Конспект по теории графов
VI семестр, 2022 год
Современное программирование, факультет Математики и Компьютерных наук, СПбГУ
(лекции Карпова Дмитрия Валерьевича)

Вячеслав Тамарин

22 февраля 2022 г.

Оглавление

Исходный код на `https://github.com/tamarinvs19/theory_university`

Глава 1

Пути и циклы

Лекция 1: 15 feb

Все материалы можно найти на сайте https://logic.pdmi.ras.ru/~dvk/MKN/graph_th.

note. В этом разделе возможны кратные ребра.

1.1 Эйлеров путь и цикл

def. Эйлеров путь в графе G — путь, проходящий по каждому ребру ровно один раз.

Эйлеров цикл в графе G — цикл, проходящий по каждому ребру ровно один раз.

Граф G — эйлеров, если в нем есть эйлеров цикл.

thm. Связный граф G — эйлеров, согда степени всех вершин G четны.

cor. *Связный граф G имеет эйлеров путь, согда в нем либо нет вершин с нечетной степенью, либо их ровно две.*

1.2 Гамильтонов путь и цикл

def. Гамильтонов путь — простой путь, проходящий по каждой вершине графа.

Гамильтонов цикл — простой цикл, проходящий по каждой вершине графа.

Гамильтонов граф — граф, в котором есть гамильтонов цикл.

lm. *Пусть $n > 2$, $a_1 \dots a_n$ — максимальный путь (по ребрам) в графе G, причем $d_G(a_1) + d_G(a_n) \geqslant n$. Тогда в графе есть цикл длины n.*

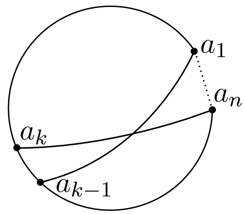
$N_G(v)$ — все вершины достижимые из вершины v в графе G.

$d_G(v)$ — степень вершины v в графе G.

proof. Разберем несколько случаев:

- Если a_1 и a_n смежны, то $a_1 a_2 \dots a_n$ — искомый цикл.
- Иначе $N_G(a_1), N_G(a_n) \subset \{a_2, \dots a_{n-1}\}$, так как удлинить путь нельзя.

  Если есть вершина a_k смежная с a_n и вершина a_{k+1} смежная с a_1, то в графе есть цикл из n вершин



$$a_1 a_2 \dots a_k a_n a_{n-1} \dots a_{k+1}.$$

  Пусть $N_G(a_n) = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_l}\}$.

  Если хотя бы одна из вершин $a_{i_1+1}, \dots, a_{i_l+1}$ лежит в $N_G(a_1)$, то, согласно утверждению выше, в графе есть цикл длины n.

  Иначе $d_G(a_1) \leqslant n - 1 - d_G(a_n)$, а это противоречит условию.

□

thm (Критерий Оре, 1960). 1. Если для любых двух несмежных вершин $u, v \in V(G)$ выполняется

$$d_G(u) + d_G(v) \geqslant v(G) - 1,$$

то в графе G есть гамильтонов путь.

2. Если $v(G) > 2$ и для любых двух несмежных вершин $u, v \in V(G)$ выполняется
$$d_G(u) + d_G(v) \geqslant v(G),$$
то в графе G есть гамильтонов цикл.

proof.

1. Докажем первое утверждение
    - Для двух вершин все очевидно. Далее предположим, что $v(G) > 2$.
    - Рассмотрим две вершины a и b и предположим, что они несмежные. По условию $d_G(a) + d_G(b) \geqslant v(G) - 1$, поэтому $N_G(a) \cap N_G(b) \neq \varnothing$, следовательно, a и b связаны. Тогда граф G связен.
    - Теперь найдем наибольший простой путь $a_1 \dots a_n$ в графе G. Так как вершин больше двух, и граф связен, $n \geqslant 3$. Предположим, что это не гамильтонов путь, то есть $n \leqslant v(G) - 1$.
    - Если $a_1 \dots a_n$ не цикл, то по лемме 1.2 существует цикл Z из n вершин, так как
    $$d_G(a_1) + d_G(a_n) \geqslant v(G) - 1 \geqslant n.$$
    - Так как граф связен, существует не вошедшая в этот цикл вершина, смежная с хотя бы одной из вершин цикла. Тогда из нее и цикла можно получить путь длиной $n + 1$, противоречие.
2. По первому пункту уже есть гамильтонов путь, обозначим его за $a_1 \dots a_n$, где $n = v(G)$.

    Если a_1 и a_n смежны, то мы нашли гамильтонов цикл. Иначе
    $$d_G(a_1) + d_G(a_n) \geqslant v(G) = n.$$
    А тогда по лемме 1.2 в графе есть гамильтонов цикл.

□

cor (Критерий Дирака, 1952). *1. Если $\delta(G) \geqslant \frac{v(G)-1}{2}$, то в графе G есть гамильтонов путь.*

2. Если $\delta(G) \geqslant \frac{v(G)}{2}$, то в графе G есть гамильтонов цикл.

lm. *Пусть вершины a и b не смежны и $d_G(a)+d_G(b) \geqslant v(G)$. Тогда граф G гамильтонов, согда граф $G+ab$ тоже гамильтонов.*

def. Рассмотрим произвольный граф G. Пока существуют две вершины $a, b \in V(G)$, для которых $d_G(a)+d_G(b) \geqslant v(G)$, добавим в граф соответствующее ребро ab. Полученный граф называется замыканием графа G, обозначается $C(G)$.

lm (Хватал, 1974). *Граф G гамильтонов, согда его замыкание $C(G)$ — гамильтонов граф.*

lm (о единственности замыкания). *Замыкание графа G определено однозначно, то есть не зависит от порядка добавления ребер.*

lm. *Пусть граф G гамильтонов. Тогда для любого множества $S \subset V(G)$ выполняется неравенство $c(G-S) \leqslant |S|$.*

thm (Хватал, Эрдёшь, 1972). Пусть $v(G) \geqslant 3$ и $\kappa(G) \geqslant \alpha(G)$, тогда G гамильтонов.

def. Пусть $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ и $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. Последовательность $\{a_i\}_{i\in[1..n]}$ мажорирует последовательность $\{b_i\}_{i\in[1..n]}$, если $a_i \geqslant b_i$ для всех $i \in [1..n]$.

def. Пусть G — граф на n вершинах. Степенная последовательность графа G — упорядоченная последовательность степеней его вершин $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_n$.

def. Граф G мажорирует граф H, если $v(G) = v(H)$ и степенная последовательность графа G мажорирует степенную последовательность графа H.

def. Последовательность $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ называется гамильтоновой, если $a_n \leqslant n-1$ и любой граф на n вершинах, степенная последовательность которого мажорирует $a_1, \ldots, a_n$ имеет гамильтонов цикл.

thm (Хватал, 1972). Пусть $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant n-1$, $n \geqslant 3$. Следующие два утверждения равносильны:

1. Последовательность $\{a_i\}$ гамильтонова.
2. Для каждого $s < \frac{n}{2}$ из $a_s \leqslant s$ следует, что $a_{n-s} \geqslant n-s$.

1.3 Гамильтонов цикл в кубе графа

def. Для графа G и натурального d обозначим за G^d граф на вершинах из $V(G)$, в котором вершины x и y смежны, согда $\mathrm{dist}_G(x, y) \leqslant d$.

thm (Хартланд, Капур, 1969)**.** Для любого связного графа G с $v(G) \geqslant 3$ и ребра $e \in E(G)$ в графе G^3 существует гамильтонов цикл, содержащий ребро e.

def. Обхват графа G ($g(G)$) — длина наименьшего цикла в графе G.

thm (Татт)**.** Пусть $k, g, n \in \mathbb{N}$, причем $k, g \geqslant 3$, $kn \equiv 0 \pmod 2$ и

$$n > \frac{k(k-1)^{g-1} - 2}{k-2}.$$

Тогда существует регулярный граф G степени k с $g(G) = g$ и $v(G) = n$.

Глава 2

Паросочетания

2.1 Определения

def. Множество вершин $U \subset V(G)$ называется независимым, если никакие две его вершины не смежны. Обозначим через $\alpha(G)$ количество вершин в максимальном независимом множестве графа G.

def. Множество ребер $M \subset E(G)$ называется паросочетанием, если никакие два его ребра не имеют общей вершины. Обозначим через $\alpha'(G)$ количество ребер в максимальном паросочетании графа G.

def. Будем говорить, что множество вершин $W \subset V(G)$ покрывает ребро $e \in E(G)$, если существует вершина $w \in W$, инцидентная e. Будем говорить, что множество ребер $F \subset E(G)$ покрывает вершину $v \in V(G)$, если существует ребро $f \in F$, инцидентное v.

def. Паросочетание M графа G называется совершенным, если оно покрывает все вершины графа.

def. Множество вершин $W \subset V(G)$ называется вершинным покрытием, если оно покрывает все ребра графа. Обозначим через $\beta(G)$ количество вершин в минимальном вершинном покрытии графа G.

def. Множество ребер $F \subset E(G)$ называется реберным покрытием, если оно покрывает все вершины графа. Обозначим через $\beta'(G)$ количество ребер в минимальном реберном покрытии графа G.

lm. 1. *$U \subset V(G)$ — независимое множество, согда $V(G) \setminus U$ — вершинное покрытие.*

2. *$\alpha(G) + \beta(G) = v(G)$.*

thm (Галлаи, 1959)**.** Пусть G — граф с $\delta(G) > 0$. Тогда $\alpha'(G) + \beta'(G) = v(G)$.

2.2 Чередующиеся и дополняющие пути

def. Пусть M — паросочетание в графе G.

1. Назовем путь M-**чередующимся**, если в нем чередуются ребра из M и ребра не из M.

2. Назовем M-чередующийся путь M-**дополняющим**, если его начало и конец не покрыты паросочетанием M.

thm (Берж, 1957)**.** Паросочетание M в графе G максимально, согда нет M-дополняющих путей.

2.3 Паросочетания в двудольном графе

Пусть $G = (V_1, V_2, E)$ — двудольный граф с долями V_1 и V_2.

thm (Холл, 1935)**.** В двудольном графе G есть паросочетание, покрывающее все вершины доли V_1, согда для любого множества $U \subset V_1$ выполняется $|U| \leqslant |N_G(U)|$.

cor. *В двудольном графе $G = (V_1, V_2, E)$ все вершины из V_1 имеют степени не меньше k, а все вершины V_2 имеют степени не больше k. Тогда есть паросочетание, покрывающее V_1.*

cor (Кенинг, 1916)**.** *Пусть $G = (V_1, V_2, E)$ — регулярный двудольный граф степени k. Тогда G — объединение k своих совершенных паросочетаний.*

thm (Кенинг, 1931)**.** Пусть G — двудольный граф. Тогда $\alpha'(G) = \beta(G)$.

cor. *Пусть G — двудольный граф с $\delta(G) > 0$. Тогда $\alpha(G) = \beta'(G)$.*

2.4 Паросочетания с предпочтениями

def. Пусть для каждой вершины $v \in V(G)$ задано линейное отношение (нестрогого) порядка $\leqslant_v$ на множестве всех инцидентных v ребер из $E(G)$. Тогда $\leqslant = \{\leqslant_v\}_{v \in V(G)}$ — множество предпочтений.

def. Паросочетание M называется стабильным для множества предпочтений $\leqslant$, если для любого ребра $d \notin M$ существует такое ребро $e \in M$, что e и f имеют общий конец и $f \leqslant_v e$.

thm (Гейл, Шепли, 1962)**.** Пусть G — двудольный граф. Тогда для любого множества предпочтений в графе G существует стабильное паросочетание.

2.5 Паросочетания в произвольном графе

def. Для произвольного графа G обозначим через $o(G)$ количество нечетных компонент связности графа G.

thm (Татт, 1947)**.** В графе G существует совершенное паросочетание, согда для любого $S \subset V(G)$ выполняется условия $o(G - S) \leqslant |S|$

2.6 Совершенное паросочетание в кубическом графе

def. Граф, все вершины которого имеют степень 3, называется кубическим.

def. Мост графа — ребро, не входящее ни в один цикл.

thm (Петерсон, 1891)**.** Пусть G — связный кубический граф, в котором не более двух мостов. Тогда в графе G есть совершенное паросочетание.

thm (Плешник, 1972)**.** Пусть G — регулярный граф степени k с четным числом вершин, причем $\lambda(G) \geqslant k-1$, а граф G' получен из G удалением не более, чем $k-1$ ребер. Тогда в графе G' есть совершенное паросочетание.

cor. *Пусть G — регулярный граф степени k с четным числом вершин, причем $\lambda(G) \geqslant k - 1$. Тогда для любого ребра $e \in E(G)$ существует совершенное паросочетание графа G, содержащее e.*

2.7 Факторы регулярного графа

def. k-фактор графа G — остовный регулярный подграф степени k графа G.

thm (Петерсен, 1891)**.** У регулярного графа степени $2k$ есть 2-фактор.

cor. *Следующие утверждения:*

1. *Регулярный граф степени $2k$ есть объединение k своих 2-факторов.*
2. *Для любого $r \leqslant k$ регулярный граф степени $2k$ имеет $2r$-фактор.*

thm (Томасен, 1981)**.** Пусть G — граф, степени всех вершин которого равны k или $k+1$, а $r \geqslant k$. Тогда существует остовный подграф H графа G, степени всех вершин которого равны либо r, либо $r+1$.

cor (Lovasz, 1970)**.** *Пусть $s, t \in \mathbb{N}$. Тогда любой граф максимальной степени $s+t-1$ представляется в виде объединения графа максимальной степени не более t.*