Теория Вероятностей

Лекции

2024–2025

2024-09-06

Введение

$$\text{Итог} = 0.1 \cdot \text{ИДЗ} + 0.15 \cdot \text{Сем} + 0.25 \cdot \text{КР} + 50 \cdot \text{Экз}$$

Нужно набрать 4 — не 3.5

По ИДЗ бывают защиты

На семинарах могут быть самостоятельные

Кибзун, Горяинова, Наумов «ТВ и МС. Базовый курс с примерами к задачам» 2013 или 2014

КР на тему «случайные события и случайные величины (одномерные)» примерно после 7-ми занятий, в начале 20-ого модуля

Экз на тему «многомерные случайные величины»

Основные понятия

Опр. Теория Вероятностей — раздел математики, изучающий математические модели массовых случайных явлений

При большом кол-ве событий величина $\frac{m}{n} \to P$ стабилизируется

$\omega_1, ..., \omega_n$ — элементарные случайные события

Опр. Пространство Элементарных Событий (Ω) — совокупность элементарных случайных событий

Опр. Случайное событие — любое $A \subset \Omega$

Опр. Достоверное событие — событие, которое происходит в опыте всегда. Совпадает с Ω

Опр. Невозможное событие — событие, которое не происходит в опыте никогда. Является $\emptyset$

Операции над множествами/ событиями:
- Произведение событий $A \cdot B$ — событие из $A \cap B$
- Сумма событий $A + B$ — событие из $A \cup B$
- Разность событий $A \setminus B$
- Противоположное событие $\overline{A} = \Omega \setminus A$

Свойства операций над множествами:
- $A + A = A$
- $A \cdot A = A$
- $A \cdot \Omega = A$
- $A + \Omega = \Omega$
- $A + B = B + A$
- $A \cdot B = B \cdot A$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- $\overline{\overline{A}} = A$
- $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

Опр. σ-алгебра событий класс подмножеств в $\mathcal{A}$ на пространстве элементарных событий Ω, если:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$
3. $\forall A_1, ..., A_n, ... \in \mathcal{A} \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A} \land \Pi_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Классическое определение вероятности

Пусть Ω содержит **конечное** число **равновозможных взаимоисключающих** исходов, тогда:

Опр. Вероятность события A (классическое определение)

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

где |A| – мощность события, количество событий, входящих в A

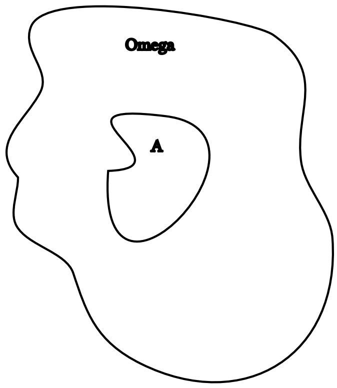
Свойства:
- $P(A) \in [0; 1]$
- $P(\Omega) = 1$
- Если $A \cdot B = \emptyset$, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$

2024-09-13

Геометрическое определение вероятности

Рассматриваем подмножества на $\mathbb{R}^n$, которые имеют конечную меру

Пример эксперимента: попадет ли случайная точка в подмножество



$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$

Опр. События несовместны: $A \cdot B = \emptyset$

Св-ва $P(A)$

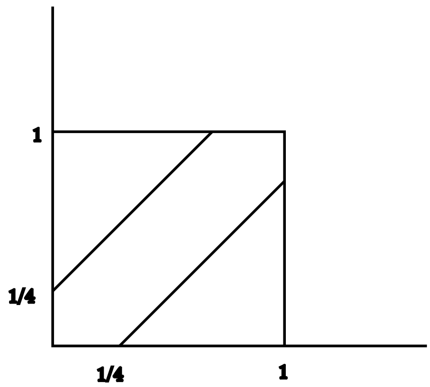
1. $P(A) \geq 0 \forall A \subset \Omega$
2. $P(\Omega) = 1$
3. если A_1 и A_2 несовместны, то $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

Задача

x — время прихода Джульеты

y — время прихода Ромео

$|x - y| < 14$



$$P\left(\overline{A}\right) = \frac{\mu\left(\overline{A}\right)}{\mu(\Omega)} = \frac{\frac{9}{16}}{1}$$

$$P(A) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

Частотное (статистическое) определение

Пусть опыт проведен N раз, и событие произошло m_A раз. Тогда **частота** события A: $\nu(A) = \frac{m_A}{N}$

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{m_A}{N}$$

Аксиоматическое определение Колмагорова

Пусть $\mathcal{A}$ — σ-алгебра событий на пространстве Ω. Числ функция $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^1$ — вероятность, если:

1. $\forall A \in \mathcal{A} P(A) \geq 0$ — аксиома неотрицательности
2. $P(\Omega) = 1$ — условие нормировки
3. если $A_1, ..., A_n, ...$ попарно несовместны, то $P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Число $P(A)$ называется вероятностью соб-я A

Тройка $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — вероятностное пространство

Свойства $P(A)$

1. $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$

   Док-во:

$$\Omega = A + \overline{A}$$

$$A \cdot \overline{A} = \emptyset$$

$$1 = P(\Omega) = P\left(A + \overline{A}\right) = P(A) + P\left(\overline{A}\right)$$

2. $P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 0$

3. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

   Док-во:

$$B = A + (B \setminus A)$$

$$P(B) = P(A + (B \setminus A)) = P(A) + \underbrace{P(B \setminus A)}_{\geq 0}$$

4. $$\forall A : 0 \leq P(A) \leq 1$$

5. Теорема сложения: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$

   Док-во:

$$A = A\Omega = AB + A\overline{B}$$

$$B = B\Omega = AB + \overline{A}B$$

$$A + B = \underbrace{AB + A\overline{B} + \overline{A}B}_{\text{попарно несовместны}}$$

$$P(A) = P(AB) + P\left(A\overline{B}\right) \Rightarrow P(A) - P(AB) = P\left(A\overline{B}\right)$$

$$P(B) = P(AB) + P\left(\overline{A}B\right) \Rightarrow P(B) - P(AB) = P\left(\overline{A}B\right)$$

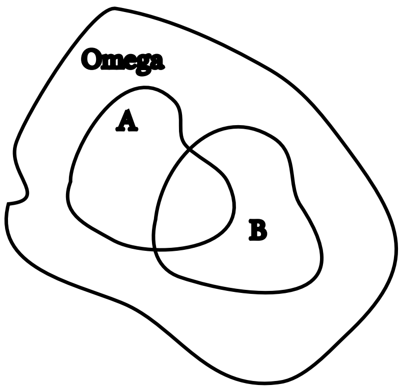
$$P(A + B) = P(AB) + P\left(A\overline{B}\right) + P\left(\overline{A}B\right) = P(AB) + P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

6. Обобщение теоремы сложения:

$$P\left(\underbrace{A_1 + A_2}_{A} + \underbrace{A_3}_{B}\right) = P(A) + P(B) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3)$$

$$P\left(\sum_i A_i\right) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P\left(A_iA_j\right) + \sum_{i<j<k} P\left(A_iA_jA_k\right) - \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \ldots A_n)$$

Условная вероятность



Переходим из Ω в B

Пусть $A, B \in \Omega$ и $P(B) \neq 0$, тогда вероятность A при условии B:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Опр. A и B **независимые**, если $P(A|B) = P(A)$

Опр. A и B **независимые**, если $P(AB) = P(A)P(B)$

Любые несовместные события зависимы