

Теория Вероятностей

Лекции

Савва Чубий, БПИ233

2024–2025

2024-09-06

Введение	3
Основные понятия	3
Классическое определение вероятности	4

2024-09-13

Геометрическое определение вероятности	4
Св-ва $P(A)$	4
Задача	4
Частотное (статистическое) определение	5
Аксиоматическое определение Колмагорова	5
Свойства $P(A)$	5
Условная вероятность	6

2024-09-20

Независимость в совокупности	7
Теорема умножения вероятностей	7
Биномиальная схема испытаний Бернулли	8
Наиболее вероятное число успехов	8
Формула полной вероятности	9

2024-09-27

Формула Байеса	10
Задача	10
Случайные величины	10
Дискретные случайные величины	11
Числовые характеристики дискретных случайных величин	12
Математическое ожидание	12

2024-10-04

Свойства математического ожидания	12
Дисперсия	12
Свойства дисперсии	12
Другие	12
Часто встречающиеся дискретные распределения	13

Распределение Бернулли	13
Биномиальное распределение	13
Распределение Пуассона	14
Геометрическое распределение	15
 2024-10-11	
Непрерывные случайные величины	15
Свойства плотности распределения	16
Числовые характеристики	17
Математическое ожидание	17
Свойства математического ожидания	17
Квантиль	17
Часто встречающиеся непрерывные распределения	17
Равномерное на интервале $(a; b)$	17
 2024-10-18	
Экспоненциальное (показательное) распределение	18
Распределение Гаусса (Нормальное распределение)	19
Стандартное распределение Гаусса	20
Уравнение Лапласа	20
Вероятность попадания в заданный интервал	20
 2024-11-01	
Неравенства Чебышева	21
Частные случаи	21
Пример	21
Случайные векторы	22
Свойства функции распределения	22
Дискретные случайные векторы	22
Непрерывные случайные векторы	23
Плотность распределения	23
Свойства плотности распределения	23

2024-09-06

Введение

$$\text{Итог} = 0.1 \cdot \text{ИДЗ} + 0.15 \cdot \text{Сем} + 0.25 \cdot \text{КР} + 50 \cdot \text{Экз}$$

Нужно набрать 4 — не 3.5

По ИДЗ бывают защиты

На семинарах могут быть самостоятельные

Кибзун, Горяинова, Наумов «ТВ и МС. Базовый курс с примерами к задачам» 2013 или 2014

КР на тему «случайные события и случайные величины (одномерные)» примерно после 7-ми занятий, в начале 20-ого модуля

Экз на тему «многомерные случайные величины»

Основные понятия

Опр. Теория Вероятностей — раздел математики, изучающий математические модели массовых случайных явлений

При большом кол-ве событий величина $\frac{m}{n} \rightarrow P$ стабилизируется

$\omega_1, \dots, \omega_n$ — элементарные случайные события

Опр. Пространство Элементарных Событий (Ω) — совокупность элементарных случайных событий

Опр. Случайное событие — любое $A \subset \Omega$

Опр. Достоверное событие — событие, которое происходит в опыте всегда. Совпадает с Ω

Опр. Невозможное событие — событие, которое не происходит в опыте никогда. Является \emptyset

Операции над множествами/ событиями:

- Произведение событий $A \cdot B$ — событие из $A \cap B$
- Сумма событий $A + B$ — событие из $A \cup B$
- Разность событий $A \setminus B$
- Противоположное событие $\bar{A} = \Omega \setminus A$

Свойства операций над множествами:

- $A + A = A$
- $A \cdot A = A$
- $A \cdot \Omega = A$
- $A + \Omega = \Omega$
- $A + B = B + A$
- $A \cdot B = B \cdot A$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $\overline{A \cdot (B \cdot C)} = (\bar{A} \cdot \bar{B}) \cdot \bar{C}$
- $\overline{\bar{A}} = A$
- $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$

Опр. σ -алгебра событий класс подмножеств в \mathcal{A} на пространстве элементарных событий Ω , если:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$

$$2. A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$$

$$3. \forall A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A} \wedge \prod_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$

———— Классическое определение вероятности ————

Пусть Ω содержит **конечное** число **равновозможных взаимоисключающих** исходов, тогда:

Опр. Вероятность события A (классическое определение)

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

где $|A|$ – мощность события, количество событий, входящих в A

Свойства:

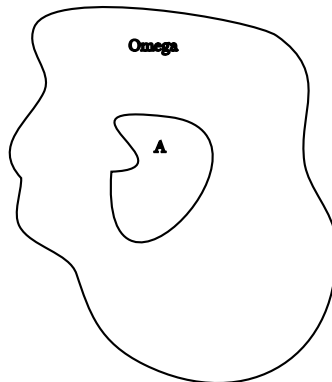
- $P(A) \in [0; 1]$
- $P(\Omega) = 1$
- Если $A \cdot B = \emptyset$, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$

2024-09-13

———— Геометрическое определение вероятности ————

Рассматриваем подмножества на \mathbb{R}^n , которые имеют конечную меру

Пример эксперимента: попадет ли случайная точка в подмножество



$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Опр. События несовместны – $A \cdot B = \emptyset$

———— Св-ва $P(A)$ ————

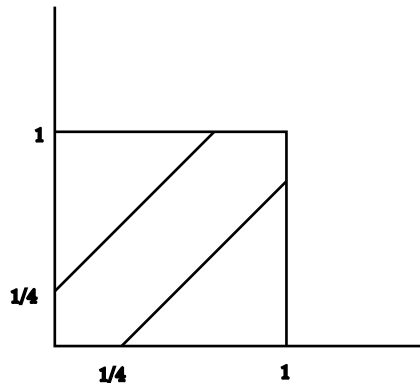
1. $P(A) \geq 0 \forall A \subset \Omega$
2. $P(\Omega) = 1$
3. если A_1 и A_2 несовместны, то $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

———— Задача ————

x – время прихода Джульеты

y – время прихода Ромео

$$|x - y| < 14$$



$$P(\overline{A}) = \frac{\mu(\overline{A})}{\mu(\Omega)} = \frac{9}{16}$$

$$P(A) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

Частотное (статистическое) определение

Пусть опыт проведен N раз, и событие произошло m_A раз. Тогда **частота** события A : $\nu(A) = \frac{m_A}{N}$

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{m_A}{N}$$

Аксиоматическое определение Колмагорова

Пусть \mathcal{A} — σ -алгебра событий на пространстве Ω . Числ функция $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^1$ — вероятность, если:

1. $\forall A \in \mathcal{A} P(A) \geq 0$ — аксиома неотрицательности
2. $P(\Omega) = 1$ — условие нормировки
3. если A_1, \dots, A_n, \dots попарно несовместны, то $P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Число $P(A)$ называется вероятностью соб-я A

Тройка (Ω, \mathcal{A}, P) — вероятностное пространство

Свойства $P(A)$

$$1. P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Док-во

$$\Omega = A + \overline{A}$$

$$A \cdot \overline{A} = \emptyset$$

$$1 = P(\Omega) = P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$$

$$2. P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 0$$

$$3. A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

Док-во

$$B = A + (B \setminus A)$$

$$P(B) = P(A + (B \setminus A)) = P(A) + \underbrace{P(B \setminus A)}_{\geq 0}$$

4. $\forall A : 0 \leq P(A) \leq 1$

5. Теорема сложения: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$

Док-во

$$A = A\Omega = AB + A\bar{B}$$

$$B = B\Omega = AB + \bar{A}B$$

$$A + B = \underbrace{AB + A\bar{B} + \bar{A}B}_{\text{попарно несовместны}}$$

$$P(A) = P(AB) + P(A\bar{B}) \Rightarrow P(A) - P(AB) = P(A\bar{B})$$

$$P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B) \Rightarrow P(B) - P(AB) = P(\bar{A}B)$$

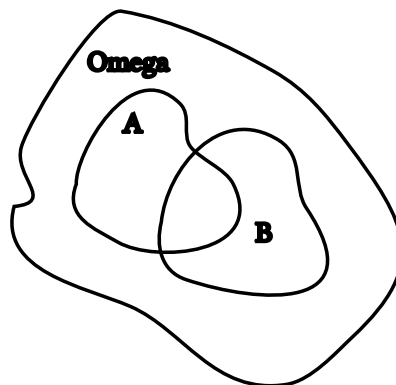
$$P(A + B) = P(AB) + P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) = P(AB) + P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

6. Обобщение теоремы сложения:

$$P\left(\underbrace{A_1 + A_2}_A + \underbrace{A_3}_B\right) = P(A) + P(B) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3)$$

$$P\left(\sum_i A_i\right) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_iA_j) + \sum_{i < j < k} P(A_iA_jA_k) - \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \dots A_n)$$

Условная вероятность



Переходим из Ω в B

Пусть $A, B \in \Omega$ и $P(B) \neq 0$, тогда вероятность A при условии B :

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Опр. A и B **независимые**, если $P(A|B) = P(A)$

Опр. A и B **независимые**, если $P(AB) = P(A)P(B)$

Любые несовместные события зависимы

2024-09-20

Независимость в совокупности

Опр. События A_1, \dots, A_n **независимы в совокупности**, если

$$\forall 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n : P(A_{i_1} A_{i_2} \dots) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \dots$$

- Независимы в совокупности \rightarrow независимы попарно
- Независимы все подмножества \rightarrow независимы совокупно

Тетраэдр; Стороны: красная, синяя, зеленая, все вместе

A_1 — выпала грань с **красным** цветом A_2 — выпала грань с **синим** цветом A_3 — выпала грань с **зеленым** цветом

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(A_1 A_2) = P(A_1 A_3) = P(A_2 A_3) = \frac{1}{4}$$

$$P(A_1 A_2 A_3) = \frac{1}{4} \neq P(A_1) P(A_2) P(A_3)$$

Теорема умножения вероятностей

Пусть $P(A_1 A_2 \dots A_n) > 0$,

$$P\left(\overbrace{A_1 \dots A_n}^A\right) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 A_2) \dots P(A_n | A_1 \dots A_{n-1})$$

Док-во

Пусть:

$$B_{n-1} = A_1 \dots A_{n-1}$$

$$B_{n-2} = A_1 \dots A_{n-2}$$

\vdots

$$B_1 = A_1$$

Тогда

$$A = B_{n-1} A_n$$

$$\begin{aligned}
 P(A) &= P(B_{n-1}A_n) = \\
 &= P\left(\overbrace{B_{n-2}A_{n-1}}^{B_{n-1}}\right)P(A_n | B_{n-1}) = \\
 &= P(A_n | A_1 \dots A_{n-1})P(B_{n-2})P(A_{n-2} | B_{n-2}) = \dots
 \end{aligned}$$

Пример

Перестановки: МАТАН

$$\begin{aligned}
 P('M' 'A' 'T' 'A' 'H') &= \\
 &= P('M')P('A' | 'M')P('T' | 'M' 'A')P('A' | 'M' 'A' 'T')P('H' | 'M' 'A' 'T' 'A') = \\
 &= \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1
 \end{aligned}$$

Биномиальная схема испытаний Бернулли

Схема испытаний, которая удовлетворяет условиям:

- Исход двоичен. Происходит A (успех) или \bar{A} (неудача)
- Всех испытания независимы в совокупности
- $p = P(A)$ не изменяется от опыта к опыту

k успехов из n испытаний:

$$P_{n(k)} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Док-во

Если все успехи в начале:

$$P\left(\underbrace{YY\dots Y}_k HH\dots H\right) = p^k q^{n-k}$$

Учтем перестановки. Выберем, где места будут успехи (C_n^k способов):

$$P_{n(k)} = C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$P(k_1 \leq k \leq k_2) = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i q^{n-i}$$

$$1 = \sum_{k=0}^n P_{n(k)} = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1$$

Наиболее вероятное число успехов

По определению:

$$k_0 = \operatorname{argmax}_{1 \leq i \leq n} C_n^i p^i q^{n-i}$$

По удобному:

$$k_0 = \begin{cases} [(n+1)p] & \text{если } (n+1)p \notin \mathbb{Z} \\ (n+1)p \text{ и } (n+1)p - 1 & \text{если } (n+1)p \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

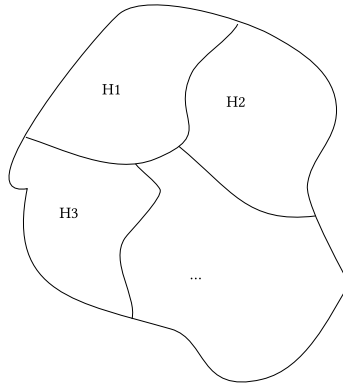
Формула полной вероятности

Опр. Пусть $H_1, \dots, H_n \in \Omega$. Если

1. $\forall i \neq j : H_i \cdot H_j = \emptyset$
2. $H_1 + \dots + H_n = \Omega$

то H_1, \dots, H_n **полная группа событий (гипотезы)**

Рис. 4. Полная группа событий (гипотезы)



Пусть $A \subset \Omega$, H_1, \dots, H_n — полная группа событий

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cdot \Omega) = P(A \cdot (H_1 + \dots + H_n)) = \\ &= P(AH_1 + \dots + AH_n) \stackrel{\text{т.к. несовместны}}{\widehat{=}} P(H_1)P(A | H_1) + \dots + P(H_n)P(A | H_n) \end{aligned}$$

Пример

N — всего билетов

m — билетов студент Сидоров выучил

A — Сидорову попался счастливый билет

Иванов заходит первый. Сидоров заходит второй.

H_1 — Иванов вытащил счастливый (для Сидорова)

H_2 — Иванов вытащил **не** счастливый (для Сидорова)

$$P(H_1) = \frac{m}{N}$$

$$P(H_2) = \frac{N - m}{N}$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1)P(A | H_1) + P(H_2)P(A | H_2) = \\ &= \frac{m}{N} \cdot \frac{m-1}{N-1} + \frac{N-m}{N} \cdot \frac{m}{N-1} \end{aligned}$$

Для гипотез:

- Априорные вероятности — знаем ещё до опыта:

$$P(H_1), \dots, P(H_n)$$

- Апостериорные вероятности — вероятности гипотез после эксперимента (когда знаем, что некоторое событие уже произошло):

$$P(H_1 | A), \dots, P(H_n | A)$$

2024-09-27

Формула Байеса

$$P(H_i | A) = \frac{P(AH_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A | H_i)}{\sum_{j=1}^n P(H_j)P(A | H_j)}$$

$$\sum_{i=1}^n P(H_i) = 1$$

$$\sum_{i=1}^n P(H_i | A) = 1$$

Задача

Таблица 1. Условие

Завод	Процент поставленных деталей	Вероятность исправной детали
№ 1	65%	0.9
№ 2	35%	0.8

A — деталь с дефектом оказалась в самолете

H_1 — деталь взяли и 1-ого завода

$$P(H_1) = 0.65$$

$$P(A | H_1) = 0.1$$

H_2 — деталь взяли и 2-ого завода

$$P(H_2) = 0.35$$

$$P(A | H_2) = 0.2$$

$$P(A) = P(H_1)P(A | H_1) + P(H_2)P(A | H_2) = 0.65 \cdot 0.1 + 0.35 \cdot 0.2$$

$$P(H_1 | A) = \frac{P(H_1)P(A | H_1)}{P(A)} = \frac{65}{135} = 0.48$$

$$P(H_2 | A) = \frac{P(H_2)P(A | H_2)}{P(A)} = \frac{70}{135} = 0.52$$

Случайные величины

Опр. Случайная величина (СВ) — величина, которая после эксперимента принимает заранее неизвестное значение.

Числовая функция $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, которая удовлетворяет условию измеримости¹:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \{\omega : \xi(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$$

Таблица 2. Пример с кубиком

$$\begin{array}{cccccc} \Omega = \{ & \omega_1, & \omega_2, & \dots, & \omega_6 & \} \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ \xi = \{ & 1, & 2, & \dots, & 3 & \} \end{array}$$

Опр. Функция распределения (вероятностей) случайной величины ξ называется функция

$$F_{\xi}(x) = P(\omega : \xi(\omega) \leq x)$$

Свойства $F(x)$:

$$1. F(+\infty) = 1$$

$$F(-\infty) = 0$$

$$\forall x : 0 \leq F(x) \leq 1$$

$$2. F(x) \text{ не убывает: } x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$$

3. $F(x)$ непрерывна справа:

$$F(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} F(x_0 + \varepsilon),$$

где x_0 — точка разрыва

Если некоторая $F(x)$ удовлетворяет условиям, то она является функцией распределения некоторой величины.

Случайные величины:

- Дискретные
- Непрерывные

———— Дискретные случайные величины ————

Опр. Случайную величину называют **дискретной**, если множество её возможных значений конечно или счетно.

Опр. Ряд распределения для дискретной СВ — табличка из ξ в P :

ξ	x_1	x_2	\dots	x_n
P	p_1	p_2	\dots	p_n

Пример

ξ	-1	0	2
P	0.2	0.3	0.5

$$x < -1 : F(x) = 0$$

$$F(-1) = 0.2$$

¹почти всегда выполняется

$$F(-0.5) = 0.2$$

$$F(0) = 0.2 + 0.3$$

$$F(2) = 1$$

$$x > 2 : F(x) = 1$$

Числовые характеристики дискретных случайных величин

Математическое ожидание

Опр. Математическим ожиданием E (среднее значение) дискретной СВ ξ называется число

$$E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

Предполагается, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i$ сходится

2024-10-04

Свойства математического ожидания

1. $Ec = c$
2. $E(c\xi) = cE(\xi)$
3. Если $a \leq \xi \leq b$, то $a \leq E\xi \leq b$.
4. $E(\xi_1 + \xi_2) = E(\xi_1) + E(\xi_2)$
5. Пусть $\eta = \varphi(\xi)$, где φ — детерминированная функция, тогда $E\eta = E\varphi(\xi) = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) p_i$

Дисперсия

Опр. Дисперсией случайной величины ξ называется число

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2$$

Свойства дисперсии

1. $Dc = 0$
2. $D(c\xi) = c^2 D(\xi)$
3. $\forall \xi : D(\xi) \geq 0$
4. $D(\xi) = E(\xi^2 - 2\xi E(\xi) + (E\xi)^2) = E(\xi^2) - 2(E\xi)^2 + (E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$ — удобная формула для вычислений
5. $D(\xi_1 + \xi_2) = E(\xi_1 + \xi_2)^2 - (E(\xi_1 + \xi_2))^2 = E(\xi_1^2) + 2E(\xi_1 \xi_2) + E(\xi_2^2) - (E\xi_1)^2 - 2E\xi_1 E\xi_2 + (E\xi_2)^2 = D\xi_1 + D\xi_2 + 2 \underbrace{(E(\xi_1 \xi_2) - E\xi_1 E\xi_2)}_{\text{ковариация}} = D\xi_1 + D\xi_2 + 2 \text{cov}(\xi_1, \xi_2)$
6. Если ξ_1 и ξ_2 независимы, то $\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0 \rightarrow D(\xi_1 + \xi_2) = D\xi_1 + D\xi_2$

Другие

Опр. Среднеквадратическое отклонение: $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$

Опр. Начальный момент порядка k ($k = 1, 2, \dots$): $\mu_k = E\xi^k$

$$\mu_1 = E\xi$$

Опр. Центральный момент порядка k ($k = 2, 3, \dots$): $\nu_k = E(\xi - E\xi)^k$

$$\nu_2 = D\xi$$

Опр. Центрированная случайная величина: $\xi^0 = \xi - E\xi$

$$E\xi^0 = 0$$

Опр. Нормированная случайная величина: $\xi^* = \frac{\xi^0}{\sigma}$

$$D\xi^* = D\frac{\xi^0}{\sigma} = \frac{1}{\sigma^2}D\xi^0 = 1$$

—— Часто встречающиеся дискретные распределения ——

Распределение Бернулли

$\xi \underset{\text{имеет распределение}}{\sim} \text{Ber}(p), 0 < p < 1$

ξ	0	1
P	$1-p$	p

ξ^2	0	1
P	$1-p$	p

$$E\xi = 0 + 1 \cdot p = p$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

Биномиальное распределение

$\xi \sim \text{Bi}(n, p), 0 < p < 1$

ξ	0	...	k	...	n
P	$C_n^k p^k q^{n-k}$

Матожидание. Способ 1:

$$\begin{aligned} E\xi &= \sum_{k=0}^n k \cdot C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^n k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = np \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} q^{n-k} = \\ &= \{i = k-1\} = np \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!} p^i q^{n-1-i} = np \cdot 1 = np \end{aligned}$$

Матожидание. Способ 2:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \dots + \xi_n$$

$$\xi_i \sim \text{Ber}(p)$$

$$E\xi = E\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n (E\xi_i) = np$$

Дисперсия. Способ 1:

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \sum_{k=0}^n k^2 \cdot C_n^k p^k q^{n-k} = \dots$$

Дисперсия. Способ 2:

$$D\xi = D\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) \underset{\text{т.к. независимы}}{\equiv} \sum_{i=1}^n D(\xi_i) = npq$$

Пример

Бросаем монетку 10 раз.

$$n = 10, p = 0.5 \rightarrow \begin{cases} E\xi = 10 \cdot 0.5 = 5 \\ D\xi = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 2.5 \end{cases}$$

Распределение Пуассона

$$\xi \sim \Pi(\lambda), \lambda > 0$$

$$\xi = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$P(\xi = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

Проверим условие нормировки:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

Матожидание:

$$E\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

Дисперсия:

$$\begin{aligned} D\xi &= E\xi^2 - (E\xi)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} - \lambda^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{(k-1)!} - \lambda^2 = \\ &= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} (k-1+1) \frac{e^{-\lambda} \lambda^{k-1}}{(k-1)!} - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda \end{aligned}$$

Теорема Пуассона Пусть проводятся испытания по схеме Бернулли, причем $n \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$, $np \rightarrow \lambda$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

Док-во

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{n^k} \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k} = 1 \cdot \frac{e^{-\lambda}}{1} = e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

Погрешность при замене Бернулли на Пуассона:

$$\left| C_n^k p^k q^{n-k} - \frac{e^{-np} (np)^k}{k!} \right| \leq np^2$$

Геометрическое распределение

$$\xi \sim G(p), 0 < p < 1$$

$$\xi = \{1, 2, \dots\}$$

$$P(\xi = k) = q^{k-1} p$$

Смысл: Испытание с двумя исходами. Останавливаемся, когда произошел первый успех.

Матожидание:

$$\begin{aligned}
E\xi &= \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} (q^k)' = \\
&= p \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k \right)' = p \left(\frac{q}{1-q} \right)' = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

Дисперсия:

$$D\xi = \frac{q}{p^2}$$

Пример

Студент знает 80% материала. Его спрашивают, пока не завалят.

$$\xi \sim G(0.2)$$

2024-10-11

Непрерывные случайные величины

Нельзя задать рядом распределения

Можно задать функцией распределения

Опр. Плотность $f_{\xi}(x)$ случайной величины — такая неотрицательная кусочная функция, что

$$\forall x \in R : F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(t) dt$$

Опр. Случайные величины, для которых определена плотность определения, будем называть **непрерывными**².

Канторова лестница

Пример функции, которая непрерывна, но плотности не имеет

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}F(3x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}F(3x-2), & \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

В точках дифференцируемости функции $F(x)$: $f(x) = F'(x)$

С какой вероятностью будет принято какое-то конкретное значение x :

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < \xi \leq x + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$f(x)\Delta x \underset{\Delta x \rightarrow 0}{\rightleftharpoons} P(x < \xi \leq x + \Delta x)$$

Итого, ответ 0

— Свойства плотности распределения —

- $\forall x : f(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = F(+\infty) = 1$
- $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 < \xi \leq x_2)$
- Пусть СВ ξ имеет плотность распределения $f_{\xi}(x)$, а функция $\varphi(x)$ — монотонная, дифференцируемая, детерминированная. СВ $\eta = \varphi(\xi)$. $f_{\eta}(y) = ?$:

1. Пусть $\varphi(x)$ — монотонно возрастающая

$$F_{\eta}(y) = P(\eta \leq y) = P(\varphi(\xi) \leq y) = P(\xi \leq \varphi^{-1}(y)) = F_{\xi}(\varphi^{-1}(y))$$

$$f_{\eta}(y) = (F_{\eta}(y))' = f_{\xi}(\varphi^{-1}(y))(\varphi^{-1}(y))$$

2. Пусть $\varphi(x)$ — монотонно убывающая

$$F_{\eta}(y) = P(\eta \leq y) = P(\varphi(\xi) \leq y) = P(\xi \geq \varphi^{-1}(y)) = 1 - F_{\xi}(\varphi^{-1}(y))$$

²На самом деле есть три вида величин:

1. Дискретные
2. Сингулярные
3. Абсолютно непрерывные

Но мы рассматриваем только два вида

$$f_{\eta}(y) = (F_{\eta}(y))' = -f_{\eta}(\varphi^{-1}(y)) \underbrace{(\varphi^{-1}(y))'}_{<0}$$

3. **Итого**, $f_{\eta}(y) = f_{\xi}(\varphi^{-1}(y)) |(\varphi^{-1}(y))'|$

- Если функция не монотонная, то нужно разделить её на интервалы монотонности и применить прошлый пункт

— Числовые характеристики —

· Математическое ожидание ·

Опр. Математическим ожиданием непрерывной случайной величины ξ называется число

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x) dx,$$

если интеграл сходится абсолютно:

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_{\xi}(x) dx.$$

Для бесконечностей:

- Если $f(x) > 0$ только при $x > 0$ и $\int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x) dx$ расходится, то $E\xi = +\infty$
- Если $f(x) > 0$ только при $x < 0$ и $\int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x) dx$ расходится, то $E\xi = -\infty$

Свойства математического ожидания

1. $Ec = c$
2. $E(c\xi) = cE(\xi)$
3. Если $a \leq \xi \leq b$, то $a \leq E\xi \leq b$.
4. $E(\xi_1 + \xi_2) = E(\xi_1) + E(\xi_2)$
5. Пусть $\eta = \varphi(\xi)$, где φ — детерминированная функция, тогда $E\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_{\xi}(x) dx$

— Квантиль —

Опр. Число z_{γ} , $0 < \gamma < 1$ называется **γ -квантилью** непрерывного строго монотонного распределения $F_{\xi}(x)$, если $\underbrace{F_{\xi}(z_{\gamma})}_{=P(\xi \leq z_{\gamma})} = \gamma$

Для непрерывного распределения верно:

$$\int_{-\infty}^{z_{\gamma}} f_{\xi}(x) dx = \gamma$$

Для дискретных величин в качестве квантили берут минимальное подходящее число:

$$z_{\gamma} = \min\{x : F(x) \geq \gamma\}$$

Если $\forall x : f(-x) = f(x)$, то $z_{\gamma} = -z_{1-\gamma}$.

Опр. Квантиль уровня 0.5 называется **медианой**.

Опр. Квантили уровня 0.25 и 0.75 называются **нижним и верхним квартилем**.

— Часто встречающиеся непрерывные распределения —

· Равномерное на интервале $(a; b)$ ·

$$\xi \sim R(a, b)$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (a, b) \\ \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b) \end{cases}$$

$$E\xi = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \int_{-\infty}^a 0 dt + \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a}, & x \in (a, b) \\ \int_{-\infty}^a 0 dt + \int_a^x \frac{1}{b-a} dt + \int_b^x 0 dt = 1, & x \geq b \end{cases}$$

$\underbrace{\int_{-\infty}^a 0 dt}_{=0} \quad \underbrace{\int_a^x \frac{1}{b-a} dt}_{=1} \quad \underbrace{\int_b^x 0 dt}_{=0}$

2024-10-18

Пусть есть генератор случайной величины $\xi \sim R(0; 1)$.

Хотим получить случайную величину $\eta \sim F_\eta(y)$

$$\eta = F_\eta^{-1}(\xi)$$

Обратная функция всегда существует т.к. F возрастает

Экспоненциальное (показательное) распределение

$$\xi \sim E(\lambda), \lambda > 0$$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E\xi &= \int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x} dx = \{ \text{по частям} \} = \\ &= \underbrace{-e(-\lambda x) \Big|_0^\infty}_0 + \frac{1}{\lambda} \underbrace{\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx}_{=1 \text{ (из усл. нормировки)}} = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

$$D\xi = E\xi^2 - \frac{1}{\lambda^2} = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \dots = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = -e^{-\lambda t} \Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Характеристическое свойство экспоненциального распределения

Пусть:

$$\xi \sim E(\lambda)$$

Тогда:

$$\forall t > 0 \forall \tau > 0 : P(\xi > t + \tau \mid \xi > t) = P(\xi > \tau)$$

Док-во

$$\begin{aligned} P(\xi > t + \tau \mid \xi > t) &= \frac{P(\xi > t + \tau)}{P(\xi > t)} = \frac{1 - F(t + \tau)}{1 - F(t)} = \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+\tau)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda \tau} = 1 - F(\tau) = P(\xi > \tau) \end{aligned}$$

Из непрерывных только экспоненциальное обладает этим свойством. Из дискретных — только геометрическое.

Пример применения: теория массового обслуживания (например, обслуживание клиентов, обработка интернет-запросов)

Распределение Гаусса (Нормальное распределение)

$$\xi \sim N(m, \sigma^2)$$

m — математическое ожидание

σ^2 — дисперсия

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Симметрична относительно прямой $x = m$

$$f_{\max} = f(m) = \frac{1}{\sqrt{1\pi\sigma}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

При увеличении σ график становится шире, но ниже.

Интеграл от $f(x)$ не берется, $F(x)$ записать нельзя, поэтому используют таблички.

$$\begin{aligned} E\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-m+m}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-m}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) dx}_{\text{нечетная}} + m \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx}_{=1} = m \end{aligned}$$

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-m)^2}{\sqrt{1\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) = \left\{y = \frac{x-m}{\sigma}\right\} =$$

$$= 2\sigma^2 \int_0^{+\infty} \frac{y^2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy = 2\sigma^2 \left(\underbrace{\frac{y}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)}_{=0} \Big|_0^{+\infty} - \underbrace{\int_0^{\infty} f(y) dy}_{=\frac{1}{2}} \right) = \sigma^2$$

Стандартное распределение Гаусса

Чтобы использовать таблички, используем **стандартное** гауссовское распределение.

$$\xi \sim N(0; 1)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Рис. 5. Купюра с изображением гауссовского распределения



Уравнение Лапласа

$$\Phi_0(x) = \int_0^x \frac{\exp\left(-\frac{t^2}{x}\right)}{\sqrt{2\pi}} dt$$

Очень быстро стремится к нулю (для числа пять почти равна нулю (до 7-ого знака))

$$\Phi_0(+\infty) = \frac{1}{2}$$

$$\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$$

$$-\frac{1}{2} \leq \Phi_0(x) \leq \frac{1}{2}$$

$$\Phi(x) := F(x) = \Phi_0(x) + \frac{1}{2}$$

Вероятность попадания в заданный интервал

Хотим посчитать вероятность попадания ξ в интервал (α, β) .

Общий случай:

$$P(\alpha < \xi < \beta) = \left\{ y = \frac{x-m}{\sigma}; dy = \frac{1}{\sigma} dx \right\} = \int_{\frac{\alpha-m}{\sigma}}^{\frac{\beta-m}{\sigma}} \frac{\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} = \Phi_0\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right)$$

Если интервал симметричен относительно m

$$P(|\xi - m| < \delta) = \Phi_0\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi_0\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

Правило трех сигм:

$$P(|\xi - m| < 3\sigma) = 2\Phi_0\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi_0(3) \approx 0.997$$

Т.е. почти все значения лежат в промежутке $(-3\sigma, 3\sigma)$.

2024-11-01

Неравенства Чебышева

Пусть

$$E|\xi|^r < \infty,$$

Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 : P(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{E|\xi|^r}{\varepsilon^r}.$$

Часто дает очень грубую оценку

Док-во

$$E|r| = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^2 f(x) dx \geq \int_{|x| \geq \varepsilon} |x|^2 f(x) dx \geq \varepsilon^r \int_{|x| \geq \varepsilon} f(x) dx = \varepsilon^r P(|\xi| \geq \varepsilon)$$

Частные случаи

- Неравенство Маркова: $r = 1$ и $P(\xi \geq 0) = 1$

$$P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{E(\xi)}{\varepsilon}$$

- $r = 2$:

$$P(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{E\xi^2}{\varepsilon^2}$$

- $r = 2$ и $\eta = E\xi$:

$$P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D}{\varepsilon^2}$$

Пример

ξ — расход электроэнергии $E\xi = 4000 \frac{\text{Кв}}{\text{ч}}$

Оценить, что в какой-то день $P(\xi \geq 10000)$

$$r = 1$$

$$P(\xi \geq 0) = 1$$

$$P(\xi \geq 10000) = \frac{4000}{10000} = 0.4$$

————— Случайные векторы —————

Опр. Вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, где ξ_1, \dots, ξ_n — случайные величины, называется **случайным вектором**.

Случайные вектора нужны, так как случайные величины обычно полезно рассматривать в совокупности.

Опр. **Функцией распределения случайного вектора** $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ называется функция

$$F_\xi(x_1, \dots, x_n) = P(\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_n \leq x_n) := P(\xi_1 \leq x_1 \wedge \dots \wedge \xi_n \leq x_n)$$

Пусть $n = 2 : F_\xi(xy) = P(\xi_1 \leq x, \xi_2 \leq y)$

————— Свойства функции распределения —————

На примере $n = 2$

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq F(x, y) \leq 1$
2. $F(-\infty, -\infty) = F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$
3. $F(+\infty, +\infty) = 1$
4. $F_\xi(+\infty, y) = F_{\xi_2}(y)$
 $F_\xi(x, +\infty) = F_{\xi_1}(x)$
5. $P(a_1 \leq \xi_1 \leq a_2, b_1 \leq \xi_2 \leq b_2) = F(a_2, b_2) - F(a_1, b_2) - F(a_2, b_1) + F(a_1, b_1)$
6. $F(x, y)$ монотонно не убывает по каждому аргументу

Док-во

$$F(x + \Delta x, y) = P(\xi_1 \leq x + \Delta x, \xi_2 \leq y) = \underbrace{P(\xi_1 \leq x, \xi_2 \leq y)}_{=F(x,y)} + \underbrace{P(x \leq \xi_1 \leq x + \Delta x, \xi_2 \leq y)}_{\geq 0}$$

Опр. **Частное/ маргинальное распределение** — распределение одной из компонент вектора

Опр. Компоненты ξ_1, ξ_2 случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ называются **независимыми**, если

$$F_\xi(x, y) = F_{\xi_1}(x) \cdot F_{\xi_2}(y)$$

————— Дискретные случайные векторы —————

Опр. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ называется **дискретным**, если ξ_1 и ξ_2 — дискретные случайные величины.

Табличный способ задания

	y_1	\dots	y_k
x_1	p_{11}	\dots	p_{1k}
\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
x_n	p_{n1}	\dots	p_{nk}

$$P_{ij} = P(\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j)$$

$$P_{i\cdot} := \sum_{j=1}^k p_{ij}$$

$$P(\xi_1 = x_1) = P_{1\cdot}$$

$$P(\xi_2 = y_1) = P_{\cdot 1}$$

Опр. Компоненты ξ_1, ξ_2 дискретного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ **независимы**, если $\forall i, j : P_{ij} = p_{i\cdot} p_{\cdot j}$

———— Непрерывные случайные векторы ————

——— Плотность распределения ———

Опр. Неотрицательная кусочно непрерывная функция $f_\xi(x, y)$, такая что

$$F_\xi(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(t_1, t_2) dt_2 dt_1$$

называется плотностью распределения $\xi = (\xi_1, \xi_2)$.

В точках, где $F_\xi(x, y)$ дифференцируема:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

· Свойства плотности распределения ·

- $\forall x, y : f(x, y) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = F(+\infty, +\infty) = 1$
- $\int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dx dy = F(a_2, b_2) - F(a_2, b_1) - (F(a_1, b_2) - F(a_1, b_1)) = P(a_1 \leq \xi_1 \leq a_2, b_1 \leq \xi_2 \leq b_2)$
- $P(\xi \in D) = \iint_D f(x, y) dx dy$

$$F_{\xi_1}(x) = F_\xi(x, +\infty) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1, t_2) dt_2 dt_1$$

$$f_{\xi_1}(x) = \frac{d}{dx} F_{\xi_1}(x) = \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1, t_2) dt_2 dt_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t_2) dt_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$