Теория Вероятностей. Домашние задания

Савва Чубий, БПИ233

2024–2025

2024-09-16

ДЗ 1

Задача 25 (1)

- (а)
  1. При $k > 17$ все карманы пусты.
  $$P = 1$$
  2. При $k \leq 17$, $k - 1$ карманов пусты, всего карманов 17.
  $$P = \frac{k-1}{17}$$
- (б)
$$P = \frac{2}{17} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{15}{15} \cdot \frac{14}{14} = \frac{2}{17} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{136}$$
- (в)
$$P = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$$

Задача 26 (4)

- (A)
  1. Способов выбрать два туза для первой пачки: C_4^2
  2. Способов выбрать остальные карты для первой пачки: C_{48}^{24}
  3. Всего способов разделить на две части: C_{52}^{26}
  4. Итого,
  $$P = \frac{C_4^2 C_{48}^{24}}{C_{52}^{26}}$$
- (B) Все тузы либо в первой пачке, либо во второй:
$$P = \frac{C_{48}^{22} + C_{48}^{26}}{C_{52}^{26}}$$
- (C) Либо в первой один туз, а во второй — три, либо наоборот. Выберем первую:
$$P = \frac{2 \cdot C_4^1 C_{48}^{25}}{C_{54}^{26}}$$

Задача 27 (5)

- Первый человек родился в некий день из 365
- Под второго осталось $365 - 1 = 364$
- Под третьего — $365 - 2 = 363$
- …
- Под r-того — $365 - r + 1$

$$P = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{365 - r + 1}{365}$$

При $r = 23 : P \approx 0.49$

Задача 28 (6)

Таблица 1. Число перестановок

Всего	6!
Буквы А	3!
Буквы Н	2!
Буквы С	1!
Различных	$\frac{6!}{3!2!1!} = 60$
Подходящих	1

$$P = \frac{1}{60}$$

Задача 29 (7)

Аналогично задаче 5.

$$P = \frac{30}{30} \cdot \frac{29}{30} \cdot \ldots \cdot \frac{26}{30} = 0.7037(3)$$

Задача 30 (11)

Выбрать получивших номера: C_{10}^6

- (а) Выбрать 6 мужчин: $C_6^6 = 1$.

$$P = \frac{1}{C_{10}^6} = \frac{1}{210}$$

- (б) Выбрать 4 муж $- C_6^4$, 2 жен $- C_4^2$.

$$P = \frac{C_6^4 C_4^2}{C_{10}^6} = \frac{3}{7}$$

- (в) Обратно пункту а.

$$P = 1 - \frac{1}{210} = \frac{209}{210}$$

Задача 31 (12)

Не все из 12-ти комбинаций равновероятны. Так, например, комбинация `6-4-1` соответствует шести ситуациям:

1-ая кость	**2-ая кость**	**3-ая кость**
1	4	6
1	6	4
4	1	6
4	6	1
6	1	4

1-ая кость	2-ая кость	3-ая кость
6	4	1

Комбинация 4-4-3 — трем:

1-ая кость	2-ая кость	3-ая кость
3	4	4
4	3	4
4	4	3

А комбинация 4-4-4 — только одной:

1-ая кость	2-ая кость	3-ая кость
4	4	4

Задача 32 (13)

- (а) выберем в одну (первую или вторую) из подгрупп шесть лидирующих и ещё три не лидирующие:

$$P = \frac{2 \cdot C_6^6 \cdot C_{12}^3}{C_{18}^9} = \frac{2 \cdot C_{12}^3}{C_{18}^9}$$

- (б) выберем три лидирующие команды и шесть не лидирующих команд в первую группу:

$$P = \frac{C_6^3 \cdot C_{12}^6}{C_{18}^9}$$

Задача 33 (14)

шампанское	5	$\to$	4
белое вино	3	$\to$	2
красное вино	2	$\to$	1
всего	10	$\to$	7

$$P = \frac{C_5^4 \cdot C_3^2 \cdot C_2^1}{C_{10}^7}$$

Задача 34 (15)

- (а) Рассмотрим обратное событие:

Айова	2	$\to$	0
Остальные	98	$\to$	50
Всего	100	$\to$	50

$$P = 1 - \frac{C_2^0 \cdot C_{98}^{50}}{C_{100}^{50}} = 1 - \frac{C_{98}^{50}}{C_{100}^{50}}$$

- (б)

Штат 1	2	$\to$	1
Штат 2	2	$\to$	1
...			
Штат 50	2	$\to$	1
Всего	100	$\to$	50

$$P = \frac{\left(C_2^1\right)^{50}}{C_{100}^{50}} = \frac{2^{50}}{C_{100}^{50}}$$

Задача 35

Рассмотрим обратное событие: все ботинки из разных пар.

$$P = 1 - \frac{20}{20} \cdot \frac{18}{19} \cdot \frac{16}{18} \cdot \frac{14}{17}$$

2024-09-23

ДЗ 2

Задача 25 (17)

Нужно чтобы из 5-ти товаров либо 4, либо 5 были с купоном.

Если четыре:

$$P_4 = \frac{C_{10000}^4 C_{490000}^1}{C_{500000}^5}$$

Если пять:

$$P_5 = \frac{C_{10000}^5 C_{490000}^0}{C_{500000}^5} = \frac{C_{10000}^5}{C_{500000}^5}$$

Итого:

$$P = P_4 + P_5 = \frac{C_{10000}^4 C_{490000}^1 + C_{10000}^5}{C_{500000}^5}$$

FIXME: ответ не сходится

Задача 26 (19)

Найдем $P(A), P(B), P(AB)$ перебором вариантов.

$$P(A) = \frac{5}{6}$$

$$P(B) = \frac{1}{9}$$

$$P(AB) = \frac{1}{6}$$

Т.к. $P(AB) = \frac{1}{6} \neq \frac{5}{54} = P(A)P(B)$, то **зависимы**

—— Задача 17 (20) ——

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$P(AB) = P(A+B) - P(A) - P(B) \leq 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} < \frac{3}{8}$$

—— Задача 28 (22) ——

$$p = 0.01 \to q = 0.99$$

$$1 - q^n \geq 0.95$$

$$1 - 0.99^n \geq 0.95$$

$$0.05 \geq 0.99^n$$

$$\log(0.05) \geq n \log(0.99)$$

$$\frac{\log(0.05)}{\log(0.99)} \leq n$$

$$298.07... \leq n$$

$$n = 299$$

—— Задача 29 (23) ——

Студент должен вытянуть либо 3, либо 4, либо 5 счастливых билетов:

$$P = \frac{C_{20}^3 C_5^2 + C_{20}^4 C_5^1 + C_{20}^5}{C_{25}^5}$$

—— Задача 30 (31) ——

$$P(AB) = P(A)P(B) = P(P) \to P(A) = 1$$

$$P(A+B) = 1$$

—— Задача 31 (32) ——

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - P(AB) = \frac{7}{6} - P(AB) \leq \frac{7}{6} - 1 = \frac{1}{6}$$

Верно

—— Задача 32 (36) ——

Вероятность того, что подбросили n раз равна:

$$P_n = 0.5^{n-1} \cdot 0.5 = 0.5^n$$

То есть $n-1$ раз выпадала решка и один раз герб.

$$\text{argmin}_{1 \leq n} P_n = 1$$

Ответ. 1

—— Задача 33 (37) ——

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{35}$$

$$P(AB) = 0$$

$$P(A)P(B) = \frac{17}{280} \neq P(AB)$$

Ответ. Зависимы

—— Задача 34 (40) ——

Должны работать: первый и (второй или третий)

$$P = p_1 \cdot [1 - (1 - p_2)(1 - p_3)] = 0.8 \cdot [1 - (1 - 0.7)(1 - 0.6)] = 0.704$$

—— Задача 35 (43) ——

- (a)

$$P_{12} = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) = 1 - (1 - 0.8)(1 - 0.7) = 0.94$$

$$P_{123} = P_{12} \cdot p_3 = 0.564$$

$$P = 1 - (1 - P_{123})(1 - p_4) = 0.782$$

- (б)

$$P_{12} = 0.94$$

$$P_{34} = p_3 \cdot p_4 = 0.3$$

$$P_{345} = 1 - (1 - P_{34})(1 - p_5) = 0.58$$

$$P = P_{12} \cdot P_{345} \cdot p_6 = 0.16356$$

—— Задача 36 (46) ——

$$\begin{cases} 0.05 = P(AB) = P(B \mid A)P(A) \\ 0.079 = P\left(A\overline{B}\right) = P\left(\overline{B} \mid A\right)P(A) = (1 - P(B \mid A))P(A) \\ 0.089 = P\left(\overline{A}B\right) = P\left(B \mid \overline{A}\right)P\left(\overline{A}\right) \\ 0.782 = P\left(\overline{A}\overline{B}\right) = P\left(\overline{B} \mid \overline{A}\right)P\left(\overline{A}\right) = \left(1 - P\left(B \mid \overline{A}\right)\right)P\left(\overline{A}\right) \end{cases}$$

Из (1, 2):

$$\frac{P(B \mid A)}{1 - P(B \mid A)} = \frac{0.05}{0.079} = 0.6329 \to P(B \mid A) = 0.3876$$

$$P\left(\overline{B} \mid A\right) = 1 - P(B \mid A) = 1 - 0.3876 = 0.6124$$

Из (3, 4):

$$\frac{P\left(B \mid \overline{A}\right)}{1 - P\left(B \mid \overline{A}\right)} = \frac{0.089}{0.782} = 0.1138 \to P\left(B \mid \overline{A}\right) = 0.1022$$

$$P\left(\overline{B} \mid \overline{A}\right) = 1 - P\left(B \mid \overline{A}\right) = 1 - 0.1022 = 0.8978$$

—— Задача 37 (47) ——

Игра закончится на k-ом шаге, если $k - 1$ раз выпадет решка и один раз выпадет орел.

$$P_k = 0.5^{k-1} \cdot 0.5 = 0.5^k$$

Вероятность того, что игра закончится на четном ходу:

$$P_{\text{чет}} = P_2 + P_4 + ... = 0.5^2 + 0.5^4 + ... = 0.25^1 + 0.25^2 + ... = \frac{0.25}{1 - 0.25} = \frac{1}{3}$$

Вероятность того, что игра закончится на нечетном ходу:

$$P_{\text{нечет}} = 1 - P_{\text{чет}} = \frac{2}{3}$$

—— Задача 38 (85) ——

H_1 — выбрана урна первого типа

H_2 — выбрана урна второго типа

A — вытянули белый шар

$$P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = 0.4$$

—— Задача 39 ——

Найдем значение перебором:

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Любая пара или тройка событий означает «на всех выпала одна цифра»: $P(AB) = P(BC) = P(AC) = P(ABC) = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$

События **попарно зависимы** т.к. $P(A)P(B) = P(A)P(C) = P(B)P(C) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{216}$

Т.к. зависимы попарно, то и **совокупно зависимы**.

—— Задача 40 ——

- (а)

  A — цель поражена

  $$P = P(A) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3)$$

- (б)

  B — все заряды потрачены.

  B происходит, если 1-ый и 2-ой промазали

$$P(B) = (1 - p_1)(1 - p_2)$$

AB происходит, если 1-ый и 2-ой промазали, а 3-ий попал:

$$P(AB) = (1 - p_1)(1 - p_2)p_3$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = p_3$$

- (в)

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{(1 - p_1)(1 - p_2)p_3}{1 - (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3)}$$

Задача 41

$$P = 1 - (\text{все мимо}) = 1 - (1 - 0.6)(1 - 0.7)(1 - 0.8) = 1 - 0.4 \cdot 0.3 \cdot 0.2 = 0.976$$

2024-09-30

ДЗ 3

Задача 18

Среди первых 19 человек ровно 9 подошло. 20-ый тоже подошел.

$$P = P_{19(9)} \cdot 0.2 = C_{19}^{9} 0.2^9 0.8^{10} \cdot 0.2 \approx 0.0010157$$

Задача 24

1. A — система работает

   Должны работать элементы 1, 6 и любой из 2–5:

   $$P_{2-5} = 1 - (1 - p_2)(1 - p_3)(1 - p_4)(1 - p_5) = 1 - \frac{1}{2^4} = \frac{15}{16}$$

   $$P(A) = p_1 \cdot p_6 \cdot P_{2-5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{15}{16} = \frac{15}{32}$$

2. B — ровно два элемента из 2 – 5 отказали:

   $$P(B) = P_4(2) = C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

3. AB, если и B, и 1, 6 работают:

   $$P(AB) = P(B) \cdot p_1 \cdot p_2 = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$$

4. $$P = P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{15}{32}} = \frac{2}{5} = 0.4$$

Задача 25

$$p = 0.05$$

$$n = 3$$

$$(n+1)p = 0.05 \cdot 3 = 0.15$$

$$\lfloor 0.15 \rfloor = 0$$

Ответ. 0

——— Задача 26 ———

Среди первых 3-ех мальчик 1. 4-ый ребенок – мальчик.

$$P = P_3(1) \cdot p = C_3^1 \cdot p^1 \cdot q^2 \cdot p \approx 0.187$$

——— Задача 60 ———

Нет. Событие (2, 1) не попадает ни в одну «гипотезу».

——— Задача 51 ———

$$n = 8$$

$$p = \frac{1}{5}$$

- (а)

$$P = P_n(3) = P_8(3) = C_8^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^5 \approx 0.1468$$

- (б)

$$P = \sum_{i=0}^{3} P_n(i) = \sum_{i=0}^{3} C_8^i \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^i \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{8-i} \approx 0.9437$$

——— Задача 52 ———

$$p = 0.2$$

Среди первых 4-ех проверок, провалено 2-е. 5-ая тоже провалена.

$$P = P_4(2) \cdot p = C_4^2 \cdot 0.2^2 \cdot 0.8^2 \cdot 0.2 \approx 0.0307$$

——— Задача 53 ———

В семье 2, 3, или 4 девочки

$$P = \sum_{i=2}^{4} P_4(i) = \sum_{i=2}^{4} C_4^i \cdot q^i \cdot p^{4-i} \approx 0.6647$$

——— Задача 54 ———

Должны быть исправны 8 или 9 машин

$$P = \sum_{i=8}^{9} P_9(i) = \sum_{i=8}^{9} C_9^i \cdot 0.9^i \cdot 0.1^{9-i} \approx 0.7748$$

—— Задача 62 ——

Взяли группу из равного количества мужчин и женщин. Из группы выбрали одного человека.

H — выбрали женщину

A — выбранный человек — дальтоник

Вероятность дальтонизма у мужчин значительно выше, чем у женщин, значит:

$$P(H \mid A) \ll 0.5$$

Т.к. в группе мужчин и женщин одинокого, то

$$P(H) = 0.5$$

Итого:

$$P(H \mid A) < P(H)$$

Ответ. Может

—— Задача 61 ——

$$P(H_1) + P(H_2) + \ldots + P(H_{10}) = 1$$

$$P(H_1) = P(H_2) = \ldots = P(H_{10}) = \frac{1}{10}$$

$$P(H_1 + H_{10}) = P(H_1) + P(H_{10}) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

—— Задача 67 ——

Да. Можно представить каждый маршрут в дереве, как гипотезу, а каждый лист, как «финальное» событие.