Теория Вероятностей

Семинары

Савва Чубий, БПИ233

2024–2025

2024-09-09

Введение

Наталья Васильевна Сизых

Таблица 1. Облако

Link:	`mega.nz/login`
Login:	`tv.24-25@yandex.ru`
Pass:	`tv.24-25`

$$\text{Итог} = 0.1 \cdot \text{ИДЗ} + 0.25 \cdot \text{КР} + 0.15 \cdot \text{Сем} + 0.5 \cdot \text{Экз}$$

2024-09-16

Условная вероятность

Обозначение A при B: $P(A|B)$ или $P_B(A)$

$$P(A)P(B|A) = P(AB) = P(B)P(A|B)$$

Гипотезы

Формула полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(H_j)P(A|H_j)$$

Формула Баеса:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j)P(A|H_j)} = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}$$

H_i — гипотезы

A — событие

Задачи

Задача

Два стрелка

$P_1 = 0.8$ $P_2 = 0.7$

A — поражение цели хотя бы одним A_1 — поражение цели первым A_2 — поражение цели вторым

Методы:

1. $P(A) = P(A_1) + P(A_2) - \underbrace{P(A_1 A_2)}_{P(A_1)P(A_2)}$
2. $P(A) = P(A_1)P\left(\overline{A_2}\right) + P(A_2)P\left(\overline{A_1}\right) + P(A_1)P(A_2)$
3. $P(A) = 1 - P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\right)$

Задача про Золушку

A — достала хрустальную

H_i — выбрала i-ую коробку

D_1 — утеряна хрустальная, D_2 — утеряна серебряная

$$P(D_1) = \frac{3}{5}, P(D_2) = \frac{2}{5}$$

$$P(A|H_1) = P(D_1) \cdot \frac{2}{4} + P(D_2) \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$$

$$P(A|H_2) = \frac{2}{6}$$

$$P(A|H_3) = 1$$

$$P(A) = \sum_{i_1}^{3} P(H_i)P(A|H_i) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{3} + 1\right) = \frac{29}{45}$$

Задача про Завод

$$P(A) = 0.05$$

$$P(B|A) = 0.1$$

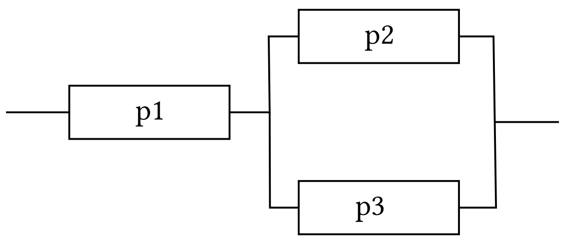
$$P\left(B|\overline{A}\right) = 0.01$$

$$P\left(\overline{B}\right) =?$$

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P\left(\overline{A}\right)P\left(\overline{A}\right) = 0.05 \cdot 0.1 + 0.95 \cdot 0.01 = 0.0145$$

$$P\left(\overline{B}\right) = 1 - P(B) = 0.9855$$

Задача про схему



$$P_1 = 0.8$$

$$P_2 = 0.7$$

$$P_3 = 0.6$$

$$P(A_1) = P_1$$

$$P(A) = P(A_1) \cdot [1 - (1 - P(A_2)) \cdot (1 - P(A_3))]$$

Задача 31

A, B — независимы

$$P(AB) = P(B) = \frac{1}{4}$$

$$P(A+B) = ?$$

$$P(A)P(B) \underbrace{=}_{\text{т.к. независимы}} = P(AB) = \frac{1}{4}$$

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \ldots$$

Задача 32

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{2}{3}, P(A+B) \underbrace{\geq}_{?} \frac{1}{6}$$

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{7}{6} - \underbrace{P(AB)}_{\leq 1} \geq \frac{1}{6}$$

Задача 22

$$1 - (1-p)^n \geq 0.95$$

$$1 - 0.99^n \geq 0.95$$

$$0.05 \geq 0.99^n$$

$$\ln(0.05) \geq n \ln(0.99)$$

$$\frac{\ln(0.05)}{\ln(0.99)} \leq n$$

$$298.07\ldots \leq n$$

$$n = 299$$

Задача 23

$$1 - (1-0.9)^n \geq 0.999$$

$$0.001 \geq 0.1^n$$

$$\frac{\ln(0.001)}{\ln(0.1)} \leq n$$

$$3 \leq n$$

$$n = 3$$

2024-09-23

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_k$ — полная группа событий. Делаем n испытаний, хотим m_i событий A_i, где $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$:

$$P = n! \cdot \frac{p_1^{m_1} p_2^{m_2} ... p_k^{m_k}}{m_{1!} m_{2!} ... m_{k!}}$$

Задачи

Задача 10

$$P(A) = P_3(2) + P_3(3) = 3 \cdot 0.7^2 \cdot 0.3 + 0.7^3 = 0.784$$

Задача 11

8-ой выстрел — обязательно промах

В первых семи — два промаха

$$P = P_7(5) \cdot 0.2 = C_7^5 \cdot 0.8^5 \cdot 0.2^2 \cdot 0.2 = 0.058$$

Задача 18

См. 11

$$P_{20(9)} \cdot p = C_{19}^9 p_9 q_{10} \cdot p = 0.001$$

Задача 25

$$n = 3$$

$$p = 0.05$$

$$p(n+1) = 0.05(3+1) = 0.2$$

$$\lfloor 0.2 \rfloor = 0$$

Задача 2

$$P(A) = p + (1-p)^2 p + (1-p)^4 p$$

$$P(B) = (1-p)p + (1-p)^3 p + (1-p)^5 p$$

$$P(C) = (1-p)^6$$

$$P(D) = (1-p)^6 + (1-p)^5 p$$

Задача 4

$$P(A - B - A) = P(A)P(B) + (1 - P(A))P(B)P(A)$$

$$P(B - A - B) = P(A)P(B) + (1 - P(B))P(A)P(B)$$

Задача

20 мячей:

- 12 новых
- 8 игранных
- извлекают 2, играют, потом возвращают

- потом снова извлекают 2 — они новые
- с какой вероятностью первые два тоже были новые?

H_1 — первые два оба новые H_2 — новый – старый H_3 — оба старые

$$P(H_1) = \frac{C_{12}^2}{C_{20}^2} = \frac{33}{95}$$

$$P(H_2) = \frac{C_{12}^1 C_8^1}{C_{20}^2} = \frac{48}{95}$$

$$P(H_3) = \frac{C_8^2}{C_{20}^2} = \frac{14}{95}$$

A — вторые два мяча новые

$$P(A \mid H_1) = \frac{C_{10}^2}{C_{20}^2} = \frac{9}{38}$$

$$P(A \mid H_2) = \frac{C_{10}^1 C_{20}^1}{C_{10}^2} = \frac{11}{38}$$

$$P(A \mid H_3) = \frac{C_{12}^2}{C_{20}^2} = \frac{11}{38}$$

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1)P(A \mid H_1)}{\sum_{i=1}^3 P(H_i)P(A \mid H)i}$$

Задача

4 кубика:
- 3 правильных
- 1 фальшивый $P(6) = \frac{1}{2}; P(i) = 0.1$

H_1 — выбрали правильный H_2 — выбрали фальшивый

A — выпала шестерка

$$P(A \mid H_1) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \mid H_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(H_2 \mid A) = \frac{P(A \mid H_2)P(H_2)}{P(A \mid H_2)P(H_2) + P(A \mid H_1)P(H_1)}$$

2024-09-30

Формула Пуанкаре

Пять человек подбросили шляпы в воздух и каждый поймал одну случайную.

Всего $5! = 120$ перестановок

Никто не получил свою шляпу:

$$120 - 5 \cdot (5-1)! + 10 \cdot (5-2)! - 10 \cdot (5-3)! + 5 \cdot 1 - 1 = 44$$

Общая формула:

$$n(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s-1} C_n^s (n-s)! = n! \sum_{s=1}^{n} \frac{(-1)^s}{s!}$$

$A_i - i$ человек получили свои шляпы

$$P(A) = \sum_{s=0}^{n} \frac{(-1)^s}{s!}$$

Задачи

Задача

Отрезок длина 5 на две части: 2 и 3. Десять точек бросают случайным образом. Найти вероятность того, что на отрезок длины 2 попадетне менее 9 точек

A - случайная точка попадет на отрезок длины 2. p = P(A) = 0.4

$P_{10(\geq 9)} = P_{10(9)} + P_{10(10)} = \ldots$

Задача[1]

Есть 3 шара. Шары бывают или черными, или белыми. Было проведено 4 опыта. Найти апостериорные вероятности всех цветовых составов урн Результат: бчбб

A - выпало бчбб

$$H_1 = H_{\text{ччч}}$$

$$H_2 = H_{\text{ччб}}$$

$$H_3 = H_{\text{чбб}}$$

$$H_4 = H_{\text{ббб}}$$

$$P(H_i) = 0.25$$

$$P(A \mid H_1) = 0$$

$$P(A \mid H_2) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{81}$$

$$P(A \mid H_3) = \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{81}$$

$$P(A \mid H_4) = 0$$

$$P(A) = \sum (i = 0)^4 P(H_i) \cdot P(A|H_i)$$

[1]Спасибо Агилю за конспектирование этой и следующей задач.

$$P(H_2 \mid A) = P(A \mid H_2) \cdot \frac{P(H_2)}{P(A)}$$

$$P(H_3 \mid A) = P(A \mid H_3) \cdot \frac{P(H_3)}{P(A)}$$

——— Задача ———

В группе учится 30 студентов. На каждом из 14 семинаров проводится рубежный контроль случайным образом выбирает 6 студентов, чьи работы проверяются.

Найти вероятность того, что работы первого студента:
1. Ни разу не попадут на проверку
2. Попадут на проверку не менее 2 раз
3. Найти среднее количество проверенных работ

A — работа первого студента попадет на проверку.

$$P(A) = \frac{6}{30} = 0.2$$

1. $P_0(14) = C_{14}^0 \cdot p^0 \cdot q^{14} = 1 \cdot 1 \cdot (0.8)^{14} = 0.04398$
2. $P_{14}(\geq 2) = 1 - P_{14}(0) - P_{14}(1) = 0.802$
3. $M(x) = np = 14 \cdot \frac{1}{5} = 2.8$

——— Задача ———

$$p = 0.8$$

Цель поражена, если не менее трех попаданий. A — цель поражена

$$P_n(\geq 3) = P_4(3) + P_4(4) = \ldots$$

——— Задача ———

Два контролера проверяют деталь.

H_i — деталь попадет к i-ому контролеру

A — деталь одобрена

Таблица 2. Условие

i	$P(H_i)$	$P(A \mid H_i)$
1	0.4	0.95
2	0.6	0.98

Формула Баеса

——— Задача ———

Фирма участвует в проектах. Вероятность победы в проектах соответственно: 0.9, 0.4, 0.8, 0.2

Вероятность, что фирма выиграет хотя бы в двух проектах?

$$1 - 0.1 \cdot 0.6 \cdot 0.2 \cdot 0.8 - \text{*по два*} + \ldots$$

2024-10-07

Распределения

Рис. 2. Плотность распределения

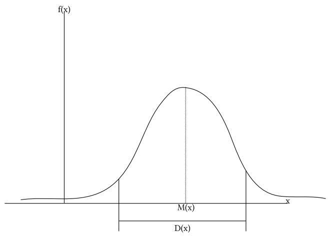
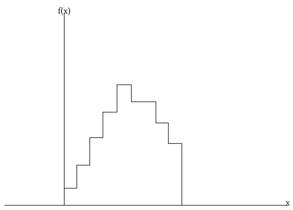


Рис. 3. Гистограмма



Задачи

Задача

Ежедневные расходы 100′000 рублей. Число машин, проданных за день (x):

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p	0.25	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.05	0.025	0.025

Цена машины 150′000

$$\text{П} = 150x - 100$$

$$M(\text{П}) = M(150x - 100) = 150M(x) - 100$$

$$M(x) = 0.025 + 1 \cdot 0.2 + ... = 2.675$$

$$M(\text{П}) = 301'100$$

Задача

ξ	0	1	2	3	4	5
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$

$$M(\xi) = 0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + ... = \frac{31}{32}$$

Задача

X	a	$-a$
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$M(x) = 0$$

$$D(x) = M(x^2) - (M(x))^2 = a^2 - 0 = a^2$$

—— Задача ——

$$n = 10'000; p = 0.2$$

$$x\sim \text{ Bi}(n, p) = \text{Bi}(10'000, 0.2)$$

$$M(x) = np = 2'000$$

$$D(x) = npq = 1'600$$

$$\sigma(x) = 40$$

—— Задача 11 ——

$$x\sim \text{ Bi}\left(1; \frac{1}{2}\right)$$

$$(M(x))^2 = (np)^2 = \left(1 \cdot \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$D(x) = npq = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$D(x) - (M(x))^2 = 0$$

—— Задача 28 (a) ——

$$p = 0.3$$

$$n = 200$$

$$x\sim \text{ Bi}(200, 0.3)$$

$$M(x) = np = 200 \cdot 0.3 = 60$$

$$D(x) = npq = 42$$