Теория Вероятностей

Лекции

Автор конспектов: Чубий Савва Андреевич

Преподаватель: Горяинова Елена Рудольфовна

2024–2025

2024-09-06

Введение

$$\text{Итог} = 0.1 \cdot \text{ИДЗ} + 0.15 \cdot \text{Сем} + 0.25 \cdot \text{КР} + 50 \cdot \text{Экз}$$

Нужно набрать 4 — не 3.5

По ИДЗ бывают защиты

На семинарах могут быть самостоятельные

Кибзун, Горяинова, Наумов «ТВ и МС. Базовый курс с примерами к задачам» 2013 или 2014

КР на тему «случайные события и случайные величины (одномерные)» примерно после 7-ми занятий, в начале 20-ого модуля

Экз на тему «многомерные случайные величины»

Основные понятия

Опр. Теория Вероятностей — раздел математики, изучающий математические модели массовых случайных явлений

При большом кол-ве событий величина $\frac{m}{n} \to P$ стабилизируется

$\omega_1, \dots, \omega_n$ — элементарные случайные события

Опр. Пространство Элементарных Событий (Ω) — совокупность элементарных случайных событий

Опр. Случайное событие — любое $A \subset \Omega$

Опр. Достоверное событие — событие, которое происходит в опыте всегда. Совпадает с Ω

Опр. Невозможное событие — событие, которое не происходит в опыте никогда. Является $\emptyset$

Операции над множествами/ событиями:
- Произведение событий $A \cdot B$ — событие из $A \cap B$
- Сумма событий $A + B$ — событие из $A \cup B$
- Разность событий $A \setminus B$
- Противоположное событие $\overline{A} = \Omega \setminus A$

Свойства операций над событиями:
- $A + A = A$
- $A \cdot A = A$
- $A \cdot \Omega = A$
- $A + \Omega = \Omega$
- $A + B = B + A$
- $A \cdot B = B \cdot A$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- $\overline{\overline{A}} = A$
- $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

Опр. σ-алгебра событий класс подмножеств в $\mathcal{A}$ на пространстве элементарных событий Ω, если:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$

2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$
3. $\forall A_1, ..., A_n, ... \in \mathcal{A} \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A} \land \Pi_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Классическое определение вероятности

Опр. Пусть Ω содержит **конечное** число **равновозможных взаимоисключающих** исходов, тогда, **вероятность события A:**

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

где |A| – мощность события, количество событий, входящих в A

Свойства вероятности

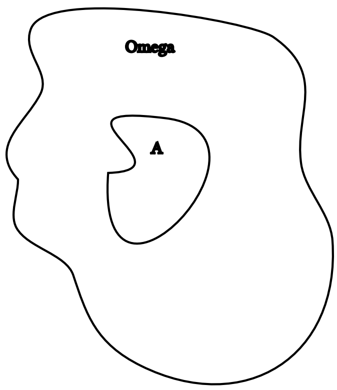
- $P(A) \in [0; 1]$
- $P(\Omega) = 1$
- Если $A \cdot B = \emptyset$, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$

2024-09-13

Геометрическое определение вероятности

Рассматриваем подмножества на $\mathbb{R}^n$, которые имеют конечную меру

Пример эксперимента: попадет ли случайная точка в подмножество



$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Опр. События **несовместны** — $A \cdot B = \emptyset$

Свойства $P(A)$

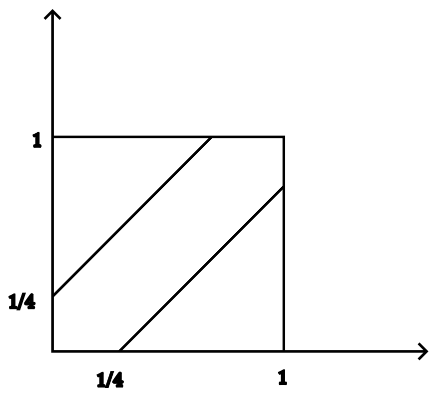
1. $P(A) \geq 0 \forall A \subset \Omega$
2. $P(\Omega) = 1$
3. если A_1 и A_2 несовместны, то $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

Задача

x — время прихода Джульеты

y — время прихода Ромео

$|x - y| < 14$



$$P\left(\overline{A}\right) = \frac{\mu\left(\overline{A}\right)}{\mu(\Omega)} = \frac{\frac{9}{16}}{1}$$

$$P(A) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

Частотное (статистическое) определение

Опр. Пусть опыт проведен N раз, и событие произошло m_A раз. Тогда **частота** события A:

$$\nu(A) = \frac{m_A}{N}$$

Опр.

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} \nu(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{m_A}{N}$$

Аксиоматическое определение Колмагорова

Пусть $\mathcal{A}$ — σ-алгебра событий на пространстве Ω. Числовая функция $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ — **вероятность**, если:

1. $\forall A \in \mathcal{A} : P(A) \geq 0$ — аксиома неотрицательности
2. $P(\Omega) = 1$ — условие нормировки
3. если $A_1, ..., A_n, ...$ попарно несовместны, то $P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Число $P(A)$ называется вероятностью события A

Тройка $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — вероятностное пространство

Свойства $P(A)$

1. $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$

Док-во

$$\Omega = A + \overline{A}$$

$$A \cdot \overline{A} = \emptyset$$

$$1 = P(\Omega) = P\left(A + \overline{A}\right) = P(A) + P\left(\overline{A}\right)$$

2. $P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 0$
3. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Док-во

$$B = A + (B \setminus A)$$

$$P(B) = P(A + (B \setminus A)) = P(A) + \underbrace{P(B \setminus A)}_{\geq 0}$$

4. $\forall A : 0 \leq P(A) \leq 1$

5. Теорема сложения: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$

Док-во

$$A = A\Omega = AB + A\overline{B}$$

$$B = B\Omega = AB + \overline{A}B$$

$$A + B = \underbrace{AB + A\overline{B} + \overline{A}B}_{\text{попарно несовместны}}$$

$$P(A) = P(AB) + P\left(A\overline{B}\right) \Rightarrow P(A) - P(AB) = P\left(A\overline{B}\right)$$

$$P(B) = P(AB) + P\left(\overline{A}B\right) \Rightarrow P(B) - P(AB) = P\left(\overline{A}B\right)$$

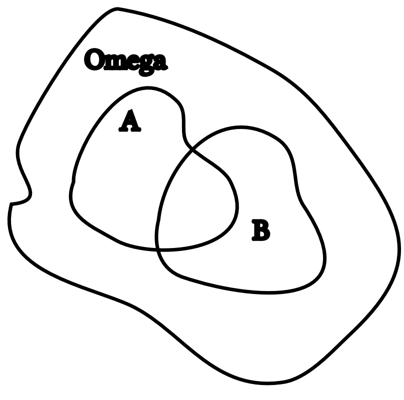
$$P(A + B) = P(AB) + P\left(A\overline{B}\right) + P\left(\overline{A}B\right) =$$
$$= P(AB) + P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

6. Обобщение теоремы сложения:

$$P\left(\underbrace{A_1 + A_2}_{A} + \underbrace{A_3}_{B}\right) = P(A) + P(B) =$$
$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3)$$

$$P\left(\sum_i A_i\right) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P\left(A_iA_j\right) + \sum_{i<j<k} P\left(A_iA_jA_k\right) - ... + (-1)^{n+1}P(A_1...A_n)$$

Условная вероятность



Переходим из Ω в B

Пусть $A, B \in \Omega$ и $P(B) \neq 0$, тогда вероятность A при условии B:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Опр. A и B **независимые**, если $P(A|B) = P(A)$

Опр. A и B **независимые**, если $P(AB) = P(A)P(B)$

Любые несовместные события зависимы

2024-09-20

Независимость в совокупности

Опр. События $A_1, ..., A_n$ **независимы в совокупности**, если

$$\forall 1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n : P(A_1 A_2 ...) = P\left(A_{i_1}\right) P\left(A_{i_2}\right) ...$$

- Независимы в совокупности $\to$ независимы попарно
- Независимы все подмножества $\to$ независимы совокупно

Пример

Дан тетраэдр. Четыре стороны покрашены в красный, синий, зеленая и все три цвета соответственно.

A_1 — выпала грань с **красным** цветом

A_2 — выпала грань с **синим** цветом

A_3 — выпала грань с **зеленым** цветом

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(A_1 A_2) = P(A_1 A_3) = P(A_2 A_3) = \frac{1}{4}$$

$$P(A_1 A_2 A_3) = \frac{1}{4} \ne P(A_1) P(A_2) P(A_3)$$

Теорема умножения вероятностей

Пусть $P(A_1 A_2 ... A_n) > 0$,

$$P\left(\overbrace{A_1 ... A_n}^{A}\right) = P(A_1) P(A_2 \mid A_1) P(A_3 \mid A_1 A_2) ... P(A_n \mid A_1 ... A_{n-1})$$

Док-во

Пусть:

$$\begin{gathered} B_{n-1} = A_1 ... A_{n-1} \\ B_{n-2} = A_1 ... A_{n-2} \\ \vdots \\ B_1 = A_1 \end{gathered}$$

Тогда

$$A = B_{n-1} A_n$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_{n-1} A_n) = \\ &= P\left(\overbrace{B_{n-1}}^{B_{n-2}A_{n-1}}\right) P(A_n \mid B_{n-1}) = \\ &= P(A_n \mid A_1 \ldots A_{n-1}) P(B_{n-2}) P(A_{n-2} \mid B_{n-2}) = \ldots \end{aligned}$$

Пример

Перестановки: МАТАН

$$P(\text{'М' 'А' 'Т' 'А' 'Н'}) =$$
$$= P(\text{'М'}) P(\text{'А'} \mid \text{'М'}) P(\text{'Т'} \mid \text{'М' 'А'}) P(\text{'А'} \mid \text{'М' 'А' 'Т'}) P(\text{'Н'} \mid \text{'М' 'А' 'Т' 'А'}) =$$
$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1$$

Биномиальная схема испытаний Бернулли

Схема испытаний, которая удовлетворяет условиям:
- Исход двоичен. Происходит A (успех) или $\overline{A}$ (неудача)
- Всех испытания независимы в совокупности
- $p = P(A)$ не изменяется от опыта к опыту

k успехов из n испытаний:

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Док-во

Если все успехи в начале:

$$P\left(\underbrace{\text{УУ...У}}_{k}\text{НН...Н}\right) = p^k q^{n-k}$$

Учтем перестановки. Выберем, где места будут успехи (C_n^k способов):

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$P(k_1 \le k \le k_2) = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i q^{n-i}$$

$$1 = \sum_{k=0}^{n} P_{n(k)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^i p^i q^{n-i} = (p+q)^n = 1^n = 1$$

Наиболее вероятное число успехов

По определению:

$$k_0 = \operatorname{argmax}_{1 \le i \le n} C_n^i p^i q^{n-i}$$

По удобному:

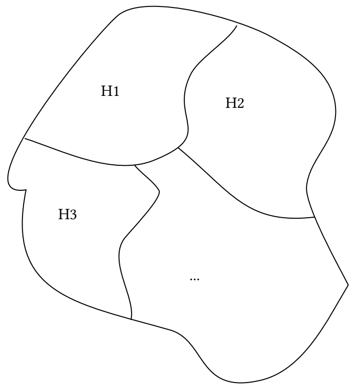
$$k_0 = \begin{cases} [(n+1)p] & \text{если} \quad (n+1)p \notin \mathbb{Z} \\ (n+1)p \quad \text{и} \quad (n+1)p - 1 & \text{если} \quad (n+1)p \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Формула полной вероятности

Опр. Пусть $H_1, ..., H_n \in \Omega$. Если
1. $\forall i \neq j : H_i \cdot H_j = \emptyset$
2. $H_1 + ... + H_n = \Omega$

то $H_1, ..., H_n$ **полная группа событий (гипотезы)**

Рис. 4. Полная группа событий (гипотезы)



Пусть $A \subset \Omega, H_1, ...H_n$ — полная группа событий

$$P(A) = P(A \cdot \Omega) = P(A \cdot (H_1 + ... + H_n)) =$$
$$= P(AH_1 + ... + AH_n) \overset{\text{т.к несовместны}}{=} P(H_1)P(A \mid H_1) + ... + P(H_n)P(A \mid H_n)$$

Пример

N — всего билетов

m — билетов студент Сидоров выучил

A — Сидорову попался счастливый билет

Иванов заходит первый. Сидоров заходит второй.

H_1 — Иванов вытащил счастливый (для Сидорова)

H_2 — Иванов вытащил **не** счастливый (для Сидорова)

$$P(H_1) = \frac{m}{N}$$

$$P(H_2) = \frac{N-m}{N}$$

$$P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) =$$
$$= \frac{m}{N} \cdot \frac{m-1}{N-1} + \frac{N-m}{N} \cdot \frac{m}{N-1}$$

Для гипотез:

- Априорные вероятности — знаем ещё до опыта:

$$P(H_1), ..., P(H_n)$$

- Апостериорные вероятности — вероятности гипотез после эксперимента (когда знаем, что некоторое событие уже произошло):

$$P(H_1 \mid A), ..., P(H_n \mid A)$$

2024-09-27

Формула Байеса

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(AH_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A \mid H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j)P(A \mid H_j)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(H_i \mid A) = 1$$

Задача

Таблица 1. Условие

Завод	Процент поставленных деталей	Вероятность исправной детали
№ 1	65%	0.9
№ 2	35%	0.8

A — деталь с дефектом оказалась в самолете

H_1 — деталь взяли и 1-ого завода

$$P(H_1) = 0.65$$

$$P(A \mid H_1) = 0.1$$

H_2 — деталь взяли и 2-ого завода

$$P(H_1) = 0.35$$

$$P(A \mid H_1) = 0.2$$

$$P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) = 0.65 \cdot 0.1 + 0.35 \cdot 0.2$$

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1)P(A \mid H_1)}{P(A)} = \frac{65}{135} = 0.48$$

$$P(H_2 \mid A) = \frac{P(H_2)P(A \mid H_1)}{P(A)} = \frac{70}{135} = 0.52$$

Случайные величины

Опр. Случайная величина (СВ) — величина, которая после эксперимента принимает заранее неизвестное значение.

Числовая функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, которая удовлетворяет условию измеримости[1]:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \{\omega : \xi(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$$

Таблица 2. Пример с кубиком

$$\begin{array}{llllll} \Omega = \{ & \omega_1, & \omega_2, & ..., & \omega_6 & \} \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ \xi = \{ & 1, & 2, & ..., & 3 & \} \end{array}$$

Опр. Функция распределения (вероятностей) случайно величины ξ называется функция

$$F_\xi(x) = P(\omega : \xi(\omega) \leq x)$$

Свойства $F(x)$:

1. $F(+\infty) = 1$

   $F(-\infty) = 0$

   $\forall x : 0 \leq F(x) \leq 1$

2. $F(x)$ не убывает: $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$
3. $F(x)$ непрерывна справа:

   $$F(x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0+} F(x_0 + \varepsilon),$$

   где x_0 — точка разрыва

Если некоторая $F(x)$ удовлетворяет условиям, то она является функцией распределения некоторой величины.

Случайные величины:
- Дискретные
- Непрерывные

Дискретные случайные величины

Опр. Случайную величину называют **дискретной**, если множество её возможных значений конечно или счетно.

Опр. Ряд распределения для дискретной СВ — табличка из ξ в P:

ξ	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Пример

[1] почти всегда исполняется

ξ	-1	0	2
P	0.2	0.3	0.5

$$x < -1 : F(x) = 0$$

$$F(-1) = 0.2$$

$$F(-0.5) = 0.2$$

$$F(0) = 0.2 + 0.3$$

$$F(2) = 1$$

$$x > 2 : F(x) = 1$$

Числовые характеристики дискретных случайных величин

Математическое ожидание

Опр. Математическим ожиданием E (среднее значение) дискретной СВ ξ называется число

$$E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

Предполагается, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i$ сходится

2024-10-04

Свойства математического ожидания

1. $Ec = c$
2. $E(c\xi) = cE(\xi)$
3. Если $a \leq \xi \leq b$, то $a \leq E\xi \leq b$.
4. $E(\xi_1 + \xi_2) = E(\xi_1) + E(\xi_2)$
5. Пусть $\eta = \varphi(\xi)$, где φ — детерминированная функция, тогда $E\eta = E\varphi(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) p_i$

Дисперсия

Опр. Дисперсией случайной величины ξ называется число

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2$$

Свойства дисперсии

1. $Dc = 0$
2. $D(c\xi) = c^2 D(\xi)$
3. $\forall \xi : D(\xi) \geq 0$
4. $D(\xi) = E(\xi^2 - 2\xi E(\xi) + (E\xi)^2) = E(\xi^2) - 2(E\xi)^2 + (E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$ — удобная формула для вычислений
5. $D(\xi_1 + \xi_2) = E(\xi_1 + \xi_2)^2 - (E(\xi_1 + \xi_2))^2 = E(\xi_1^2) + 2E(\xi_1 \xi_2) + E(\xi_2^2) - (E\xi_1)^2 - 2E\xi_1 E\xi_2 + (E\xi_2)^2 = D\xi_1 + D\xi_2 + 2\underbrace{(E(\xi_1 \xi_2) - E\xi_1 E\xi_2)}_{\text{ковариация}} = D\xi_1 + D\xi_2 + 2\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)$
6. Если ξ_1 и ξ_2 независимы, то $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0 \to D(\xi_1 + \xi_2) = D\xi_1 + D\xi_2$

<u>Другие</u>

Опр. Среднеквадратическое отклонение: $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$

Опр. Начальный момент порядка k ($k = 1, 2, ...$): $\mu_k = E\xi^k$

$$\mu_1 = E\xi$$

Опр. Центральный момент порядка k ($k = 2, 3, ...$): $\nu_k = E(\xi - E\xi)^k$

$$\nu_2 = D\xi$$

Опр. Центрированная случайная величина: $\xi^0 = \xi - E\xi$

$$E\xi^0 = 0$$

Опр. Нормированная случайная величина: $\xi^* = \frac{\xi^0}{\sigma}$

$$D\xi^* = D\frac{\xi^0}{\sigma} = \frac{1}{\sigma^2}D\xi^0 = 1$$

Часто встречающиеся дискретные распределения

<u>Распределение Бернулли</u>

$$\xi \underbrace{\sim}_{\text{имеет распределение}} \mathrm{Ber}(p), 0 < p < 1$$

ξ	0	1
P	$1-p$	p

ξ^2	0	1
P	$1-p$	p

$$E\xi = 0 + 1 \cdot p = p$$

$$D\xi = E\xi^2 - \left(E\xi^2\right) = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

<u>Биномиальное распределение</u>

$$\xi \sim \mathrm{Bi}(n, p), 0 < p < 1$$

ξ	0	...	k	...	n
P	...	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	...

Матожидание. Способ 1:

$$E\xi = \sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k} = np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}q^{n-k} =$$

$$= \{i = k-1\} = np\sum_{i=0}^{n}\frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!}p^i q^{n-1-i} = np \cdot 1 = np$$

Маожидание. Способ 2:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + ... + \xi_n$$

$$\xi_i \sim \mathrm{Ber}(p)$$

$$E\xi = E\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (E\xi_i) = np$$

Дисперсия. Способ 1:

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot C_n^k p^k q^{n-k} = \dots$$

Дисперсия. Способ 2:

$$D\xi = D\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) \underbrace{=}_{\text{т.к. независимы}} \sum_{i=1}^{n} D(\xi_i) = npq$$

Пример

Бросаем монетку 10 раз.

$$n = 10, p = 0.5 \to \begin{cases} E\xi = 10 \cdot 0.5 = 5 \\ D\xi = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 2.5 \end{cases}$$

Распределение Пуассона

$$\xi \sim \Pi(\lambda), \lambda > 0$$

$$\xi = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$P(\xi = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Проверим условие нормировки:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

Матожидание:

$$E\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

Дисперсия:

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} - \lambda^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!} - \lambda^2 =$$

$$= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} (k - 1 + 1) \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k-1}}{(k-1)!} - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Теорема Пуассона Пусть проводятся испытания по схеме Бернулли, причем $n \to \infty$, $p \to 0$, $np \to \lambda$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Док-во

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k} \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k} = 1\cdot\frac{e^{-\lambda}}{1} = e^{-\lambda}$$

Погрешность при замене Бернулли на Пуассона:

$$\left| C_n^k p^k q^{n-k} - \frac{e^{-np}(np)^k}{k!} \right| \leq np^2$$

Геометрическое распределение

$$\xi \sim G(p), 0 < p < 1$$

$$\xi = \{1, 2, \ldots\}$$

$$P(\xi = k) = q^{k-1} p$$

Смысл: Испытание с двумя исходами. Останавливаемся, когда произошел первый успех.

Матожидание:

$$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} \left(q^k\right)' =$$

$$= p\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right)' = p\left(\frac{q}{1-q}\right)' = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

Дисперсия:

$$D\xi = \frac{q}{p^2}$$

Пример

Студент знает 80% материала. Его спрашивают, пока не завалят.

$$\xi \sim G(0.2)$$

2024-10-11

Непрерывные случайные величины

Нельзя задать рядом распределения

Можно задать функцией распределения

Опр. Плотность $f_\xi(x)$ случайно величины — такая неотрицательная кусочная функция, что

$$\forall x \in R : F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t) dt$$

Опр. Случайные величины, для которых определена плотность определения, будем называть **непрерывными**[2].

Канторова лестница

Пример функции, которая непрерывна, но плотности не имеет

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}F(3x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}F(3x-2), & \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

В точках дифференцируемости функции $F(x)$: $f(x) = F'(x)$

С какой вероятностью будет принято какое-то конкретное значение x:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < \xi \leq x + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$f(x)\Delta x \underbrace{=}_{\Delta x \to 0} P(x < \xi \leq x + \Delta x)$$

Итого, ответ 0

Свойства плотности распределения

- $\forall x : f(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = F(+\infty) = 1$
- $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 < \xi \leq x_2)$
- Пусть
  - ξ имеет плотность распределения $f_\xi(x)$
  - $\eta = \varphi(\xi)$, где φ — монотонная, дифференцируемая, детерминированная функция

  Тогда,

$$f_\eta(y) = f_\xi(\varphi^{-1}(y))\left|(\varphi^{-1}(y))'\right|$$

Док-во

1. Пусть $\varphi(x)$ — монотонно возрастающая

$$F_\eta(y) = P(\eta \leq y) = P(\varphi(\xi) \leq y) = P(\xi \leq \varphi^{-1}(y)) = F_\xi(\varphi^{-1}(y))$$

$$f_\eta(y) = (F_\eta(y))' = f_\xi(\varphi^{-1}(y))(\varphi^{-1}(y))'$$

2. Пусть $\varphi(x)$ — монотонно убывающая

[2] На самом деле есть три вида величин:
1. Дискретные
2. Сингулярные
3. Абсолютно неприрывные

Но мы рассматриваем только два вида

$$F_\eta(y) = P(\eta \le y) = P(\varphi(\xi) \le y) = P(\xi \ge \varphi^{-1}(y)) = 1 - F_\xi(\varphi^{-1}(y))$$

$$f_\eta(y) = \big(F_\eta(y)\big)' = -f_\xi(\varphi^{-1}(y))\underbrace{\big(\varphi^{-1}(y)\big)'}_{<0}$$

- Если функция не монотонная, то нужно разделить её на интервалы монотонности и применить прошлый пункт

Числовые характеристики

Математическое ожидание

Опр. Математическим ожиданием непрерывной случайной величины ξ называется число

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx,$$

если интеграл сходится абсолютно:

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\xi(x) dx.$$

Для бесконечностей:
- Если $f(x) > 0$ только при $x > 0$ и $\int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx$ расходится, то $E\xi = +\infty$
- Если $f(x) > 0$ только при $x < 0$ и $\int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx$ расходится, то $E\xi = -\infty$

Свойства математического ожидания
1. $Ec = c$
2. $E(c\xi) = cE(\xi)$
3. Если $a \le \xi \le b$, то $a \le E\xi \le b$.
4. $E(\xi_1 + \xi_2) = E(\xi_1) + E(\xi_2)$
5. Пусть $\eta = \varphi(\xi)$, где φ – детерминированная функция, тогда $E\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_\xi(x) dx$

Квантиль

Опр. Число $z_\gamma, 0 < \gamma < 1$ называется **γ-квантилью** непрерывного строго монотонного распределения $F_\xi(x)$, если $\underbrace{F_\xi(z_\gamma)}_{=P(\xi \le z_\gamma)} = \gamma$

Для непрерывного распределения верно:

$$\int_{-\infty}^{z_\gamma} f_\xi(x) dx = \gamma$$

Для дискретных величин в качестве квантили берут минимальное подходящее число:

$$z_\gamma = \min\{x : F(x) \ge \gamma\}$$

Если $\forall x : f(-x) = f(x)$, то $z_\gamma = -z_{1-\gamma}$.

Опр. Квантиль уровня 0.5 называется **медианой**.

Опр. Квантили уровня 0.25 и 0.75 называются **нижним и верхним квартилью**.

Часто встречающиеся непрерывные распределения

Равномерное на интервале $(a;b)$

$$\xi \sim R(a,b)$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (a,b) \\ \frac{1}{b-a}, & x \in (a,b) \end{cases}$$

$$E\xi = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)d = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \int_{-\infty}^a 0dt + \int_a^x \frac{1}{b-a}dt = \frac{x-a}{b-a}, & x \in (a,b) \\ \underbrace{\int_{-\infty}^a 0dt}_{=0} + \underbrace{\int_a^x \frac{1}{b-a}dt}_{=1} + \underbrace{\int_b^x 0dt}_{=0} = 1, & x \ge b \end{cases}$$

2024-10-18

Пусть есть генератор случайно величины $\xi \sim R(0;1)$.

Хотим получить случайную величину $\eta \sim F_\eta(y)$

$$\eta = F_\eta^{-1}(\xi)$$

Обратная функция всегда существует т.к. F возрастает

Экспоненциальное (показательное) распределение

$$\xi \sim E(\lambda), \lambda > 0$$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$E\xi = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx = \{\text{по частям}\} =$$

$$= \underbrace{-e(-\lambda x) \mid_0^\infty}_{0} + \frac{1}{\lambda} \underbrace{\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx}_{=1 \text{ (из усл. нормировки)}} = \frac{1}{\lambda}$$

$$D\xi = E\xi^2 - \frac{1}{\lambda^2} = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \dots = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dt = -e^{-\lambda t} \mid_0^x = 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \end{cases}$$

Характеристическое свойство экспоненциального распределения

Пусть:

$$\xi \sim E(\lambda)$$

Тогда:

$$\forall t > 0 \forall \tau > 0 : P(\xi > t + \tau \mid \xi > t) = P(\xi > \tau)$$

Док-во

$$P(\xi > t + \tau \mid \xi > t) = \frac{P(\xi > t + \tau)}{P(\xi > t)} = \frac{1 - F(t + \tau)}{1 - F(t)} =$$
$$= \frac{e^{-\lambda(t+\tau)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda\tau} = 1 - F(\tau) = P(\xi > \tau)$$

Из непрерывных только экспоненциальное обладает этим свойством. Из дискретных — только геометрическое.

Пример применения: теория массового обслуживания (например, обслуживание клиентов, обработка интернет-запросов)

Распределение Гаусса (Нормальное распределение)

$$\xi \sim N(m, \sigma^2)$$

m — математическое ожидание

σ^2 — дисперсия

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Симметрична относительно прямой $x = m$

$$f_{\max} = f(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

При увеличении σ график становится шире, но ниже.

Интеграл от $f(x)$ не берется, $F(x)$ записать нельзя, поэтому используют таблички.

$$E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x - m + m}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{x-m}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)}_{\text{нечетная}} dx + m \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx}_{=1} = m$$

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-m)^2}{\sqrt{1\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) = \left\{y = \frac{x-m}{\sigma}\right\} =$$

$$= 2\sigma^2 \int_0^{+\infty} \frac{y^2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy = 2\sigma^2 \left(\underbrace{\frac{y}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \Big|_0^{+\infty}}_{=0} - \underbrace{\int_0^{\infty} f(y) dy}_{=\frac{1}{2}} \right) = \sigma^2$$

Стандартное распределение Гаусса

Чтобы использовать таблички, используем **стандартное** гауссовское распределение.

$$\xi \sim N(0;1)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Рис. 5. Купюра с изображением гауссовского распределения

Уравнение Лапласса

$$\Phi_0(x) = \int_0^x \frac{\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} dt$$

Очень быстро стремится к нулю (для числа пять почти равна нулю (до 7-ого знака))

$$\Phi_0(+\infty) = \frac{1}{2}$$

$$\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$$

$$-\frac{1}{2} \le \Phi_0(x) \le \frac{1}{2}$$

$$\Phi(x) \coloneqq F(x) = \Phi_0(x) + \frac{1}{2}$$

Вероятность попадания в заданный интервал

Хотим посчитать вероятность попадания ξ в интервал (α, β).

Общий случай:

$$P(\alpha < \xi < \beta) = \left\{y = \frac{x-m}{\sigma}; dy = \frac{1}{\sigma}dx\right\} = \int_{\frac{\alpha-m}{\sigma}}^{\frac{\beta-m}{\sigma}} \frac{\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} = \Phi_0\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right)$$

Если интервал симметричен относительно m

$$P(|\xi - m| < \delta) = \Phi_0\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi_0\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

Правило трех сигм:

$$P(|\xi - m| < 3\sigma) = 2\Phi_0\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi_0(3) \approx 0.997$$

Т.е. почти все значение лежат в промежутке $(-3\sigma, 3\sigma)$.

2024-11-01

Неравенства Чебышева

Пусть

$$E|\xi|^r < \infty,$$

Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 : P(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{E|\xi|^r}{\varepsilon^r}.$$

Часто дает очень грубую оценку

Док-во

$$E|r| = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^2 f(x)dx \geq \int_{|x|\geq\varepsilon} |x|^2 f(x)dx \geq \varepsilon^r \int_{|x|\geq\varepsilon} f(x)dx = \varepsilon^r P(|\xi| \geq \varepsilon)$$

Частные случаи

- Неравенство Маркова: $r = 1$ и $P(\xi \geq 0) = 1$

$$P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{E(\xi)}{\varepsilon}$$

- $r = 2$:

$$P(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{E\xi^2}{\varepsilon^2}$$

- $r = 2$ и $\eta = \varepsilon - E\varepsilon$:

$$P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D}{\varepsilon^2}$$

Пример

ξ – расход электроэнергии $E\xi = 4000\frac{\text{Кв}}{\text{ч}}$

Оценить, что в какой-то день $P(\xi \geq 10000)$

$$r = 1$$

$$P(\xi \geq 0) = 1$$

$P(\xi \geq 10000) = \frac{4000}{10000} = 0.4$

Случайные векторы

Опр. Вектор $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$, где $\xi_1, ..., \xi_n$ – случайные величины, называется **случайным вектором**.

Случайные вектора нужны, так как случайные величины обычно полезно рассматривать в совокупности.

Опр. Функцией распределения случайного вектора $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ называется функция

$$F_\xi(x_1, ..., x_n) \coloneqq P(\xi_1 < x_1 \wedge ... \wedge \xi_n \leq x_n)$$

Пусть $n = 2 : F_\xi(xy) = P(\xi_1 \leq x, \xi_2 \leq y)$

Свойства функции распределения

На примере $n = 2$

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq F(x, y) \leq 1$
2. $F(-\infty, -\infty) = F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$
3. $F(+\infty, +\infty) = 1$
4. $F_\xi(+\infty, y) = F_{\xi_2}(y)$
   $F_\xi(x, +\infty) = F_{\xi_1}(x)$
5. $P(a_1 \leq \xi_1 \leq a_2, b_1 \leq \xi_2 \leq b_2) = F(a_2, b_2) - F(a_1, b_2) - F(a_2, b_1) + F(a_1, b_1)$
6. $F(x, y)$ монотонно не убывает по каждому аргументу

Док-во

$$F(x + \Delta x, y) = P(\xi_1 \leq x + \Delta x, \xi_2 \leq y) = \underbrace{P(\xi_1 \leq x, \xi_2 \leq y)}_{=F(x,y)} + \underbrace{P(x \leq \xi_1 \leq x + \Delta x, \xi_2 \leq y)}_{\geq 0}$$

Опр. Частное/ маргинальное распределение — распределение одной из компонент вектора

Опр. Компоненты ξ_1, ξ_2 случайного вектора $\xi = (\xi_1, x_2)$ называются **независимыми**, если $F_\xi(x, y) = F_{\xi_1}(x) \cdot F_{\xi_2}(y)$

Дискретные случайные векторы

Опр. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ называется **дискретным**, если ξ_1 и ξ_2 – дискретные случайные величины.

Табличный способ задания

	y_1	...	y_k
x_1	p_{11}	...	p_{1k}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_n	p_{m1}	...	p_{mk}

$$P_{ij} = P\big(\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j\big)$$

$$P_{i\cdot} := \sum_{j=1}^{k} p_{ij}$$

$$P(\xi_1 = x_1) = p_{1\cdot}$$

$$P(\xi_2 = y_1) = p_{\cdot 1}$$

Опр. Компоненты ξ_1, ξ_2 дискретного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ **независимы**, если $\forall i, j : P_{ij} = p_{i\cdot} p_{\cdot j}$

Непрерывные случайные векторы

Плотность распределения

Опр. Неотрицательная кусочно непрерывная функция $f_\xi(x, y)$, такая что

$$F_\xi(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(t_1, t_2) dt_2 dt_1$$

называется **плотностью распределения** $\xi = (\xi_1, \xi_2)$.

В точках, где $F_\xi(x, y)$ дифференцируема:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Свойства плотности распределения

- $\forall x, y : f(x, y) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = F(+\infty, +\infty) = 1$
- $\int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dx dy = F(a_2, b_2) - F(a_2, b_1) - (F(a_1, b_2) - F(a_1, b_1)) = P(a_1 \leq \xi_1 \leq a_2, b_1 \leq \xi_2 \leq b_2)$
- $P(\xi \in D) = \iint_D f(x, y) dx dy$
- $$F_{\xi_1}(x) = F_\xi(x, +\infty) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1, t_2) dt_2 dt_1$$

$$f_{\xi_1}(x) = \frac{d}{dx} F_{\xi_1}(x) = \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1, t_2) dt_2 dt_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t_2) dt_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

2024-11-08

Пусть $\xi = (\xi_, \xi_2)$ — непрерывный случайный вектор. Тогда

ξ_1 и ξ_2 независимы $\Leftrightarrow f_\xi(x, y) = f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y)$

Док-во

- $(\rightarrow)$

$$f_\xi(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F_{\xi_1}(x) F_{\xi_2}(y)}{\partial x \partial y} = \frac{d F_{\xi_1}(x)}{dx} \frac{d F_{\xi_2}(y)}{dy} = f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y)$$

- $(\leftarrow)$

$$F_\xi(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_\xi(t, s) ds dt = \int_{-\infty}^{x} \int_{\infty}^{y} f_{\xi_1}(t) f_{\xi_2}(s) ds dt = F_{\xi_1}(x) F_{\xi_2}(y)$$

Опр. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ имеет равномерное распределение в области $D \in \mathbb{R}^n$, если

$$f_\xi(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} c, & \text{if } \ (x_1, ..., x_n) \in D \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

При $n = 2 : c = \frac{1}{S_D}$

Пример 1

Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ распределен равномерно в прямоугольнике с углами в $(0,0), (1,1)$. Хотим проверить [не]зависимость компонент.

$$f_\xi(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{if } \ x \in (0,1) \wedge y \in (0,1) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x,y)dy = \begin{cases} \int_0^1 1dy = 1, & \text{if } \ x \in (0,1) \\ 0, & \text{if } \ x \notin (0,1) \end{cases}$$

$$f_{\xi_2}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x,y)dx = \begin{cases} \int_0^1 1dx = 1, & \text{if } \ y \in (0,1) \\ 0, & \text{if } \ y \notin (0,1) \end{cases}$$

Т.к. $f_\xi(x,y) = f_{\xi_1}(x) \cdot f_{\xi_2}(y)$, то компоненты независимы

Пример 2

Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ распределен равномерно в круге с центром $(0,0)$ и радиусом r.

$$f_\xi(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi r^2}, & \text{if } \ x^2 + y^2 \le R^2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{1}{\pi r^2} dy = \begin{cases} \frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi r^2}, & \text{if } \ |x| \le r \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f_{\xi_2}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \frac{1}{\pi r^2} dx = \begin{cases} \frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi r^2}, & \text{if } \ |y| \le r \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Т.к. $f_\xi(x,y) \ne f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y)$, то ξ_1 и ξ_2 — зависимы

Математическое ожидание

Опр. Математическим ожиданием вектора $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ называется вектор

$$E\xi = (E\xi_1, ..., E\xi_n).$$

<u>Свойства математического ожидания</u>

- $E(\xi_1 + \xi_2) = E\xi_1 + E\xi_2$

Док-во

Для дискретного случая (для непрерывного аналогично):

$$E\left(\underbrace{\xi_1+\xi_2}_{\eta}\right)=\sum_i\sum_j(x_i+y_j)p_{ij}=\sum_i\sum_j x_ip_{ij}+\sum_i\sum_j y_jp_{ij}=$$
$$=\sum_i x_ip_{i\cdot}+\sum_j y_jp_{\cdot j}=E\xi_1+E\xi_2$$

- Если ξ_1 и ξ_2 независимы, то $E(\xi_1\xi_2)=E\xi_1\cdot E\xi_2$

Док-во

Для непрерывного случая (для дискретного аналогично):

$$E\xi_1\xi_2=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy\underbrace{=}_{\text{независимы}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf_{\xi_1}(x)f_{\xi_2}(y)dxdy=$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{\xi_1}(x)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}yf_{\xi_2}(y)=E\xi_1E\xi_2$$

Ковариация

Опр. Ковариация[3] ξ_1 и ξ_2 ($\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2)$ или $k_{\xi_1\xi_2}$):

$$k_{\xi_1\xi_2}=E(\xi_1-E\xi_1)(\xi_2-E\xi_2)=E\xi_1^0\xi_2^0$$

Опр. Коэффициентом корреляции ξ_1 и ξ_2 называется

$$\rho_{\xi_1\xi_2}=\frac{k_{\xi_1\xi_2}}{\sqrt{D\xi_1D\xi_2}}=k_{\xi_1^*\xi_2^*}$$

Опр. Величины ξ_1 и ξ_2 называются **некоррелированными**, если $\rho_{\xi_1\xi_2}=0$

Опр. Величины ξ_1 и ξ_2 называются **положительно коррелированными**, если $\rho_{\xi_1\xi_2}>0$

Опр. Величины ξ_1 и ξ_2 называются **отрицательно коррелированными**, если $\rho_{\xi_1\xi_2}<0$

Свойства ковариации

- $\operatorname{cov}(\xi,\xi)=D\xi$
- $D(\xi+\eta)=D\xi+D\eta+2\operatorname{cov}(\xi,\eta)$
- $\operatorname{cov}(\xi,\eta)=\operatorname{cov}(\eta,\xi)$
- $\operatorname{cov}(\xi,\eta)=E(\xi-E\xi)(\eta-E\eta)=...=E\xi\eta-E\xi E\eta$
- $\operatorname{cov}(a\xi+b,c\eta+d)=ac\operatorname{cov}(\xi,\eta)$
- $\left|\rho_{\xi\eta}\right|=\frac{|\operatorname{cov}(\eta,\xi)|}{\sigma_\xi\sigma_\eta}\le 1$ – коэффициент корреляции

  $|\operatorname{cov}(\eta,\xi)|\le\sigma_\xi\sigma_\eta$

Док-во

$$0\le D(\xi^*+\eta^*)=D\xi^*+D\eta^*+2\operatorname{cov}(\xi^*,\eta^*)=1+1+2\rho_{\xi\eta}$$
$$\Rightarrow\rho_{\xi\eta}\ge-1$$

[3] от «совместная изменяемость»

$$0 \le D(\xi^* - \eta^*) = D\xi^* + D\eta^* - 2\ \mathrm{cov}(\xi^*, \eta^*) = 1 + 1 - 2\rho_{\xi\eta}$$
$$\Rightarrow \rho_{\xi\eta} \le 1$$
$$-1 \le \rho_{\xi\eta} \le 1$$

- Если ξ и η независимы и с конечными дисперсиями, то $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = 0$

Док-во

$$\mathrm{cov}(\xi, \eta) = E\xi^0\eta^0 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x - m_\xi)(y - m_\eta)f(x, y)dxdy =$$
$$\underbrace{=}_{\text{независимы}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x - m_\xi)f_\xi(x)(y - m_\eta)f_\eta(y)dxdy =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}(x - m_\xi)f_\xi dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty}(x)(y - m_\eta)f_\eta(y)dy = 0 \cdot 0 = 0$$

2024-11-15

Свойства коэффициента корреляции

- $\rho_{\xi\eta} \le 1$
- $\rho_{\xi\xi} = 1$
- Если $\eta = a\xi + b, a \ne 0$, то

$$\rho_{\xi\eta} = \begin{cases} 1, & \text{if } \ a > 0 \\ -1, & \text{if } \ a < 0 \end{cases}$$

Док-во

$$\rho_{\xi\eta} = \frac{\mathrm{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}} = \frac{E_{\xi\eta} - E_\xi E_\eta}{\sqrt{D\xi D\eta}} = \frac{E\xi(a\xi + b) - E\xi E(a\xi + b)}{\sqrt{D\xi D(a\xi + b)}} =$$
$$= \frac{aE\xi^2 + \cancel{bE\xi} - a(E\xi)^2 - \cancel{bE\xi}}{\sqrt{a^2(D\xi)^2}} = \frac{a(E\xi^2 - (E\xi)^2)}{|a|D\xi} = \frac{aD\xi}{|a|D\xi}$$

- Пусть $|\rho_{\xi\eta}| = 1 \Rightarrow \eta = a\xi + b$

Док-во

- Пусть $\rho_{\xi\eta} = 1$:

$$D(\xi^* - \eta^*) = D\xi^* + D\eta^* + 2\ \mathrm{cov}(\xi^*, -\eta^*) =$$
$$= D\xi^* + D\eta^* - 2\ \mathrm{cov}(\xi^*, \eta^*) = 2 - 2\rho_{\xi\eta} = 2(1 - \rho_{\xi\eta}) = 0$$
$$D(\xi^* - \eta^*) = 0$$
$$\xi^* - \eta^* = c$$

$$\frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi} - \frac{\eta - m_\eta}{\sigma_\eta} = c$$

- Пусть $\rho_{\xi\eta} = -1$:

$$D(\xi^* + \eta^*) = D\xi^* + D\eta^* + 2\ \mathrm{cov}(\xi^*, \eta^*) = 2\left(1 + \rho_{\xi\eta}\right) = 0$$

Пример: зависимы, но не коррелированы

$$x \sim R(-a, a)$$

$$n = \xi^2$$

$$\mathrm{cov}\ (\xi, \eta) = E\xi\eta - \underbrace{E\xi}_{=0} E\eta = E\xi^3 = \int_{-a}^{a} \xi^3 \cdot \frac{1}{2a} dx = 0$$

Так получается, потому что ковариация «отлавливает» только линейные зависимости

Ковариационная матрица

Опр. Ковариационной матрицей вектора $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ называется матрица $K_\xi = \left(k_{ij}\right)$, где $k_{ij} = \mathrm{cov}\left(\xi_i, \xi_j\right)$

Свойства ковариационной матрицы

- $k_{ij} = k_{ji}$
- $k_{ii} = D\xi_i$
- K_ξ — неотрицательно определенная:

$$\forall \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R} : \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j k_{ij} \geq 0$$

Док-во

$$0 \leq E\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i^0\right)^2 = E\left(\sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j \xi_i^0 \xi_j^0\right) = \lambda_i \lambda_j \sum_i \sum_j E\left(\xi_i^0 \xi_j^0\right) = \lambda_i \lambda_j \sum_i \sum_j k_{ij}$$

Корреляционной матрица

Опр. Корреляционной матрицей вектора $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ называется матрица $R_\xi = \left(\rho_{ij}\right)$, где $\rho_{ij} = \rho\left(\xi_i \xi_j\right)$

Свойства корреляционной матрицы

- $\rho_{ij} = \rho_{ji}$
- $\rho_{ii} = 1$
- ρ_ξ — неотрицательно определенная

По ковариационной матрице можно построить корреляционную, а наоборот – не можем

Формула свертки

Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимы, $\xi_1 \sim f_{\xi_1}(x), \xi_2 \sim f_{\xi_2}(y), \eta = \xi_1 + \xi_2$. $f_\eta(z) =?$

$$F_{\eta(z)} = P(\eta \leq z) = P(\xi_1 + \xi_2 \leq z) = \iint_{x+y\leq z} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y) dy dx == \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z-x} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y) dy dx$$

$$f_\eta(z) = \frac{d}{dz} F_\eta(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(z-x) dx$$

Пример

$$\xi_1 \sim N(0,1); \xi_2 \sim N(0,1)$$

ξ_1, ξ_2 — независимы

$$\eta = \xi_1 + \xi_2$$

$$f_\eta(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2} - \left(\frac{z^2}{2} - \frac{2xz}{2} + \frac{x^2}{2}\right)} dx =$$
$$= \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}}} e^{-(x-\frac{z}{2})^2} = \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}$$

Снова получили гауссово распределение

Пусть $\xi_1, ..., \xi_n$ — независимые случайные величины такие, что $\xi_i \sim N(m_i, \sigma_i^2)$, то

$$(\eta = \xi_1 + ... + \xi_n) \sim N(m_\eta, D_\eta),$$

где

$$m_\eta = \sum m_i$$

$$D_\eta = \sum D_i$$

2024-11-22

Условные распределения

Для дискретных величин

	y_1	...	y_k
x_1	p_{11}	...	p_{1k}
$\vdots$			
x_m	p_{m1}	...	p_{mk}

$$P(\xi = x_i \mid \eta = y_j) = \frac{P(\xi = x_i \land \eta = y_j)}{P(\eta = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$$

Опр. Набор вероятностей $\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}, \forall i = 1...m$ называется **условным распределением вероятности** ξ при условии $\{\eta = y_j\}$.

Опр. **Условной функцией распределения** ξ при условии $\{\eta = y_j\}$ называется

$$F_\xi(x \mid y_j) = P(\xi \le x \mid \eta = y_j)$$

Опр. Условным математическим ожиданием ξ при условии $\{\eta = y_j\}$ называется

$$E(\xi \mid \eta = y_j) = \sum_{i=1}^{m} x_i P(\xi = x_i \mid \eta = y_j) = \sum_{i=1}^{m} x_i \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$$

- Если η уже зафиксирована, то $E(\xi \mid \eta = y_j)$ – число.
- Если η ещё неизвестна, то $E(\xi \mid \eta)$ – функция от аргумента η.

$E(\xi \mid \eta)$	$E(\xi \mid \eta = y_1)$	...	$E(\xi \mid \eta = y_k)$
P	$p_{\cdot 1}$	...	$p_{\cdot k}$

Формула полного матожидания

$$E(E(\xi \mid \eta)) = E(\xi)$$

Док-во

$$E(E(\xi \mid \eta)) = \sum_{j=1}^{k} E(\xi \mid \eta = y_j) p_{\cdot j} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{m} x_i \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{k} p_{ij} = \sum_{i=1}^{m} x_i p_{i\cdot} = E\xi$$

Для непрерывных величин

Опр. Пусть $f(x,y)$ и $f_\eta(y)$ – непрерывны в точке y и $f_\eta(y) > 0$. Тогда **условной функцией распределения** ξ при условии $\{\eta = y\}$ называется функция

$$F_\xi(x \mid y) = \lim_{\Delta y \to 0+} P(\xi \le x \mid y < \eta \le y + \Delta y)$$

Корректность определения:

$$F_\xi(x \mid y) = \lim_{\Delta y \to 0+} P(\xi \le x \mid y < \eta \le y + \Delta y) = \lim_{\Delta y \to 0+} \frac{P(\xi \le x \wedge y < \eta \le y + \Delta y)}{P(y < \eta \le y + \Delta y)} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0+} \frac{\int_{-\infty}^{x} \int_{y}^{y+\Delta y} f(t,s)\,ds\,dt}{\int_{y}^{y+\Delta y} f_\eta(s)\,ds} = \left\{\begin{matrix} \text{По теореме о среднем значении} \\ s', s'' \in (y; y+\Delta y) \\ \Delta y \to 0 \Rightarrow s', s'' \to 0 \end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0+} \frac{\Delta y \int_{-\infty}^{x} f(t,s')\,dt}{\Delta y f_\eta(s'')} = \frac{\int_{-\infty}^{x} f(t,y)\,dt}{f_\eta(y)}$$

Опр. Пусть $f(x,y), f_\eta(y)$ непрерывны в точке y и $f_\eta(y) > 0$. Функция $f_\eta(x \mid y)$ называется **условной плотностью** ξ при условии $\{\eta = y\}$, если

$$F_\xi(x \mid y) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t \mid y)\,dt$$

В точках дифференцируемости функции $F_\xi(x \mid y)$:

$$F(x \mid y) = \left(F_\xi(x \mid y)\right)'_x$$

Утв: ξ и η независимы, если $f(x \mid y) = f_\xi(x)$

Док-во

$$f_\xi(x \mid y) = \left(\frac{\int_{-\infty}^{x} f(t,y)dt}{f_\eta(y)}\right)'_x = \frac{f(x,y)}{f_\eta(y)}$$

Пример

Пусть (ξ, η) распределена равномерно в круге радиуса R с центром в $(0,0)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2}, & \text{if } \ x^2+y^2 \leq R^2 \\ 0, & \text{if } \ x^2+y^2 > R^2 \end{cases}$$

$$f_\eta(y) = \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \frac{1}{\pi R^2} = \begin{cases} \frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2}, & \text{if } \ |y| < R \\ 0, & \text{if } \ |y| > R \end{cases}$$

$$\forall y \ (|y| < R) : f_\xi(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_\eta(y)} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{R^2-y^2}}, & \text{if } \ -\sqrt{R^2-y^2} < x < \sqrt{R^2-y^2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Получаем равномерное распределение

$$E(\xi \mid \eta = y)$$

Свойства условного матожидания

- $E(c \mid \eta) = c$
- $E(c\xi \mid \eta) = cE(\xi \mid \eta)$
- $E(\varphi(\xi)\psi(\eta) \mid \eta) = \psi(\eta)E(\varphi(\xi) \mid \eta)$
- Пусть ξ и η независимы, тогда $E(\xi \mid \eta) = E(\xi)$
- Формула полного матожидания: $E(E(\xi \mid \eta)) = E(\xi)$

Док-во

$$E(E(\xi \mid \eta)) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x \mid y)dx\right) f_\eta(y)dy =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{f(x,y)}{\cancel{f_\eta(y)}}\cancel{f_\eta(y)}dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)dx =$$
$$= E\xi$$

2024-11-29

Свойства условной дисперсии

- $D(\xi \mid \eta = y_j) = \sum_{i=1}^{m}\left(x_i - E(\xi \mid \eta = y_j)\right)^2 \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$
- $D(\xi \mid \eta = y) = \int_{-\infty}^{\infty}(x - E(\xi \mid \eta = y))^2 f_\xi(x \mid y)dx$

Гауссовский вектор

Условие нормировки для распределения Гаусса

Пусть ξ_1 и ξ_2 независимы и $\xi_1, \xi_2 \sim N(0,1)$.

$$\xi = (\xi_1, \xi_2)$$

$$f_{\xi_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

$f_\xi(x,y) = f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_2}(y)dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) = \begin{Bmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ |J| = r \end{Bmatrix} =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} \frac{r}{2\pi} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) dr d\varphi = \int_0^{+\infty} r \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) dr =$$

$$= \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) d\frac{r^2}{2} = -\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_0^{+\infty} = 1$$

Опр. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)^T$ имеет нормальное (гауссовское) распределение $\xi \sim N(m, K)$, если плотность распределения имеет вид:

- в векторном виде:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \det K}} \exp\Big(-\frac{1}{2}((x-m)^T K^{-1}(x-m))\Big)$$

- в виде функции от n переменных:

$$f(x_1, ..., x_n) = \frac{\sqrt{\det C}}{\sqrt{(2\pi)^n}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sum_r \sum_j c_{ij}(x_i - m_i)(x_j - m_j)\right)\right)$$

Свойства гауссовского распределения

- $E\xi = m; K_\xi = k$
- Любой подвектор гауссового вектора — тоже гауссовый вектор
- Пусть $\eta = \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i$ и не все $\alpha_i = 0$, тогда η тоже имеет гауссового распределение.
- Пусть $\eta = A\xi + B$, где A — матрица размера $K \times n$, а B — вектор размера K.

$$\eta \sim N\big(Am_\xi + B, AK_\xi A^T\big)$$

- Если компоненты гауссового вектора попарно некоррелированны, то они независимы[4]

Док-во

$$\forall i \neq j : \rho_{\xi_i \xi_j} = 0 \Rightarrow \operatorname{cov}\big(\xi_i, \xi_j\big) = 0$$

[4]Это работает именно для гауссового распределение

$$K = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

$$C = K^-1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_n^2} \end{pmatrix}$$

$$f(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \sigma_1 ... \sigma_n}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}(x_i - m_i)^2\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x_1 - m_1)^2}{\sigma_1^2}\right)}_{f_{\xi_1}(x_1)} \cdot ... \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x_n - m_n)^2}{\sigma_n^2}\right)}_{f_{\xi_n}(x_n)}$$

- **Теорема о нормальной корреляции**

  Пусть

$$z = (z_1, ..., z_n)^T \sim N(m_z, K_z)$$

$$\eta = (z_1, ..., z_l)^T$$

$$\xi = (z_{l+1}, ..., z_m)^T$$

$$m_z^T = \left(m_\eta^T, m_\xi^T\right)$$

$$K_z = \begin{pmatrix} K_{\eta\eta} & K_{\eta\xi} \\ K_{\xi\eta} & K_{\xi\xi} \end{pmatrix}$$

  Тогда

$$(\eta \mid \xi = x) \sim N\left(m_{\eta \mid \xi = x}, K_{\eta \mid \xi = x}\right),$$

  где

$$m_{\eta \mid \xi = x} = m_\eta + K_{\eta\xi} K_{\eta\eta}^{-1} \left(x - m_\xi\right)$$

$$K_{\eta \mid \xi = x} = K_{\eta\eta} - K_{\eta\xi} K_{\xi\xi}^{-1} K_{\eta\xi}^T$$

  При $n = 2$:

$$m_{\eta \mid \xi = x} = m_\eta + \frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{D\xi} \left(x - m_\xi\right)$$

$$D(\eta \mid \xi = x) = D\eta - \frac{(\operatorname{cov}(\xi, \eta))^2}{D\xi}$$

Пример

На бирже акциями торгуют A и B.

$$(\xi_A, \xi_B) \sim N(m, K)$$

$$m = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 4 & 3.6 \\ 3.6 & 9 \end{pmatrix}$$

- $P(\xi_A > \xi_B) - ?$
- $\xi_B = 14; E(\xi_A \mid \xi_B = 14) - ?; D(\xi_A \mid \xi_B = 14) - ?$

Решение:

$$P(\xi_A > \xi_B) = P(\xi_A - \xi_B > 0)$$

$$\xi_A - \xi_B \sim N(-2, 2.4^2)$$

Дальше по функции Лапласа

$$E(\xi_A \mid \xi_B = 14) = 10 + \frac{3.6}{9}(14 - 12) = 10.8$$

$$D(\xi_A \mid \xi_B) = 4 - \frac{3.6^2}{9} = 2.56$$

Виды сходимости случайных последовательностей

Опр. Последовательность случайных величин $\xi_1, ..., \xi_n, ...$ определенных на одном вероятностном пространстве Ω, называют **случайной последовательностью**: $\{\xi_n\}_{n=1,...}$.

Опр. Случайная последовательность ξ_n **сходится по вероятности** к ξ: $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, если

$$\forall \varepsilon > 0 : P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \underset{n \to \infty}{\to} 0$$

2024-11-06

Тут пропущена лекция

2024-12-13

Неравенство Берри-Эссена

Пусть $\xi_1, ..., \xi_n$ — независимые, одинокого распределены и $D\xi_i < \infty$,

$$\eta_n = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - E \sum_{i=1}^n \xi_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \xi_i}}$$

То

$$\sup_x \left| F_{\eta_n}(x) - \Phi(x) \right| \leq \frac{C \cdot E|\xi_1 - m_1|^3}{\sqrt{n}\sigma^3}$$

Где C — некоторая константа, которая постоянно уточняется. Сейчас известно, что $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \leq C < 0.478$.

Закон больших чисел (ЗБЧ)

Говорят, что случайная последовательность $\xi_1, ..., \xi_n$ удовлетворяет ЗБЧ, если

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\xi_i \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$$

Теорема Чебышева

Пусть $\xi_1, ..., \xi_n$ некоррелированы и $D\xi_1, ..., D\xi_n$ ограничены в совокупности (т.е. $\exists C > 0 : \forall k : D\xi_k \leq C$), тогда ЗБЧ.

Док-во

$$\forall \varepsilon > 0 : P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\xi_i\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)}{\varepsilon^2} \leq ...$$

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right) \underbrace{=}_{\text{т.к. некоррелированы}} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D\xi_i \leq \frac{C\cdot n}{n^2} = \frac{C}{n}$$

$$... \leq \frac{C}{\varepsilon^2\cdot n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Теорема

Пусть $\xi_1, ..., \xi_n$ одинокого распределены и $D\xi_i < \infty$, тогда ЗБЧ.

Док-во

$$\forall \varepsilon > 0 : P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\xi_i\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)}{\varepsilon^2} = \frac{n\cdot D}{n^2\cdot\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Теорема

Пусть ξ_k — количество «успехов» в k испытаниях Бернулли с вероятностью p.

$p^* = \frac{\xi_n}{n}$ — СВ, частота успеха

$$\xi_n = \eta_1 + ... + \eta_n, \text{где } \eta_i \sim \mathrm{Bi}(p)$$

$$p^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\eta_i$$

$$Ep^* = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\eta_i\right) = p$$

$$D\eta_i = pq < \infty$$

По ЗБЧ:

$$p^* = \frac{1}{n}\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} p$$

Усиленный закон больших чисел

Говорят, что случайная последовательность $\xi_1, ..., \xi_n$ удовлетворяет УЗБЧ, если

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\xi_i \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п. н.}} 0$$

Если УЗБЧ, то и ЗБЧ.

Теорема Колмогорова

Пусть $\xi_1, ..., \xi_n, ...$ независимы, одинокого распределены и $m < \infty$, тогда УЗБЧ: т.е $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п. н.}} m$

Метод Монте-Карло

Пример. Хотим посчитать $\int_a^b g(x)dx$

$$\xi_1, ..., \xi_n \sim R(a, b)$$

$\xi_1, ..., \xi_n$ независимы

По УЗБЧ: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i) \xrightarrow[n\to 0]{\text{п. н.}} Eg(\xi_i) = \int_a^b g(x)\underbrace{f_\xi(x)}_{\frac{1}{b-a}}dx$

$$I^* = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\xi) \xrightarrow{\text{п. н.}} \int_a^b g(x)dx$$

Имеет смысл применять в многомерных случаях.

I — истинное значение интеграла

$$P(|I^* - I| < \delta) = p$$

По ЦПТ:

$$\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i) - I}{\sqrt{D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\right)}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} U,$$

где $U \sim N(0, 1)$

$$\sqrt{D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\right)} = \frac{n}{n^2}D(g(\xi_1)) = \frac{Dg(\xi_1)}{n}$$

$$P(|I^* - I| < \delta) = 2\Phi_0\left(\frac{\delta}{\sqrt{D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\right)}}\right) = p = 2\Phi_0\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sqrt{Dg(\xi_1)}}\right)$$

Для применения этой формулы полезно ограничить дисперсию, а не считать её напрямую.