

Теория Вероятностей

Домашние задания

Савва Чубий, БПИ233

2024–2025

2024-09-16	
ДЗ 1	2
2024-09-23	
ДЗ 2	5
2024-09-30	
ДЗ 3	9

2024-09-16

ДЗ 1

Задача 25 (1)

• (а)

1. При $k > 17$ все карманы пусты.

$$P = 1$$

2. При $k \leq 17$, $k - 1$ карманов пусты, всего карманов 17.

$$P = \frac{k - 1}{17}$$

• (б)

$$P = \frac{2}{17} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{15}{15} \cdot \frac{14}{14} = \frac{2}{17} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{136}$$

• (в)

$$P = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$$

Задача 26 (4)

• (А)

1. Способов выбрать два туза для первой пачки: C_4^2

2. Способов выбрать остальные карты для первой пачки: C_{48}^{24}

3. Всего способов разделить на две части: C_{52}^{26}

4. Итого,

$$P = \frac{C_4^2 C_{48}^{24}}{C_{52}^{26}}$$

• (В) Все тузы либо в первой пачке, либо во второй:

$$P = \frac{C_{48}^{22} + C_{48}^{26}}{C_{52}^{26}}$$

• (С) Либо в первой один туз, а во второй — три, либо наоборот. Выберем первую:

$$P = \frac{2 \cdot C_4^1 C_{48}^{25}}{C_{52}^{26}}$$

Задача 27 (5)

• Первый человек родился в некий день из 365

• Под второго осталось $365 - 1 = 364$

• Под третьего — $365 - 2 = 363$

• ...

• Под r -того — $365 - r + 1$

$$P = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \dots \cdot \frac{365 - r + 1}{365}$$

При $r = 23 : P \approx 0.49$

——— Задача 28 (6) ———

Таблица 1. Число перестановок

Всего	6!
Буквы А	3!
Буквы Н	2!
Буквы С	1!
Различных	$\frac{6!}{3!2!1!} = 60$
Подходящих	1

$$P = \frac{1}{60}$$

——— Задача 29 (7) ———

Аналогично задаче 5.

$$P = \frac{30}{30} \cdot \frac{29}{30} \cdot \dots \cdot \frac{26}{30} = 0.7037(3)$$

——— Задача 30 (11) ———

Выбрать получивших номера: C_{10}^6

- (а) Выбрать 6 мужчин: $C_6^6 = 1$.

$$P = \frac{1}{C_{10}^6} = \frac{1}{210}$$

- (б) Выбрать 4 муж — C_6^4 , 2 жен — C_4^2 .

$$P = \frac{C_6^4 C_4^2}{C_{10}^6} = \frac{3}{7}$$

- (в) Обратно пункту а.

$$P = 1 - \frac{1}{210} = \frac{209}{210}$$

——— Задача 31 (12) ———

Не все из 12-ти комбинаций равновероятны. Так, например, комбинация 6-4-1 соответствует шести ситуациям:

1-ая кость	2-ая кость	3-ая кость
1	4	6
1	6	4
4	1	6
4	6	1
6	1	4

1-ая кость	2-ая кость	3-ая кость
6	4	1

Комбинация 4-4-3 — трем:

1-ая кость	2-ая кость	3-ая кость
3	4	4
4	3	4
4	4	3

А комбинация 4-4-4 — только одной:

1-ая кость	2-ая кость	3-ая кость
4	4	4

——— Задача 32 (13) ———

- (а) выберем в одну (первую или вторую) из подгрупп шесть лидирующих и ещё три не лидирующие:

$$P = \frac{2 \cdot C_6^6 \cdot C_{12}^3}{C_{18}^9} = \frac{2 \cdot C_{12}^3}{C_{18}^9}$$

- (б) выберем три лидирующие команды и шесть не лидирующих команд в первую группу:

$$P = \frac{C_6^3 \cdot C_{12}^6}{C_{18}^9}$$

——— Задача 33 (14) ———

шампанское	5	→	4
белое вино	3	→	2
красное вино	2	→	1
всего	10	→	7

$$P = \frac{C_5^4 \cdot C_3^2 \cdot C_2^1}{C_{10}^7}$$

——— Задача 34 (15) ———

- (а) Рассмотрим обратное событие:

Айова	2	→	0
Остальные	98	→	50
Всего	100	→	50

$$P = 1 - \frac{C_2^0 \cdot C_{98}^{50}}{C_{100}^{50}} = 1 - \frac{C_{98}^{50}}{C_{100}^{50}}$$

- (б)

Штат 1	2	→	1
Штат 2	2	→	1
...			
Штат 50	2	→	1
Всего	100	→	50

$$P = \frac{(C_2^1)^{50}}{C_{100}^{50}} = \frac{2^{50}}{C_{100}^{50}}$$

——— Задача 35 ———

Рассмотрим обратное событие: все ботинки из разных пар.

$$P = 1 - \frac{20}{20} \cdot \frac{18}{19} \cdot \frac{16}{18} \cdot \frac{14}{17}$$

2024-09-23

————— ДЗ 2 —————

——— Задача 25 (17) ———

Нужно чтобы из 5-ти товаров либо 4, либо 5 были с купоном.

Если четыре:

$$P_4 = \frac{C_{10000}^4 C_{490000}^1}{C_{500000}^5}$$

Если пять:

$$P_5 = \frac{C_{10000}^5 C_{490000}^0}{C_{500000}^5} = \frac{C_{10000}^5}{C_{500000}^5}$$

Итого:

$$P = P_4 + P_5 = \frac{C_{10000}^4 C_{490000}^1 + C_{10000}^5}{C_{500000}^5}$$

FIXME: ответ не сходится

——— Задача 26 (19) ———

Найдем $P(A)$, $P(B)$, $P(AB)$ перебором вариантов.

$$P(A) = \frac{5}{6}$$

$$P(B) = \frac{1}{9}$$

$$P(AB) = \frac{1}{6}$$

Т.к. $P(AB) = \frac{1}{6} \neq \frac{5}{54} = P(A)P(B)$, то **зависимы**

——— Задача 17 (20) ———

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$P(AB) = P(A + B) - P(A) - P(B) \leq 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} < \frac{3}{8}$$

——— Задача 28 (22) ———

$$p = 0.01 \rightarrow q = 0.99$$

$$1 - q^n \geq 0.95$$

$$1 - 0.99^n \geq 0.95$$

$$0.05 \geq 0.99^n$$

$$\log(0.05) \geq n \log(0.99)$$

$$\frac{\log(0.05)}{\log(0.99)} \leq n$$

$$298.07... \leq n$$

$$n = 299$$

——— Задача 29 (23) ———

Студент должен вытянуть либо 3, либо 4, либо 5 счастливых билетов:

$$P = \frac{C_{20}^3 C_5^2 + C_{20}^4 C_5^1 + C_{20}^5}{C_{25}^5}$$

——— Задача 30 (31) ———

$$P(AB) = P(A)P(B) = P(P) \rightarrow P(A) = 1$$

$$P(A + B) = 1$$

——— Задача 31 (32) ———

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A + B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - P(A + B) = \frac{7}{6} - P(A + B) \leq \frac{7}{6} - 1 = \frac{1}{6}$$

Верно

——— Задача 32 (36) ———

Вероятность того, что подбросили n раз равна:

$$P_n = 0.5^{n-1} \cdot 0.5 = 0.5^n$$

То есть $n - 1$ раз выпадала решка и один раз герб.

$$\operatorname{argmin}_{1 \leq n} P_n = 1$$

Ответ. 1

——— Задача 33 (37) ———

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{35}$$

$$P(AB) = 0$$

$$P(A)P(B) = \frac{17}{280} \neq P(AB)$$

Ответ. Зависимы

——— Задача 34 (40) ———

Должны работать: первый и (второй или третий)

$$P = p_1 \cdot [1 - (1 - p_2)(1 - p_3)] = 0.8 \cdot [1 - (1 - 0.7)(1 - 0.6)] = 0.704$$

——— Задача 35 (43) ———

• (а)

$$P_{12} = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) = 1 - (1 - 0.8)(1 - 0.7) = 0.94$$

$$P_{123} = P_{12} \cdot p_3 = 0.564$$

$$P = 1 - (1 - P_{123})(1 - p_4) = 0.782$$

• (б)

$$P_{12} = 0.94$$

$$P_{34} = p_3 \cdot p_4 = 0.3$$

$$P_{345} = 1 - (1 - P_{34})(1 - p_5) = 0.58$$

$$P = P_{12} \cdot P_{345} \cdot p_6 = 0.16356$$

——— Задача 36 (46) ———

$$\begin{cases} 0.05 = P(AB) = P(B | A)P(A) \\ 0.079 = P(A\bar{B}) = P(\bar{B} | A)P(A) = (1 - P(B | A))P(A) \\ 0.089 = P(\bar{A}B) = P(B | \bar{A})P(\bar{A}) \\ 0.782 = P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{B} | \bar{A})P(\bar{A}) = (1 - P(B | \bar{A}))P(\bar{A}) \end{cases}$$

Из (1, 2):

$$\frac{P(B | A)}{1 - P(B | A)} = \frac{0.05}{0.079} = 0.6329 \rightarrow P(B | A) = 0.3876$$

$$P(\bar{B} | A) = 1 - P(B | A) = 1 - 0.3876 = 0.6124$$

Из (3, 4):

$$\frac{P(B | \bar{A})}{1 - P(B | \bar{A})} = \frac{0.089}{0.782} = 0.1138 \rightarrow P(B | \bar{A}) = 0.1022$$

$$P(\bar{B} | \bar{A}) = 1 - P(B | \bar{A}) = 1 - 0.1022 = 0.8978$$

——— Задача 37 (47) ———

Игра закончится на k -ом шаге, если $k - 1$ раз выпадет решка и один раз выпадет орел.

$$P_k = 0.5^{k-1} \cdot 0.5 = 0.5^k$$

Вероятность того, что игра закончится на четном ходу:

$$P_{\text{чет}} = P_2 + P_4 + \dots = 0.5^2 + 0.5^4 + \dots = 0.25^1 + 0.25^2 + \dots = \frac{0.25}{1 - 0.25} = \frac{1}{3}$$

Вероятность того, что игра закончится на нечетном ходу:

$$P_{\text{нечет}} = 1 - P_{\text{чет}} = \frac{2}{3}$$

——— Задача 38 (85) ———

H_1 — выбрана урна первого типа

H_2 — выбрана урна второго типа

A — вытянули белый шар

$$P(A) = P(H_1)P(A | H_1) + P(H_2)P(A | H_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = 0.4$$

——— Задача 39 ———

Найдем значение перебором:

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Любая пара или тройка событий означает «на всех выпала одна цифра»: $P(AB) = P(BC) = P(AC) = P(ABC) = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$

События **попарно независимы** т.к. $P(A)P(B) = P(A)P(C) = P(B)P(C) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{216}$

Т.к. зависимы попарно, то и **совокупно зависимы**.

——— Задача 40 ———

• (а)

A — цель поражена

$$P = P(A) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3)$$

• (б)

B — все заряды потрачены.

B происходит, если 1-ый и 2-ой промазали

$$P(B) = (1 - p_1)(1 - p_2)$$

AB происходит, если 1-ый и 2-ой промазали, а 3-ий попал:

$$P(AB) = (1 - p_1)(1 - p_2)p_3$$

$$P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = p_3$$

• (в)

$$P(B | A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{(1 - p_1)(1 - p_2)p_3}{1 - (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3)}$$

———— Задача 41 ————

$$P = 1 - (\text{все мимо}) = 1 - (1 - 0.6)(1 - 0.7)(1 - 0.8) = 1 - 0.4 \cdot 0.3 \cdot 0.2 = 0.976$$

2024-09-30

———— ДЗ 3 ————

———— Задача 18 ————

Среди первых 19 человек ровно 9 подошло. 20-ый тоже подошел.

$$P = P_{19(9)} \cdot 0.2 = C_{19}^9 0.2^9 0.8^{10} \cdot 0.2 \approx 0.0010157$$

———— Задача 24 ————

1. A — система работает

Должны работать элементы 1, 6 и любой из 2–5:

$$P_{2-5} = 1 - (1 - p_2)(1 - p_3)(1 - p_4)(1 - p_5) = 1 - \frac{1}{2^4} = \frac{15}{16}$$

$$P(A) = p_1 \cdot p_6 \cdot P_{2-5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{15}{16} = \frac{15}{32}$$

2. B — ровно два элемента из 2 – 5 отказали:

$$P(B) = P_4(2) = C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

3. AB , если и B , и 1, 6 работают:

$$P(AB) = P(B) \cdot p_1 \cdot p_2 = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$$

4.

$$P = P(B | A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{15}{32}} = \frac{2}{5} = 0.4$$

———— Задача 25 ————

$$p = 0.05$$

$$n = 3$$

$$(n + 1)p = 0.05 \cdot 3 = 0.15$$

$$\lfloor 0.15 \rfloor = 0$$

Ответ. 0

——— Задача 26 ———

Среди первых 3-ех мальчик 1. 4-ый ребенок – мальчик.

$$P = P_3(1) \cdot p = C_3^1 \cdot p^1 \cdot q^2 \cdot p \approx 0.187$$

——— Задача 60 ———

Нет. Событие (2, 1) не попадает ни в одну «гипотезу».

——— Задача 51 ———

$$n = 8$$

$$p = \frac{1}{5}$$

• (а)

$$P = P_n(3) = P_8(3) = C_8^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^5 \approx 0.1468$$

• (б)

$$P = \sum_{i=0}^3 P_n(i) = \sum_{i=0}^3 C_8^i \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^i \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{8-i} \approx 0.9437$$

——— Задача 52 ———

$$p = 0.2$$

Среди первых 4-ех проверок, провалено 2-е. 5-ая тоже провалена.

$$P = P_4(2) \cdot p = C_4^2 \cdot 0.2^2 \cdot 0.8^2 \cdot 0.2 \approx 0.0307$$

——— Задача 53 ———

В семье 2, 3, или 4 девочки

$$P = \sum_{i=2}^4 P_4(i) = \sum_{i=2}^4 C_4^i \cdot q^i \cdot p^{4-i} \approx 0.6647$$

——— Задача 54 ———

Должны быть исправны 8 или 9 машин

$$P = \sum_{i=8}^9 P_9(i) = \sum_{i=8}^9 C_9^i \cdot 0.9^i \cdot 0.1^{9-i} \approx 0.7748$$

——— Задача 62 ———

Взяли группу из равного количества мужчин и женщин. Из группы выбрали одного человека.

H — выбрали женщину

A — выбранный человек — дальтоник

Вероятность дальтонизма у мужчин значительно выше, чем у женщин, значит:

$$P(H | A) \ll 0.5$$

Т.к. в группе мужчин и женщин одинакового, то

$$P(H) = 0.5$$

Итого:

$$P(H | A) < P(H)$$

Ответ. Может

——— Задача 61 ———

$$P(H_1) + P(H_2) + \dots + P(H_{10}) = 1$$

$$P(H_1) = P(H_2) = \dots = P(H_{10}) = \frac{1}{10}$$

$$P(H_1 + H_{10}) = P(H_1) + P(H_{10}) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

——— Задача 67 ———

Да. Можно представить каждый маршрут в дереве, как гипотезу, а каждый лист, как «финальное» событие.