

### Пути и циклы

1. Существование Гамильтонова пути и цикла: теорема Оре.
2. Существование Гамильтонова пути и цикла: замыкание по Хваталу.
3. Критерий существования гамильтонова цикла через связность.
4. Теорема Хватала о гамильтоновых последовательностях.
5. Гамильтонов цикл в кубе связного графа.
6. Теорема Татта о существовании регулярного графа степени  $k$  с обхватом  $g$ .

### Паросочетания

7. Независимые множества, паросочетания и покрытия в графе. Теорема Галлаи.
8. Максимальное паросочетание и дополняющие пути: теорема Бержа.
9. Теорема Татта о совершенном паросочетании.
10. Теорема Петерсена о паросочетании в кубическом графе.
11. Теорема Плесника о совершенном паросочетании в регулярном графе.
12. Теорема Петерсена о выделении 2-фактора в  $2k$ -регулярном графе и ее следствие о регулярных факторах.
13. Теорема Томассена о почти регулярном факторе почти регулярного графа.
14. Теорема Ловаса о разбиении графа.

### Связность

15. Блоки и точки сочленения. Лемма о пересечении блоков.
16. Дерево блоков и точек сочленения и его свойства.
17. Крайние блоки.
18. Алгоритм разбиения графа на блоки.
19. Следствие о веере путей из теоремы Менгера. Теорема Дирака о цикле, содержащем заданные  $k$  вершин.
20. Разделяющие множества в  $k$ -связном графе, части разбиения. Внутренность и граница части разбиения.
21. Теорема о представлении части разбиения графа в виде пересечения частей разбиения поднаборами.
22. Зависимые и независимые разделяющие множества. Свойства независимых множеств.
23. Разбиение графа парой зависимых разделяющих множеств.
24. Фрагмент  $k$ -связного графа.
25. Зависимые  $k$ -разделяющие множества в нерасщепимом  $k$ -связном графе.
26. Нерасщепимость  $k$ -связного графа с минимальной степенью хотя бы  $\frac{3k-1}{2}$ .
27. Удаление вершины с сохранением  $k$ -связности.
28. Лемма Мадера о двух критических рёбрах с общей вершиной.
29. Теоремы Мадера о минимальном  $k$ -связном графе.
30. Теорема Халина о треугольнике.
31. Стягивание ребра в двухсвязном графе без потери двусвязности: существует такое ребро, инцидентное любой вершине.
32. Стягивание ребра в трёхсвязном графе без потери трёхсвязности.

### Раскраски

33. Лемма о галочке.
34. Теорема Брукса.
35. Списочное хроматическое число  $k$ -редуцируемого графа.
36. Две леммы о  $d$ -раскрасках (о избыточной вершине и о удалении вершины с сохранением связности).
37. Теорема Бородина о  $d$ -раскрасках.
38. Списочная теорема Брукса.
39.  $k$ -критические графы. Простейшие свойства.
40. Теорема Галлаи о  $k$ -критических графах.
41. Лемма Дирака о разделяющем двухвершинном множестве в критическом графе.
42. Гипотеза Хайоша, случай  $k = 4$ .
43. Конструкция графа с произвольным хроматическим числом без треугольников.
44. Оптимальные раскраски ребер и их свойства. Хроматический и покрывающий индексы двудольного графа.
45. Теорема Визинга.

- 46. Теорема Гупты.
- 47. Хроматический многочлен графа.
- 48. Хроматический многочлен и компоненты связности. Кратность корня 0 хроматического многочлена графа.
- 49. Хроматический многочлен и блоки. Кратность корня 1 хроматического многочлена графа.

### Планарные графы

- 50. Теорема Жордана для ломаной.
- 51. Грань плоского графа и ее граница. Свойства.
- 52. Циклический обход границы.
- 53. Лемма о несвязной границе грани несвязного графа.
- 54. Внутренние ребра граней - мосты. Граница грани почти всегда задает эту грань.
- 55. Точки сочленения границы грани. Граница грани двусвязного графа.
- 56. Граница грани трёхсвязного графа.
- 57. Изображения планарного графа и их изоморфизмы. Единственность изображения трёхсвязного планарного графа.
- 58. Лемма об устойчивости  $K_5$  и  $K_{3,3}$  при стягивании ребра.
- 59. Теорема Куратовского.
- 60. Триангуляция графа.
- 61. Теорема Головиной-Яглома (гипотеза Хивуда) о раскраске вершин триангуляции в 3 цвета.
- 62. Лемма о соединении точки на грани с серединами ребер.
- 63. Двойственный граф.
- 64. Тэйтовы раскраски, эквивалентность Тэйта.
- 65. Теорема Томассена о списочной 5-раскрашиваемости планарного графа.

### Орграфы

- 66. Компоненты сильной связности и их свойства. Ациклические подграфы.
- 67. Входящее и исходящее дерево вершины. Минимальные сильно связанные графы: оценки на число стрелок.
- 68. Существование гамильтонова цикла в орграфе.
- 69. Существование гамильтонова пути и цикла в сильно связанном турнирном графе.
- 70. Удаление вершин из сильно связанного турнирного графа с сохранением сильной связности.
- 71. Циклы в сильно связанных турнирных графах. Теорема Муна.
- 72. Теорема Редди о количестве гамильтоновых путей в турнире.
- 73. Теорема Хватала-Ловаса о независимом множестве в ориентированном графе.
- 74. Теорема Галлаи-Мильграма о покрытии орграфа путями и теорема Дилворса.
- 75. Теорема Роя-Галлаи о раскрасках и ориентациях.
- 76. Ядро орграфа. Критерий раскрашиваемости графа в терминах ядер ориентаций.
- 77. Теорема Гэльвина о списочных рёберных раскрасках двудольного графа.
- 78. Существование ядра у орграфа без нечетных циклов.
- 79. Теорема Алона-Тарси о списочном хроматическом числе двудольного планарного графа.

### Остовные деревья

- 80. Количество остовных деревьев: теоремы Кэли, алгоритм Прюфера
- 81. Количество листьев в остовном дереве: теорема о промежуточных значениях.
- 82. Оценка количества листьев в остовном дереве связанного графа с минимальной степенью вершины 3.
- 83. Максимальные наборы из  $k$  непересекающихся по рёбрам лесов в графе  $G$ . Лемма о связанном множестве.
- 84. Теоремы Нэша-Уильямса.

### Экстремальные задачи теории графов

- 85. Число Рамсея для дерева и полного графа  $r(T_n, K_m)$ .
- 86. Погружение двудольного графа в особый.
- 87. Индуцированная теорема Рамсея — случай двудольного графа.
- 88. Индуцированная теорема Рамсея — случай произвольного графа.
- 89. Оценка количества рёбер в графе, удовлетворяющем наследственному свойству.
- 90. Графы без  $K_n$ : теорема Турана, единственность экстремального графа.
- 91. Оценка количества ребер в графах без  $K_{m,n}$ .

- 92.** Леммы о  $t$ -периодической раскраске.
- 93.** Теорема Бонди-Симоновица о четных циклах.
- 94.** Теорема о неизбежных подграфах большого связного графа.
- 95.** Теорема о неизбежных подграфах большого двусвязного графа.
- 96.** Лемма о монотонном пути в ациклическом турнире.
- 97.** Рёберная теорема Эрдеша-Позы