Конспект по теории графов
VI семестр, 2022 год
Современное программирование, факультет Математики и Компьютерных наук, СПбГУ
(лекции Карпова Дмитрия Валерьевича)

Вячеслав Тамарин

19 февраля 2022 г.

Оглавление

Исходный код на `https://github.com/tamarinvs19/theory_university`

Глава 1

Пути и циклы

Лекция 1: 15 feb

Все материалы можно найти на сайте https://logic.pdmi.ras.ru/~dvk/MKN/graph_th.

note. В этом разделе возможны кратные ребра.

1.1 Эйлеров путь и цикл

def. Эйлеров путь в графе G — путь, проходящий по каждому ребру ровно один раз.

Эйлеров цикл в графе G — цикл, проходящий по каждому ребру ровно один раз.

Граф G — эйлеров, если в нем есть эйлеров цикл.

thm. Связный граф G — эйлеров, согда степени всех вершин G четны.

cor. *Связный граф G имеет эйлеров путь, согда в нем либо нет вершин с нечетной степенью, либо их ровно две.*

1.2 Гамильтонов путь и цикл

def. Гамильтонов путь — простой путь, проходящий по каждой вершине графа.

Гамильтонов цикл — простой цикл, проходящий по каждой вершине графа.

Гамильтонов граф — граф, в котором есть гамильтонов цикл.

lm. *Пусть $n > 2$, $a_1 \dots a_n$ — максимальный путь (по ребрам) в графе G, причем $d_G(a_1) + d_G(a_n) \geqslant n$. Тогда в графе есть цикл длины n.*

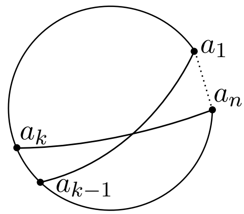
$N_G(v)$ — все вершины достижимые из вершины v в графе G.

$d_G(v)$ — степень вершины v в графе G.

proof. Разберем несколько случаев:

- Если a_1 и a_n смежны, то $a_1a_2 \dots a_n$ — искомый цикл.
- Иначе $N_G(a_1), N_G(a_n) \subset \{a_2, \dots a_{n-1}\}$, так как удлинить путь нельзя.

  Если есть вершина a_k смежная с a_n и вершина a_{k+1} смежная с a_1, то в графе есть цикл из n вершин



$$a_1a_2 \dots a_ka_na_{n-1} \dots a_{k+1}.$$

  Пусть $N_G(a_n) = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_l}\}$.

  Если хотя бы одна из вершин $a_{i_1+1}, \dots, a_{i_l+1}$ лежит в $N_G(a_1)$, то, согласно утверждению выше, в графе есть цикл длины n.

  Иначе $d_G(a_1) \leqslant n - 1 - d_G(a_n)$, а это противоречит условию.

□

thm (Критерий Оре, 1960). 1. Если для любых двух несмежных вершин $u, v \in V(G)$ выполняется

$$d_G(u) + d_G(v) \geqslant v(G) - 1,$$

то в графе G есть гамильтонов путь.

2. Если $v(G) > 2$ и для любых двух несмежных вершин $u, v \in V(G)$ выполняется
$$d_G(u) + d_G(v) \geqslant v(G),$$
то в графе G есть гамильтонов цикл.

proof.

1. Докажем первое утверждение
   - Для двух вершин все очевидно. Далее предположим, что $v(G) > 2$.
   - Рассмотрим две вершины a и b и предположим, что они несмежные. По условию $d_G(a) + d_G(b) \geqslant v(G) - 1$, поэтому $N_G(a) \cap N_G(b) \neq \varnothing$, следовательно, a и b связаны. Тогда граф G связен.
   - Теперь найдем наибольший простой путь $a_1 \dots a_n$ в графе G. Так как вершин больше двух, и граф связен, $n \geqslant 3$. Предположим, что это не гамильтонов путь, то есть $n \leqslant v(G) - 1$.
   - Если $a_1 \dots a_n$ не цикл, то по лемме 1.2 существует цикл Z из n вершин, так как
   $$d_G(a_1) + d_G(a_n) \geqslant v(G) - 1 \geqslant n.$$
   - Так как граф связен, существует не вошедшая в этот цикл вершина, смежная с хотя бы одной из вершин цикла. Тогда из нее и цикла можно получить путь длиной $n + 1$, противоречие.
2. По первому пункту уже есть гамильтонов путь, обозначим его за $a_1 \dots a_n$, где $n = v(G)$.

   Если a_1 и a_n смежны, то мы нашли гамильтонов цикл. Иначе
   $$d_G(a_1) + d_G(a_n) \geqslant v(G) = n.$$
   А тогда по лемме 1.2 в графе есть гамильтонов цикл.

□