

Теория Вероятностей

Домашние задания

2024–2025

2024-09-16

ДЗ 1	3
Задача 25 (1)	3
Задача 26 (4)	3
Задача 27 (5)	3
Задача 28 (6)	4
Задача 29 (7)	4
Задача 30 (11)	4
Задача 31 (12)	4
Задача 32 (13)	5
Задача 33 (14)	5
Задача 34 (15)	5
Задача 35	6

2024-09-23

ДЗ 2	6
Задача 25 (17)	6
Задача 26 (19)	6
Задача 17 (20)	7
Задача 28 (22)	7
Задача 29 (23)	7
Задача 30 (31)	7
Задача 31 (32)	7
Задача 32 (36)	7
Задача 33 (37)	7
Задача 34 (40)	8
Задача 35 (43)	8
Задача 36 (46)	8
Задача 37 (47)	9
Задача 38 (85)	9
Задача 39	9
Задача 40	9
Задача 41	10

2024-09-30

ДЗ 3	10
Задача 18	10
Задача 24	10
Задача 25	10

Задача 26	11
Задача 60	11
Задача 51	11
Задача 52	11
Задача 53	11
Задача 54	11
Задача 62	12
Задача 61	12
Задача 67	12

2024-09-16

ДЗ 1

Задача 25 (1)

• (а)

1. При $k > 17$ все карманы пусты.

$$P = 1$$

2. При $k \leq 17$, $k - 1$ карманов пусты, всего карманов 17.

$$P = \frac{k-1}{17}$$

• (б)

$$P = \frac{2}{17} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{15}{15} \cdot \frac{14}{14} = \frac{2}{17} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{136}$$

• (в)

$$P = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$$

Задача 26 (4)

• (А)

1. Способов выбрать два туза для первой пачки: C_4^2 2. Способов выбрать остальные карты для первой пачки: C_{48}^{24} 3. Всего способов разделить на две части: C_{52}^{26}

4. Итого,

$$P = \frac{C_4^2 C_{48}^{24}}{C_{52}^{26}}$$

• (В) Все тузы либо в первой пачке, либо во второй:

$$P = \frac{C_{48}^{22} + C_{48}^{26}}{C_{52}^{26}}$$

• (С) Либо в первой один туз, а во второй — три, либо наоборот. Выберем первую:

$$P = \frac{2 \cdot C_4^1 C_{48}^{25}}{C_{54}^{26}}$$

Задача 27 (5)

• Первый человек родился в некий день из 365

• Под второго осталось $365 - 1 = 364$ • Под третьего — $365 - 2 = 363$

• ...

• Под r -того — $365 - r + 1$

$$P = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \dots \cdot \frac{365 - r + 1}{365}$$

При $r = 23 : P \approx 0.49$

——— Задача 28 (6) ———

Таблица 1. Число перестановок

Всего	6!
Буквы А	3!
Буквы Н	2!
Буквы С	1!
Различных	$\frac{6!}{3!2!1!} = 60$
Подходящих	1

$$P = \frac{1}{60}$$

——— Задача 29 (7) ———

Аналогично задаче 5.

$$P = \frac{30}{30} \cdot \frac{29}{30} \cdot \dots \cdot \frac{26}{30} = 0.7037(3)$$

——— Задача 30 (11) ———

Выбрать получивших номера: C_{10}^6

- (а) Выбрать 6 мужчин: $C_6^6 = 1$.

$$P = \frac{1}{C_{10}^6} = \frac{1}{210}$$

- (б) Выбрать 4 муж — C_6^4 , 2 жен — C_4^2 .

$$P = \frac{C_6^4 C_4^2}{C_{10}^6} = \frac{3}{7}$$

- (в) Обратно пункту а.

$$P = 1 - \frac{1}{210} = \frac{209}{210}$$

——— Задача 31 (12) ———

Не все из 12-ти комбинаций равновероятны. Так, например, комбинация 6-4-1 соответствует шести ситуациям:

1-ая кость	2-ая кость	3-ая кость
1	4	6
1	6	4
4	1	6
4	6	1
6	1	4

1-ая кость	2-ая кость	3-ая кость
6	4	1

Комбинация 4-4-3 — трем:

1-ая кость	2-ая кость	3-ая кость
3	4	4
4	3	4
4	4	3

А комбинация 4-4-4 — только одной:

1-ая кость	2-ая кость	3-ая кость
4	4	4

——— Задача 32 (13) ———

- (а) выберем в одну (первую или вторую) из подгрупп шесть лидирующих и ещё три не лидирующие:

$$P = \frac{2 \cdot C_6^6 \cdot C_{12}^3}{C_{18}^9} = \frac{2 \cdot C_{12}^3}{C_{18}^9}$$

- (б) выберем три лидирующие команды и шесть не лидирующих команд в первую группу:

$$P = \frac{C_6^3 \cdot C_{12}^6}{C_{18}^9}$$

——— Задача 33 (14) ———

шампанское	5	→	4
белое вино	3	→	2
красное вино	2	→	1
всего	10	→	7

$$P = \frac{C_5^4 \cdot C_3^2 \cdot C_2^1}{C_{10}^7}$$

——— Задача 34 (15) ———

- (а) Рассмотрим обратное событие:

Айова	2	→	0
Остальные	98	→	50
Всего	100	→	50

$$P = 1 - \frac{C_2^0 \cdot C_{98}^{50}}{C_{100}^{50}} = 1 - \frac{C_{98}^{50}}{C_{100}^{50}}$$

- (б)

Штат 1	2	→	1
Штат 2	2	→	1
...			
Штат 50	2	→	1
<hr/>			
Всего	100	→	50

$$P = \frac{(C_2^1)^{50}}{C_{100}^{50}} = \frac{2^{50}}{C_{100}^{50}}$$

——— Задача 35 ———

Рассмотрим обратное событие: все ботинки из разных пар.

$$P = 1 - \frac{20}{20} \cdot \frac{18}{19} \cdot \frac{16}{18} \cdot \frac{14}{17}$$

2024-09-23

————— ДЗ 2 —————

——— Задача 25 (17) ———

Нужно чтобы из 5-ти товаров либо 4, либо 5 были с купоном.

Если четыре:

$$P_4 = \frac{C_{10000}^4 C_{490000}^1}{C_{500000}^5}$$

Если пять:

$$P_5 = \frac{C_{10000}^5 C_{490000}^0}{C_{500000}^5} = \frac{C_{10000}^5}{C_{500000}^5}$$

Итого:

$$P = P_4 + P_5 = \frac{C_{10000}^4 C_{490000}^1 + C_{10000}^5}{C_{500000}^5}$$

FIXME: ответ не сходится

——— Задача 26 (19) ———

Найдем $P(A)$, $P(B)$, $P(AB)$ перебором вариантов.

$$P(A) = \frac{5}{6}$$

$$P(B) = \frac{1}{9}$$

$$P(AB) = \frac{1}{6}$$

Т.к. $P(AB) = \frac{1}{6} \neq \frac{5}{54} = P(A)P(B)$, то **зависимы**

——— Задача 17 (20) ———

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$P(AB) = P(A + B) - P(A) - P(B) \leq 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} < \frac{3}{8}$$

——— Задача 28 (22) ———

$$p = 0.01 \rightarrow q = 0.99$$

$$1 - q^n \geq 0.95$$

$$1 - 0.99^n \geq 0.95$$

$$0.05 \geq 0.99^n$$

$$\log(0.05) \geq n \log(0.99)$$

$$\frac{\log(0.05)}{\log(0.99)} \leq n$$

$$298.07... \leq n$$

$$n = 299$$

——— Задача 29 (23) ———

Студент должен вытянуть либо 3, либо 4, либо 5 счастливых билетов:

$$P = \frac{C_{20}^3 C_5^2 + C_{20}^4 C_5^1 + C_{20}^5}{C_{25}^5}$$

——— Задача 30 (31) ———

$$P(AB) = P(A)P(B) = P(P) \rightarrow P(A) = 1$$

$$P(A + B) = 1$$

——— Задача 31 (32) ———

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - P(AB) = \frac{7}{6} - P(AB) \leq \frac{7}{6} - 1 = \frac{1}{6}$$

Верно

——— Задача 32 (36) ———

Вероятность того, что подбросили n раз равна:

$$P_n = 0.5^{n-1} \cdot 0.5 = 0.5^n$$

То есть $n - 1$ раз выпадала решка и один раз герб.

$$\operatorname{argmin}_{1 \leq n} P_n = 1$$

Ответ. 1

——— Задача 33 (37) ———

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{35}$$

$$P(AB) = 0$$

$$P(A)P(B) = \frac{17}{280} \neq P(AB)$$

Ответ. Зависимы

——— Задача 34 (40) ———

Должны работать: первый и (второй или третий)

$$P = p_1 \cdot [1 - (1 - p_2)(1 - p_3)] = 0.8 \cdot [1 - (1 - 0.7)(1 - 0.6)] = 0.704$$

——— Задача 35 (43) ———

• (а)

$$P_{12} = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) = 1 - (1 - 0.8)(1 - 0.7) = 0.94$$

$$P_{123} = P_{12} \cdot p_3 = 0.564$$

$$P = 1 - (1 - P_{123})(1 - p_4) = 0.782$$

• (б)

$$P_{12} = 0.94$$

$$P_{34} = p_3 \cdot p_4 = 0.3$$

$$P_{345} = 1 - (1 - P_{34})(1 - p_5) = 0.58$$

$$P = P_{12} \cdot P_{345} \cdot p_6 = 0.16356$$

——— Задача 36 (46) ———

$$\begin{cases} 0.05 = P(AB) = P(B | A)P(A) \\ 0.079 = P(A\bar{B}) = P(\bar{B} | A)P(A) = (1 - P(B | A))P(A) \\ 0.089 = P(\bar{A}B) = P(B | \bar{A})P(\bar{A}) \\ 0.782 = P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{B} | \bar{A})P(\bar{A}) = (1 - P(B | \bar{A}))P(\bar{A}) \end{cases}$$

Из (1, 2):

$$\frac{P(B | A)}{1 - P(B | A)} = \frac{0.05}{0.079} = 0.6329 \rightarrow P(B | A) = 0.3876$$

$$P(\bar{B} | A) = 1 - P(B | A) = 1 - 0.3876 = 0.6124$$

Из (3, 4):

$$\frac{P(B | \bar{A})}{1 - P(B | \bar{A})} = \frac{0.089}{0.782} = 0.1138 \rightarrow P(B | \bar{A}) = 0.1022$$

$$P(\bar{B} | \bar{A}) = 1 - P(B | \bar{A}) = 1 - 0.1022 = 0.8978$$

——— Задача 37 (47) ———

Игра закончится на k -ом шаге, если $k - 1$ раз выпадет решка и один раз выпадет орел.

$$P_k = 0.5^{k-1} \cdot 0.5 = 0.5^k$$

Вероятность того, что игра закончится на четном ходу:

$$P_{\text{чет}} = P_2 + P_4 + \dots = 0.5^2 + 0.5^4 + \dots = 0.25^1 + 0.25^2 + \dots = \frac{0.25}{1 - 0.25} = \frac{1}{3}$$

Вероятность того, что игра закончится на нечетном ходу:

$$P_{\text{нечет}} = 1 - P_{\text{чет}} = \frac{2}{3}$$

——— Задача 38 (85) ———

H_1 — выбрана урна первого типа

H_2 — выбрана урна второго типа

A — вытянули белый шар

$$P(A) = P(H_1)P(A | H_1) + P(H_2)P(A | H_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = 0.4$$

——— Задача 39 ———

Найдем значение перебором:

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Любая пара или тройка событий означает «на всех выпала одна цифра»: $P(AB) = P(BC) = P(AC) = P(ABC) = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$

События **попарно независимы** т.к. $P(A)P(B) = P(A)P(C) = P(B)P(C) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{216}$

Т.к. зависимы попарно, то и **совокупно зависимы**.

——— Задача 40 ———

• (а)

A — цель поражена

$$P = P(A) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3)$$

• (б)

B — все заряды потрачены.

B происходит, если 1-ый и 2-ой промазали

$$P(B) = (1 - p_1)(1 - p_2)$$

AB происходит, если 1-ый и 2-ой промазали, а 3-ий попал:

$$P(AB) = (1 - p_1)(1 - p_2)p_3$$

$$P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = p_3$$

• (в)

$$P(B | A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{(1 - p_1)(1 - p_2)p_3}{1 - (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3)}$$

————— **Задача 41** —————

$$P = 1 - (\text{все мимо}) = 1 - (1 - 0.6)(1 - 0.7)(1 - 0.8) = 1 - 0.4 \cdot 0.3 \cdot 0.2 = 0.976$$

2024-09-30

————— **ДЗ 3** —————

————— **Задача 18** —————

Среди первых 19 человек ровно 9 подошло. 20-ый тоже подошел.

$$P = P_{19(9)} \cdot 0.2 = C_{19}^9 0.2^9 0.8^{10} \cdot 0.2 \approx 0.0010157$$

————— **Задача 24** —————

1. A — система работает

Должны работать элементы 1, 6 и любой из 2–5:

$$P_{2-5} = 1 - (1 - p_2)(1 - p_3)(1 - p_4)(1 - p_5) = 1 - \frac{1}{2^4} = \frac{15}{16}$$

$$P(A) = p_1 \cdot p_6 \cdot P_{2-5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{15}{16} = \frac{15}{32}$$

2. B — ровно два элемента из 2 – 5 отказали:

$$P(B) = P_4(2) = C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

3. AB , если и B , и 1, 6 работают:

$$P(AB) = P(B) \cdot p_1 \cdot p_2 = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$$

4.

$$P = P(B | A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{15}{32}} = \frac{2}{5} = 0.4$$

————— **Задача 25** —————

$$p = 0.05$$

$$n = 3$$

$$(n + 1)p = 0.05 \cdot 3 = 0.15$$

$$\lfloor 0.15 \rfloor = 0$$

Ответ. 0

——— Задача 26 ———

Среди первых 3-ех мальчик 1. 4-ый ребенок – мальчик.

$$P = P_3(1) \cdot p = C_3^1 \cdot p^1 \cdot q^2 \cdot p \approx 0.187$$

——— Задача 60 ———

Нет. Событие (2, 1) не попадает ни в одну «гипотезу».

——— Задача 51 ———

$$n = 8$$

$$p = \frac{1}{5}$$

• (а)

$$P = P_{n(3)} = P_8(3) = C_8^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^5 \approx 0.1468$$

• (б)

$$P = \sum_{i=0}^3 P_{n(i)} = \sum_{i=0}^3 C_8^i \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^i \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{8-i} \approx 0.9437$$

——— Задача 52 ———

$$p = 0.2$$

Среди первых 4-ех проверок, провалено 2-е. 5-ая тоже провалена.

$$P = P_4(2) \cdot p = C_4^2 \cdot 0.2^2 \cdot 0.8^2 \cdot 0.2 \approx 0.0307$$

——— Задача 53 ———

В семье 2, 3, или 4 девочки

$$P = \sum_{i=2}^4 P_4(i) = \sum_{i=2}^4 C_4^i \cdot q^i \cdot p^{4-i} \approx 0.6647$$

——— Задача 54 ———

Должны быть исправны 8 или 9 машин

$$P = \sum_{i=8}^9 P_9(i) = \sum_{i=8}^9 C_9^i \cdot 0.9^i \cdot 0.1^{9-i} \approx 0.7748$$

——— Задача 62 ———

Взяли группу из равного количества мужчин и женщин. Из группы выбрали одного человека.

H — выбрали женщину

A — выбранный человек — дальтоник

Вероятность дальтонизма у мужчин значительно выше, чем у женщин, значит:

$$P(H | A) \ll 0.5$$

Т.к. в группе мужчин и женщин одинакового, то

$$P(H) = 0.5$$

Итого:

$$P(H | A) < P(H)$$

Ответ. Может

——— Задача 61 ———

$$P(H_1) + P(H_2) + \dots + P(H_{10}) = 1$$

$$P(H_1) = P(H_2) = \dots = P(H_{10}) = \frac{1}{10}$$

$$P(H_1 + H_{10}) = P(H_1) + P(H_{10}) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

——— Задача 67 ———

Да. Можно представить каждый маршрут в дереве, как гипотезу, а каждый лист, как «финальное» событие.