

# Алгоритмы

## Лекции

Савва Чубий, БПИ233

2024–2025

2024-09-03

---

Введение .....	4
Структуры данных .....	4
Линейные структуры данных .....	4
Стек и очередь .....	4
Список .....	4
Стек с минимумом .....	4
Очередь через два стека .....	5
Асимптотика .....	5
Вектор .....	5
Асимптотика .....	5
Метод потенциалов .....	5
Для стека .....	6

2024-09-10

---

Символы Ландау .....	6
Примеры .....	6
Мастер-теорема .....	6
Доказательство .....	7
Примеры .....	7
Merge sort .....	7
Бинпоиск .....	7
Обход полного двоичного дерева .....	7
Обобщение .....	8

2024-09-17

---

Информация .....	8
Алгоритм Карацубы .....	8
Длинная арифметика .....	9
Алгоритм Штрассена .....	9
Аналоги Штрассена .....	9
Fast Fourier Transform (FFT) .....	10

2024-09-24

---

Детерминированные и вероятностные алгоритмы .....	10
Детерминированные алгоритмы .....	10
Вероятностные алгоритмы .....	10
$k$ -ая порядковая статистика (вероятностный) .....	10
$k$ -ая порядковая статистика (детерминированный) .....	11
Алгоритм Фрейвалдса .....	11
Лемма Шварца-Зиппеля .....	11
Дерандомизация .....	11
<hr/>	
2024-10-01 .....	
Время работы quicksort-a .....	12
Skip List .....	12
Модификации Skip List-a .....	13
Метод имитации отжига .....	13
<hr/>	
2024-10-08 .....	
Численное интегрирование .....	13
Метод Монте-Карло .....	13
Детерминированный метод .....	14
Пример .....	14
Сетки переменной плотности .....	14
Задача (похожая на 2-ую и 3-ю из конкурса) .....	15
<hr/>	
2024-10-15 .....	
Декартово дерево <sup>1</sup> .....	15
Версия 1980 (offline) .....	15
Версия 1996 .....	15
Split-Merge .....	16
Split .....	16
Merge .....	16
Insert .....	16
Delete .....	16
Повороты .....	16
Insert .....	16
Delete .....	16
Split .....	16
Merge (Join) .....	17
Теоремы .....	17
Теорема 1 .....	17
Следствие .....	17
Лемма .....	17
Теорема .....	17
Zip-дерево .....	17
Теоремы .....	18
Формулки .....	18
Теорема .....	19
Лемма .....	19
Теорема .....	19

---

<sup>1</sup>а.к.а ДД, Treap, Дерамиды, Пиво, Курево

Теорема (без доказательства) .....	19
Сравнение с ДД .....	19
 2024-11-05 .....	
Графы .....	19
Виды графов .....	19
Как хранить граф? .....	20
Матрица смежности .....	20
Список смежности .....	20
Множество смежности .....	20
Список ребер .....	20
Определения .....	20
BFS (breadth first search) .....	21
0-1 BFS .....	21
DFS .....	21
 2024-11-12 .....	
Приливания .....	22
На примере .....	22
Доказательство времени работы .....	22
Система непересекающихся множеств	
(Disjoint Set Union) .....	22
Первая версия .....	23
Вторая версия (с приливаниями) .....	23
Третья версия .....	23
Четвертая версия (со сжатием путей) .....	23
СНМ с откатами .....	24

2024-09-03

## Введение

Игорь Борисович

$$\text{Накоп} = 0.25 \cdot \text{Кол} + 0.25 \cdot \text{КР} + 0.4 \cdot \text{ДЗ} + 0.1 \cdot \text{Сем}$$

$$\text{Итог} = \begin{cases} \lfloor \text{Накоп} \rfloor, & \text{if НЕ идти на экзамен} \\ 0.5 \cdot \text{Накоп} + 0.5 \cdot \text{Экз}, & \text{if идти на экзамен} \end{cases}$$

Контесты на 1–2 недели

## Структуры данных

**Опр. Абстрактный тип данных** — определяем, какие операции делает структура, но не определяем конкретную реализацию

Контейнеры:

- Последовательные (напр, вектор)
- Ассоциативные (напр, map)
- Адаптеры (не имеют итераторов)

## Линейные структуры данных

Стек и очередь

Стек	Очередь
LIFO	FIFO

Реализации:

- Массив
- Список
- Deque
- (для очереди) на двух стеках

Список

Односвязный:

- `begin()` указывает на первый эл-т
- каждый элемент указывает на следующий
- `end()` указывает в пустоту

Двусвязный:

- каждый элемент указывает ещё и на прошлый эл-т

Список может быть зациклен

Зацикленный список может иметь незацикленное начало

Стек с минимумом

Помимо основного стека поддерживаем стек минимумов (на префиксе)

st	min_st
2	2
5	3
3	3
6	4
4	4

Минимум в стеке – `min_st.top()`

### Очередь через два стека

Имеем два стека: `st1` и `st2`

Push:

`st1.push(x)`

Pop:

```
if st2 is empty:
    переложить весь st1 в st2
st2.pop()
```

### Асимптотика

аморт.  $O(1)$

Над каждым элементом совершается не более 3 операций:

1. Положить в `st1`
2. Переложить из `st1` в `st2`
3. Вытащить из `st2`

### Вектор

1. Изначально выделяется память под несколько эл-в
2. Можем push-ить, пока `v.size() < v.capacity()`
3. Когда место кончается, вектор выделяет в два раза больше памяти и копирует туда элементы
4. При удалении `capacity()` не меняется

### Асимптотика

аморт.  $O(1)$

На  $n$  операций уходит  $n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \dots + 1 \rightarrow 2n = O(n)$  копирований

## Метод потенциалов

Метод подсчета асимптотики

$$\varphi_0 \rightarrow \varphi_1 \rightarrow \dots \rightarrow \varphi_n$$

**Опр. Потенциал** — функция от наших структур данных

**Опр. Аморт. время работы** —  $a_i = t_i + \Delta\varphi$

$$\sum a_i = \sum (t_i + \Delta\varphi) = \sum t_i + (\varphi_n - \varphi_0)$$

$$\frac{\sum t_i}{n} = \frac{\varphi_0 - \varphi_n}{n} + \frac{\sum a_i}{n} \leq \frac{\varphi_0 - \varphi_n}{n} + \max(a_i)$$

Хотим минимизировать  $\max(a_i)$  и  $\frac{\varphi_0 - \varphi_n}{n}$

——— Для стека ———

$$\varphi_i := 2n_1$$

push	pop
$t_i = 1$	$t_i = 1$ или $2n_1 + 1$
$a_i = 1 + 2 = 3$	$a_i = 1$ или $2n_1 + 1 + (0 - 2n_1) = 1$

2024-09-10

## ——— Символы Ландау ———

**Опр.**  $f(x) = O(g(x)) :$

$$\exists C > 0 \exists x_0 \geq 0 : \forall x \geq x_0 : |f(x)| \leq C|g(x)|$$

**Опр.**  $f(x) = o(g(x)) :$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_0 : \forall x \geq x_0 : |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$$

**Опр.**  $f(x) = \Theta(g(x)) :$

$$\exists 0 < C_1 \leq C_2 \exists x_0 : C_1 |g(x)| \leq |f(x)| \leq C_2 |g(x)|$$

——— Примеры ———

1.  $3n + 5\sqrt{n} = O(n)$
2.  $n = O(n^2)$
3.  $n! = O(n^n)$
4.  $\log n^2 = O(\log n)$
5.  $k \log k = n \Rightarrow k = O(?)$

## ——— Мастер-теорема ———

$T(n)$  — время работы (количество операций)

**Теор.** Пусть

$$a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{R}, b > 1, c \geq 0$$

$$T(n) = \begin{cases} O(1) & \text{if } n \leq n_0 \\ aT\left(\frac{n}{b}\right) + O(n^c) & \text{otherwise} \end{cases}$$

тогда:

$$T(n) = \begin{cases} O(n^c) & \text{if } c > \log_b a \\ O(n^c \log n) & \text{if } c = \log_b a \\ O(n^{\log_b a}) & \text{if } c < \log_b a \end{cases}$$

— Доказательство —

Мак глубина =  $\log_b n$

На  $i$ -ом слое:  $a^i \cdot \left(\frac{n}{b^i}\right)^c$  операций

В листьях (слой  $\log_b n$ ):  $a^{\log_b n}$  операций

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_b n} O\left(a^i \left(\frac{n}{b^i}\right)^c\right) = O\left(\sum_{i=0}^{\log_b n} a^i \left(\frac{n}{b^i}\right)^c\right) = O\left(n^c \sum_{i=0}^{\log_b n} \left(\frac{a}{b^c}\right)^i\right)$$

Пусть  $q = \frac{a}{b^c}$

При  $q < 1 \Leftrightarrow a < b^c \Leftrightarrow \log_b a < c$  :

$$O\left(n^c \sum_i q^i\right) \leq O\left(n^c \sum_i^\infty q^i\right) = O\left(n^c \cdot \frac{1}{1-q}\right) = O(n^c)$$

При  $q = 1$  :

$$O(n^c \cdot \log_b n)$$

При  $q > 1$  :

$$\begin{aligned} O\left(n^c \cdot \left(\frac{a}{b^c}\right)^{\log_b n}\right) &= O\left(n^c \cdot \frac{a^{\log_b n}}{b^{c \cdot \log_b n}}\right) = O\left(n^c \cdot \frac{a^{\log_b n}}{n^c}\right) = \\ &= O(a^{\log_b n}) = O\left(a^{\frac{\log_a n}{\log_a b}}\right) = O\left(n^{\frac{1}{\log_a b}}\right) = O(n^{\log_b a}) \end{aligned}$$

— Примеры —

· MERGE SORT ·

$$T(n) = 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$$

$$a = 2$$

$$b = 2$$

$$c = 1$$

$$\log_2 2 = 1 \Rightarrow T(n) = O(n^c \log n) = O(n \log n)$$

· Бинпоиск ·

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + O(1)$$

$$a = 1$$

$$b = 2$$

$$c = 0$$

$$\log_2 1 = 0 \Rightarrow T(n) = O(n^c \log n) = O(\log n)$$

· Обход полного двоичного дерева ·

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + O(1)$$

$$a = b = 2$$

$$c = 0$$

$$\log_2 2 > 0 \Rightarrow T(n) = O(n^{\log_b a}) = O(n^1) = O(n)$$

—— Обобщение ——

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + O(n^c \cdot \log^k n)$$

$$c = \log_b a \Rightarrow T(n) = O(n^c \log^{k+1} n)$$

2024-09-17

---

## —— Информация ——

Коллоквиум предварительно в начале второго модуля (2 ноября, 1–4 пары)

Все задачи в констесте стоят одиночного

## —— Алгоритм Карацубы ——

Алгоритм перемножения двух многочленов (или чисел)

$$A(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$$

$$B(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_{m-1}x^{m-1}$$

$$C(x) = A(x)B(x) = c_0 + c_1x + \dots c_{n+m-2}x^{n+m-2}$$

bruteforce (в столбик) за  $O(n^2)$ :

$$c_k = \sum_{i=0}^k a_i \cdot b_{k-i}$$

В Карацубе лучше останавливаться при  $\deg \approx 16$  и перемножать в столбик

Добиваем многочлены до одинаковой длины и до степени двойки.

Разобьем многочлен на два:

$$\begin{aligned} A(x) &= a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} \\ &= \underbrace{\left[ a_0 + a_1x + \dots + a_{\frac{n}{2}-1}x^{\frac{n}{2}-1} \right]}_{A_0(x)} + \underbrace{\left[ a_{\frac{n}{2}} + \dots + a_{n-1}x^{\frac{n}{2}-1} \right]}_{A_1(x)} x^{\frac{n}{2}} \\ &= A_0(x) + A_1(x)x^{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

$$B(x) = B_0(x) + B_1(x)x^{\frac{n}{2}}$$

Перемножим (складываем за линию, перемножаем рекурсивно):

$$A(x)B(x) = (A_0 + A_1x^{\frac{n}{2}})(B_0 + B_1x^{\frac{n}{2}}) = A_0B_0 + (A_1B_0 + A_0B_1)x^{\frac{n}{2}} + A_1B_1x^n$$

Найдем асимптотику:



$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n) \Rightarrow T(n) = O(n^2)$$

Так перемножать не выгодно. Проблема в четырех произведениях.

Сокращаем число произведений до трех:

$$(A_0 + A_1)(B_0 + B_1) = \underbrace{A_0B_0 + A_1B_1}_{\text{уже знаем}} + \underbrace{A_0B_1 + A_1B_0}_{\text{сможем найти}}$$

Найдем новую асимптотику:

$$T(n) = \underbrace{3T\left(\frac{n}{2}\right)}_{\text{на умножения}} + \underbrace{O(n)}_{\text{на сложения}} \Rightarrow T(n) = O(n^{\log_2 3}) \approx O(n^{1.585})$$

Так перемножать значительно быстрее.

—— Длинная арифметика ——

$$2105789 = 9 + 8x + 7x^2 + 5x^3 + x^5 + 2x^6 \big|_{x=10}$$

$$a, b < 10^{1000}$$

Нужно делать перенос разряда.

Можно сменить систему счисления для ускорения в константу раз. Удобно брать  $x = 10^n$ .

—— Алгоритм Штрассена ——

Обобщение Карацубы на матрицы

brutforce за  $O(n^3)$ :  $C_{i_j} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{ik} b_{kj}$

Размер матрицы:  $n = 2^k$

Пилим матрицу на четыре куса. Куски будут перемножаться, как обычные матрицы.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Можно посчитать не за 8, а за 7 умножений

Посчитаем сложность:

$$T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n^2) \Rightarrow T(n) = O(n^{\log_2 7}) \approx O(n^{2.81})$$

Выгодно только для очень больших матриц

· Аналоги Штрассена ·

Год	Название	Асимптотика
1990	Коперсмита-Виноградова	$O(n^{2.3755})$
2020	Алмана-Вильямса	$O(n^{2.3728})$

**Гипотеза Штрассена:**  $\forall \varepsilon > 0 : \exists \text{ алгоритм} : \forall n \geq N : O(n^{2+\varepsilon})$

## — FAST FOURIER TRANSFORM (FFT) —

Сложность  $O(n \log n)$ , но с большой константой

**Основной принцип:** храним многочлен, как список его значений в некоторых точках. Знаем  $A(x_0), A(x_1), \dots, A(x_{n-1})$

Коэффициенты при умножении меняются нетривиально, а значения в точках — намного проще, если удачно выбрать точки:  $x_i = \omega^i$ , где  $\omega \in \mathbb{C}$  или  $\omega \in \mathbb{Z}_p$ .

Проблема: переход в double.

2024-09-24

## — Детерминированные и вероятностные алгоритмы —

### — Детерминированные алгоритмы —

**Опр. Сложность** — максимальное время работы на данных размера  $n$ .

**Опр. Сложность в среднем** — математическое ожидание количества действий.

Для конечномерных:

$$E = \sum_{x \in \chi} P(x) \cdot \text{cut}(x)$$

Для бесконечномерных: \*какой-то интеграл\*

От бесконечномерного случая часто можно перейти к конечномерному. Например, в случае сортировок делать сжатие координат (превращать)

### — Вероятностные алгоритмы —

**Опр. Вероятностные алгоритмы** — алгоритмы, которые при одних выходных данных могут иметь разное время работы или разный вывод. Используют генератор случайных чисел.

**Виды вероятностных алгоритмов:**

- **Без ошибки:** всегда выдает правильный ответ
- **С односторонней ошибкой:** ошибается только в одну сторону

Пример: вероятностные алгоритмы проверки на простоту

- **С двусторонней ошибкой:** ошибается в обе стороны

**Опр. Ожидаемое время работы** — математическое ожидание времени работы (для конкретного набора входных данных)

**Опр. Ожидаемая сложность** — максимальное ожидаемое время на данных размера  $n$ .

### — $k$ -ая порядковая статистика (вероятностный) —

Выбрали случайный опорный элемент, разделили массив на две части по опорному:

$$\underbrace{\dots}_{m-1 \text{ элемент}} \leq x_i \leq \underbrace{\dots}_{n-m \text{ элементов}}$$

Медиана будет либо опорным элементом, либо элементов в большем куске.

Оценим ожидаемое время работы. Если массив разбился на куски по  $m-1$  и  $n-m$

$$T(n) = \underbrace{T(\max(m-1, n-m))}_{\text{в худшем случае ищем в большем куске}} + \underbrace{O(n)}_{\text{на разделение по опорному}}$$

Итого:

$$\begin{aligned} E(T(n)) &= \sum_{m=1}^n P(n) E(T(\max(m-1, n-m))) + O(n) = \sum_{m=\frac{n}{2}}^n \frac{1}{n} \cdot 2E(T(m)) + O(n) = \\ &= \frac{2}{n} \sum_{m=\frac{n}{2}}^{n-1} E(T(m)) + O(n) = \frac{2}{n} \left( O\left(\frac{n}{2}\right) + \dots + O(n-1) \right) + O(n) = \\ &= \frac{2}{n} O\left(\frac{3n^2}{8}\right) + O(n) = O\left(\frac{3}{4}n\right) + O(n) = O(n) \end{aligned}$$

——  $k$ -ая порядковая статистика (детерминированный) ——

1. Делим массив на чанки размера 5
2. Сортируем каждый чанк:  $\frac{7}{5}n$  действий
3. Берем медиану каждого чанка:  $m_1, \dots, m_{\frac{n}{10}}$
4. Ищем медиану медиан рекурсивно
5. Используем найденное число в виде опорного элемента в прошлом алгоритме

$$T(n) = \underbrace{T\left(\frac{7n}{10}\right)}_{\text{прошлый алгоритм}} + \underbrace{T\left(\frac{n}{5}\right)}_{\text{рекурсия}} + \underbrace{O(n)}_{\text{разделение}} \rightarrow T(n) = O(n)$$

—— Алгоритм Фрейвалдса ——

Правда ли, что  $A \cdot B = C$ ? ( $A, B$  и  $C$  даны)

Берем случайный вектор из 0 и 1:  $v = \left(\frac{1}{0}, \frac{1}{0}, \dots, \frac{1}{0}\right)$

Если  $AB = C$ , то  $A \cdot (B \cdot v) = C \cdot v$

Алгоритм с односторонней ошибкой. Если получили равенство, то вероятность неудачи не больше одной второй

Можно повторит процедуру и улучшить вероятность. За  $k$  испытаний получаем вероятность  $P_{\text{неуд}} \leq \frac{1}{2^k}$ , а сложность  $O(kn^2)$ .

—— Лемма Шварца-Зиппеля ——

$f(x_1, \dots, x_k)$  — многочлен степени  $n$

Считаем, что умеем находить значение  $f$  в точке

Хотим проверить, является ли он тождественным нулем

1. Берем случайный набор данных  $(y_1, \dots, y_k) \in S^k$
2. Для ненулевого  $f : P(f(y_1, \dots, y_n) = 0) \leq \frac{n}{|S|}$

—— Дерандомизация ——

Превращение вероятностного алгоритма в детерминированный

Для леммы Шварца-Зиппеля и  $k = 1$  достаточно проверить  $n + 1$  разную точку

2024-10-01

## — Время работы QUICKSORT-a —

Случайно выбираем опорный элемент  $x$

Мысленно отсортируем массив:

$$a_1, a_2, \dots, a_n \longrightarrow b_1, b_2, \dots, b_n$$

Опорный элемент  $x$  сравнивается со всем и исключается из работы. Значит, два элемента никогда не сравниваются больше одного раза.

Пусть  $\delta_{ij} = \text{int}(b_i \text{ сравнивали с } b_j)$ . Для времени работы считаем количество сравнений:

$$E(T(n)) = E\left(\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \delta_{ij}\right) = \sum \sum E(\delta_{ij}) = \sum \sum P(b_i \text{ сравнивали с } b_j)$$

Два элемента  $b_i$  и  $b_j$  НЕ будут сравниваться, если между ними когда-то выбирался опорный. Они будут сравниваться только, если среди элементов  $b_i, \dots, b_j$  первым был выбран  $i$ -ый или  $j$ -ый.

$$E(T(n)) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{2}{j-i+1} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-i} \frac{2}{k+1} = \sum_{i=0}^{n-1} 2 \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + (n-i+1)\right)}_{O(\log n)} = O(n \log n)$$

## — SKIP LIST —

Вероятностная структура данных на основе list-a и операциями, как у дерева поиска

Элементы лежат по возрастанию. Есть фиктивные элементы  $-\infty$  и  $+\infty$  в начале и конце.

$$-\infty \rightarrow -4 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 12 \rightarrow 15 \rightarrow +\infty$$

Хотим прыгать по списку большими шагами, а не только шагами по 1.

Делаем новый список («уровень»), в который включаем элементы данного с вероятностью  $P = \frac{1}{2}$ . Бесконечности всегда переходят на новый уровень.

В каждом элементе храним указатель направо и вниз. Отдельно храним указатель на  $-\infty$  верхнего уровня.

Таблица 4. Структура списка

	↓													
Уровень 2:	$-\infty$	→	-4	→						7	→			$+\infty$
Уровень 1:	$-\infty$	→	-4	→				3	→	7	→		15	→ $+\infty$
Уровень 0:	$-\infty$	→	-4	→	0	→	1	→	3	→	7	→	12	→ 15 → $+\infty$

Операции:

- Поиск: спускаемся по дереву
- Удаление: удаляем из всех слоев
- Добавление: случайно выбираем в каких слоях элемент будет, а в каких — нет (количество слоев может увеличиться), потом добавляем.

Способы реализации:

- multiple nodes: несколько уровней с node-ами
- fat nodes: один уровень, но в каждой node-е несколько указателей

Преимущество перед деревом:

- Легко пишется
- Легко распараллеливается (можно вставлять несколько элементов одновременно)
- Легко печатается

$$P(\text{есть } i\text{-ый уровень}) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^i}\right)^n \underset{\text{неравенство бернулли}}{\leq} 1 - \left(1 - \frac{n}{2^i}\right) = \frac{n}{2^i}$$

$$i = 4 \log_2 n : P(i) \leq \frac{n}{2^{4 \log_2 n}} = \frac{n}{n^4} = \frac{1}{n^3}$$

### Модификации SKIP LIST-a

- $p \neq \frac{1}{2}$ .
  - количество слоев:  $\log_{\frac{1}{p}} n$
  - $O\left(\frac{1}{p} \log_{\frac{1}{p}} n\right)$
  - Лучший вариант  $p = \frac{1}{e}$ , но на практике, вероятно, бесполезно.
- Можно сделать только два слоя: получим корневую декомпозицию

### Метод имитации отжига

Пытаемся минимизировать некоторую величину – функционал качества (например, какой-нибудь путь в графе, расставить на доску ферзей, которые друг друга не бьют).

Будем пытаться улучшить значение функционала:  $Q_0 \rightarrow Q_1 \rightarrow \dots$

#### Плохой способ

Будем случайно генерировать новое состояние и переходить на него только, если оно лучше.

Не работает, так как можно попасть в локальный минимум, а не глобальный.

Вводим понятие температуры  $T_i$ , функции, которая как-то убывает с каждой итерацией.

Делаем случайное, небольшое изменение. Если функционал стал меньше, то переходим, иначе переходим с вероятностью:

$$P = e^{-\frac{Q_{i+1} - Q_i}{T_i}}$$

Идея в том, что изначально (когда  $T_i$  большое) у нас плохое состояние и не страшно его «потерять», перепрыгнув в другое. Потом (когда  $T_i$  маленькое), состояние более хорошее и перепрыгивать мы хотим меньше.

2024-10-08

### Численное интегрирование

Дана функция  $y = f(x)$ . Хотим посчитать  $\int_a^b f(x)$ .

#### Метод Монте-Карло

Работает, но сходится медленно

Возьмем  $\sin(x)$ ,  $x \in [0, \pi]$ .

Будем генерировать точки в прямоугольнике  $x \in [0, \pi]$ ;  $y \in [0, \pi]$  и смотреть, сколько попало под график.

### — Детерминированный метод —

Разбиваем отрезок на равные кусочки:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

$$x_{i+1} - x_i = h = \frac{b - a}{n}$$

Один кусок ( $x \in [x_i, x_{i+1}]$ ) — криволинейная трапеция. Её можно приближать разными фигурами:

- Прямоугольником:
  - $S = h \cdot f(x_i)$  — метод левых прямоугольников
  - $S = h \cdot f(x_{i+1})$  — метод правых прямоугольников
  - $S = h \cdot f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$  — метод средних прямоугольников
- Трапецией:
  - $S = \frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1}))$
- Криволинейной трапецией (с параболой сверху):
  - $S = \frac{h}{6}(f(x_i) + 4f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f(x_{i+1}))$  — формула Симпсона

У формулы Симпсона сходимость на два порядка выше

### · Пример ·

Ищем площадь круга:

$$(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 9$$

Разбиваем на две полуокружности: верхнюю ( $f_1(x)$ ) и нижнюю ( $f_2(x)$ )

$$S = \int_{-2}^4 (f_1(x) - f_2(x)) dx$$

### — Сетки переменной плотности —

Интегрируем верхнюю половину окружности. Будем использовать метод левых прямоугольников. Если разрезать на четыре части, то два центральных кусочка дают хорошее приближение, а два крайних — очень плохое.

Вывод: сетка с постоянным шагом — часто плохой вариант.

Алгоритм:

- Делим на несколько частей
- Проверяем, на каких кусках получили хорошее приближение, а на каких плохое.

Для этого всё же измельчаем сетку в этом месте и проверяем, сильно ли изменилось приближение. Если слабо, то приближение хорошее:

$$|S_1 - S_2| < \varepsilon$$

- Там, где получили плохое приближение, запускается от него рекурсивно.

Метод хорошо сходится, но мы плохо можем оценивать приближение.

——— Задача (похожая на 2-ую и 3-ю из контеста) ———

Есть набор фигур на экране. Найти площадь объединения

Методы решения (по увеличению эффективности):

1. **Монте-Карло**: плохо сходится

2. **Сетка**:

Разрежем на сеточку (по вертикали и горизонтали). Смотрим на центр: считаем, что если входит центр, то входит весь прямоугольник

3. **Квадродерево**:

- Режем на сетку. Смотрим на каждый квадратик.
- Если квадратик заполнен полностью или полностью пустой, то сразу добавляем его в ответ
- Иначе (если заполнен частично), то продолжаем рекурсивно.
- Останавливаемся, если получили квадратик площади меньше  $\epsilon$

4. **Вертикальные полосы переменной плотности + Сканлайн**

- Режем на полосы, которые дают элементарные огибающие. Можно порезать и сильнее.
- Каждая фигура идет от начала до конца полосы (то есть по горизонтали начинается и заканчивается либо на границе полосы, либо вне её).
- Внутри каждой полосы, заменяем каждую фигуру на прямоугольник, дальше сканлайном ищем площадь пересечения.
- Потом делим вертикальную линию пополам, проверяем хорошее ли получилось приближение, если плохое, запускаемся дальше

---

2024-10-15

---

——— Декартово дерево<sup>2</sup> ———

Хотим реализовать set.

Каждая вершина дерева хранит пару  $(x, y)$  – (ключ, приоритет).

Приоритет – внутренняя информация для балансировки.

Предполагаем, что  $x$ -ы и  $y$ -и уникальны.

- По ключам  $(x)$  – двоичное дерево поиска
- По приоритетам  $(y)$  – куча (с максимумом вверху)

——— Версия 1980 (OFFLINE) ———

В этой версии приоритетов нет

Вставка (как в простом бинарном дереве) в порядке случайной перестановки

——— Версия 1996 ———

Вставка в произвольном порядке, но с приоритетами

---

<sup>2</sup>a.k.a ДД, Treap, Дермида, Пиво, Курево

---

Берем  $y$  из равномерного распределения:  $y \in U[0, 1]$  — получаем нулевую вероятность совпадения приоритетов

Характеристики:

- Глубина вершины:  $E(\text{dep}[v]) = O(\log n)$
- Высота вершины:  $E(h[v]) = O(1)$
- Размер поддерева вершины:  $E(\text{sz}[v]) = O(\log n)$

Есть два способа реализации:

- с поворотами
- через split-merge

### —— SPLIT-MERGE ——

#### · SPLIT ·

«Режем» дерево вертикальной прямой: `pair<T, T> split(T tree, int line_x).`

Все ключи левого дерева меньше прямой, все ключи правого — больше

#### · MERGE ·

Есть два дерева такие, что у левого все ключи меньше, чем у правого.

Merge объединяет их в одно дерево: `T split(T left, T right).`

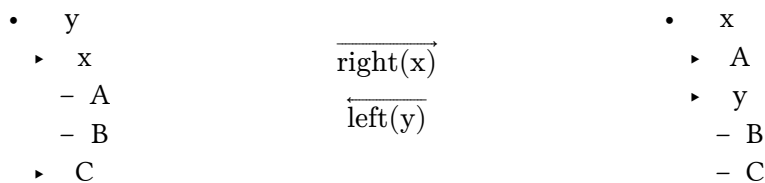
#### · INSERT ·

```
tl, tr = split(t, x)
merge(tl, merge(T({x, y}), tr))
```

#### · DELETE ·

- Двумя split-ами отрезаем все элементы меньше  $x$  и все элементы больше  $x$ .
- merge-им два эти дерева

### —— Повороты ——



#### · INSERT ·

- Вставка до листа
- Подъем поворотами

#### · DELETE ·

- Поворотами опускаем в лист
- Удаляем лист

#### · SPLIT ·

Делаем `split(a)`

- `insert({a, +inf})` — новый элемент окажется в корне
- Левое и правое поддерево корня — нужные деревья



### · MERGE (JOIN) ·

- Подвесим деревья к {a, +inf}
- Сделаем delete(a)

## —— Теоремы ——

### · Теорема 1 ·

Пусть ключи отсортированы:  $x_1 < \dots < x_n$

Хотим узнать  $\text{dep}[x_l] = \sum_{i=1}^n A_{i,l}$  — где  $A_{i,l} = \text{int}(x_i - \text{предок } x_l)$

$$\text{sz}[x_l] = \sum_{j=1}^n A_{l,j}$$

#### Следствие

$$a_{i,l} = P(x_i - \text{предок } x_j)$$

$$E(\text{dep}[x_l]) = \sum_{i=1}^n a_{i,l} = E(\text{sz}[x_l]) = \sum_{i=1}^n a_{l,i}$$

#### Лемма

Пусть все приоритеты разные (это происходит с вероятностью = 1)

$$x_i - \text{предок } x_j \Leftrightarrow \text{prior}(x_i) = \max_{\min(i,j) \leq k \leq \max(i,j)} \text{prior}(x_k)$$

$$a_{i,j} = \frac{1}{|i - j| + 1}$$

#### Теорема

$$\ln n := \log_e n$$

$$\lg n := \log_2 n$$

$$\begin{aligned} E(\text{dep}[x_l]) &= \frac{1}{|l-1|+1} + \frac{1}{|l-2|+1} + \dots + \frac{1}{1+1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1+1} + \dots + \frac{1}{|n-l|+1} = \\ &= \{H_l - \text{сумма гармонического ряда до } l\} = \\ &= H_l + H_{n-l+1} - 1 < \{\ln(n) < H_n < \ln(n) + 1\} < 1 + 2 \ln n \end{aligned}$$

$$E(\text{sz}[x_l]) < 1 + 2 \ln n$$

$$\frac{H_n}{\ln n} \rightarrow \gamma, n \rightarrow +\infty, \text{ где } \gamma \approx 4.311$$

## —— Zip-дерево ——

Цель создания — чтобы ранг (приоритет) занимал меньше бит. В zip-дереве он имеет значение от 1 до  $\lg n$  (т.е. столько же, сколько и слоев) и занимает  $\lg \lg n$  бит.

Берем не равномерное распределение, а геометрическое. Это логично т.к. количество вершин на соседних уровнях различается примерно в два раза.

$$P(\text{rank} = 0) = \frac{1}{2}, P(\text{rank} = 1) = \frac{1}{4}, \dots, P(\text{rank} = k) = \frac{1}{2^{k+1}}$$

Теперь многие приоритеты совпадают.

Пусть  $u$  и  $v$  есть два сына  $l$  и  $r$ :

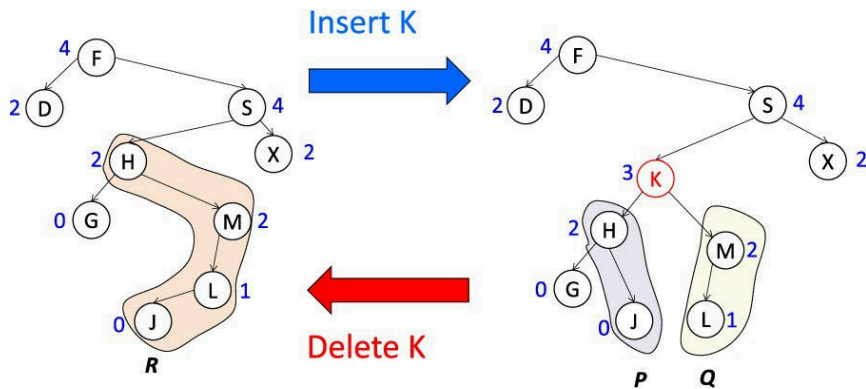
- $\text{rank}(l) < \text{rank}(v)$
- $\text{rank}(r) \geq \text{rank}(v)$

Дерево будет перекошено влево.

$$E(\text{rank}) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} + \dots \Rightarrow 2E = E + 1 \Rightarrow E = 1$$

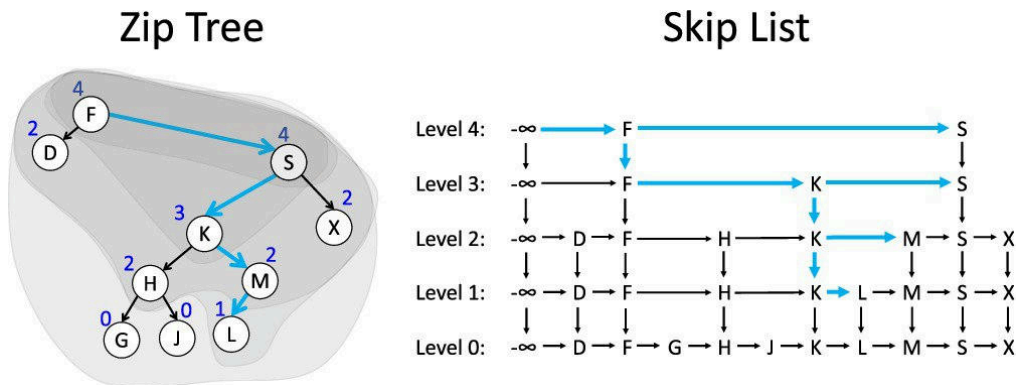
Операции unzip и zip — аналоги split и merge

Рис. 1. Вставка и удаление в zip-дереве



zip-tree имеет естественный изоморфизм со skip-list: Вершина, которая лежит в  $k$ -ом уровне, но не лежит в  $(k + 1)$ -ом в skip-list-е имеет  $\text{rank} = k$ .

Рис. 2. Изоморфизм zip-tree и skip-list



zip-tree с данными ключами и приоритетами единственно.

## — Теоремы —

### · Формулки ·

$$r_i := \text{rank}(i)$$

$$rr := \text{rank}(\text{root})$$

$$P(r_i = k) = \frac{1}{2^{k+1}} \Rightarrow P(r_i < k) = \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^k}$$

$$P(r_i > k) = \frac{1}{2^k} \Rightarrow P\left(\max_i r_i < k\right) = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^n \underset{\text{по н-ву Бернулли}}{\geq} 1 - \frac{n}{2^k}$$

$$P(\max r_i \geq k) \leq \frac{n}{2^k}$$

$$P(\text{rr} \geq \ln n + C) \leq \frac{n}{2^{\ln n + C}} = \frac{1}{2^C}$$

$$P(\text{rr} \geq (c+1) \ln n) \leq \frac{1}{n^c}$$

Теорема

$$\begin{aligned} E(\text{rr}) &= 0 \cdot P(\text{rr} = 0) + 1 \cdot P(\text{rr} = 1) + \dots = \\ &= 0 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + \dots + \lceil \lg n \rceil P_{\lceil \lg n \rceil} + (\lceil \lg n \rceil + 1) P_{\lceil \lg n \rceil + 1} + \dots \leq \\ &\leq \lceil \lg n \rceil \cdot \sum_{i=1}^{\infty} P_i + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + \dots = \lceil \lg n \rceil + 2 < \lg n + 3 \end{aligned}$$

Лемма

- low — предки  $x$ -а с ключом, **меньше** чем у  $x$ -а
- high — предки  $x$ -а с ключом, **больше** чем у  $x$ -а

$y_l$  — самый высокий из low

$y_h$  — самый высокий из high

$$E(\# \text{ low}) = 1 + (\text{rank}(y_e) - \text{rank}(x)) \leq 1 + \text{rank}(y_l) \leq \lg n + 4$$

$$E(\# \text{ high}) \leq \frac{1 + \text{rank}(y_h)}{2}$$

Теорема

Из прошлых лемм:

$$E(\text{dep}[v]) = \frac{3}{2} \lg n + O(1)$$

Теорема (без доказательства)

$$E(\text{sz}[v], \text{rank}(v) == k) \leq 3 \cdot 2^k - 1$$

$$E(\text{sz}[v]) \leq \frac{3}{2} \lg n + 2$$

—— Сравнение с ДД ——

	ДД	Zip
глубина	$2 \lg n = 1.3863 \lg n$	$1.5 \lg n$

2024-11-05

—— **Графы** ——

Граф  $G = (V, E)$  — множество вершин  $V$  и ребер  $E$

—— Виды графов ——

- **Ориентированный (орграф):** каждое ребро направлено в одну из сторон
- **Не ориентированный**

- 
- **Взвешенный:** к каждому ребру дописано некоторое число – его вес
  - **Не взвешенный**
- 

Граф может иметь:

- **Петли:** ребро из вершины в саму себя
- **Кратные ребра:** несколько ребер между одной парой вершин

———— Как хранить граф? ————

· Матрица смежности ·

Храним матрицу  $g[n][n]$

$g[i][j]$  — вес ребра  $(i, j)$  (или 0/1 для неориентированного)

Требует очень много ( $O(n^2)$ ) памяти

· Список смежности ·

Храним `vector<vector<int>> g`

$g[i]$  — список всех ребер из вершины  $i$

Требует  $O(m)$  памяти, где  $m = |E|$

**Самый базовый вариант**

· Множество смежности ·

Аналогично списку смежности, но `vector<set<int>> g`

· Список ребер ·

Храним `vector<pair<int, int>> edges` — список ребер

———— Определения ————

Для неориентированного:

- **Компонента связности** — подмножество вершин, где из каждой можно попасть в каждую
- **Двудольный граф** — можно раскрасить вершины в два цвета, что ребра соединяют разные цвета
- **Остов** — подграф, содержащий все вершины и являющийся деревом

Для ориентированного:

- **Компоненты сильной связности (КСС)** — подмножество вершин, где из каждой можно попасть в каждую
- **DAG (Directed Acyclic Graph)** — ориентированный граф без циклов
- **TopSort** — нумерация вершин таким образом, что ребро всегда ведет из вершины с меньшим номером в вершину с большим

Для взвешенного:

- **Минимальный остов** — остов минимального веса

Для всех:

- **Кратчайшее расстояние между двумя вершинами**

## BFS (breadth first search)

Хотим найти кратчайшие расстояние от вершины  $Q$  до всех остальных

Аналогия с пожаром

```
dist[Q] = 0
dist[соседи Q] = 1
dist[ещё не рассмотренные соседи соседей Q] = 2
...
```

Используем queue

## 0-1 BFS

Модификация BFS для графов, где ребра имеют вес либо 1, либо 0

Используем не queue, а deque

## DFS

Пишется приятнее, чем BFS

Заводим массив `used[n]`: `used[i]` — были ли мы в вершине  $i$

Во время работы алгоритма ребра делятся на несколько типов:

- Для орграфа:
  - **Ребро обхода** — ребро, по которому мы прошли
  - **Прямое ребро** — ребро, ведущее в потомка, по которому мы не ходили
  - **Обратное ребро** — ребро, ведущее в предка
  - **Перекрестное ребро** — ребро, ведущее ни в предка, ни в потомка
- Для неорграфа:
  - Нет перекрестных ребер
  - Обратные и прямые ребра не отличимы

Код:

```
void dfs(int v) {
    used[v] = 1;
    for (int to : g[v]) {
        if (!used[to]) {
            dfs(to);
        }
    }
}
```

Альтернативный код:

```
void dfs(int v) {
    if (used[v]) return;
    used[v] = 1;

    for (int to : g[v]) {
        dfs(to);
    }
}
```

Применения:

- Количество компонент связности

- Поиск остовного дерева (леса)
- Проверка двудольности
- Поиска цикла
- Поиск эйлера пути
- Много всего ещё ...

При обходе дерева можно не хранить `used`, а просто передавать предка: `void dfs(int v, int p)`

Через `dfs` можно считать динамику:

- ДП снизу: `sz[v]`
- ДП сверху: `der[v]`

---

2024-11-12

---

## Приливания

Делаем динамику на дереве

В поддеревьях хотим считать какую-то штуку, размер которой имеет размер порядка размера поддерева. На первый взгляд, для несбалансированного дерева это долгая операция.

### На примере

Пусть есть некоторые «выделенные» вершины. Их примерно  $O(n)$ .

Для каждой вершины в какой-то момент времени хотим иметь множество всех выделенных вершин в её поддереве:  $S(v)$ .

Пусть у  $v$  есть дочерние вершины  $v_1, \dots, v_n$ .  $S(v_1), \dots, S(v_n)$  уже посчитали. Хотим  $S(v)$ .

Пусть  $sz(v_1) \geq sz(v_2) \geq \dots \geq sz(v_n)$ . В  $sz(v_1)$  добавляем («приливаем») остальные множества. В конце получим  $sz(v)$ .

В итоге будет  $O(n \log n)$  **добавлений**.

### Доказательство времени работы

Рассмотрим конкретную вершину  $x$ .

$x$  в начале попадет в какое-то множество с размером 1.  $x$  будет перемещаться только в множество, с большим размером. Итого, размер множества, где лежит  $x$  увеличивается хотя бы в два раза. Значит, каждый элемент «приливается» не более  $\log n$  раз. Всего не более  $O(n \log n)$  приливаний.

## Система непересекающихся множеств (Disjoint Set Union)

- Изначально есть  $n$  множеств по одному элементу.
- Делаем  $m$  запросов следующих видов:
  - Можно объединить два множества (множество идентифицируется по любому его элементу)
  - Узнать «цвет» (идентификатор) множества
  - Проверить, в одном ли множестве лежат две вершины
  - Узнать размер (или другую характеристику) множества

Пусть элементы пронумерованы  $0, \dots, n - 1$

---

— Первая версия —

Заведем массив цветов `col[n]` и размеров `size[color]`.

Изначально: `col[i] = i`

`unite` работает за  $O(n)$  (просто перекрашиваем одно множество в другое), остальное — за  $O(1)$

Итого,  $O(n^2 + m)$  т.к. максимум  $n$  объединений

— Вторая версия (с приливаниями) —

Для каждого цвета храним позиции элементов этого цвета в списке<sup>3</sup> `ind[color]`.

Для `unite` перекрашиваем элементы **меньшего** множества в цвет **большого**. Для этого обновляем массивы `col` и `ind`.

Так как приливания, то  $O(n \log n + m)$ .

— Третья версия —

«Ранговая эвристика»

Каждое множество — это дерево

Для хранения дерева просто храним предка каждой вершины (список дочерних элементов не храним) — массив `p[v]`. Пусть в для корня: `p[root] = root`

Изначально: `p[i] = i`

Цвет — номер корня дерева

```
def unite(a, b):
    a = col(a) # Перешли от самих вершин, к их корням
    b = col(b)

    if a == b:
        return

    # Подвешиваем меньшее к большему
    if sz(a) < sz(b):
        swap(a, b)

    p[a] = b
    sz[a] += sz[b]
```

В качестве «размера» дерева можно брать либо размер поддеревы, либо высоту, но лучше брать размер поддеревы.

Получаем  $O\left(n \log n + m \underbrace{\log n}_{\text{т.к. col за } \log n}\right)$

— Четвертая версия (со сжатием путей) —

«Эвристика сжатия путей»

Улучшение четвертой версии

`unite` такой же

---

<sup>3</sup>используем именно список, чтобы можно было быстро их объединять

```
def col(a):  
    # Если a --- корень дерева, то вернем его  
    if p[a] == a:  
        return a  
  
    # Переподвесим вершину к корню. Так мы уменьшим глубину дерева.  
    p[a] = col(p[a])  
  
    return p[a]
```

Получаем  $O(n \cdot \alpha(n) + m)$

$\alpha(n)$  — обратная функция Аккермана. При всех нормальных значениях  $\alpha(n) < 4$

Есть гипотеза, что сложность будет  $O(n + m)$ , но это доказано.

### —— СМ с откатами ——

Откаты (rollbacks) — самая слабая версия персистентности. Можем откатиться на шаг назад.

Нужно делать без сжатия путей

Храним «лог изменений»: массив вершин, которую мы подвешивали в очередном unite