2$, для меньшего n утверждение доказано, T — остовное дерево графа G . $\chi_T(k) = k(k-1)^{n-1}$.

Существует последовательность графов $G_0 = T, \dots, G_n = G$, в которой $G_{i+1} = G_i + e$, где $e \notin E(G_i)$.

Пусть a_i — коэффициент при k многочлена $\chi_{G_i}(k)$. Докажем по индукции, что $a_i \neq 0$ и имеет такой же знак, что и $(-1)^{n-1}$.

База: $i = 0$, очевидно, по формуле для дерева.

Переход: пусть $a_i \neq 0$ и имеет знак $(-1)^{n-1}$. По лемме ?? $\chi_{G_{i+1}}(k) = \chi_{G_i}(k) - \chi_{G_i \cdot e}(k)$.

Граф $G_i \cdot e_i$ связан. По индукционному предположению у многочлена $\chi_{G_i \cdot e_i}(k)$ знак коэффициента b при k такой же, как $(-1)^{n-2}$, то есть отличается от знака a_i .

Поэтому $a_{i+1} = a_i - b$ имеет такой же знак, что и a_i и отличный от 0.

4.17 Хроматический многочлен и блоки. Кратность корня 1 хроматического многочлена графа.

lm 25. Пусть G — связный граф с n блоками B_1, \dots, B_n . Тогда

$$\chi_G(k) = \left(\frac{1}{k}\right)^{n-1} \cdot \prod_{i=1}^n \chi_{B_i}(k).$$

proof. Индукция по количеству блоков.

База: для двусвязного графа, очевидно, это один блок.

Переход: Пусть $n \geq 2$. НУО, B_n — крайний блок, содержащий ровно одну точку сочленения a .

В графе $G' = G - \text{Int}(B_n)$ ровно на один блок меньше, так как нет B_n . По индукционному продолжению для G' :

$$\chi_{G'}(k) = \left(\frac{1}{k}\right)^{n-2} \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \chi_i(k).$$

Рассмотрим любую правильную раскраску ρ графа G' в k цветов. Попробуем покрасить вершины B_n с соблюдением правильности.

Единственное ограничение — цвет вершины a уже зафиксирован, поэтому раскрасок в k раз меньше.

Следовательно, $\chi_G(k) = \frac{1}{k} \cdot \chi_{G'}(k) \cdot \chi_{B_n}(k)$.

□

thm. Пусть G — связный граф с более чем одной вершиной. Тогда 1 — корень многочлена $\chi_G(k)$ кратности, равной количеству блоков графа G .

proof. Так как в каждом блоке хотя бы две вершины, достаточно доказать, что у хроматического многочлена графа без точек сочленения число 1 является корнем кратности 1, а далее применить лемму ??.

Для $H \simeq K_2$ утверждение очевидно. Разберем второй вариант — двусвязный граф.

1 точно корень, так как раскрасить в один цвет двусвязный граф невозможно.

Докажем, что $\chi'_H(1) \neq 0$, тогда мы покажем, что 1 имеет кратность 1. Для этого докажем, что для двусвязного графа H на m вершинах $\chi'_H(1) \neq 0$ и имеет такой же знак, как $(-1)^m$.

Индукция по $v(H)$.

База: Если H — полный граф на трех вершинах, то

$$\chi_{K_3}(k) = k(k-1)(k-2) \quad \chi'_{K_3}(1) = 1(1-2) = -1.$$

Переход: Пусть $v(H) > 3$. Тогда по теореме ?? существует такое ребро $e \in E(H)$, что граф $H \cdot e$ двусвязен.

По лемме 21 $\chi'_H(1) = \chi'_{H-e}(1) - \chi'_{H \cdot e}(1)$.

Так как $v(H \cdot e) < e(H)$, если граф $H - e$ двусвязен, то уже доказано, что $\chi'_{H-e}(1)$ имеет тот же знак, что и $(-1)^m$.

Если $H - e$ односвязен, то он имеет хотя бы два блока. Тогда для него верна лемма ??.

Так как хроматический многочлен каждого блока имеет корень 1, причем для недвусвязного графа $H - e$ его хроматический многочлен имеет 1 корнем кратности хотя бы 2. И тогда $\chi'_H(1) = 0$, разность тоже не может быть равна нулю, а знак сохраняется из $H \cdot e$.

□