

# Теория Вероятностей

## Лекции

Савва Чубий, БПИ233

2024–2025

2024-09-06

Введение .....	3
Основные понятия .....	3
Классическое определение вероятности .....	4

2024-09-13

Геометрическое определение вероятности .....	4
Св-ва $P(A)$ .....	4
Задача .....	4
Частотное (статистическое) определение .....	5
Аксиоматическое определение Колмагорова .....	5
Свойства $P(A)$ .....	5
Условная вероятность .....	6

2024-09-20

Независимость в совокупности .....	7
Теорема умножения вероятностей .....	7
Биномиальная схема испытаний Бернулли .....	8
Наиболее вероятное число успехов .....	8
Формула полной вероятности .....	9

2024-09-27

Формула Байеса .....	10
Задача .....	10
Случайные величины .....	10
Дискретные случайные величины .....	11
Числовые характеристики дискретных случайных величин .....	12
Математическое ожидание .....	12

2024-10-04

Свойства математического ожидания .....	12
Дисперсия .....	12
Свойства дисперсии .....	12
Другие .....	12
Часто встречающиеся дискретные распределения .....	13

Распределение Бернулли .....	13
Биномиальное распределение .....	13
Распределение Пуассона .....	14
Геометрическое распределение .....	15

2024-10-11

---

Непрерывные случайные величины .....	15
Свойства плотности распределения .....	16
Числовые характеристики .....	17
Математическое ожидание .....	17
Свойства математического ожидания .....	17
Квантиль .....	17
Часто встречающиеся непрерывные распределения .....	17
Равномерное на интервале $(a; b)$ .....	17

2024-09-06

---

## Введение

$$\text{Итог} = 0.1 \cdot \text{ИДЗ} + 0.15 \cdot \text{Сем} + 0.25 \cdot \text{КР} + 50 \cdot \text{Экз}$$

Нужно набрать 4 — не 3.5

По ИДЗ бывают защиты

На семинарах могут быть самостоятельные

Кибзун, Горяинова, Наумов «ТВ и МС. Базовый курс с примерами к задачам» 2013 или 2014

КР на тему «случайные события и случайные величины (одномерные)» примерно после 7-ми занятий, в начале 20-ого модуля

Экз на тему «многомерные случайные величины»

## Основные понятия

**Опр. Теория Вероятностей** — раздел математики, изучающий математические модели массовых случайных явлений

При большом кол-ве событий величина  $\frac{m}{n} \rightarrow P$  стабилизируется

$\omega_1, \dots, \omega_n$  — элементарные случайные события

**Опр. Пространство Элементарных Событий ( $\Omega$ )** — совокупность элементарных случайных событий

**Опр. Случайное событие** — любое  $A \subset \Omega$

**Опр. Достоверное событие** — событие, которое происходит в опыте всегда. Совпадает с  $\Omega$

**Опр. Невозможное событие** — событие, которое не происходит в опыте никогда. Является  $\emptyset$

Операции над множествами/ событиями:

- Произведение событий  $A \cdot B$  — событие из  $A \cap B$
- Сумма событий  $A + B$  — событие из  $A \cup B$
- Разность событий  $A \setminus B$
- Противоположное событие  $\bar{A} = \Omega \setminus A$

Свойства операций над множествами:

- $A + A = A$
- $A \cdot A = A$
- $A \cdot \Omega = A$
- $A + \Omega = \Omega$
- $A + B = B + A$
- $A \cdot B = B \cdot A$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $\overline{A \cdot (B \cdot C)} = (\bar{A} \cdot \bar{B}) \cdot \bar{C}$
- $\overline{\bar{A}} = A$
- $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$

**Опр.  $\sigma$ -алгебра событий** класс подмножеств в  $\mathcal{A}$  на пространстве элементарных событий  $\Omega$ , если:

1.  $\Omega \in \mathcal{A}$

$$2. A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$$

$$3. \forall A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A} \wedge \prod_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$

## ———— Классическое определение вероятности ————

Пусть  $\Omega$  содержит **конечное** число **равновозможных взаимоисключающих** исходов, тогда:

**Опр. Вероятность события  $A$  (классическое определение)**

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

где  $|A|$  – мощность события, количество событий, входящих в  $A$

Свойства:

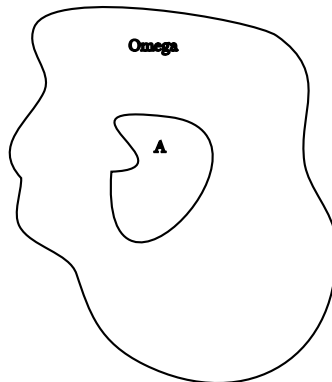
- $P(A) \in [0; 1]$
- $P(\Omega) = 1$
- Если  $A \cdot B = \emptyset$ , то  $P(A + B) = P(A) + P(B)$

2024-09-13

## ———— Геометрическое определение вероятности ————

Рассматриваем подмножества на  $\mathbb{R}^n$ , которые имеют конечную меру

Пример эксперимента: попадет ли случайная точка в подмножество



$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

**Опр. События несовместны** –  $A \cdot B = \emptyset$

———— Св-ва  $P(A)$  ————

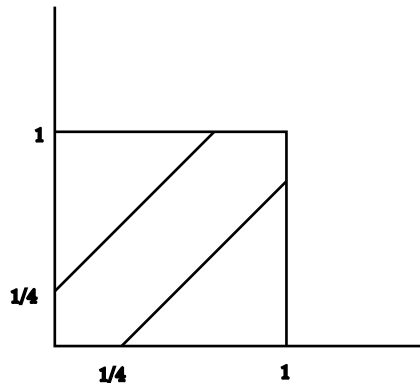
1.  $P(A) \geq 0 \forall A \subset \Omega$
2.  $P(\Omega) = 1$
3. если  $A_1$  и  $A_2$  несовместны, то  $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

———— Задача ————

$x$  – время прихода Джульеты

$y$  – время прихода Ромео

$$|x - y| < 14$$



$$P(\overline{A}) = \frac{\mu(\overline{A})}{\mu(\Omega)} = \frac{9}{16}$$

$$P(A) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

### Частотное (статистическое) определение

Пусть опыт проведен  $N$  раз, и событие произошло  $m_A$  раз. Тогда **частота** события  $A$ :  $\nu(A) = \frac{m_A}{N}$

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{m_A}{N}$$

### Аксиоматическое определение Колмагорова

Пусть  $\mathcal{A}$  —  $\sigma$ -алгебра событий на пространстве  $\Omega$ . Числ функция  $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^1$  — вероятность, если:

1.  $\forall A \in \mathcal{A} P(A) \geq 0$  — аксиома неотрицательности
2.  $P(\Omega) = 1$  — условие нормировки
3. если  $A_1, \dots, A_n, \dots$  попарно несовместны, то  $P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Число  $P(A)$  называется вероятностью соб-я  $A$

Тройка  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  — вероятностное пространство

#### Свойства $P(A)$

$$1. P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Док-во

$$\Omega = A + \overline{A}$$

$$A \cdot \overline{A} = \emptyset$$

$$1 = P(\Omega) = P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$$

$$2. P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 0$$

$$3. A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

Док-во

$$B = A + (B \setminus A)$$

$$P(B) = P(A + (B \setminus A)) = P(A) + \underbrace{P(B \setminus A)}_{\geq 0}$$

4.  $\forall A : 0 \leq P(A) \leq 1$

5. Теорема сложения:  $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$

**Док-во**

$$A = A\Omega = AB + A\bar{B}$$

$$B = B\Omega = AB + \bar{A}B$$

$$A + B = \underbrace{AB + A\bar{B} + \bar{A}B}_{\text{попарно несовместны}}$$

$$P(A) = P(AB) + P(A\bar{B}) \Rightarrow P(A) - P(AB) = P(A\bar{B})$$

$$P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B) \Rightarrow P(B) - P(AB) = P(\bar{A}B)$$

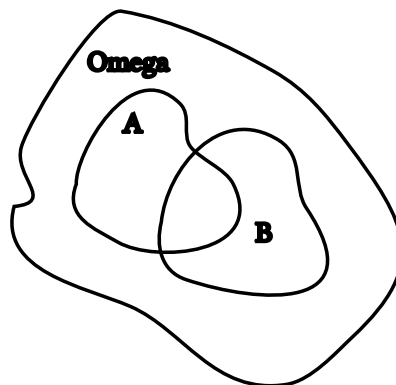
$$P(A + B) = P(AB) + P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) = P(AB) + P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

6. Обобщение теоремы сложения:

$$P\left(\underbrace{A_1 + A_2}_A + \underbrace{A_3}_B\right) = P(A) + P(B) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3)$$

$$P\left(\sum_i A_i\right) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_iA_j) + \sum_{i < j < k} P(A_iA_jA_k) - \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \dots A_n)$$

## Условная вероятность



Переходим из  $\Omega$  в  $B$

Пусть  $A, B \in \Omega$  и  $P(B) \neq 0$ , тогда вероятность  $A$  при условии  $B$ :

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

**Опр.**  $A$  и  $B$  **независимые**, если  $P(A|B) = P(A)$

**Опр.**  $A$  и  $B$  **независимые**, если  $P(AB) = P(A)P(B)$

Любые несовместные события зависимы

2024-09-20

## Независимость в совокупности

**Опр.** События  $A_1, \dots, A_n$  **независимы в совокупности**, если

$$\forall 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n : P(A_{i_1} A_{i_2} \dots) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \dots$$

- Независимы в совокупности  $\rightarrow$  независимы попарно
- Независимы все подмножества  $\rightarrow$  независимы совокупно

Тетраэдр; Стороны: красная, синяя, зеленая, все вместе

$A_1$  — выпала грань с **красным** цветом  $A_2$  — выпала грань с **синим** цветом  $A_3$  — выпала грань с **зеленым** цветом

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(A_1 A_2) = P(A_1 A_3) = P(A_2 A_3) = \frac{1}{4}$$

$$P(A_1 A_2 A_3) = \frac{1}{4} \neq P(A_1) P(A_2) P(A_3)$$

## Теорема умножения вероятностей

Пусть  $P(A_1 A_2 \dots A_n) > 0$ ,

$$P\left(\overbrace{A_1 \dots A_n}^A\right) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 A_2) \dots P(A_n | A_1 \dots A_{n-1})$$

**Док-во**

Пусть:

$$B_{n-1} = A_1 \dots A_{n-1}$$

$$B_{n-2} = A_1 \dots A_{n-2}$$

$\vdots$

$$B_1 = A_1$$

Тогда

$$A = B_{n-1} A_n$$

$$\begin{aligned}
 P(A) &= P(B_{n-1}A_n) = \\
 &= P\left(\overbrace{B_{n-2}A_{n-1}}^{B_{n-1}}\right)P(A_n | B_{n-1}) = \\
 &= P(A_n | A_1 \dots A_{n-1})P(B_{n-2})P(A_{n-2} | B_{n-2}) = \dots
 \end{aligned}$$

**Пример**

Перестановки: МАТАН

$$\begin{aligned}
 P('M' 'A' 'T' 'A' 'H') &= \\
 &= P('M')P('A' | 'M')P('T' | 'M' 'A')P('A' | 'M' 'A' 'T')P('H' | 'M' 'A' 'T' 'A') = \\
 &= \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1
 \end{aligned}$$

## Биномиальная схема испытаний Бернулли

Схема испытаний, которая удовлетворяет условиям:

- Исход двоичен. Происходит  $A$  (успех) или  $\bar{A}$  (неудача)
- Всех испытания независимы в совокупности
- $p = P(A)$  не изменяется от опыта к опыту

$k$  успехов из  $n$  испытаний:

$$P_{n(k)} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}$$

**Док-во**

Если все успехи в начале:

$$P\left(\underbrace{YY\dots Y}_k HH\dots H\right) = p^k q^{n-k}$$

Учтем перестановки. Выберем, где места будут успехи ( $C_n^k$  способов):

$$P_{n(k)} = C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$P(k_1 \leq k \leq k_2) = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i q^{n-i}$$

$$1 = \sum_{k=0}^n P_{n(k)} = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1$$

## Наиболее вероятное число успехов

По определению:

$$k_0 = \operatorname{argmax}_{1 \leq i \leq n} C_n^i p^i q^{n-i}$$

По удобному:



$$k_0 = \begin{cases} [(n+1)p] & \text{если } (n+1)p \notin \mathbb{Z} \\ (n+1)p \text{ и } (n+1)p - 1 & \text{если } (n+1)p \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

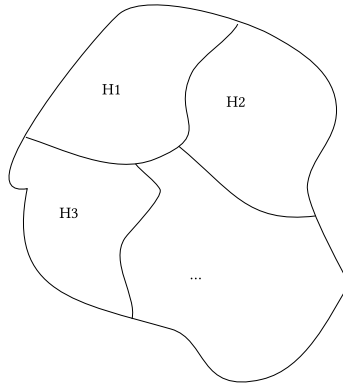
### Формула полной вероятности

**Опр.** Пусть  $H_1, \dots, H_n \in \Omega$ . Если

1.  $\forall i \neq j : H_i \cdot H_j = \emptyset$
2.  $H_1 + \dots + H_n = \Omega$

то  $H_1, \dots, H_n$  **полная группа событий (гипотезы)**

Рис. 4. Полная группа событий (гипотезы)



Пусть  $A \subset \Omega$ ,  $H_1, \dots, H_n$  — полная группа событий

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cdot \Omega) = P(A \cdot (H_1 + \dots + H_n)) = \\ &= P(AH_1 + \dots + AH_n) \stackrel{\text{т.к. несовместны}}{\cong} P(H_1)P(A | H_1) + \dots + P(H_n)P(A | H_n) \end{aligned}$$

#### Пример

$N$  — всего билетов

$m$  — билетов студент Сидоров выучил

$A$  — Сидорову попался счастливый билет

Иванов заходит первый. Сидоров заходит второй.

$H_1$  — Иванов вытащил счастливый (для Сидорова)

$H_2$  — Иванов вытащил **не** счастливый (для Сидорова)

$$P(H_1) = \frac{m}{N}$$

$$P(H_2) = \frac{N-m}{N}$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1)P(A | H_1) + P(H_2)P(A | H_2) = \\ &= \frac{m}{N} \cdot \frac{m-1}{N-1} + \frac{N-m}{N} \cdot \frac{m}{N-1} \end{aligned}$$

Для гипотез:

- Априорные вероятности — знаем ещё до опыта:

$$P(H_1), \dots, P(H_n)$$

- Апостериорные вероятности — вероятности гипотез после эксперимента (когда знаем, что некоторое событие уже произошло):

$$P(H_1 | A), \dots, P(H_n | A)$$

2024-09-27

## Формула Байеса

$$P(H_i | A) = \frac{P(AH_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A | H_i)}{\sum_{j=1}^n P(H_j)P(A | H_j)}$$

$$\sum_{i=1}^n P(H_i) = 1$$

$$\sum_{i=1}^n P(H_i | A) = 1$$

### Задача

Таблица 1. Условие

Завод	Процент поставленных деталей	Вероятность исправной детали
№ 1	65%	0.9
№ 2	35%	0.8

$A$  — деталь с дефектом оказалась в самолете

$H_1$  — деталь взяли и 1-ого завода

$$P(H_1) = 0.65$$

$$P(A | H_1) = 0.1$$

$H_2$  — деталь взяли и 2-ого завода

$$P(H_2) = 0.35$$

$$P(A | H_2) = 0.2$$

$$P(A) = P(H_1)P(A | H_1) + P(H_2)P(A | H_2) = 0.65 \cdot 0.1 + 0.35 \cdot 0.2$$

$$P(H_1 | A) = \frac{P(H_1)P(A | H_1)}{P(A)} = \frac{65}{135} = 0.48$$

$$P(H_2 | A) = \frac{P(H_2)P(A | H_2)}{P(A)} = \frac{70}{135} = 0.52$$

## Случайные величины

**Опр. Случайная величина (СВ)** — величина, которая после эксперимента принимает заранее неизвестное значение.

Числовая функция  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , которая удовлетворяет условию измеримости<sup>1</sup>:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \{\omega : \xi(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$$

Таблица 2. Пример с кубиком

$$\begin{array}{cccccc} \Omega = \{ & \omega_1, & \omega_2, & \dots, & \omega_6 & \} \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ \xi = \{ & 1, & 2, & \dots, & 3 & \} \end{array}$$

**Опр. Функция распределения (вероятностей)** случайной величины  $\xi$  называется функция

$$F_{\xi}(x) = P(\omega : \xi(\omega) \leq x)$$

Свойства  $F(x)$ :

$$1. F(+\infty) = 1$$

$$F(-\infty) = 0$$

$$\forall x : 0 \leq F(x) \leq 1$$

$$2. F(x) \text{ не убывает: } x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$$

3.  $F(x)$  непрерывна справа:

$$F(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} F(x_0 + \varepsilon),$$

где  $x_0$  — точка разрыва

Если некоторая  $F(x)$  удовлетворяет условиям, то она является функцией распределения некоторой величины.

Случайные величины:

- Дискретные
- Непрерывные

## ———— Дискретные случайные величины ————

**Опр.** Случайную величину называют **дискретной**, если множество её возможных значений конечно или счетно.

**Опр. Ряд распределения** для дискретной СВ — табличка из  $\xi$  в  $P$ :

$\xi$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$
$P$	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_n$

**Пример**

$\xi$	-1	0	2
$P$	0.2	0.3	0.5

$$x < -1 : F(x) = 0$$

$$F(-1) = 0.2$$

<sup>1</sup>почти всегда выполняется

$$F(-0.5) = 0.2$$

$$F(0) = 0.2 + 0.3$$

$$F(2) = 1$$

$$x > 2 : F(x) = 1$$

## Числовые характеристики дискретных случайных величин

### Математическое ожидание

**Опр. Математическим ожиданием  $E$  (среднее значение)** дискретной СВ  $\xi$  называется число

$$E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

Предполагается, что ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i$  сходится

2024-10-04

### Свойства математического ожидания

1.  $Ec = c$
2.  $E(c\xi) = cE(\xi)$
3. Если  $a \leq \xi \leq b$ , то  $a \leq E\xi \leq b$ .
4.  $E(\xi_1 + \xi_2) = E(\xi_1) + E(\xi_2)$
5. Пусть  $\eta = \varphi(\xi)$ , где  $\varphi$  — детерминированная функция, тогда  $E\eta = E\varphi(\xi) = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) p_i$

### Дисперсия

**Опр. Дисперсией** случайной величины  $\xi$  называется число

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2$$

### Свойства дисперсии

1.  $Dc = 0$
2.  $D(c\xi) = c^2 D(\xi)$
3.  $\forall \xi : D(\xi) \geq 0$
4.  $D(\xi) = E(\xi^2 - 2\xi E(\xi) + (E\xi)^2) = E(\xi^2) - 2(E\xi)^2 + (E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$  — удобная формула для вычислений
5.  $D(\xi_1 + \xi_2) = E(\xi_1 + \xi_2)^2 - (E(\xi_1 + \xi_2))^2 = E(\xi_1^2) + 2E(\xi_1 \xi_2) + E(\xi_2^2) - (E\xi_1)^2 - 2E\xi_1 E\xi_2 + (E\xi_2)^2 = D\xi_1 + D\xi_2 + 2 \underbrace{(E(\xi_1 \xi_2) - E\xi_1 E\xi_2)}_{\text{ковариация}} = D\xi_1 + D\xi_2 + 2 \text{cov}(\xi_1, \xi_2)$
6. Если  $\xi_1$  и  $\xi_2$  независимы, то  $\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0 \rightarrow D(\xi_1 + \xi_2) = D\xi_1 + D\xi_2$

### Другие

**Опр. Среднеквадратическое отклонение:**  $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$

**Опр. Начальный момент порядка  $k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ):**  $\mu_k = E\xi^k$

$$\mu_1 = E\xi$$

**Опр. Центральный момент порядка  $k$  ( $k = 2, 3, \dots$ ):**  $\nu_k = E(\xi - E\xi)^k$

$$\nu_2 = D\xi$$

**Опр. Центрированная случайная величина:**  $\xi^0 = \xi - E\xi$

$$E\xi^0 = 0$$

**Опр. Нормированная случайная величина:**  $\xi^* = \frac{\xi^0}{\sigma}$

$$D\xi^* = D\frac{\xi^0}{\sigma} = \frac{1}{\sigma^2}D\xi^0 = 1$$

—— Часто встречающиеся дискретные распределения ——

Распределение Бернулли

$\xi \underset{\text{имеет распределение}}{\sim} \text{Ber}(p), 0 < p < 1$

$\xi$	0	1
$P$	$1-p$	$p$

$\xi^2$	0	1
$P$	$1-p$	$p$

$$E\xi = 0 + 1 \cdot p = p$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

Биномиальное распределение

$\xi \sim \text{Bi}(n, p), 0 < p < 1$

$\xi$	0	...	$k$	...	$n$
$P$	...	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	...

Матожидание. Способ 1:

$$\begin{aligned} E\xi &= \sum_{k=0}^n k \cdot C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^n k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = np \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} q^{n-k} = \\ &= \{i = k-1\} = np \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!} p^i q^{n-1-i} = np \cdot 1 = np \end{aligned}$$

Матожидание. Способ 2:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \dots + \xi_n$$

$$\xi_i \sim \text{Ber}(p)$$

$$E\xi = E\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n (E\xi_i) = np$$

Дисперсия. Способ 1:

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \sum_{k=0}^n k^2 \cdot C_n^k p^k q^{n-k} = \dots$$

Дисперсия. Способ 2:

$$D\xi = D\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) \underset{\text{т.к. независимы}}{\equiv} \sum_{i=1}^n D(\xi_i) = npq$$

**Пример**

Бросаем монетку 10 раз.

$$n = 10, p = 0.5 \rightarrow \begin{cases} E\xi = 10 \cdot 0.5 = 5 \\ D\xi = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 2.5 \end{cases}$$

Распределение Пуассона

$$\xi \sim \Pi(\lambda), \lambda > 0$$

$$\xi = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$P(\xi = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

Проверим условие нормировки:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

Матожидание:

$$E\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

Дисперсия:

$$\begin{aligned} D\xi &= E\xi^2 - (E\xi)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} - \lambda^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{(k-1)!} - \lambda^2 = \\ &= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} (k-1+1) \frac{e^{-\lambda} \lambda^{k-1}}{(k-1)!} - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda \end{aligned}$$

**Теорема Пуассона** Пусть проводятся испытания по схеме Бернулли, причем  $n \rightarrow \infty$ ,  $p \rightarrow 0$ ,  $np \rightarrow \lambda$ . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

**Док-во**

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{n^k} \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k} = 1 \cdot \frac{e^{-\lambda}}{1} = e^{-\lambda}\end{aligned}$$

Погрешность при замене Бернулли на Пуассона:

$$\left| C_n^k p^k q^{n-k} - \frac{e^{-np} (np)^k}{k!} \right| \leq np^2$$

Геометрическое распределение

$$\xi \sim G(p), 0 < p < 1$$

$$\xi = \{1, 2, \dots\}$$

$$P(\xi = k) = q^{k-1} p$$

**Смысл:** Испытание с двумя исходами. Останавливаемся, когда произошел первый успех.

Матожидание:

$$\begin{aligned}E\xi &= \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} (q^k)' = \\ &= p \left( \sum_{k=1}^{\infty} q^k \right)' = p \left( \frac{q}{1-q} \right)' = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}\end{aligned}$$

Дисперсия:

$$D\xi = \frac{q}{p^2}$$

#### Пример

Студент знает 80% материала. Его спрашивают, пока не завалят.

$$\xi \sim G(0.2)$$

2024-10-11

## Непрерывные случайные величины

Нельзя задать рядом распределения

Можно задать функцией распределения

**Опр. Плотность**  $f_{\xi}(x)$  случайной величины — такая неотрицательная кусочная функция, что

$$\forall x \in R : F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(t) dt$$

**Опр.** Случайные величины, для которых определена плотность определения, будем называть **непрерывными**<sup>2</sup>.

### Канторова лестница

Пример функции, которая непрерывна, но плотности не имеет

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}F(3x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}F(3x-2), & \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

В точках дифференцируемости функции  $F(x)$ :  $f(x) = F'(x)$

С какой вероятностью будет принято какое-то конкретное значение  $x$ :

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < \xi \leq x + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$f(x)\Delta x \underset{\Delta x \rightarrow 0}{\rightleftharpoons} P(x < \xi \leq x + \Delta x)$$

Итого, ответ 0

### — Свойства плотности распределения —

- $\forall x : f(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = F(+\infty) = 1$
- $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 < \xi \leq x_2)$
- Пусть СВ  $\xi$  имеет плотность распределения  $f_{\xi}(x)$ , а функция  $\varphi(x)$  — монотонная, дифференцируемая, детерминированная. СВ  $\eta = \varphi(\xi)$ .  $f_{\eta}(y) = ?$ :

1. Пусть  $\varphi(x)$  — монотонно возрастающая

$$F_{\eta}(y) = P(\eta \leq y) = P(\varphi(\xi) \leq y) = P(\xi \leq \varphi^{-1}(y)) = F_{\xi}(\varphi^{-1}(y))$$

$$f_{\eta}(y) = (F_{\eta}(y))' = f_{\xi}(\varphi^{-1}(y))(\varphi^{-1}(y))$$

2. Пусть  $\varphi(x)$  — монотонно убывающая

$$F_{\eta}(y) = P(\eta \leq y) = P(\varphi(\xi) \leq y) = P(\xi \geq \varphi^{-1}(y)) = 1 - F_{\xi}(\varphi^{-1}(y))$$

<sup>2</sup>На самом деле есть три вида величин:

1. Дискретные
2. Сингулярные
3. Абсолютно непрерывные

Но мы рассматриваем только два вида



$$f_{\eta}(y) = (F_{\eta}(y))' = -f_{\eta}(\varphi^{-1}(y)) \underbrace{(\varphi^{-1}(y))'}_{<0}$$

3. **Итого**,  $f_{\eta}(y) = f_{\xi}(\varphi^{-1}(y)) |(\varphi^{-1}(y))'|$

- Если функция не монотонная, то нужно разделить её на интервалы монотонности и применить прошлый пункт

### — Числовые характеристики —

#### · Математическое ожидание ·

**Опр. Математическим ожиданием** непрерывной случайной величины  $\xi$  называется число

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x) dx,$$

если интеграл сходится абсолютно:

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_{\xi}(x) dx.$$

Для бесконечностей:

- Если  $f(x) > 0$  только при  $x > 0$  и  $\int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x) dx$  расходится, то  $E\xi = +\infty$
- Если  $f(x) > 0$  только при  $x < 0$  и  $\int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x) dx$  расходится, то  $E\xi = -\infty$

#### Свойства математического ожидания

1.  $Ec = c$
2.  $E(c\xi) = cE(\xi)$
3. Если  $a \leq \xi \leq b$ , то  $a \leq E\xi \leq b$ .
4.  $E(\xi_1 + \xi_2) = E(\xi_1) + E(\xi_2)$
5. Пусть  $\eta = \varphi(\xi)$ , где  $\varphi$  — детерминированная функция, тогда  $E\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_{\xi}(x) dx$

### — Квантиль —

**Опр.** Число  $z_{\gamma}$ ,  $0 < \gamma < 1$  называется  **$\gamma$ -квантилью** непрерывного строго монотонного распределения  $F_{\xi}(x)$ , если  $\underbrace{F_{\xi}(z_{\gamma})}_{=P(\xi \leq z_{\gamma})} = \gamma$

Для непрерывного распределения верно:

$$\int_{-\infty}^{z_{\gamma}} f_{\xi}(x) dx = \gamma$$

Для дискретных величин в качестве квантили берут минимальное подходящее число:

$$z_{\gamma} = \min\{x : F(x) \geq \gamma\}$$

Если  $\forall x : f(-x) = f(x)$ , то  $z_{\gamma} = -z_{1-\gamma}$ .

**Опр.** Квантиль уровня 0.5 называется **медианой**.

**Опр.** Квантили уровня 0.25 и 0.75 называются **нижним и верхним квартилем**.

### — Часто встречающиеся непрерывные распределения —

#### · Равномерное на интервале $(a; b)$ ·

$$\xi \sim R(a, b)$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (a, b) \\ \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b) \end{cases}$$

$$E\xi = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx - \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \int_{-\infty}^a 0 dt + \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a}, & x \in (a, b) \\ \underbrace{\int_{-\infty}^a 0 dt}_{=0} + \underbrace{\int_a^x \frac{1}{b-a} dt}_{=1} + \underbrace{\int_b^x 0 dt}_{=0} = 1, & x \geq b \end{cases}$$