Билеты к экзамену по теории графов
2022 год
факультет Математики и Компьютерных наук, СПбГУ
(лекции Карпова Дмитрия Валерьевича)

Вячеслав Тамарин

21 июня 2022 г.

Оглавление

Исходный код на https://github.com/tamarinvs19/theory_university

Глава 1

Пути и циклы

1.1 Существование гамильтонова пути и цикла: теорема Оре

lm 1. *Пусть $n > 2$, $a_1 \dots a_n$ — максимальный путь (по ребрам) в графе G, причем $d_G(a_1) + d_G(a_n) \geqslant n$. Тогда в графе есть цикл длины n.*

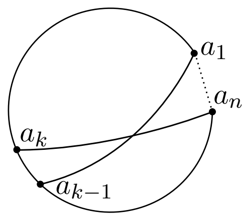
$N_G(v)$ — все вершины смежные с вершиной v в графе G.

$d_G(v)$ — степень вершины v в графе G.

proof. Разберем несколько случаев:

- Если a_1 и a_n смежны, то $a_1 a_2 \dots a_n$ — искомый цикл.
- Иначе $N_G(a_1), N_G(a_n) \subset \{a_2, \dots a_{n-1}\}$, так как удлинить путь нельзя.

  Если есть вершина a_k смежная с a_n и вершина a_{k+1} смежная с a_1, то в графе есть цикл из n вершин

  $$a_1 a_2 \dots a_k a_n a_{n-1} \dots a_{k+1}.$$

  Пусть $N_G(a_n) = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_l}\}$.

Если хотя бы одна из вершин $a_{i_1+1}, \ldots, a_{i_l+1}$ лежит в $N_G(a_1)$, то, согласно утверждению выше, в графе есть цикл длины n.

Иначе $d_G(a_1) \leqslant n - 1 - d_G(a_n)$, а это противоречит условию.

□

thm (Критерий Оре, 1960). 1. Если для любых двух несмежных вершин $u, v \in V(G)$ выполняется

$$d_G(u) + d_G(v) \geqslant v(G) - 1,$$

то в графе G есть гамильтонов путь.

2. Если $v(G) > 2$ и для любых двух несмежных вершин $u, v \in V(G)$ выполняется

$$d_G(u) + d_G(v) \geqslant v(G),$$

то в графе G есть гамильтонов цикл.

proof.

1. Докажем первое утверждение

   - Для двух вершин все очевидно. Далее предположим, что $v(G) > 2$.
   - Рассмотрим две вершины a и b и предположим, что они несмежные. По условию $d_G(a) + d_G(b) \geqslant v(G) - 1$, поэтому $N_G(a) \cap N_G(b) \neq \varnothing$, следовательно, a и b связаны. Тогда граф G связен.
   - Теперь найдем наибольший простой путь $a_1 \ldots a_n$ в графе G. Так как вершин больше двух, и граф связен, $n \geqslant 3$. Предположим, что это не гамильтонов путь, то есть $n \leqslant v(G) - 1$.
   - Если $a_1 \ldots a_n$ не цикл, то по лемме 1 существует цикл Z из n вершин, так как

$$d_G(a_1) + d_G(a_n) \geqslant v(G) - 1 \geqslant n.$$

   - Так как граф связен, существует не вошедшая в этот цикл вершина, смежная с хотя бы одной из вершин цикла. Тогда из нее и цикла можно получить путь длиной $n + 1$, противоречие.

2. По первому пункту уже есть гамильтонов путь, обозначим его за $a_1 \dots a_n$, где $n = v(G)$.

   Если a_1 и a_n смежны, то мы нашли гамильтонов цикл. Иначе

   $$d_G(a_1) + d_G(a_n) \geqslant v(G) = n.$$

   А тогда по лемме 1 в графе есть гамильтонов цикл.

□

cor 1 (Критерий Дирака, 1952)**.** 1. *Если $\delta(G) \geqslant \frac{v(G)-1}{2}$, то в графе G есть гамильтонов путь.*

2. *Если $\delta(G) \geqslant \frac{v(G)}{2}$, то в графе G есть гамильтонов цикл.*

1.2 Существование гамильтонова пути и цикла: замыкание Хватала

lm 2. *Пусть вершины a и b не смежны и $d_G(a) + d_G(b) \geqslant v(G)$. Тогда граф G гамильтонов, согда граф $G + ab$ тоже гамильтонов.*

proof.

- Если G гамильтонов, то и граф с дополнительным ребром ab тоже гамильтонов.
- Докажем следствие в обратную сторону. Пусть граф $G + ab$ гамильтонов.
  - Если гамильтонов цикл не проходит по ребру ab, то он есть и в графе G.
  - Если проходит по ab, то в G есть гамильтонов путь, причем сумма степеней его концов не меньше $v(G)$, тогда по лемме 1 в графе G есть гамильтонов цикл.

□

def (Замыкание графа). Рассмотрим произвольный граф G. Пока существуют две вершины $a, b \in V(G)$, для которых $d_G(a) + d_G(b) \geqslant v(G)$, добавим в граф соответствующее ребро ab. Полученный граф называется замыканием графа G, обозначается $C(G)$.

cor 2 (Хватал, 1974). *Граф G гамильтонов, согда его замыкание $C(G)$ — гамильтонов граф.*

lm 3 (о единственности замыкания). *Замыкание графа G определено однозначно, то есть не зависит от порядка добавления ребер.*

proof. Пусть в результате двух различных цепочек добавления ребер были получены различные графы G_1 и G_2.

Тогда есть ребра, добавленные при построении G_1, которых нет в G_2. Найдем такое ребро ab, которое было добавлено первым.

Обозначим граф, к которому мы добавили ab, за G_0. Тогда $d_{G_0}(a) + d_{G_0}(b) \geqslant v(G)$.

С другой стороны, все ребра, добавленные к G при построении G_0, добавлены и G_2. Поэтому, $d_{G_2}(a) + d_{G_2}(b) \geqslant v(G)$, следовательно, в G_2 нет ребра, которое мы должны были добавить. Противоречие. $\square$

1.3 Критерий существования гамильтонова цикла через связность.

lm 4. *Пусть граф G гамильтонов. Тогда для любого множества $S \subset V(G)$ выполняется неравенство $c(G - S) \leqslant |S|$*[1].

proof. Пусть $c(G-S) = c$ и $U_1, \dots, U_c$ — компоненты связности графа $G - S$, Z — гамильтонов цикл графа G.

Начнем обходить цикл Z, начиная с вершины из множества S. Пусть s_i — вершина, которая предшествует первому входу цикла в компоненту U_i.

Все s_i различны, причем принадлежат S, так как не могут входить ни в одну из компонент (иначе это одна компонента, а тогда вершина неправильная). Отсюда следует требуемое неравенство. $\square$

[1] $c(G)$ — число компонент связности в графе G

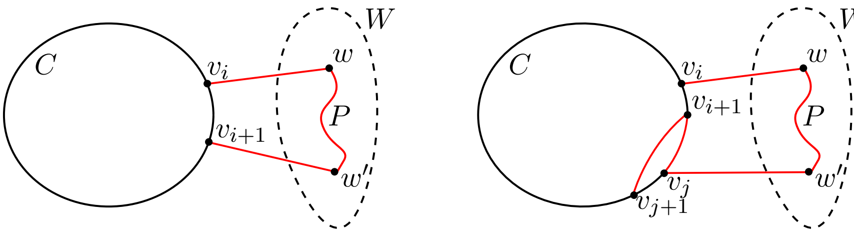
thm (Хватал, Эрдёшь, 1972). Пусть $v(G) \geqslant 3$ и $\kappa(G) \geqslant \alpha(G)$[2], тогда G гамильтонов.

proof.

- Если в графе нет циклов, то есть $\kappa(G) == 1$. Тогда точно $\alpha(G) \geqslant 2$, так как вершин не меньше трех. По условию такой случай невозможен.

- Пусть $\kappa(G) = k$. Выберем цикл C максимальной длины в графе G. Пусть $C = v_1 v_2 \ldots v_n$[3].

- Пусть C не гамильтонов. Рассмотрим компоненту связности W графа $G - V(C)$. Заметим, что $N_G(W) \subset V(C)$.



(a) (b)

- (a) Обозначим за $M = \{v_{i+1} \colon v_i \in N_G(W)\}$. Докажем, что $M \cap N_G(W) = \varnothing$.

  - Пусть $v_i, v_{i+1} \in N_G(W)$ и $w, w' \in W$, $v_i w, v_{i+1} w' \in E(G)$, P — ww'-путь по вершинам из W.
  - Тогда можно удлинить цикл C хотя бы на одно ребро, заменив ребро $v_i v_{i+1}$ на ребро $v_i w$, далее путь P, потом ребро $w' v_{i+1}$. Но цикл C должен был быть максимальным. Противоречие.

  Это означает, что $N_G(W)$ отделяет непустое множество M от W, следовательно $|M| = |N_G(W)| \geqslant k$

[2] $\kappa(G)$ — вершинная связность, $\alpha(G)$ — размер максимального независимого множества

[3] Считаем, что нумерация циклическая

- (b)
  - Теперь предположим, что вершины $v_{i+1}, v_{j+1} \in M$ смежны. Пусть $w, w' \in W$ и $v_i w, v_j w' \in E(G)$ и P — ww'-путь по вершинам компоненты W.
  - Рассмотрим цикл Z, проходящий сначала участок $v_{j+1}v_{j+2}\dots v_i$ цикла C, затем ребро $v_i w$, далее путь P и ребро $w'v_j$, потом участок $v_j v_{j-1}\dots v_{i+1}$ по циклу C и ребро $v_{i+1}v_{j+1}$. Построенный цикл Z длиннее C, противоречие.

  Из этого следует, что $M \cup \{w\}$ — независимое множество с $|M|+1 > k$ вершин. А это противоречит условию $\alpha(G) \leqslant k$.

- В итоге, цикл C должен быть гамильтоновым.

□

1.4 Теорема Хватала о гамильтоновых последовательностях.

def.

1. Пусть $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots a_n$ и $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \dots b_n$ — две упорядоченные последовательности. Последовательность $\{a_i\}_{i\in[1..n]}$ мажорирует последовательность $\{b_i\}_{i\in[1..n]}$, если $\forall i \in [1..n]\colon a_i \geqslant b_i$.
2. Пусть G — граф на n вершинах. Степенная последовательность графа G — упорядоченная последовательность степеней его вершин $d_1 \leqslant \dots d_n$.
3. Будем говорить, что граф G мажорирует граф H, если $v(G) = v(H)$ и степенная последовательность графа G мажорирует степенную последовательность графа H.
4. Последовательность $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots a_n$ называется гамильтоновой, если $a_n \leqslant n-1$ и любой граф на n вершинах, степенная последовательность которого мажорирует $a_1, \dots a_n$, имеет гамильтонов цикл.

thm (Критерий Хватала, 1972)**.** Пусть $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots \leqslant a_n \leqslant n-1$, $n \geqslant 3$. Следующие два утверждения равносильны:

1. Последовательность $a_1, \dots a_n$ гамильтонова.
2. Для каждого $s < \frac{n}{2}$ из $a_s \leqslant s$ следует $a_{n-s} \geqslant n - s$.

proof.

$2 \implies 1$ Предположим, что наша последовательность негамитльтонова. Рассмотрим негамильтонов граф G на n вершинах с максимальным числом ребер, степенная последовательность $\{d_i\}_{i\in[1..n]}$ которого мажорирует $\{a_i\}_{i\in[1..n]}$.

По лемме 2 граф G совпадает со своим замыканием, так как граф максимальный, и сумма степеней любых двух несмежных вершин менее n.

Рассмотрим две несмежные вершины $x, y \in V(G)$ с максимальной суммой $d_G(x) + d_G(y)$, такие есть, иначе граф полный, и точно гамильтонов. Не умаляя общности $d_G(x) \leqslant d_G(y)$.

Так как $d_G(x) + d_G(y) < n$, имеем $d_G(x) = s < \frac{n}{2}$, поэтому $d_G(y) \leqslant n - 1 - s$.

Пусть W_x — множество всех вершин графа G, отличных от x и не смежных с x, W_y — аналогично для y.

$$|W_x| = n-1-d_G(x) = n-1-s; \qquad |W_y| = n-1-d_G(y) \geqslant d_G(x) = s.$$

Степени всех вершин множества W_y не превосходят s, так как s дает максимальную сумму с $d_G(y)$. Поэтому $a_s \leqslant d_s \leqslant s$. В множестве $W_x \cup \{x\}$ будет $n - s$ вершин, причем их степени не превосходят $d_G(y) \leqslant n - 1 - s$, поэтому $a_{n-s} \leqslant d_{n-s} \leqslant n - s - 1$.

Но это противоречит условию. Следовательно, последовательность $\{a_i\}$ гамильтонова.

$1 \implies 2$ Докажем, что последовательность $\{a_i\}$ не может быть гамильтоновой, если не выполнено второе условие.

Пусть $h < \frac{n}{2}, a_h \leqslant h$ и $a_{n-h} \leqslant n - h - 1$. Построим негамильтонов граф $G_{n,h}$, степенная последовательность которого мажорирует $\{a_i\}$.

Пусть $A = \{v_1, \dots, v_h\}$, $B = \{v_{n-h+1}, \dots, v_n\}$, $D = \{v_{h+1}, \dots, v_{n-h}\}$. Граф $G_{n,h}$ будет объединением $K_{h,h}$ с долями A и B и K_{n-h} на вершинах $B \cup D$:

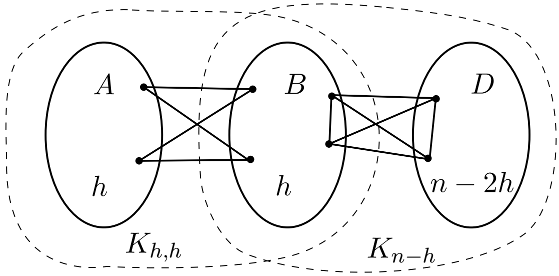


Рис. 1.2: Граф $G_{n,h}$

Здесь все степени в A равны h, в B — $n-1$, в D — $n-h-1$. Степенная последовательность выглядит следующим образом:

$$\underbrace{h,\ldots,h}_{h},\underbrace{n-h-1,\ldots,n-h-1}_{n-2h},\underbrace{n-1,\ldots,n-1}_{h}.$$

Эта последовательность мажорирует $a_1,\ldots,a_n$.

Всего компонент связности $c(G_{n,h}-B)=h+1=|B|$, это D и отдельные вершины в A.

Так как $c(G_{n,h}-B)>h=|B|$, можем применить лемму **??** и получить, что $G_{n,h}$ не является гамильтоновым.

□

1.5 Гамильтонов цикл в кубе связного графа.

def. Для графа G и натурального числа d обозначим через G^d граф на вершинах из $V(G)$, в котором вершины x и y смежны, согда $\mathrm{dist}_G(x,y)\leqslant d$.

thm (Чартранд, Капур, 1969)**.** Для любого связного графа G с $v(G)\geqslant 3$ и ребра $e\in E(G)$ в графе G^3 существует гамильтонов цикл, содержащий ребро e.

proof. Достаточно доказать теорему для дерева, так как иначе можем просто выделить остовное.

Будем доказывать индукцией по количеству вершин.

База: для трех или четырех вершин очевидно, так как G^3 — полный граф.

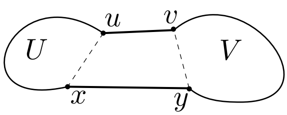
Переход: пусть для меньших деревьев теорема доказана.

Рассмотрим ребро uv. G — дерево, поэтому в $G - uv$ разбивается на две компоненты связности $U \ni u$ и $V \ni v$. Пусть $G_u = G(U)$, $G_v = G(V)$. НУО $|U| \geqslant 3$. Тогда в G_u^3 по предположению индукции есть гамильтонов цикл, содержащий ребро $ux \in E(G(U))$.

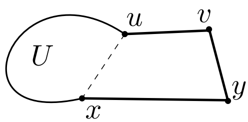
(a) Если $|V| \geqslant 3$, аналогично строим гамильтонов цикл в G_v^3, содержащий инцидентное вершине v ребро $vy \in E(G(V))$, и соединяем эти циклы в один, заменив ux и vy на uv и xy (ребро $xy \in E(G^3)$, так как $\mathrm{dist}_G(x, y) \leqslant 3$).

(b) Если $|V| = 2$, точно есть ребро $vy \in E(G)$, которое мы просто присоединяем к циклу из U вместо ребра ux.

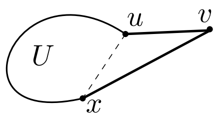
(c) Если $|V| = 1$, заменяем ребро ux на uv и vx.



(a)



(b)



(c)

□

1.6 Теорема Татта о существовании регулярного графа степени k с обхватом g.

<u>**def.**</u> Обхват графа G (обозначение $g(G)$) — длина наименьшего цикла в графе G.

<u>thm</u> (Татт). Пусть $k, g, n \in \mathbb{N}$, причем $k, g \geqslant 3$, kn четно и

$$n > \frac{k(k-1)^{g-1} - 2}{k-2}.$$

Тогда существует регулярный граф G степени k с $g(G) = g$ и $v(G) = n$.

<u>proof.</u> Пусть $\mathcal{G}(n, g, k)$ — множество всех графов на n вершинах с обхватом g и максимальной степенью вершин не более k.

Пусть $v_{<k}(G)$ — количество вершин степени менее k в графе G, $\mathrm{dist}_{<k}(G)$ — максимальное из расстояний между парами вершин степени менее k в графе g, при $v_{<k}(G) < 2$ положим $\mathrm{dist}_{<k}(G) = 0$.

Если $n > g$, $\mathcal{G}(n, g, k) \neq \varnothing$, например, есть граф из цикла на g вершинах и нескольких изолированных вершинах.

Будем выбирать в $\mathcal{G}(n, g, k)$ граф следующим образом:

1. сначала возьмем все графы с максимальным количеством ребер,
2. затем из них выберем графы с максимальным $v_{<k}$,
3. из оставшихся выберем граф G с максимальным $\mathrm{dist}_{<k}(G)$.

Докажем, что G — регулярный граф степени k.

- Пусть не так. Рассмотрим пару его максимально удаленных вершин степени менее k. Пусть это x и y (возможно $x = y$).
- Если $\mathrm{dist}_G(x, y) \geqslant g - 1$, то соединим x и y и получим граф $G' \in \mathcal{G}(n, g, k)$ с $e(G') > e(G)$, а такого не должно быть. Следовательно, $\mathrm{dist}_G(x, y) \leqslant g - 2$.
- Так как степени x и y меньше k, а степени всех остальных не больше k, то на расстоянии не более $g - 1$ от y находится не более чем $\frac{(k-1)^g - 1}{k-2}$ вершин, а на расстоянии не более $g - 2$ от x не более $\frac{(k-1)^{g-1} - 1}{k-2}$ вершин.
- По условию теоремы существует такая вершина z, что $\mathrm{dist}(x, z) \geqslant g - 1$ и $\mathrm{dist}(y, z) \geqslant g$.

- Так как $\mathrm{dist}_G(x,y) \leqslant g-2$, степень $d_G(z) = k \geqslant 3$. Следовательно, есть ребро $zu \in E(G)$, через которое проходят не все простые циклы длины g графа G. Тогда $g(G-zu) = g(G) = g$.

- $d_G(u) = k$, так как:

$$\mathrm{dist}_G(y,u) \geqslant \mathrm{dist}_G(y,z) - 1 \geqslant g-1 > \mathrm{dist}(x,y) = dist_{<k}(G).$$

- Пусть $G' = G - zu + zx$. $g(G') = g$, $e(G') = e(G)$, $d_{G'}(x) = d_G(x)+1$, $d_{G'}(u) = d_G(u) - 1 = k-1$, степени остальных вершин совпадают. Итого, $G' \in \mathcal{G}(n,g,k)$.

- Заметим, что $v_{<k}(G') \geqslant v_{<k}(G)$. По алгоритму выбора графа G должно быть равенство, поэтому $d_{G'}(x) = k$ и $d_G(x) = k-1$.

- Так как kn четно, вершина x не может быть единственной вершиной степени меньше k в графе G, следовательно, $x \neq y$.

Докажем, что $\mathrm{dist}_{G'}(y,u) > \mathrm{dist}_G(y,x)$**.**

- Найдем yu-путь P, который реализует расстояние между y и u в G'.

- Если P проходит только про ребрам G, то

$$\mathrm{dist}_{G'}(y,u) = \mathrm{dist}_G(y,u) \geqslant g-1 > \mathrm{dist}_G(y,x).$$

- Следовательно, P проходит по новому ребру zx. Тогда P содержит путь по ребрам графа G от y до x или z и само ребро zx.

  И, так как $\mathrm{dist}_G(y,z) \geqslant g > \mathrm{dist}_G(y,z)$:

$$\mathrm{dist}_{G'}(y,u) \geqslant \min\bigl(\mathrm{dist}_G(y,x)+1, \mathrm{dist}_G(y,z)+1\bigr) > \mathrm{dist}_G(y,x).$$

- Таким образом,

$$\mathrm{dist}_{<k}(G') \geqslant \mathrm{dist}_{G'}(y,u) > \mathrm{dist}_G(y,x_= \mathrm{dist}_{<k}(G).$$

  Противоречие. Значит, G — k-регулярный граф.

$\square$

Глава 2

Паросочетания

2.1 Независимые множества, паросочетания и покрытия в графе. Теорема Галлаи.

def. Множество вершин $U \subset V(G)$ называется независимым, если никакие две его вершины не смежны. Обозначим через $\alpha(G)$ количество вершин в максимальном независимом множестве графа G.

def. Множество ребер $M \subset E(G)$ называется паросочетанием, если никакие его два ребра не имеют общей вершины. Обозначим через $\alpha'(G)$ количество ребер в максимальном паросочетании графа G.

def. Паросочетание M графа G называется совершенным, если оно покрывает все вершины графа.

def. Будем говорить, что множество вершин $W \subset V(G)$ покрывает ребро $e \in E(G)$, если существует вершина $w \in W$, инцидентная e. Будем говорить, что множество ребер $F \subset E(G)$ покрывает вершину $v \in V(G)$, если существует ребро $f \in F$, инцидентное v.

def. Множество вершин $W \subset V(G)$ называется вершинным покрытием, если оно покрывает все ребра графа. Обозначим через $\beta(G)$ количество вершин в минимальном вершинном покрытии графа G.

def. Множество ребер $F \subset E(G)$ называется реберным покрытием, если оно покрывает все вершины графа. Обозначим через $\beta'(G)$ количество ребер в минимальном реберном покрытии графа G.

lm 5. *1. $U \subset V(G)$ — независимое множество, согда $V(G) \setminus U$ — вершинное покрытие.*

2. $\alpha(G) + \beta(G) = v(G)$.

proof.

1. Если U — независимое множество, то все ребра из этих вершин выходят в $V(G) \setminus U$, значит все ребра покрываются $V(G) \setminus U$. Если $V(G) \setminus U$ — вершинное покрытие, ребер внутри U быть не может, следовательно U — независимое множество.

2. Применяем первый пункт для максимального независимого множества и минимального вершинного покрытия.

□

thm (Галлаи, 1959)**.** Пусть G — граф с $\delta(G) > 0$. Тогда

$$\alpha'(G) + \beta'(G) = v(G)$$

.

proof. Докажем неравенство в обе стороны.

- Пусть M — максимальное паросочетание, U — множество не покрытых M вершин графа. $|U| = v(G) - 2\alpha'(G)$.

  Так как $\delta(G) > 0$, можно выбрать множество F из $|U|$ ребер, покрывающее U.

  Тогда $M \cup F$ — покрытие,

  $$\beta'(G) \leqslant |M \cup F| \alpha'(G) + v(G) - 2\alpha'(G).$$

  Из этого получаем неравенство $\alpha'(G) + \beta'(G) \leqslant v(G)$.

- Пусть L — минимальное реберное покрытие, $|L| = \beta'(G)$, Рассмотрим подграф $H = G(L)$, порожденный ребрами покрытия.

  Все компоненты связности в H — звезды, иначе L не минимально. В каждой компоненте можем выбрать только одно ребро в паросочетание.

Следовательно, $\alpha'(G) \geqslant c(H)$ и $\beta'(G) = |L| = e(H) \geqslant v(H) - c(H) = v(G) - c(H)$. Сложим два неравенства и получим $\alpha'(G) + \beta'(G) \geqslant v(G)$.

□

2.2 Максимальное паросочетание и дополняющие пути: теорема Бержа.

def. Пусть M — паросочетание в графе G.

- Назовем путь М-чередующимся, если в нем чередуются ребра из M и ребра, не входящие в M.
- Назовем M-чередующийся путь М-дополняющим, если его начало и конец не покрыты паросочетанием M.

thm (Берж, 1957)**.** Паросочетание M в графе G является максимальным, согда нет M-дополняющих путей.

proof.

$\Longrightarrow$ Пусть в графе G существует M-дополняющий путь $S = a_1 a_2 \dots a_{2k}$.

Тогда мы можем заменить все входящие в M ребра $a_2 a_3, \dots, a_{2k-2} a_{2k-1}$ на не входящие в M ребра $a_1 a_2, \dots, a_{2k-1} a_{2k}$, увеличив паросочетание. Противоречие.

$\Longleftarrow$ Пусть M — не максимальное паросочетание, тогда рассмотрим максимальное M'.

Пусть $N = M \triangle M'$ и подграф $H = G(N)$. Для любой вершины $v \in H$ имеем $d_H(v) \in \{1, 2\}$, поэтому H — объединение путей и циклов.

Причем в каждом пути или цикле ребра из M и M' чередуются. Так как ребер из M' больше, есть хотя бы одна компонента P графа H — путь нечетной длины, где ребер из M' больше. Получается, что мы нашли M-дополняющий путь. Противоречие.

□

2.3 Теорема Татта о совершенном паросочетании.

def. Для произвольного графа G через $o(G)$ обозначим количество нечетных компонент связности графа G.

thm (Татт, 1947)**.** В графе G существует совершенное паросочетание, согда для любого $S \subset V(G)$ выполняется условие $o(G - S) \leqslant |S|$.

proof.

$\Longrightarrow$ Пусть $S \subset V(G)$, M — совершенное паросочетание. Тогда одна из вершин каждой нечетной компоненты связности графа $G-S$ должна быть соединена с вершиной из S ребром паросочетания M, при этом все такие вершины различны, так как входят в паросочетание только один раз.

$\Longleftarrow$ Предположим, что граф удовлетворяет условию, но не имеет совершенного паросочетания.

Подставим пустое S в условие: $o(G) \leqslant |\varnothing| = 0$, то есть $v(G)$ четно.

Пусть G^* — максимальный надграф G на том же множестве вершин, не имеющий совершенного паросочетания. Хотим построить совершенное паросочетание в G^*, тем самым получив противоречие.

Для любого $S \subset V(G)$ выполняется неравенство

$$o(G^* - S) \leqslant o(G - S) \leqslant |S|.$$

Пусть $U = \{u \in V(G) \colon d_{G^*}(u) = v(G) - 1\}$. Очевидно, что G^* не может быть полным, поэтому $U \neq V(G)$.

lm 6. *Граф $G^* - U$ представляет собой объединение нескольких несвязных друг с другом полных подграфов.*

proof.

- Предположим противное. Тогда существуют такие вершины $x, y, z \in V(G) \setminus U$, что $xy, yz \in E(G^*)$, но $xz \notin E(G^*)$.
- Так как $y \notin U$, существует такая вершина $w \notin U$, что $yw \notin E(G^*)$.

- Так как граф G^* максимален, в графе $G^* + xz$ существует паросочетание M_1, а в графе $G^* + yw$ — M_2. При этом $xz \in M_1$ и $yw \in M_2$, иначе в G^* будет совершенное паросочетание.
- Пусть $H = (V(G), M_1 \triangle M_2)$. Граф H — несвязное объединение четных циклов, в каждом из которых чередуются ребра из M_1 и M_2, поэтому в каждой компоненте есть совершенные паросочетания на ребрах M_1 и на ребрах M_2.
- Ребра xz и yw принадлежат ровно одному паросочетание, поэтому лежат и $E(H)$.

Разберем два случая:

1. Ребра xz и yw лежат в разных компонентах C_1 и C_2 графа H.

   Тогда можем выбрать на вершинах C_1 выбрать паросочетание из M_2, в C_2 из M_1, в остальных из любых. Так мы получили совершенное паросочетание в графе G^*. Противоречие.
2. Ребра xz и yw лежат в одной компоненте C графа H.

   НУО, считаем, что в цикле C вершины расположены в порядке $ywzx$. Рассмотрим простой путь $P = xC''yzC'w$. Заметим,

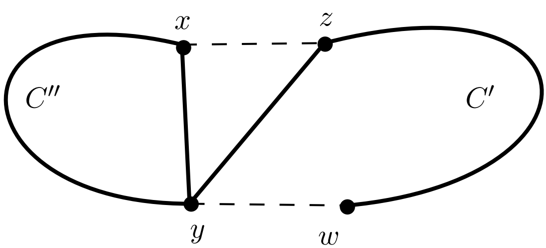


Рис. 2.1: Случай 2

   что $V(P) = V(C)$ и $E(P) \subset E(G^*)$. Следовательно, существует совершенное паросочетание $M_C \subset E(G^*)$ на вершинах компоненты связности C.

   В остальных компонентах можем выбрать ребра любого из M_1 и M_2. Так мы построили совершенное паросочетание графа G^*. Противоречие.

$\square$

Будем использовать лемму.

- Среди несвязных полных графов не более $|U|$ имеет нечетное число вершин по условию теоремы.
- В каждой четной компоненте графа G^*-U мы построим полное паросочетание, в каждой нечетной — паросочетание на всех вершинах кроме одной, оставшуюся мы соединим с вершиной из U. Мы используем различные вершины из U, их хватит.
- Наконец, разобьем на пары оставшиеся вершины из U : это можно сделать, так как каждая из них смежна в G^* со всеми остальными.

Так мы построили совершенное паросочетание в графе G^*. Противоречие.

□

2.4 Теорема Петерсена о паросочетании в кубическом графе.

def. Кубический граф — граф, все вершины которого имеют степень 3.

def. Мост графа — ребро, не входящее ни в один цикл.

thm (Петерсон, 1891). Пусть G — связный кубический граф, в котором не более двух мостов. Тогда в графе есть совершенное паросочетание.

proof. Пусть совершенного паросочетания нет. Тогда по Теореме Татта существует такое множество $S \subset V(G)$, что $o(G-S) > |S|$.

Так как в кубическом графе четное число вершин, $S \neq \varnothing$ и $o(G-S) \equiv |S| \pmod 2$.

Пусть $U_1, \ldots, U_n$ — все нечетные компоненты связности графа $G - S$. $n \geqslant |S| + 2$.

Пусть $m_i = e_G(U_i, S)$. Это число нечетное, так как:

$$m_i = \sum_{v \in U_i} d_G(v) - 2e(G(U_i)) = 3|U_i| - 2e(G(U_i)).$$

В G не больше двух мостов, поэтому не более, чем два числа из m_i равны 1, а остальные не меньше 3, так как нечетные.

$$3|S| = \sum_{v \in S} d_G(v) \geqslant \sum_{i=1}^{n} m_i \geqslant 3n - 4 \geqslant 3(|S| + 2) - 4 > 3|S|.$$

Противоречие. □

2.5 Теорема Плесника о совершенном паросочетании в регулярном графе.

thm (Плесник, 1972). Пусть G — регулярный граф степени k с четным числом вершин, причем $\lambda(G) \geqslant k-1$, а граф G' получен из G удалением не более, чем $k-1$ ребра. Тогда в графе G' есть совершенное паросочетание.

proof. Пусть множество $F \subset E(G)$ таково, что $G' = G - F$. Тогда $|F| \leqslant k-1$.

Предположим, что условие теоремы Татта не выполняется. Рассмотрим множество Татта $S \subset V(G')$. Так как

$$o(G' - S) + |S| \equiv v(G) \pmod 2,$$

из $o(G' - S) > |S|$ следует, что $o(G' - S) \geqslant |S| + 2$.

Пусть $U_1, \ldots, U_n$ — нечетные, а $U_{n+1}, \ldots, U_t$ — четные компоненты связности графа $G' - S$.

Для каждого $i \in [1..t]$ пусть:

- α_i — количество ребер из $E(G')$, соединяющих U_i с S ;
- β_i — количество ребер из F, соединяющих с U_i с S;
- γ_i — количество ребер из F, соединяющих U_i с остальными компонентами связности $G' - S$;
- $m_i = \alpha_i + \beta_i + \gamma_i$ — количество ребер графа G, соединяющих U_i с $V(G) \setminus U_i$.

Для нечетных компонент связности имеем $m_i \equiv k \pmod 2$. Также $m_i \geqslant \lambda(G) \geqslant k-1$, поэтому $m_i \geqslant k$. Отсюда:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \geqslant kn \tag{2.1}$$

Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^{t} \alpha_i + \sum_{i=1}^{t} \beta_i \leqslant k \cdot |S|$$

и

$$2\sum_{i=1}^{t} \beta_i + \sum_{i=1}^{t} \gamma_i \leqslant 2 \cdot |F| \leqslant 2k-2.$$

Сложим:

$$\sum_{i=1}^{t} \alpha_i + 3\sum_{i=1}^{t} \beta_i + \sum_{i=1}^{t} \gamma_i \leqslant k(|S|+2)-2 \tag{2.2}$$

Из неравенств 2.1 и 2.2 получаем $kn \leqslant k(|S|+2)-2$, следовательно, $o(G'-S) < |S|+2$. А мы выше доказали противное. Противоречие. $\square$

cor 3. *Пусть G — регулярный граф степени k с четным числом вершин, причем $\lambda(G) \geqslant k-1$. Тогда для любого ребра $e \in E(G)$ существует совершенное паросочетание графа, содержащее e.*

proof. Пусть $e = ab$, $e_1, \ldots, e_{k-1}$ — остальные ребра, инцидентные вершине a.

По теореме Плесника в графе $G - \{e_1, \ldots, e_{k-1}\}$ есть совершенное паросочетание, которое должно содержать e, так как содержит a. $\square$

2.6 Теорема Петерсена о выделении 2-фактора в 2k-регулярном графе и ее следствие о регулярных факторах.

def. k-**фактором** графа G называется его остовный регулярный подграф степени k.

thm (Петерсон, 1891)**.** У регулярного графа степени $2k$ есть 2-фактор.

proof. Так как все степени четные, есть эйлеров цикл. Обойдем его в некотором направлении и ориентируем каждое ребро в направлении обхода. Теперь в каждую вершину $\overline{G}$ входит и выходит ровно по k стрелок.

Построим граф G^* следующим образом: разделим каждую вершину $v \in V(G)$ на две вершины v_1 и v_2, если ребро $xy \in E(G)$ было ориентировано от x к y, то проведем в графе G^* ребро x_1y_2.

Таким образом, существует биекция $\varphi\colon E(G) \to E(G^*)$, заданная правилом $\varphi(xy) = x_1y_2$.

G^* — регулярный двудольный граф степени k с долями $\{v_1\}_{v\in V(G)}$ и $\{v_2\}_{v\in V(G)}$.

По следствию 3 в графе G^* есть совершенное паросочетание M^*.

Пусть $M = \varphi^{-1}(M^*)$. Для любой вершины $x \in V(G)$ каждая из вершин $x_1, x_2 \in V(G^*)$ инцидентна ровно одному ребру из M^*.

Поэтому x инцидентна ровно двум ребрам из M, то есть M — 2-фактор графа G. □

cor 4.
1. *Регулярный граф степени $2k$ есть объединение k своих 2-факторов.*
2. *Для любого $r \leqslant k$ регулярный граф степени $2k$ имеет $2r$-фактор.*

2.7 Теорема Томассена о почти регулярном факторе почти регулярного графа.

thm (Томассен, 1981)**.** Пусть G — граф, степени всех вершин которого равны или k или $k+1$, а $r \leqslant k$. Тогда существует остовный подграф F графа G, степени всех вершин которого равны либо r, либо $r+1$.

proof. Индукция по r.

База: $r = k$, очевидно, подойдет $H = G$.

Переход: от k к $k-1$. Пусть граф имеет остовный подграф F, степени вершин которого равны r или $r+1$.

Будем удалять из графа F по очереди ребра, соединяющие вершины степени $r+1$. В какой-то момент мы получим граф F', степени вершин которого равны r или $r+1$, при этом любые две вершины степени $r+1$ несмежны. Пусть V_{r+1} — множество всех вершин степени $r+1$ в F'. Если $V_{r+1} = \varnothing$, то F' уже подходит.

Пусть $V' = V(G) \setminus V_{r+1}$, B — двудольный граф с долями V_{r+1} и V', ребра которого — $E_{F'}(V_{r+1}, V')$.

Для каждой вершины $x \in V_{r+1}$ мы имеем $d_B(x) = r+1$, для каждой $y \in V'$ имеем $d_B(y) \leqslant y$.

По следствию из теоремы Холла в графе B есть паросочетание M, покрывающее все вершины из V_{r+1}.

Тогда удалим его и все вершины степени $r+1$ потеряют по одному ребру, а степени r не более одного. Итого получится граф $H = F' - M$, где степени равны r или $r-1$.

□

2.8 Теорема Ловаса о разбиении графа.

cor 5 (Ловас, 1970)**.** *Пусть $s, t \in \mathbb{N}$. Тогда любой граф максимальной степени $s+t-1$ представляется в виде объединения графа максимальной степени не более s и графа максимальной степени не более t.*

proof. Пусть G — граф с $\Delta(G) = s+t-1$. Добавим в граф вершины и ребра, чтобы он стал регулярным степени $k = s+t-1$.

По теореме Томассена граф H имеет остовный подграф H_1, степени вершин которого равны t или $t-1$.

Тогда оставшиеся ребра графа H образуют подграф H_2, степени вершин которого равны $s-1$ или s.

Теперь удалим из подграфов H_1 и H_2 добавленные вершины и ребра, получим подграфы G_1 и G_2 графа G с $\Delta(G_1) \leqslant t$ и $\Delta(G_2) \leqslant s$. При этом $G = G_1 \cup G_2$. □

Глава 3

Связность

3.1 Блоки и точки сочленения. Лемма о пересечении блоков.

Здесь граф G связен.

def. Вершина $a \in V(G)$ называется точкой сочленения, если граф $G - a$ несвязен.

def. Блок — максимальный по включению подграф графа G.

def. Блоки и точки сочленения несвязного графа — блоки и точки сочленения его компонент.

lm 7. *Пусть B_1 и B_2 — два разных блока графа G, причем $V(B_1) \cap v(B_2) \neq \varnothing$. Тогда $V(B_1) \cap V(B_2)$ состоит из одной точки сочленения a графа G, причем a — единственная точка сочленения, отделяющая B_1 от B_2.*

proof.

Единственность Пусть $|V(B_1) \cap V(B_2)| \geqslant 2$. Тогда для любой вершины $x \in V(B_1 \cup B_2)$ граф $B_1 \cup B_2 - x$ связен, так как $B_1 - x$ связен, $B_2 - x$ связен, плюс остается хотя бы одна общая вершина. Следовательно, $B_1 \cup B_2$ содержится в блоке B графа G, но тогда B_1 и B_2 не максимальные по включению.

Пусть $V(B_1) \cap V(B_2) = \{a\}$. Так как a — общая вершина блоков B_1 и B_2, отделять B_1 от B_2 в графе G может только a.

Точка сочленения Если a не отделяет B_1 от B_2, в графе G должен быть $V(B_1)V(B_2)$-путь P.

Пусть $H = B_1 \cup B_2 \cup P$. Граф $H - x$ связен для любой вершины $x \in V(H)$. Поэтому H содержится в одном блоке графа G. Но блок B_1 — его собственный подграф. Противоречие.

В итоге a — единственная вершина, отделяющая B_1 от B_2, следовательно, граф $G - a$ несвязен, поэтому a — точка сочленения.

□

3.2 Дерево блоков и точек сочленения и его свойства.

def. Построим двудольный граф $B(G)$, вершины которого — точки сочленения $a_1, \ldots, a_n$ графа G, а вершины другой доли — его блоки $B_1, \ldots, B_m$. Вершины a_i и B_j будут смежны, если $a_i \in V(B_j)$.

Такой граф называется деревом блоков и точек сочленения.

lm 8. *Пусть B_1 и B_2 — два разных блока графа G, а P — путь между ними в графе $B(G)$. Тогда точки сочленения графа G, отделяющие B_1 от B_2 — это в точности те точки сочленения, что лежат на пути P. Остальные не разделяют даже объединение блоков пути P.*

- Пусть x — точка сочленения графа G, не лежащая на пути P, H — объединение всех блоков на пути P.

  Для любого блока B на пути P граф $B - x$ связен. Если B — не B_1 и не B_2, то в нем можно пройти между двумя точками сочленения, входящими в P, так как x не входит в P. Поэтому $H - x$ — связный граф.

- Пусть a — точка сочленения, лежащая на P, и она входит в блоки B'_1 и B'_2 на пути P.

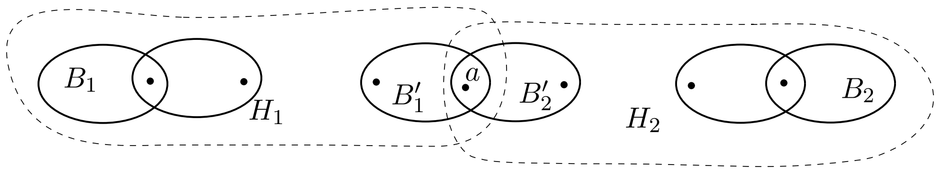


Рис. 3.1

Обозначим через H_1 объединение всех блоков на пути P до a, через H_2 — объединение всех блоков после a.

Применим рассуждения первого пункта отдельно к H_1 и к H_2. Получаем, что a не разделяет ни одного из них.

С другой стороны, по лемме 7 точка сочленения a отделяет блок B_1' от B_2', а значит, a отделяет H_1 от H_2, следовательно и B_1 от B_2.

thm. 1. Дерево блоков и точек сочленения — это дерево, все листья которого соответствуют блокам.

2. Точка сочленения a разделяет два блока B_1 и B_2, когда a разделяет B_1 и B_2 в $B(G)$.

proof.

1. Докажем первый пункт.

Связность. Для любых двух вершин $B(G)$ рассмотрим путь Q в G между ними.

Перестроим его в путь в $B(G)$: участок пути Q, проходящий по одному блоку графа G, заменим на соответствующую блоку вершину в $B(G)$, переход Q между различными блоками по лемме 7 осуществляется через их общую точку сочленения — вершину $B(G)$.

Дерево. Пусть в $B(G)$ есть простой цикл Z. Рассмотрим подграф H — объединение всех блоков этого цикла.

Между любыми двумя входящими в Z блоками есть два независимых пути в $B(G)$.

По лемме 8 граф H не имеет точек сочленения, иначе они должны лежать на одновременно на двух путях по циклу.

Следовательно, существует блок B, содержащий H, блоки цикла Z — собственные подграфы B, что невозможно.

Листья. Если лист соответствует точке сочленения a, то по лемме 8 граф $G - a$ связен. Противоречие.

2. Докажем второй пункт: в дереве $B(G)$ есть единственный путь между блоками B_1 и B_2, по лемме 8 в точности точки сочленения с этого пути отделяют B_1 от B_2 в исходном графе G.

$\square$

3.3 Крайние блоки

def. Назовем блок B **крайним**, если он соответствует листу дерева блоков и точек сочленения.

def. **Внутренность** $\mathrm{Int}(B)$ блока B — множество всех его вершин, не являющихся точками сочленения в графе.

- Блок недвусвязного графа крайний, согда он содержит ровно одну точку сочленения.
- Внутренность некрайнего блока может быть пустой, а крайнего всегда непуста.
- Если у связного графа есть точки сочленения, то он имеет хотя бы два крайних блока.
- Если B — блок графа G, $x \in \mathrm{Int}(B)$, то граф $G - x$ связен.

lm 9. *Пусть B — крайний блок связного графа G с $v(G) \geqslant 2$, $G' = G - \mathrm{Int}(B)$. Тогда граф G' связен, а блоки G' — все блоки G, кроме B.*

proof. Пусть $a \in V(B)$ — точка сочленения, отрезающая крайний блок B от остального графа G. Тогда $\mathrm{Int}(B)$ — это одна из компонент связности графа $G - a$, следовательно, сам граф G' будет связен.

Отличные от B блоки графа G — подграфы G', не имеют точек сочленения и являются максимальными подграфами G' с таким свойством, так как были максимальными в G. Следовательно, они все — блоки G'.

Пусть B' — блок G'. Очевидно, что $v(G') \geqslant 2$, поэтому B' содержит хотя бы одно ребро e, которое в графе G лежит в некотором блоке $B^* \neq B$, так как блок максимальный по включению, $B^* = B'$. □

3.4 Алгоритм разбиения графа на блоки.

Пусть $U_1, \dots, U_k$ — все компоненты связности графа $G - a$, $G_i = G(U_i \cup \{a\})$. Разрежем граф G на графы $G_1, \dots G_k$.

lm 10. 1. *Пусть $b \in U_i$. Тогда b разделяет вершины $x, y \in U_i$ d G_i, согда b разделяет их в G.*

2. *Все точки сочленения графов $G_1, \dots, G_k$ — в точности все точки сочленения графа G, кроме a.*

proof.

1. Если $G - b$ не содержит xy-путь, то его нет и в $G_i - b$.

   Наоборот, пусть x и y лежат в разных компонентах связности графа $G_i - b$. НУО можно считать, что компонента связности $W \ni x$ не содержит a. Тогда W — компонента связности графа $G - b$, следовательно, в $G - b$ тоже не было xy-пути.

2. Так как $G_i - a$ — компонента графа $G - a$, вершина a не является точкой сочленения ни в одном из графов $G_1, \dots, G_k$.

   Любая другая точка сочленения графа G лежит ровно в одном из графов $G_1, \dots, G_k$ и является в нем точкой сочленения по прошлому пункту.

   Так же из прошлого пункта следует, что других точек сочленения в графах $G_1, \dots G_k$ нет.

□

3.4.1 Алгоритм разбиения связного графа на блоки

- Выберем точку сочленения a и разрежем по ней G: заменим граф G на полученные $G_1, \ldots, G_k$.
- Каждый следующий шаг берем один из имеющихся графов, выбирает точку сочленения и разрезаем по ней.
- И так далее, пока хотя бы один из полученных графов имеет точку сочленения.

thm. В результате описанного алгоритма вне зависимости от порядка действий получатся блоки графа G.

proof. По лемме 10 мы вне зависимости от порядка проведем разрезы только по всем точками сочленения и только по ним.

Пусть B — блок графа G. Тогда в графе G множество $V(B)$ не было разделено ни одной из точек сочленения. Тогда по первому пункту леммы 10 множество $V(B)$ не было разрезано алгоритмом.

Так как в результате алгоритма получились индуцированные подграфы графа G, один из них обозначим за H — надграф B.

Если $H \neq B$, то рассмотрим вершину $c \in V(H) \setminus V(B)$. В графе G существует точка сочленения a, отделяющая c от $V(B)$. Тогда по лемме 10 при разрезе по a вершина c была отделена от блока B. Противоречие.

□

3.5 Следствие о веере путей из теоремы Менгера. Теорема Дирака о цикле, содержащем заданные k вершин.

def. Пусть $X, Y \subset V(G)$, $R \subset V(G) \cup E(G)$.

1. Через $G - R$ обозначим граф, полученный из G в результате удаления всех вершин и ребер из R, а также всех ребер инцидентных вершинам из R.

2. Назовем множество R разделяющим, если граф $G - R$ несвязен. Обозначим за $\mathfrak{R}(G)$ множество всех разделяющих множеств.

def. Граф G является k-связным, если $v(G) \geqslant k+1$ и минимальное вершинное разделяющее множество в графе G содержит хотя бы k вершин.

def. 1. Пусть $x, y \in V(G)$ — несмежные вершины. Обозначим за $\kappa_G(x, y)$ размер минимального множества $R \subset V(G)$ такого, что R разделяет x и y. Если x и y смежны, положим $\kappa_G(x, y) = +\infty$. Назовем $\kappa_G(x, y)$ связностью вершин x и y.

   Пусть $X, Y \subset V(G)$. Обозначим через $\kappa_G(X, Y)$ размер минимального множества $R \subset V(G)$ такого, что R разделяет X и Y. Если такого множества нет, положим $\kappa_G(X, Y) = +\infty$.

В k-связном графе G для любых двух множество вершин $X, Y \subset V(G)$ выполнено $\kappa_G(X, Y) \geqslant k$.

thm (Менгер, 1927)**.** Пусть $X, Y \subset V(G)$, $\kappa_G(X, Y) \geqslant k$, $|X| \geqslant k$, $|Y| \geqslant k$. Тогда в графе G существуют k непересекающихся XY-путей.

cor 6. *Пусть $x \in V(G)$, $Y \subset V(G)$, $x \notin Y$, $k = \min(|Y|, \kappa_G(x, Y))$. Тогда существуют k путей от x до различных вершин множества Y, не имеющих общих внутренних вершин.*

proof. Пусть $X = N_G(x)$. Так как $\kappa_G(x, Y) \geqslant k$, $|N_G(x) \geqslant k|$.

Так как $x \notin Y$, любое множество вершин R, отделяющее X от Y отделяет вершину x от множества Y. Следовательно, $|R| \geqslant k$.

Так как $|Y| \geqslant k$ по теореме Менгера существует k непересекающихся путей от x до различных вершин множества Y. □

thm (Уитни, 1932)**.** Пусть G — k-связный граф. Тогда для любых двух вершин $x, y \in V(G)$ существует k независимых xy-путей.

proof. Индукция по k.

База: $k = 1$, очевидно

Переход: пусть мы доказали для меньших k. Если вершины x и y несмежны, то утверждение следует из следствия 6.

Разберем случай смежных x и y.

Если $G - xy$ — это $(k-1)$-связный граф, то про индукционному предположению существует $k-1$ независимый xy-путь в графе $G - xy$ и еще один путь — ребро xy.

Теперь предположим, что в $G - xy$ существует разделяющее множество T, $|T| \leqslant k-2$. Так как T не разделяет G, в графе $G - (T \cup \{xy\})$ ровно две компоненты связности: $U_x \ni x$ и $U_y \ni y$.

Пусть $T_x = T \cup \{x\}$. Если $U_x \neq \{x\}$, то T_x отделяет $U_x \setminus \{x\}$ от U_y в G, но это невозможно, так как $|T_x| \leqslant k-1$.

Тогда $U_x = \{x\}$ и, аналогично, $U_y = \{y\}$. Получается, что в графе G не более k вершин: T, x и y. Но такой граф не может быть k-связным.

□

thm (Дирак)**.** Пусть $k \geqslant 2$. В k-связном графе для любых k вершин существует простой цикл, содержащий все эти вершины.

proof. Индукция по k.

База: $k = 2$, следует из теоремы Уитни.

Переход: $k-1 \to k$. Рассмотрим k-связный граф G и его вершины $v_1, \ldots, v_k$. Так как G и $k-1$-связный тоже, по индукционному предположению есть простой цикл Z, содержащий вершины $v_1, \ldots, v_{k-1}$.

Разберем два случая:

1. Пусть $v(Z) < k$. Тогда $V(Z) = \{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$, по следствию 6 существуют непересекающиеся пути от v_k до всех вершин Z.

   Теперь можно вставить в Z еще одну вершину v_k между двумя соседними.

2. $v(Z) > k$. По следствию 6 существует k непересекающихся путей от v_k до Z.

   Обозначим концы этих путей $x_1, \ldots, x_k \in V(Z)$. Они делят круг на k-дуг и внутренность еще одной из этих дуг. Поэтому хотя бы одна не содержит ни одной из вершин $v_1, \ldots, v_{k-1}$. Ее мы можем заменить на путь от начала до v_k и от v_k до конца, тем самым получив искомый цикл.

□

3.6 Разделяющие множества в k-связном графе, части разбиения. Внутренность и граница части разбиения.

Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}(G)$.

def. Множество $A \subset V(G)$ — часть $\mathfrak{S}$-разбиения, если никакие две вершины из A нельзя разделить никаким множеством из $\mathfrak{S}$, но любая другая вершина графа G отделена от множества A хотя бы одним из множеств набора $\mathfrak{S}$.

Множество всех частей разбиения графа G набором разделяющих множеств $\mathfrak{S}$ мы будем обозначать через $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. Если граф не очевиден $\mathrm{Part}(G; \mathfrak{S})$.

Вершину части $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ назовем внутренней, если она не входит ни в одно из множеств набора $\mathfrak{S}$. Множество таких вершин — $\mathrm{Int}(A)$ — внутренность части A.

Вершины, входящие в какие-либо множества из $\mathfrak{S}$, будем называть граничными, а все их множество границей и обозначать через $\mathrm{Bound}(A)$.

Внутренняя вершина части $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ может быть концом ребра , входящего в множество $S \in \mathfrak{S}$.

Пусть $A, B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, $A \neq B$, $A \cap B \neq \varnothing$. Тогда существует такое $S \in \mathfrak{S}$, что $A \cap B \subset S$.

Разделяющее множество $S \subset V(G)$ в k-связном графе G должно содержать на менее k вершин. Мы обозначим через $\mathfrak{R}_k(G)$ множество всех k-вершинных разделяющих множеств графа G.

Пусть $S \in \mathfrak{R}_k(G)$, $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. Тогда $\mathrm{Int}(A) \neq \varnothing$, $G(\mathrm{Int}(A))$ связен — это компонента графа $G - S$. Для любой вершины $x \in S$ существует вершина $y \in \mathrm{Int}(A)$, смежная с x (иначе $S \setminus \{x\}$ отделяет $\mathrm{Int}(A)$ от $G - A$).

Однако, если $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_K(G)$, $B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, то возможно, что $\mathrm{Int}(B) = \varnothing$.

Кроме того, при $\mathrm{Int}(B) \neq \varnothing$ индуцированный подграф $G(\mathrm{Int}(B))$ не обязательно связен.

lm 11. *Пусть* $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$, $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. *Тогда верно:*

1. *Вершина* $x \in \mathrm{Int}(A)$ *не смежна ни с одной другой из вершин множества* $V(G) \setminus A$.
2. *Если* $\mathrm{Int}(A) \neq \varnothing$, *то* $\mathrm{Bound}(A)$ *отделяет* $\mathrm{Int}(A)$ *от* $V(G) \setminus A$.

proof.

1. Пусть вершина $x \in \mathrm{Int}(A)$ смежна с вершиной $y \in V(G) \setminus A$. Существует множество $S \in \mathfrak{S}$, отделяющее y от $\mathrm{Int}(A)$ в G. Тогда $x, y \notin S$, причем они смежны. Противоречие.
2. Следует из прошлого пункта.

$\square$

thm. Пусть G — k-связный граф, $\mathfrak{S}, \mathfrak{T} \subset \mathfrak{R}_k(G)$.

1. Пусть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. Тогда $\mathrm{Bound}(A)$ — множество всех вершин части A, смежных хотя бы с одной из $V(G) \setminus A$.
2. Пусть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ и $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{T})$. Тогда граница A как части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ совпадает с границей A как части $\mathrm{Part}(\mathfrak{T})$.

proof.

1. Пусть $x \in \mathrm{Bound}(A)$. Существует такое множество $S \in \mathfrak{S}$, что $x \in S$.

   Множество вершин S не разделяет A, следовательно A может пересекать внутренность не более чем одной части $\mathrm{Part}(S)$. Тогда существует такая часть $B \in \mathrm{Part}(S)$, что $\mathrm{Int}(B) \cap A = \varnothing$. Тогда существует вершина $y \in \mathrm{Int}(B)$, смежная с x.

   По следствию **??** ни одна из вершин множества $\mathrm{Int}(A)$ не может быть смежна с вершиной из $V(G) \setminus A$.
2. В первом пункте мы построили $\mathrm{Bound}(A)$ вне зависимости от $\mathfrak{S}$ или $\mathfrak{T}$, поэтому совпадать с границей обоих будет совпадать.

$\square$

Глава 4

Раскраски

4.1 Лемма о галочке

def. Раскраска вершин графа G в k цветов — функция $\rho\colon V(G) \to M$, где $|M| = k$. Раскраска ρ называется правильной, если $\rho(v) \neq \rho(u)$ для любой пары смежных вершин u и v .

Через $\chi(G)$ обозначим хроматическое число графа G — наименьшее натуральное число, для которого существует правильная раскраска вершин графа G в такое количество цветов.

Раскраска ребер графа G в k цветов — функция $\rho\colon E(G) \to M$, где $|M| = k$. Раскраска называется правильной, если $\rho(v) \neq \rho(u)$ для любой пары смежных ребер u и v.

Через $\chi'(G)$ обозначим хроматический индекс графа G — наименьшее натуральное число, для которого существует правильная раскраска ребер графа G в такое количество цветов.

lm 12. *Пусть G — связный граф, $\Delta(G) \leqslant d$, причем хотя бы одна из верши графа имеет степень менее d. Тогда $\chi(G) \leqslant d$.*

proof. Индукция по количеству вершин.

База: Если в графе не более d вершин, его точно можно покрасить в d цветов.

Переход: Пусть мы уже доказали утверждение для любого меньшего связного графа с меньшим числом вершин.

Пусть $u \in V(G)$ — вершина степени менее d. Рассмотрим граф $G-u$. Пусть $G_1, \ldots, G_k$ — компоненты $G - u$.

В каждом из графов G_i есть вершина u_i, смежная с u в графе G. Тогда у u_i в G_i степень не более $d - 1$, и $\Delta(G_i) \leqslant d$.

По индукционному предположению, каждый G_i можно покрасить в d цветов. Далее докрашиваем u, мы можем это сделать, так как у нее только $d - 1$ ребро.

$\square$

lm 13. *Если G — двусвязный неполный граф с $\delta(G) \geqslant 3$, существуют такие вершины $a, b, c \in V(G)$, что $ab, bc \in E(G)$, $ac \notin E(G)$ и граф $G - a - c$ связен.*

proof.

- Пусть G трехсвязен.

  Так как G неполный, существуют такие вершины $a, b, c \in V(G)$, что $ab, bc \in E(G)$ и $ac \notin E(G)$. Граф $G - a - c$ точно связен.

- Путь G не трехсвязен, тогда существует вершина $b \in V(G)$, что граф $G' = G - b$ не двусвязен.

  Граф G' имеет хотя бы два крайних блока. Так как исходный G двусвязен, вершина b должна быть смежна хотя бы с одной внутренней вершиной каждого крайнего блока G'. Пусть a и c — смежные с b внутренние вершины двух разных крайних блоков B_a и B_c графа G'.

  Тогда графы $B_a - a$ и $B_c - c$ связны, поэтому и $G' - a - c$ связен.

  Так как $d_G(b) \geqslant 3$, вершина b смежна с $G' - a - c$, а значит, и граф $G - a - c$ связен.

$\square$

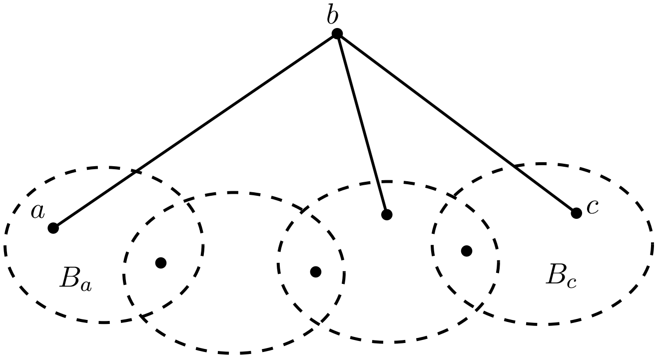


Рис. 4.1

4.2 Теорема Брукса

thm (Брукс, 1941)**.** Пусть $d \geqslant 3$, G — связный граф, отличный от K_{d+1}, $\Delta(G) \leqslant d$. Тогда $\chi(G) \leqslant d$.

proof. Достаточно рассмотреть случай регулярного графа степени d, иначе можно воспользоваться леммой 12. Рассмотрим два случая.

- Пусть в графе G есть точка сочленения a. Тогда $G = G_1 \cup G_2$, где $V(G_1) \cap V(G_2) = \{a\}$, а сами G_1 и G_2 связны.

  Так как a смежна хотя бы с одной вершиной и из G_1 и из G_2, то $d_{G_1}(a) < d$ b $d_{G_2}(a) < d$. По лемме 12 можем покрасить G_1 и G_2 в d цветов.

  Согласуем раскраски, чтобы цвет вершины a был одинаковый, и получим правильную раскраску всего G.

- Теперь пусть G двусвязен. По лемме 13 существуют такие $a, b, c \in V(G)$, что $ab, bc \in E(G)$, $ac \notin E(G)$ и граф $G - a - c = G'$ связен.

  Рассмотрим такой G' и его остовное дерево T.

  Подвесим дерево за b. Пронумеруем уровни так, чтобы номер совпадал с расстоянием от корня.

  Пусть $\rho(a) = \rho(c) = 1$. Будем красить остальные вершины дерева в порядке убывания номеров их уровней, начиная с листьев.

Пусть $x \neq b$ — очередная вершина, причем на момент ее рассмотрения мы покрасили все вершины больших уровней, но не красили вершины меньших. Тогда ее предок еще не имеет цвета, поэтому соседи покрашены максимум в $d-1$ цвет. Следовательно, хотя бы один свободный останется.

Посмотрим на момент, когда осталась только вершина b. У нее два соседа a и c имеют один цвет, поэтому опять есть свободный цвет.

Так мы покрасили все вершины графа G в d цветов.

$\square$

4.3 Списочное хроматическое число k-редуцируемого графа.

def (Списочные раскраски)**.** Каждой вершине $v \in V(G)$ сопоставляется список $L(v)$, после чего раскраска считается правильной, если цвет каждой вершины входит в ее список.

Минимальное такое $k \in \mathbb{N}$, что для любых списков из k цветов существует правильная раскраска вершин графа G, обозначается через $\mathrm{ch}(G)$ и называется списочное хроматическое число.

Аналогично определяются списочная раскраска ребер и списочный хроматический индекс.

note. Известны графы, где $\mathrm{ch}(G) > \chi(G)$, но не известны такие, где $\mathrm{ch}'(G) > \chi'(G)$.

def. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Граф называется k-редуцируемым, если его вершины можно занумеровать $v_1, \ldots, v_n$ так, что каждая вершины смежна менее чем с k вершинами с бóльшим номером.

lm 14. *Пусть G — k-редуцируемый граф. Тогда $\chi(G) \leqslant \mathrm{ch}(G) \leqslant k$.*

proof. Пусть $v_1, \ldots, v_n$ — нумерация вершин графа из определения, причем каждой вершине v_i соответствует список $L(v_i)$ длины $l(v_1) \geqslant k$.

Покрасим вершины в порядке, обратном нумерации. При покраске вершины v_i количество запретов на цвет не превосходит количество соседей среди вершин с бо́льшим номером, а таких не более $k-1$. Значит, мы можем покрасить вершину v_i в цвет из ее списка. □

lm 15. *Граф G является редуцируемым, согда для любого его подграфа H выполняется $\delta(H) \leqslant k-1$.*

proof.

$\Longrightarrow$ Пронумеруем вершины графа G как в определении. Пусть какой-то подграф H имеет $\delta(H) \geqslant k$.

Рассмотрим вершину с наименьшим номером $v_i \in V(H)$. Она смежна не менее чем с $d_H(v_i) \geqslant \delta(H) \geqslant k$ вершинами с бо́льшими номерами. Противоречие.

$\Longleftarrow$ Пусть v_1 — вершина графа G наименьшей степени. Она смежна не более чем с $d_G(v_1) = \delta(G) \leqslant k-1$ вершиной.

Пусть вершины $v_1, \ldots, v_{i-1}$ уже построены.

Рассмотрим граф $G_i = G - \{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$. В нем должна быть вершина степени не более $\delta(G_i) \leqslant k-1$, которую мы и возьмем в качестве v_i.

□

4.4 Две леммы о d-раскрасках (о избыточной вершине и о удалении вершины с сохранением связности).

def. Граф G называется d-раскрашиваемым, если для любого набора списков L, удовлетворяющего условию $l(v) \geqslant d_G(v)$ для каждой вершины $v \in V(G)$, существует правильная раскраска вершин в цвета из списков.

Список цветов, удовлетворяющий указанному условию, будем называть d-списком.

def. Назовем вершину $v \in V(G)$ нормальной, если $l(v) \geqslant d_G(v)$, избыточной, если $l(v) > d_G(v)$.

lm 16. *Пусть G — связный граф, L — d-список, в котором вершина a избыточная. Тогда существует правильная раскраска вершин графа G в соответствии со списком L.*

proof. Индукция по количеству вершин.

База: граф с одной избыточной вершиной, очевидно.

Переход: пусть мы уже доказали утверждение для графов с меньшим числом вершин.

Рассмотрим граф $G - a$. Пусть $G_1, \ldots, G_k$ — все компоненты графа $G - a$. В каждом графе G_i должна быть вершина a_i, смежная с a.

Рассмотрим отдельно граф G_i с исходными списками вершин. Тогда a_i станет избыточной, так как $d_{G_i}(a) \leqslant d_G(a_i) - 1 \leqslant l(a_i) - 1$.

По индукционному предположению вершины всех G_i можно покрасить в соответствии со списками. Так как a избыточная, мы можем раскрасить ее в какой-то цвет из списка $L(a)$, не нарушив правильности раскраски.

□

lm 17. *Пусть G — связный граф, L — d-список. Предположим, что существуют две смежные вершины a и b такие, что граф $G - a$ связен и $L(A) \not\subset L(b)$. Тогда существует правильная раскраска вершин графа G в соответствии со списком L.*

proof. Пусть $1 \in L(A) \setminus L(B)$.

В связном графе $G - a$ из всех списков вершин множества $N_G(A)$, содержащих цвет 1, удалим этот цвет, остальные оставим без изменений. Получим новые списки $L'(v)$ графа $G - a$.

Все вершины графа $G - a$ нормальны: вершины не из $N_G(a)$ не изменились, а для $v \in N_G(a)$ имеем

$$l'(v) \geqslant l(v) - 1 \geqslant d_G(v) - 1 = d_{G-a}(v).$$

Так как $1 \notin L(b)$, $l'(b) = l(b)$. Так как $d_{G-a)(b)=d_G(b)-1}$, вершина b избыточная.

По лемме 16 существует правильная раскраска вершин графа $G-a$ в цвета из L'. Далее докрашиваем a в цвет 1, получаем правильную раскраску вершин графа G в цвета списка L. □

4.5 Теорема Бородина о d-раскрасках

def. Граф, в котором каждый блок — нечетный цикл или полный граф называется лесом Галлаи.

thm (Бородин, 1977)**.** Если G не является лесом Галлаи, то G d-раскрашиваем.

proof. Пусть каждой вершине v соответствует список $L(v)$. НУО $l(v) = d_G(v)$ для каждой вершины $v \in V(G)$. Считаем граф связными.

Индукция по размеру графа.

База: G двусвязен.

Если не все списки одинаковые, то существуют две смежные вершины a и b с $L(a) \neq L(b)$ и G раскрашиваем по лемме 17.

Значит, все списки одинаковы, состоят из d цветов. Тогда и все степени вершин равны d.

По условию граф отличается от полного графа и нечетного цикла, поэтому, по теореме Брукса раскраска существует.

Переход: G недвусвязен. Пусть для меньшего чем G графа теорема доказана.

Рассмотрим крайний блок B графа G, отделяемый от остального графа точкой сочленения a.

Граф $B-a$ связен, все вершины нормальны по условию, а все смежные с a вершины избыточны, причем такие должны быть, иначе это не точка сочленения. По лемме 14 его вершины можно покрасить согласно спискам.

Пусть $G' = G - \mathrm{Int}(B)$. Граф G' имеет те же блоки, что и G, кроме B. Поэтому среди этих блоков должен быть еще один блок, отличный от нечетного цикла и полного графа.

Списки отличных от a вершин не менялись, степени — тоже.

Составим новый список $L'(a)$ из всех цветов $L(a)$, кроме использованных для раскраски $\mathbb{N}_B(a)$. Таких цветов не более $d_B(a)$. Так как $d_G(a) = d_B(a) + d_{G'}(A)$, получаем $l'(a) \geqslant d_{G'}(a)$.

По индукционному предположению существуют правильная раскраску вершин G' в цвета из списка. Далее дополняем ее раскраской $B - a$ и получаем искомую раскраску вершин G.

$\square$

4.6 Списочная теорема Брукса.

thm (Визинг, 1976)**.** Пусть $d \geqslant 3$, G — связный граф, отличный от K_{d+1}, $\Delta(G) \leqslant d$. Тогда $\mathrm{ch}(G) \leqslant d$.

proof. Пусть каждой вершине $v \in V(G)$ соответствует список $L(v)$, причем $l(v) \geqslant d$.

- Если G — не лес Галлаи, по теореме Бородина он раскрашивается.
- Пусть G — лес Галлаи. По условию G не двусвязен, поэтоому его блоки точно отличны от K_{d+1}.

  Посмотрим на крайний блок B и его вершину b, не являющуюся точкой сочленения. Так как этот блок не является полным подграфом:
  $$l(b) \geqslant d > d_B(b) = d_G(b).$$
  Значит, вершина b избыточна, по лемме 16 существует искомая раскраска.

$\square$

4.7 k-критические графы. Простейшие свойства.

def. Назовем граф k-**критическим**, если $\chi(G) = k$, но $\chi(H) < k$ для любого собственного подграфа H графа G.

lm 18. *Если G — k-критический граф, то $\delta(G) \geqslant k-1$.*

<u>*proof.*</u> Пусть $a \in V(G)$, $d_G(a) \leqslant k-2$. По определению $\chi(G-a) \leqslant k-1$.

Покрасим граф $G-a$ в $k-1$ цвет, так как степень a в исходном графе меньше $k-1$, мы сможем докрасить ее и получить раскраску в $k-1$ цвет. Противоречие. □

lm 19. *Пусть G — k-критический граф, $S \subset V(G)$ — разделяющее множество $|S| < k$. Тогда $G(S)$ — не полный.*

<u>*proof.*</u> Пусть $G(S)$ — полный, $S = \{a_1, \ldots, a_m\}$, $\mathrm{Part}(S) = \{F_1, \ldots, F_n\}$, $G_i = G(F_i)$.

Так как G_i — собственный подграф G, то $\chi(G_i) \leqslant k-1$, пусть ρ_i — правильная раскраска G_i в $k-1$ цвет.

Так как вершины S попарно смежны в G_i, то все цвета $\rho(a_1), \rho(a_2), \ldots, \rho(a_m)$ различны. Теперь согласуем раскраски в $G_1, \ldots, G_n$ и получим общую раскраску в $k-1$ цвет для вершин графа G. Противоречие. □

4.8 Теорема Галлаи о k-критических графах.

<u>**thm**</u> (Галлаи, 1963)**.** Пусть $k \geqslant 3$, G — k-критический граф. Пусть V_{k-1} — множество всех вершин графа G, имеющих степень $k-1$, а $G_{k-1} = G(V_{k-1})$. Тогда G_{k-1} — лес Галлаи.

<u>*proof.*</u> По лемме 18 $\delta(G) \geqslant k-1$. Будем считать, что $G_{k-1} \neq \varnothing$, иначе доказывать нечего.

Предположим, что G_{k-1} не лес Галлаи. Тогда этот граф имеет компоненту G', у которой есть блок, отличный от полного графа и нечетного цикла. Пусть $V(G') = V'$.

Для собственного подграфа $H = G - V'$ графа G мы имеем $\chi(H) \leqslant k-1$, так как G — k-критический.

Пусть ρ — раскраска графа H в $k-1$ цвет. Рассмотрим любую вершину $x \in V'$, пусть она имеет n_x соседей в $V(H)$. Поместим в список $L(x)$ в точности те цвета из $[1..k-1]$, что не встречаются среди n_x. Тогда длина списка $l(x) \geqslant k-1-n_x = d_{G'}(x)$.

По теореме Бородина граф G' является d-раскрашиваемым, следовательно, существует правильная раскраска ρ^* графа G' в цвета из построенных списков.

Вместе ρ и ρ^* дают правильную раскраску вершин G в $k-1$ цвет. Противоречие. Значит G_{k-1} — лес Галлаи. $\square$

4.9 Лемма Дирака о разделяющем двухвершинном множестве в критическом графе.

def. Пусть $x, y \in V(G)$ — две несмежные вершины. Определим операцию слияния вершин x и y графа G следующим образом: эти вершины объединяются в одну новую $x\#y$, которая будет смежна со всеми вершинами, смежными в графе G хотя бы с одной из вершин x и y. Полученный граф обозначим через $G\#xy$.

lm 20 (Дирак, 1953). *Пусть G — k-критический граф, $S = \{a, b\} \in \mathfrak{R}(G)$, $\mathrm{Part}(S) = \{F_1, \dots, F_m\}$ и $G_i = F(F_i)$. Тогда $m = 2$, $ab \notin E(G)$ и части $\mathrm{Part}(S)$ можно занумеровать так, что графы $G_1 + ab$ и $G_2\#ab$ — k-критические.*

proof. Пусть $U_i = \mathrm{Int}(F_i)$ — компонента связности графа $G - S$, $G'_i = G - U_i$, $M_j = V(G'_i)$.

Так как G — k-критический, то его подграф G'_i имеет правильную раскраску в $k-1$ цвет. Пусть ρ'_i — такая раскраска.

Назовем ρ'_i раскраской типа 1, если $\rho'_i(a) = \rho'_i(b)$, и раскраской типа 2, иначе.

st. *Если для некоторых различных i, j существуют правильные раскраски в $k-1$ цвет одного типа ρ'_i графа G'_i и ρ'_j графа G'_j, то $\chi(G) \leqslant k-1$.*

proof. Пока нет $\square$ Предположим, что $m \geqslant 3$. Рассмотрим правильные раскраски ρ'_i графов G'_i в $k-1$ цвет для $i \in [1..3]$.

Какие-то две имеют один тип, следовательно, по утверждению 4.9 $\chi(G) \leqslant k-1$, но это не так.

Тогда, $m = 2$. $G_1 = G_2'$ и $G_2 = G_1'$.

По утверждению 4.9 у графов G_1 и G_2 не может быть правильных раскрасок в $k-1$ цвет одного и того же типа. НУО у всех тип 1 в G_1 и 2 в G_2.

Так как существует правильная раскраска типа 1, $ab \notin E(G)$.

st. *Граф $G_1^* = G_1 + ab$ — k-критический.*

proof. Пока нет □

st. *Граф $G_2^* = G_2 \# ab$ — k-критический.*

proof. Пока нет □ □

4.10 Гипотеза Хайоша, случай $k = 4$.

def. Пусть H — произвольный граф. Назовем граф H' подразбиением графа H, если H' может быть получен из H заменой нескольких ребер на простые непересекающиеся пути.

thm (Дирак, 1953)**.** Если $\chi(G) = 4$, то граф содержит в качестве подграфа подразбиение K_4.

proof. Достаточно доказать для 4-критических графов. Рассмотрим такой граф G. Будем доказывать по индукции по количеству вершин в графе.

База: G — трехсвязный граф. $\delta(G) \geqslant 3$, тогда в графе G существует простой цикл $Z = a_1 a_2 \dots a_n$, длины хотя бы 4.

Так как $G - \{a_1, a_3\}$ связен, существует простой путь P от a_2 до a_m, не проходящий по другим вершинам цикла.

Эти две вершины делят цикл на две непустые дуги: $B = \{a_3, \dots, a_{m-1}\}$ и $B' = \{a_{m+1}, \dots, a_1\}$.

Так как $G-\{a_2, a_m\}$ связен, существует BB'-путь Q, не проходящий через a_2 и a_m. Пусть $a_x \in B$ и $a_y \in B'$ — концы Q.

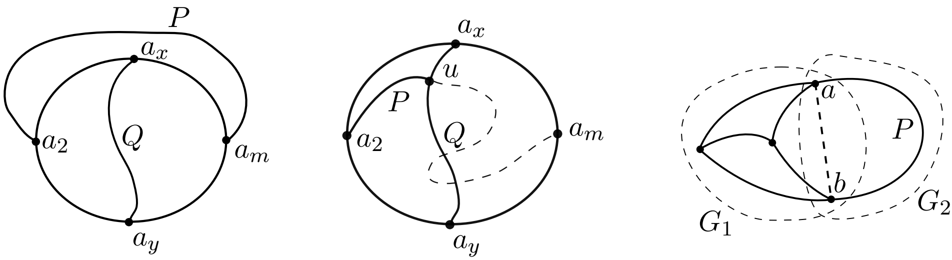
Рассмотрим два случая

- $V(P) \cap V(Q) = \varnothing$.

  Рассмотрим подграф H графа G — объединение цикла Z и путей P и Q. Этот граф — подразбиение K_4. См. рис. 4.2a.

- $V(P) \cap V(Q) \neq \varnothing$.

  Пусть u — первая точка пересечения с Q на пути P (от a_2). Тогда подграф H, равный объединению цикла Z, пути Q и участка a_2Pu — подразбиение K_4. См. рис. 4.2b.



(a) (b) (c)

Переход: граф G не трехсвязен.

Пусть S — минимальное разделяющее множество графа G. Тогда $|S| \leqslant 2$. Пусть $S = \{a, b\}$.

По лемме 20 вершины a и b несмежны, $\mathrm{Part}(S) = \{F_1, F_2\}$, $G_i = G(F_i)$, причем части можно занумеровать так, что граф $G_1^* = G_1 + ab$ — 4-критический.

По индукционному предположению, в графе G_1^* есть подграф H, являющийся подразбиением K_4. Если H — уже подграф G, то переход доказан.

Предположим, что H не подграф G, тогда $ab \in H$.

Граф G_2 связен, поэтому существует ab-путь P с $\mathrm{Int}(P) \cap V(H) = \varnothing$. Тогда граф $H' = H - ab \cup P$ – подграф G и подразбиение K_4. См. рис. 4.2c.

□

4.11 Конструкция графа с произвольным хроматическим числом без треугольников.

def. Кликовое число графа G (обозначение $\omega(G)$) — это количество вершин в максимальной клике.

thm (Мычельский, 1955)**.** Для любого $k \in \mathbb{N}$ существует граф G, удовлетворяющий условиям $\chi(G) = k$, $g(G) \geqslant 4$.

proof. Для $k = 1$ и $k = 2$ подойдут полные графы K_1 и K_2.

Построим следующие графы $G_3, G_4, \ldots$ без треугольников с $\lambda(G_k) = k$.

Пусть построен граф G_k, причем $V(G_k) = \{u_1, \ldots, u_n\}$. Этот граф будет частью графа G_{k+1}, в котором будут добавлены вершины $v_1, \ldots, v_n, w$.

Ребра между новыми вершинами проведем так: v_i будет смежна со всеми вершинами из $N_{G_k}(ui)$ и только с ними, а w — со всеми вершинами $v_1, \ldots, v_n$ и только с ними (см. рис. **??**).

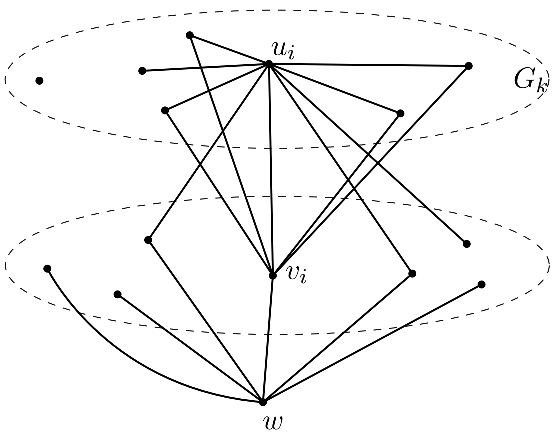


Рис. 4.3

Понятно, что треугольников в графе G_{k+1} нет.

Далее заметим, что $\chi(G_{k+1}) \leqslant k+1$: если ρ – правильная раскраска вершин G_{k+1} в k цветов, то можно продолжить ее на G_{k+1}, использовав только один дополнительный цвет, для этого положим $\rho(v_i) = \rho(u_i)$ и $\rho(w) = k+1$.

Предположим, что $\chi(G_{k+1}) \leqslant k_i$, и рассмотрим правильную раскраску ρ вершин графа G_{k+1} в k цветов.

НУО $\rho(w) = k$. Построим правильную раскраску ρ' вершин G_k в $k-1$ цвет, получим противоречие.

Для каждой вершины положим, $\rho'(u_i) = \rho(u_i)$, если $\rho(u_i) \neq k$, и $\rho'(u_i) = \rho(v_i)$, если $\rho(u_i) = k$.

Так как вершины $v_1, \ldots, v_n$ смежны с вершиной w цвета k, то их цвета отличны от k, следовательно, $\rho' \colon V(G_k) \to [1..k-1]$.

Докажем правильность раскраски ρ :. Предположим противное, пусть $\rho'(u_i) = \rho'(u_j)$, вершины u_i и u_j смежны.

Очевидно, хотя бы одна из них перекрашена, пусть это u_i, тогда $\rho'(u_i) = \rho(v_i)$.

Мы перекрашивали только вершины, имеющие цвет k в раскраске ρ, среди них не было смежных, следовательно, $\rho'(u_j) = \rho(u_j)$.

По построению, из $u_j \in N_{G_k}(u_i)$ следует $u_j \in N_{G_k}(v_i)$ и мы можем сделать вывод, что

$$\rho'(u_i) = \rho(v_i) \neq \rho(u_j) = \rho'(u_j).$$

Противоречие.

Таким образом, ρ' — правильная раскраска вершин графа G_k, противоречие. Следовательно, $\chi(G_{k+1}) = k+1$.

$\square$

4.12 Оптимальные раскраски ребер и их свойства. Хроматический и покрывающий индексы двудольного графа.

def. Хроматический индекс графа G — наименьшее натурально число $\chi'(G)$, для которого существует правильная раскраска ребер графа G в такое количество цветов.

Назовем раскраску покрывающей, если ребра каждого цвета образуют покрытие, то есть покрывают все вершины.

Покрывающий индекс графа G — наибольшее натуральное число $\kappa'(G)$, для которого существует покрывающая раскраска ребер графа G.

def. Пусть ρ — раскраска ребер графа G в k цветов.

Будем говорить, что в раскраске ρ цвет i представлен в вершине v, если существует инцидентное v ребро e такое, что $\rho(e) = i$. Обозначим за $\rho(v)$ количество цветов, представленных в вершине v.

Введем обозначение $\rho(G) = \sum_{v \in V(G)} \rho(v)$. Назовем раскраску ρ k-оптимальной, если для любой другой раскраски ρ' ребер графа G в k цветов $\rho(G) \geqslant \rho'(G)$.

Пусть ρ — правильная раскраска ребер графа G в не более чем k цветов. Тогда для каждой вершины $v \in V(G)$ имеем $\rho(v) = d_G(v) \geqslant \rho'(v)$ для любой другой раскраски ρ'. Поэтому правильная раскраска всегда k-оптимальна.

lm 21. *Пусть G — связный граф, отличный от простого цикла нечетной длины. Тогда существует такая раскраска ребер G в два цвета, что в каждой вершине степени не менее двух представлены оба цвета.*

proof.

- Если все вершины имеют степень 2, то это четный цикл, утверждение верно.
- Если графе есть вершины нечетной степени, то добавим новую вершину w и соединим со всеми вершинами нечетной степени. Получим граф со всеми четными степенями $\tilde{G}$.

- Если в графе G есть вершины нечетной степени, то положим $a = w$.
- Если все степени четные, то $\tilde{G} = G$, а в качестве a возьмем вершину степени хотя бы 4, такая есть, так как G не является четным циклом.

В графе $\tilde{G}$ есть эйлеров цикл. Покрасим ребра в порядке обхода по нему, начиная с a и чередуя цвета.

Пусть $x \neq a$. Если $d_G(x) \geqslant 2$, мы прошли через x не меньше раза, поэтому у x есть два ребра G разных цветов.

Если $a = w$, то ничего проверять не нужно. Тогда остался случай, когда a — вершина степени хотя бы 4. Тогда есть в G есть два ребра инцидентных a разных цветов. $\square$

Любая раскраска ρ ребер графа в цвета $[1..k]$ — разбиение множества $E(G)$ в объединение непересекающихся множеств $E_1, \ldots, E_k$, где ρ принимает значение i на ребрах E_i.

lm 22. *Пусть ρ — k-оптимальная раскраска ребер графа G. Предположим, что вершина w и цвета i и j таковы, что в вершине w хотя бы два раза представлен цвет i и не представлен цвет j. Пусть $H = G(E_i \cap E_j)$, а H_w — компонента графа H, содержащая вершину w. Тогда H_w — простой цикл нечетной длины.*

proof. Пусть H_w не является простым циклом нечетной длины.

Построим новую раскраску ρ', отличающуюся только раскраской ребер H_w: раскрасим из в цвета i и j так, чтобы в каждой вершине x степени $d_{H_w}(x) \geqslant 2$ были представлены оба цвета, это возможно по лемме 21.

Тогда $\rho'(w) \geqslant \rho(w) + 1$, а для любой другой вершины x, очевидно, что $\rho'(x) \geqslant \rho(x)$. Тогда $\rho'(G) > \rho(G)$, поэтому ρ не может быть k-оптимальной. Противоречие. $\square$

note. Очевидно, что $\chi'(G) \geqslant \Delta(G)$: все ребра, инцидентные одной вершине наибольшей степени должны быть разноцветными.

thm (Кениг, 1916)**.** Пусть G — двудольный граф (возможно, с кратными ребрами). Тогда $\chi'(G) = \Delta(G)$.

proof. Пусть $\Delta = \Delta(G)$. Рассмотрим Δ-оптимальную раскраску ρ ребер графа G.

Предположим, что ρ — неправильная. Тогда существует вершина v и цвет i такие, что i дважды представлен в вершине v.

Так как $d_G(v) \leqslant \Delta$, существует цвет j, который не представлен в вершине v. По лемме 22 в G есть нечетный цикл, противоречие. □

thm (Гупта, 1966)**.** Если граф G двудольный, то $\kappa'(G) = \delta(G)$.

proof. Рассмотрим $\delta(G)$-оптимальную раскраску ρ ребер графа G.

Предположим, что ρ не является покрывающей. Тогда существует вершина v и цвет i такие, что i не представлен в вершине v.

Так как $d_G(v) \geqslant \delta$, существует цвет j, который представлен в вершине v дважды. По лемме 22 в G есть нечетный цикл, противоречие. □

4.13 Теорема Визинга.

def. Через $\mu(G)$ обозначим максимальную кратность ребра графа G, то есть максимум $e_G(\{x\}, \{y\})$ для всех пар $x, y \in V(G)$.

thm (Визинг, 1964)**.** Для любого графа G выполнено $\Delta(G) \leqslant \chi'(G) \leqslant \Delta(G) + \mu(G)$.

proof. Пусть $\mu = \mu(G), \Delta = \Delta(G)$. Достаточно доказать существование правильной раскраски ребер G в $\Delta + \mu$ цветов.

Рассмотрим $(\Delta + \mu)$-оптимальную раскраску ρ ребер G. Предположим, что эта раскраска неправильная.

Тогда существует вершина u и цвет i_1, который дважды представлен в вершине u. Так как $d_G(u) < \Delta + \mu$, существует цвет j, не представленный в u.

Пусть $uv_1 \in E(G)$ и $\rho(uv_1) = i_1$. Так как $d_G(v_1) < \Delta + \mu$, существует цвет i_2, не представленный в v_1.

Опишем один шаг построения.

Пусть различные цвета $i_1, \dots, i_l$ и ребра $e_1, \dots, e_l \in E(G)$ таковы, что $e_t = uv_t$, $\rho(e_t) = i_t$, цвет i_{t+1} не представлен в вершине v_t.

Будем говорить, что цвет i_{t+1} *выбран для вершины* v_t. Также вершины $v_1, \dots, v_t$ не обязательно различны.

Рассмотрим вершину $v = v_l$. Пусть в наборе $v_1, \dots, v_l$ она встречается m раз. Очевидно, $m \leqslant \mu$.

Тогда на предыдущих шагах мы рассматривали вершину v и $m - 1$ раз выбирали цвет, не представленный в этой вершине. Поскольку

$$d_G(v_l) + m - 1 < \Delta + \mu,$$

существует цвет i_{l+1}, не представленный в вершине v_l и не выбранный для нее на предыдущих шагах, его мы и выберем.

Определим раскраску данного шага $\rho_l\colon \rho_l(e_s) = i_{s+1}$ при $s \in [1..l]$ и $\rho_l(e) = \rho(e)$ на остальных ребрах.

st. *Раскраска ρ_l k-оптимальна. Цвет i_{l+1} представлен в вершине u.*

proof. Для вершин $x \notin \{u, v_1, \dots, v_l\}$ цвета ребер не менялись, поэтому $\rho_l(x) = \rho(x)$.

Рассмотрим вершину w, которая входит в $\{v_1, \dots, v_l\}$ ровно n раз. Пусть $W = v_{s_1} = \dots = v_{s_n}$.

По построению все выбранные для вершины w цвета $i_{s_1+1}, \dots i_{s_n+1}$ различны, не представлены в вершине w в раскраске ρ и представлены в раскраске ρ_l.

Цвета $i_{s_1}, \dots, i_{s_n}$ представлены в вершине w в раскраске ρ.

Все отличные от $e_{s_1}, \dots, e_{s_n}$ ребра, инцидентные w, не изменили свой цвет, поэтому остальные цвета одинаково представлены в w в раскрасках ρ и ρ_l, поэтому $\rho_l(w) \geqslant \rho(w)$.

Рассмотрим вершину u. В результате перекрашивания инцидентных u ребер $e_1, \dots, e_l$ из их цветов исчез i_1, и появился i_{l+1}. Но так как цвет i_1 был представлен в u в раскраске ρ хотя бы дважды, он представлен и в раскраске ρ.

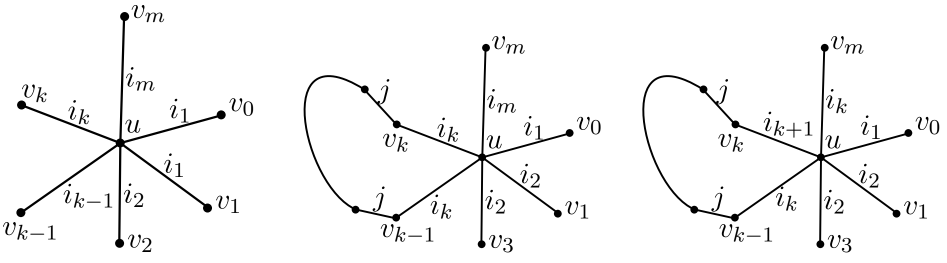
Тогда $\rho_l(u) \geqslant \rho(u)$ и $\rho_l(G) \geqslant \rho(G)$, следовательно, раскраска p_l оптимальна. Так как ρ тоже оптимальная, $\rho(G) = \rho_l(G)$, поэтому цвет i_{l+1} был представлен в вершине u и в раскраске ρ. $\square$ Пусть $e_{l+1} = uv_{l+1}$ — ребро цвета $\rho(e_{l+1}) = \rho(G)$.

Так мы завершили еще один шаг.

Поскольку у u конечное число соседей, на некотором шаге мы получим $i_{m+1} = i_k$. То есть v_m не совпадает с v_{k-1} (иначе мы выбрали бы $i_{m+1} \neq i_k$). Так как в вершинах v_{k-1} и v_m в раскраске ρ не представлен цвет i_k, а в v_k представлен, все три вершины v_{k-1}, v_k, v_m различны.

Рассмотрим $(\Delta+\mu)$-оптимальные раскраски ρ_{k-1} и ρ_m (считаем, что $\rho_0 = \rho$):

- В обеих раскрасках в вершине u дважды представлен цвет i_k.
- Цвет j не представлен в вершине u ни в одной из раскрасок.



(a) Раскраска ρ (b) Раскраска ρ_k (c) Раскраска ρ_m

Пусть E_s — множество всех ребер цвета s в раскраске ρ_{k-1}, E'_s — множество всех ребер цвета s в раскраске ρ_m. $H = G(E_{i_k} \cup E'_j)$ и $H' = G(E'_{i_k} \cup E'_j)$.

По лемме 22 из оптимальности раскрасок следует, что содержащие вершину u компоненты связности графов H и H' — простые циклы нечетной длины.

Тогда $d_H(v_k) = 2$: из v_k выходит ребро uv_k цвета $\rho_{k-1}(uv_k) = i_k$ и ребро цвета j. Для всех ребер e цикла H, кроме uv_k цвет $\rho_{k-1}(e) = \rho_m(e)$, поэтому $d_{H'}(v_k) = d_H(v_k) - 1 = 1$.

Вершины v_k и u лежать в одной компоненте связности H', которая должна быть нечетным циклом. Противоречие.

Следовательно, ρ — искомая правильная раскраска в $\Delta + \mu$ цветов. $\square$

4.14 Теорема Гупты.

thm (Гупта, 1974)**.** Для любого графа G выполняется неравенство $\kappa'(G) \geqslant \delta(G) - \mu(G)$.

proof. Пока нет $\square$

4.15 Хроматический многочлен графа.

def. Для любого натурального числа k обозначим через $\chi_G(k)$ количество правильных раскрасок вершин графа G в k цветов.

Функция $\chi_G(k)$ называется хроматическим числом графа G.

note.
- $\chi_G(\chi(G)) \neq 0$
- $\forall k < \chi(G)\colon \chi_G(k) = 0$

lm 23. *Пусть G — непустой граф, а $e = uv$ — его ребро. Тогда*

$$\chi_{G-uv}(k) = \chi_G(k) + \chi_{G\cdot uv}(k).$$

proof. Разобьем правильные раскраски графа $G - e$ в k цветов на два типа:

1. где вершины u и v разного цвета;

2. где вершины u и v одного цвета.

Количество раскрасок первого типа равно $\chi_G(k)$, а второго — $\chi_{G\cdot ab}(k)$. $\square$

thm. Для любого графа G без петель выполнены следующие утверждения:

1. Функция $\chi_G(k) \in \mathbb{Z}[k]$ — унитарный многочлен с целыми коэффициентами степени $v(G)$;
2. Знаки коэффициентов $\chi_G(k)$ чередуются, причем старший не меньше нуля.

proof. Индукция по размеру графа G и количеству ребер.

База: Для пустого графа на n вершинах $\overline{K_n}$, очевидно, $\chi_{\overline{K_n}}(k) = k^n$, поэтому все утверждения верны.

Переход: Пусть G — непустой граф, e — его ребро. По лемме 23

$$\chi_G(k) = \chi_{G-e}(k) - \chi_{G\cdot e}(k).$$

Для меньших графов $G \cdot e$ и $G - e$ утверждения доказаны:

- $\chi_{G-e}(k)$ — многочлен степени $v(G)$;
- $\chi_{G\cdot e}(k)$ — многочлен степени $v(G \cdot e) = v(G) - 1$.

Старший коэффициент $\chi_G(k)$ равен старшему коэффициенту $\chi_{G-e}(k)$, то есть 1.

Так как $\deg(\chi_{G\cdot e}) = \deg(\chi_{G-e}) - 1$, в χ_G чередование знаков сохранится.

$\square$

4.16 Хроматический многочлен и компоненты связности. Кратность корня 0 хроматического многочлена графа.

lm 24. *Пусть* $G_1, \ldots, G_n$ *— все компоненты графа* G*. Тогда* $\chi_G(k) = \prod_{i=1}^{n} \chi_{G_i}(k)$.

proof. Очевидно □

thm. Для любого графа G число 0 является корнем $\chi_G(k)$ кратности, равной количеству компонент связности.

proof. 0 — корень любого хроматического многочлена, так как раскрасок в 0 цветов быть не может.

Докажем, что для связного графа G кратность корня 0 у $\chi_G(k)$ равна 1. Далее по лемме 24 получим утверждение теоремы.

Пусть $v(G) = n$. Индукцией по количеству вершин докажем для связного графа G, что коэффициент при k многочлена $\chi_G(k)$ не равен 0 и имеет такой же знак как $(-1)^n$.

База: $n = 0$, очевидно.

Переход: пусть G — связный граф с $v(G) = n \geqslant 2$, для меньшего n утверждение доказано, T — остовное дерево графа G. $\chi_T(k) = k(k-1)^{n-1}$.

Существует последовательность графов $G_0 = T, \ldots, G_n = G$, в которой $G_{i+1} = G_i + e$, где $e \notin E(G_i)$.

Пусть a_i — коэффициент при k многочлена $\chi_{G_i}(k)$. Докажем по индукции, что $a_i \neq 0$ и имеет такой же знак, что и $(-1)^{n-1}$.

База: $i = 0$, очевидно, по формуле для дерева.

Переход: пусть $a_i \neq 0$ и имеет знак $(-1)^{n-1}$. По лемме **??** $\chi_{G_{i+1}}(k) = \chi_{G_i}(k) - \chi_{G_i \cdot e}(k)$.

Граф $G_i \cdot e_i$ связен. По индукционному предположению у многочлена $\chi_{G_i \cdot e_i}(k)$ знак коэффициента b при k такой же, как $(-1)^{n-2}$, то есть отличается от знака a_i.

Поэтому $a_{i+1} = a_i - b$ имеет такой же знак, что и a_i и отличный от 0.

□

4.17 Хроматический многочлен и блоки. Кратность корня 1 хроматического многочлена графа.

lm 25. *Пусть G — связный граф с n блоками $B_1, \ldots, B_n$. Тогда*

$$\chi_G(k) = \left(\frac{1}{k}\right)^{n-1} \cdot \prod_{i=1}^{n} \chi_{B_i}(k).$$

proof. Индукция по количеству блоков.

База: для двусвязного графа, очевидно, это один блок.

Переход: Пусть $n \geqslant 2$. НУО, B_n — крайний блок, содержащий ровно одну точку сочленения a.

В графе $G' = G - \mathrm{Int}(B_n)$ ровно на один блок меньше, так как нет B_n. По индукционному продолжению для G' :

$$\chi_{G'}(k) = \left(\frac{1}{k}\right)^{n-2} \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \chi_i(k).$$

Рассмотрим любую правильную раскраску ρ графа G' в k цветов. Попробуем покрасить вершины B_n с соблюдением правильности.

Единственное ограничение — цвет вершины a уже зафиксирован, поэтому раскрасок в k раз меньше.

Следовательно, $\chi_G(k) = \frac{1}{k} \cdot \chi_{G'}(k) \cdot \chi_{B_n}(k)$.

□

thm. Пусть G — связный граф с более чем одной вершиной. Тогда 1 — корень многочлена $\chi_G(k)$ кратности, равной количеству блоков графа G.

proof. Так как в каждом блоке хотя бы две вершины, достаточно доказать, что у хроматического многочлена графа без точек сочленения число 1 является корнем кратности 1, а далее применить лемму 25.

Для $H \simeq K_2$ утверждение очевидно. Разберем второй вариант – двусвязный граф.

1 точно корень, так как раскрасить в один цвет двусвязный граф невозможно.

Докажем, что $\chi'_H(1) \neq 0$, тогда мы покажем, что 1 имеет кратность 1. Для этого докажем, что для двусвязного графа H на m вершинах $\chi'_H(1) \neq 0$ и имеет такой же знак, как $(-1)^m$.

Индукция по $v(H)$**.**

База: Если H — полный граф на трех вершинах, то

$$\chi_{K_3}(k) = k(k-1)(k-2) \qquad \chi'_{K_3}(1) = 1(1-2) = -1.$$

Переход: Пусть $v(H) > 3$. Тогда по теореме **??** существует такое ребро $e \in E(H)$, что граф $H \cdot e$ двусвязен.

По лемме 21 $\chi'_H(1) = \chi'_{H-e}(1) - \chi'_{H \cdot e}(1)$.

Так как $v(H \cdot e) < e(H)$, если граф $H - e$ двусвязен, то уже доказано, что $\chi'_{H-e}(1)$ имеет тот же знак, что и $(-1)^m$.

Если $H - e$ односвязен, то он имеет хотя бы два блока. Тогда для него верна лемма 23.

Так как хроматический многочлен каждого блока имеет корень 1, причем для недвусвязного графа $H - e$ его хроматический многочлен имеет 1 корнем кратности хотя бы 2. И тогда $\chi'_H(1) = 0$, разность тоже не может быть равна нулю, а знак сохраняется из $H \cdot e$.

$\square$

Глава 5

Планарные графы

5.1 Теорема Жордана для ломаной.

thm (Жордан, 1887). Замкнутая несамопересекающаяся ломаная P делит точки плоскости, не лежащие на P, на две такие части, что выполнены следующие условия:

(1) любые две точки из одной части можно соединить ломаной, не пересекающей P ;

(2) любая ломаная, соединяющая две точки из разных частей пересекает P.

proof. Пусть $P_1 \dots P_m$ — вершины P в порядке обхода по часовой стрелке. Обозначим через M множество всех точек плоскости, не лежащих на P.

Зафиксируем на прямой вектор l, не параллельный ни одной из сторон P. Из каждой точки $A \in M$ выпустим луч $l(A)$ в направлении l.

Если $l(A)$ содержит вершину P_i многоугольника P, то стороны $P_{i-1}P_i$ и P_iP_{i+1} лежат в одной полуплоскости относительно $l(A)$, будем говорить, что многоугольник P касается $l(A)$ в вершине P_i.

Посчитаем число $p(A)$ точек пересечения $l(A)$ с P, не являющихся касаниями. Оно точно конечное.

Обозначим за M_0 ту часть, которая состоит из всех точек $A \in M$, для которых $p(A)$ четно, и за M_1 — нечетно.

st. *M_0 и M_1 непусты.*

proof. Рассмотрим прямую l_0, параллельную вектору l, проходящую через внутреннюю точку ломаной P.

Найдем последнее пересечение во внутренней точке прямой l_0 и P в направлении вектора l — обозначим за ее X.

Рассмотрим содержащий X малый отрезок $[Y, Z]$ на l_0, не пересекающий P в отличных от X точках. Пусть Y лежит перед X при движении в направлении l. Тогда $p(Y) = 1$, а $p(Z) = 0$. $\square$

st. *Пусть $A, B \in M$ и отрезок $[A, B]$ не пересекает P. Тогда $p(A) \equiv p(B) \pmod 2$. В частности, выполнено второе условие теоремы.*

proof. Если $AB \parallel l$, то утверждение очевидно.

Если нет, отметим на отрезке AB все такие точки $A_1, \ldots, A_k$ в направлении от A к B, что $l(A_i)$ касается P (если такие есть). И обозначим $A_0 = A$, $A_{k+1} = B$.

Тогда для каждого $i \in [0..k]$ все точки отрезка $[A_i, A_{i+1}]$ имеют одинаковое значение функции p, при переходе на соседний отрезок значение может изменится на четное число (см. рис. 5.1a).

В любом случае, на всем отрезке $[A, B]$ четность одинаковая. $\square$

Докажем первое утверждение теоремы

Пусть $A, B \in M_i$. Если отрезок $[A, B]$ не пересекает P, то все уже доказано. Тогда найдем ближайшие к A и к B точки пересечения A_1 и B_1 соответственно.

Отметим на отрезке $[A, A_1]$ точку A' очень близко к A_1, на отрезке $[B_1, B]$ — точку B' очень близко к B, обозначим «очень близко» за δ. Тогда $p(A) = p(A')$ и $p(B) = p(B')$. См. рис. 5.1b.

Проведем вдоль каждой стороны многоугольника две параллельных прямых на расстоянии δ с обоих сторон от P. Получим два новых многоугольника P' и P''. Подбираем δ так, чтобы эти многоугольники не пересекали сторон исходного.

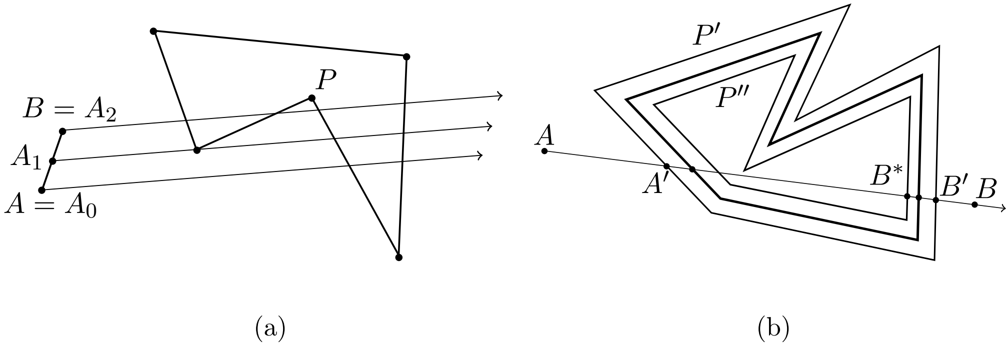


Рис. 5.1

НУО A' лежит на P'. Если B' тоже лежит на P', то мы можем дополнить ее до точек A и B, тем самым получив ломаную от A до B, не пересекающую P.

Пусть B' лежит на P''. Тогда обозначим за B^* точку пересечения P' с AB около B на расстоянии δ.

Тогда $p(B^*) - p(B') = \pm 1$. Но по утверждению 5.1 должно выполнятся сравнение

$$p(B^*) \equiv p(A') \equiv p(A) \equiv p(B) \equiv p(B') \pmod 2.$$

Противоречие. □

5.2 Грань плоского графа и ее граница. Свойства.

def. Граф называется планарным, если его можно изобразить на плоскости так, чтобы его ребра не пересекались во внутренних точках.

def. Плоский граф — конкретное изображение планарного графа бед пересечений и самопересечений ребер.

def (Грань)**.** Пусть M — множество всех точек плоскости, не входящих в изображение G. Запись $A \sim B$ означает, что точки $A, B \in M$ можно соединить ломаной, не пересекающей изображение графа G. $\sim$ — отношение эквивалентности.

Назовем классы эквивалентности по $\sim$ гранями. Обозначим множество всех граней $F(G)$ и $f(G) = |F(G)|$.

def. Рассмотрим ребро e плоского графа G. Если по разные стороны e расположены разные грани, то это ребро граничное, если одна и та же, что внутреннее. Обозначим через E_d множество всех граничных и внутренних ребер.

def. Граничные вершины грани d — вершины, до которых можно дойти по ломаной от внутренних точек этой грани, не пересекая изображение графа G. Обозначим их множество через V_d.

def. Граница грани d — подграф $B(d)$ графа G с множеством вершин V_d и множеством ребер E_d.

def. Размер границы грани d — количество граничный ребер этой грани плюс удвоенное количество внутренних. Обозначение: $b(d)$.

$\sum_{d\in F(G)} b(d) = 2e(G)$.

lm 26.

1. *Любые две точки на границе грани d можно соединить ломаной, проходящей в d.*

2. *Если две точки A и B на изображении графа G можно соединить ломаной L, не пересекающей изображения G, то A и B лежат на границе некоторой грани.*

proof.

1. Пусть A — внутренняя точка грани d. От нее можно провести ломаные, не пересекающие изображение G, до любых двух граничных. Все точки на этих ломаных лежат в d.

2. A и B точно лежат на границе грани d, содержащей все внутренние точки L.

□

5.3 Циклический обход границы.

def. Рассмотрим любую вершину a плоского графа G и упорядочим выходы ребер из a по часовой стрелке. Два ребра, выходы которых соседние в этом порядке, будем называть **соседними в вершине** a .

lm 27. *Пусть ab_1 и ab_2 — два соседних ребра в вершине a. Тогда ab_1 и ab_2 лежат в границе некоторой грани.*

proof. Вершины b_1 и b_2 можно соединить ломаной вдоль b_1ab_2, не пересекающей изображения G. Поэтому, ребра ab_1 и ab_2 лежат на границе некоторой грани. $\square$

5.3.1 Циклический обход границы

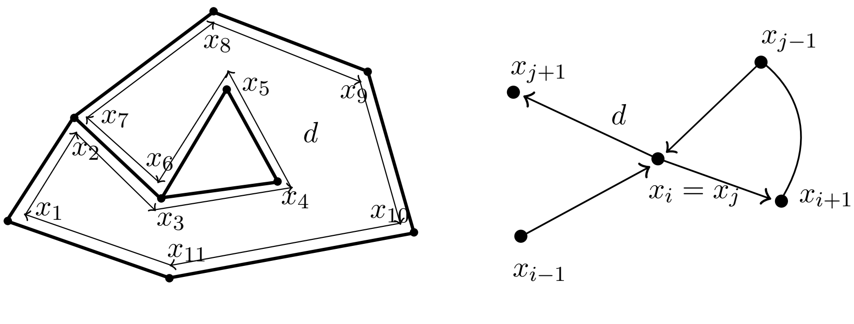
Пусть G — плоский граф, $d \in F(G)$, $x_1x_2 \in E_d$.

Пройдем по ребру x_1x_2 от x_1 до x_2. НУО справа по ходу движения расположена грань d.

Повернем в вершине x_2 направо до выхода соседнего ребра x_2x_3. Если $d_G(x_2) = 1$, то $x_1 = x_3$, это не проблема. Также $x_2x_3 \in E_d$.

Пройдем по этому ребру от x_2 к x_3, справа опять будет расположена грань d. И так далее. В итоге мы вернемся на ребро x_1x_2, при этом в вершину x_1 мы могли приходить и по другому ребру.

Мы получили замкнутый циклический путь, см. рис. 5.2a.



(a) (b) cycle-2

Пусть получился циклический маршрут $Z = x_1x_2\dots x_k$. Рассмотрим вершину x_i. По построению Z обходит вокруг x_i — пусть против часовой стрелки.

Пусть мы вышли из x_i по ребру x_ix_{i+1}, вернулись по ребру $x_{j-1}x_j = x_{j-1}x_i$, см. рис. 5.2b.

Тогда сектор между выходами ребер x_ix_{i+1} b x_ix_{j-1} не принадлежит грани d.

Следовательно, Z проходит все ребра из E_d, инцидентные вершине x_i. Поскольку это верно для любой входящей в Z вершины, этот маршрут обходит в точности все ребра одной из компонент графа $B(d)$.

Обозначим за $Z(U)$ такой маршрут для компоненты U, а через $Z(d)$ — объединение построенных маршрутов для всех компонент $B(d)$.

Если маршрут $Z(d)$ проходит ребро e дважды, то в разных направлениях. Значит, по обе стороны от e расположена грань d, то есть e — внутренне ребро d.

Пусть e — внутреннее ребро грани d. Тогда при проходе по e в любом из направлений справа будет расположена грань d. Поэтому, маршрут $Z)d)$ дважды пройдет e в обоих направлениях.

5.4 Лемма о несвязной границе грани несвязного графа.

lm 28. *Для плоского графа G выполнены следующие утверждения:*

1. *Если $d \in F(G)$ и $B(d)$ несвязна, то разные компоненты связности графа $B(d)$ лежат в разных компонентах связности графа G.*

2. *Граф G несвязен, согда он имеет грань с несвязной границей.*

proof.

1. Пусть B_1 и B_2 — две компоненты $B(d)$.

Изображение B_1 ограничено и не пересекает других компонент $B(d)$. Следовательно, изображение B_1 можно отделить от изображения B_2 замкнутой ломаной в грани d, не пересекающей ребер G (как в доказательстве теоремы Жордана). Значит, между B_1 и B_2 нет путь в графе G.

2. Пусть граф несвязен, но все грани имеют связные границы. Тогда можно обойти все грани графа G, каждый раз переходя в грань, имеющую с предыдущей общую вершину или ребро. Но тогда G связен. Противоречие.

   По первому пункту следует обратное утверждение.

□