Теория Вероятностей

Семинары

Автор конспектов: Чубий Савва Андреевич

Преподаватель: Сизых Наталья Васильевна

2024–2025

2024-09-09

Введение

Наталья Васильевна Сизых

Таблица 1. Облако

Link:	`mega.nz/login`
Login:	`tv.24-25@yandex.ru`
Pass:	`tv.24-25`

$$\text{Итог} = 0.1 \cdot \text{ИДЗ} + 0.25 \cdot \text{КР} + 0.15 \cdot \text{Сем} + 0.5 \cdot \text{Экз}$$

2024-09-16

Условная вероятность

Обозначение A при B: $P(A|B)$ или $P_B(A)$

$$P(A)P(B|A) = P(AB) = P(B)P(A|B)$$

Гипотезы

Формула полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(H_j)P(A|H_j)$$

Формула Баеса:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j)P(A|H_j)} = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}$$

H_i — гипотезы

A — событие

Задачи

Задача

Два стрелка

$P_1 = 0.8$ $P_2 = 0.7$

A — поражение цели хотя бы одним A_1 — поражение цели первым A_2 — поражение цели вторым

Методы:
1. $P(A) = P(A_1) + P(A_2) - \underbrace{P(A_1 A_2)}_{P(A_1)P(A_2)}$
2. $P(A) = P(A_1)P\left(\overline{A_2}\right) + P(A_2)P\left(\overline{A_1}\right) + P(A_1)P(A_2)$
3. $P(A) = 1 - P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\right)$

Задача про Золушку

A — достала хрустальную

H_i — выбрала i-ую коробку

D_1 — утеряна хрустальная, D_2 — утеряна серебряная

$$P(D_1) = \frac{3}{5}, P(D_2) = \frac{2}{5}$$

$$P(A|H_1) = P(D_1) \cdot \frac{2}{4} + P(D_2) \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$$

$$P(A|H_2) = \frac{2}{6}$$

$$P(A|H_3) = 1$$

$$P(A) = \sum_{i_1}^{3} P(H_i)P(A|H_i) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{3} + 1\right) = \frac{29}{45}$$

Задача про Завод

$$P(A) = 0.05$$

$$P(B|A) = 0.1$$

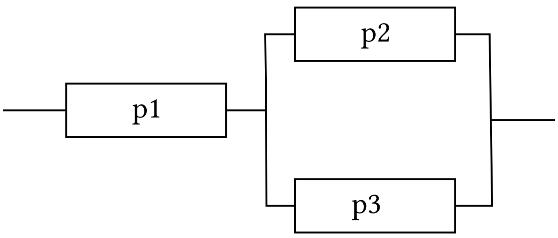
$$P\left(B|\overline{A}\right) = 0.01$$

$$P\left(\overline{B}\right) =?$$

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P\left(\overline{A}\right)P\left(\overline{A}\right) = 0.05 \cdot 0.1 + 0.95 \cdot 0.01 = 0.0145$$

$$P\left(\overline{B}\right) = 1 - P(B) = 0.9855$$

Задача про схему



$$P_1 = 0.8$$

$$P_2 = 0.7$$

$$P_3 = 0.6$$

$$P(A_1) = P_1$$

$$P(A) = P(A_1) \cdot [1 - (1 - P(A_2)) \cdot (1 - P(A_3))]$$

—— Задача 31 ——

A, B — независимы

$$P(AB) = P(B) = \frac{1}{4}$$

$$P(A+B) = ?$$

$$P(A)P(B) \underbrace{=}_{\text{т.к. независимы}} = P(AB) = \frac{1}{4}$$

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \dots$$

—— Задача 32 ——

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{2}{3}, P(A+B) \underbrace{\geq}_{?} \frac{1}{6}$$

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{7}{6} - \underbrace{P(AB)}_{\leq 1} \geq \frac{1}{6}$$

—— Задача 22 ——

$$1 - (1-p)^n \geq 0.95$$

$$1 - 0.99^n \geq 0.95$$

$$0.05 \geq 0.99^n$$

$$\ln(0.05) \geq n \ln(0.99)$$

$$\frac{\ln(0.05)}{\ln(0.99)} \leq n$$

$$298.07\dots \leq n$$

$$n = 299$$

—— Задача 23 ——

$$1 - (1-0.9)^n \geq 0.999$$

$$0.001 \geq 0.1^n$$

$$\frac{\ln(0.001)}{\ln(0.1)} \leq n$$

$$3 \leq n$$

$$n = 3$$

2024-09-23

Пусть $A_1, A_2, \dots, A_k$ — полная группа событий. Делаем n испытаний, хотим m_i событий A_i, где $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$:

$$P = n! \cdot \frac{p_1^{m_1} p_2^{m_2} ... p_k^{m_k}}{m_{1!} m_{2!} ... m_{k!}}$$

Задачи

Задача 10

$$P(A) = P_3(2) + P_3(3) = 3 \cdot 0.7^2 \cdot 0.3 + 0.7^3 = 0.784$$

Задача 11

8-ой выстрел — обязательно промах

В первых семи — два промаха

$$P = P_7(5) \cdot 0.2 = C_7^5 \cdot 0.8^5 \cdot 0.2^2 \cdot 0.2 = 0.058$$

Задача 18

См. 11

$$P_{20(9)} \cdot p = C_{19}^9 p_9 q_{10} \cdot p = 0.001$$

Задача 25

$$n = 3$$

$$p = 0.05$$

$$p(n+1) = 0.05(3+1) = 0.2$$

$$\lfloor 0.2 \rfloor = 0$$

Задача 2

$$P(A) = p + (1-p)^2 p + (1-p)^4 p$$

$$P(B) = (1-p)p + (1-p)^3 p + (1-p)^5 p$$

$$P(C) = (1-p)^6$$

$$P(D) = (1-p)^6 + (1-p)^5 p$$

Задача 4

$$P(A - B - A) = P(A)P(B) + (1 - P(A))P(B)P(A)$$

$$P(B - A - B) = P(A)P(B) + (1 - P(B))P(A)P(B)$$

Задача

20 мячей:

- 12 новых
- 8 игранных
- извлекают 2, играют, потом возвращают

- потом снова извлекают 2 — они новые
- с какой вероятностью первые два тоже были новые?

H_1 — первые два оба новые H_2 — новый – старый H_3 — оба старые

$$P(H_1) = \frac{C_{12}^2}{C_{20}^2} = \frac{33}{95}$$

$$P(H_2) = \frac{C_{12}^1 C_8^1}{C_{20}^2} = \frac{48}{95}$$

$$P(H_3) = \frac{C_8^2}{C_{20}^2} = \frac{14}{95}$$

A — вторые два мяча новые

$$P(A \mid H_1) = \frac{C_{10}^2}{C_{20}^2} = \frac{9}{38}$$

$$P(A \mid H_2) = \frac{C_{10}^1 C_{20}^1}{C_{10}^2} = \frac{11}{38}$$

$$P(A \mid H_3) = \frac{C_{12}^2}{C_{20}^2} = \frac{11}{38}$$

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1)P(A \mid H_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(H_i)P(A \mid H)i}$$

Задача

4 кубика:
- 3 правильных
- 1 фальшивый $P(6) = \frac{1}{2}; P(i) = 0.1$

H_1 — выбрали правильный H_2 — выбрали фальшивый

A — выпала шестерка

$$P(A \mid H_1) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \mid H_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(H_2 \mid A) = \frac{P(A \mid H_2)P(H_2)}{P(A \mid H_2)P(H_2) + P(A \mid H_1)P(H_1)}$$

2024-09-30

Формула Пуанкаре

Пять человек подбросили шляпы в воздух и каждый поймал одну случайную.

Всего $5! = 120$ перестановок

Никто не получил свою шляпу:

$$120 - 5 \cdot (5-1)! + 10 \cdot (5-2)! - 10 \cdot (5-3)! + 5 \cdot 1 - 1 = 44$$

Общая формула:

$$n(A_1 + A_2 + ... + A_n) = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s-1} C_n^s (n-s)! = n! \sum_{s=1}^{n} \frac{(-1)^s}{s!}$$

$A_i - i$ человек получили свои шляпы

$$P(A) = \sum_{s=0}^{n} \frac{(-1)^s}{s!}$$

Задачи

Задача

Отрезок длина 5 на две части: 2 и 3. Десять точек бросают случайным образом. Найти вероятность того, что на отрезок длины 2 попадетне менее 9 точек

A - случайная точка попадет на отрезок длины 2. p = P(A) = 0.4

$P_{10(\geq 9)} = P_{10(9)} + P_{10(10)} = ...$

Задача[1]

Есть 3 шара. Шары бывают или черными, или белыми. Было проведено 4 опыта. Найти апостериорные вероятности всех цветовых составов урн Результат: бчбб

A - выпало бчбб

$$H_1 = H_{\text{ччч}}$$

$$H_2 = H_{\text{ччб}}$$

$$H_3 = H_{\text{чбб}}$$

$$H_4 = H_{\text{ббб}}$$

$$P(H_i) = 0.25$$

$$P(A \mid H_1) = 0$$

$$P(A \mid H_2) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{81}$$

$$P(A \mid H_3) = \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{81}$$

$$P(A \mid H_4) = 0$$

$$P(A) = \sum (i=0)^4 P(H_i) \cdot P(A|H_i)$$

$$P(H_2 \mid A) = P(A \mid H_2) \cdot \frac{P(H_2)}{P(A)}$$

[1] Спасибо Агилю за конспектирование этой и следующей задач.

$$P(H_3 \mid A) = P(A \mid H_3) \cdot \frac{P(H_3)}{P(A)}$$

—— Задача ——

В группе учится 30 студентов. На каждом из 14 семинаров проводится рубежный контроль случайным образом выбирает 6 студентов, чьи работы проверяются.

Найти вероятность того, что работы первого студента:
1. Ни разу не попадут на проверку
2. Попадут на проверку не менее 2 раз
3. Найти среднее количество проверенных работ

A — работа первого студента попадет на проверку.

$$P(A) = \frac{6}{30} = 0.2$$

1. $P_0(14) = C_{14}^0 \cdot p^0 \cdot q^{14} = 1 \cdot 1 \cdot (0.8)^{14} = 0.04398$
2. $P_{14}(\geq 2) = 1 - P_{14}(0) - P_{14}(1) = 0.802$
3. $M(x) = np = 14 \cdot \frac{1}{5} = 2.8$

—— Задача ——

$$p = 0.8$$

Цель поражена, если не менее трех попаданий. A — цель поражена

$$P_n(\geq 3) = P_4(3) + P_4(4) = \ldots$$

—— Задача ——

Два контролера проверяют деталь.

H_i — деталь попадет к i-ому контролеру

A — деталь одобрена

Таблица 2. Условие

i	$P(H_i)$	$P(A \mid H_i)$
1	0.4	0.95
2	0.6	0.98

Формула Баеса

—— Задача ——

Фирма участвует в проектах. Вероятность победы в проектах соответственно: 0.9, 0.4, 0.8, 0.2

Вероятность, что фирма выиграет хотя бы в двух проектах?

$$1 - 0.1 \cdot 0.6 \cdot 0.2 \cdot 0.8 - \text{*по два*} + \ldots$$

2024-10-07

Распределения

Рис. 2. Плотность распределения

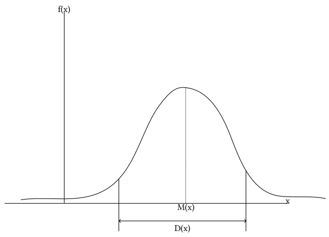
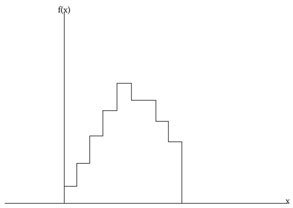


Рис. 3. Гистограмма



Задачи

Задача

В этой задаче я, видимо, неправильно переписал табличку с условием, но матожидаение считается по-обычному: $M(x) = \sum x_i p_i$.

Ежедневные расходы $100'000$ рублей. Число машин, проданных за день (x):

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p	0.25	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.05	0.025	0.025

Цена машины $150'000$

$$\Pi = 150x - 100$$

$$M(\Pi) = M(150x - 100) = 150M(x) - 100$$

$$M(x) = 0.025 + 1 \cdot 0.2 + ... = 2.675$$

$$M(\Pi) = 301'100$$

Задача

ξ	0	1	2	3	4	5
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$

$$M(\xi) = 0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + ... = \frac{31}{32}$$

Задача

X	a	$-a$
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$M(x) = 0$$

$$D(x) = M(x^2) - (M(x))^2 = a^2 - 0 = a^2$$

Задача

$$n = 10'000; p = 0.2$$

$$x \sim \mathrm{Bi}(n, p) = \mathrm{Bi}(10'000, 0.2)$$

$$M(x) = np = 2'000$$

$$D(x) = npq = 1'600$$

$$\sigma(x) = 40$$

Задача 11

$$x \sim \mathrm{Bi}\left(1; \frac{1}{2}\right)$$

$$(M(x))^2 = (np)^2 = \left(1 \cdot \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$D(x) = npq = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$D(x) - (M(x))^2 = 0$$

Задача 28 (a)

$$p = 0.3$$

$$n = 200$$

$$x \sim \mathrm{Bi}(200, 0.3)$$

$$M(x) = np = 200 \cdot 0.3 = 60$$

$$D(x) = npq = 42$$

2024-10-14

Задачи

Задача 1

$$F(x) = \begin{cases} 0.0, x \leq 3 \\ 0.2, -3 < x \leq 1 \\ 0.4, 1 < x \leq 2 \\ 1.0, x > 2 \end{cases}$$

Таблица 6. Ряд распределения

x	-3	1	2
p	0.2	0.2	0.2

Задача 2

Таблица 7. ряд распределения

x	0	1	2	3
P	$C_7^0 \cdot \frac{C_8^3}{C_{15}^3} = \frac{56}{455}$	$... = \frac{196}{455}$	$... = \frac{168}{455}$	$... = \frac{35}{455}$

$$E(x) = 0 \cdot \frac{56}{455} + 1 \cdot \frac{196}{455} + 2 \cdot \frac{168}{455} + 3 \cdot \frac{35}{455} = 1.4$$

$$D(x) = 3 \cdot \frac{7}{15} \cdot \left(1 - \frac{7}{15}\right) \cdot \left(1 - 7 - \frac{1}{15} - 1\right) = 0.64$$

Общий вид (напоминание):

$$p = C_M^m \cdot C^n - m_N - \frac{m}{C_N^n}$$

$$M(x) = n \cdot \frac{M}{N}$$

$$D(x) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \left(1 - n - \frac{1}{N} - 1\right)$$

Задача 3

$N = 7, M = 4, n = 4$

Таблица 8. ряд распределения

x	1	2	3	4
P	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

ВАЖНО: здесь нельзя использовать формулу гипергеометрической вероятности, тк наше распределение начинается с 1 (не с 0)

$$M = 1 \cdot \frac{4}{35} + 2 \cdot \frac{18}{35} + 3 \cdot \frac{12}{35} + 4 \cdot \frac{1}{35} = 2.217$$

$$D = 0.49$$

Задача 4

$$P(x > 3) = \frac{1}{3}$$

$$F_{x(3)} -?$$

$$P(x < 3) + P(x = 3) + P(x > 3) = 1$$

$$F_x(3) = P(x < 3) = 1 - P(x > 3) = \frac{2}{3}$$

Задача

$$p = 0.8$$

Таблица 9. ряд распределения

x	2	3
P	p	$1 - p$

$$M(x) = 2p + 3(1 - p) = 2.2$$

TODO: complete the graph

$$M(x^2) = 4 \cdot 0.8 + 9 \cdot 0.2 = 5$$

$$D(x) = M(x^2) - (M(x))^2 = 5 - 4.84 = 0.16$$

$$\sigma(x) = 0.4$$

Задача

	Вклад	Годовых	Вероятность банкротства
A	20	40%	0.3
B	18	30%	0.2

X — сумма вклада

Через год:

$x_1 = 0$ — оба банкрота

$x_2 = 28$ — банкрот B

$x_3 = 23.4$ — банкрот A

$x_4 = 51.4$ — нет банкрота

X	0	23.4	28	51.4
p	0.05	0.24	0.14	0.56

$$M(x) = 38.32$$

$$M(x^2) = 1720.672$$

$$D(x) = 252.2496$$

Задача

$$N = 2000, p = 0.001$$

$$\Pi(a) = \Pi(1)$$

$$P(x = 2) = \frac{1}{2!e} = 0.184$$

$$P(x \geq 2) = 1 - P(0) - P(1) = 1 - \frac{1}{e} - \frac{1}{e} = 0.264$$

Задача

$$N = 1000$$

— всего деталей

$$n > 2$$

— система работает, пока

$$q = 0.998$$

— безотказная работа одной детали

$$p = 0.002$$

$$x \sim \Pi(2)$$

$$E(x) = ...$$

2024-11-11

Задачи

Задача

$$x \sim N(0; 1)$$

- $$F_0(x) = \Phi_0(x) + \frac{1}{2}$$
  $$P(x > \varepsilon) = 2\Phi_0(x)$$
  $$\Phi_0(1.29) = 0.4074$$
  $$2\Phi_0(1.29) \geq 0.8$$
- ...

Задача

1. Вероятность **не** заболеть 0.9998
2. Из 10000 не менее четырех = ?
3. Матожидание и дисперсия числа заболевших = ?

$$q = 1 - 0.9998 = 0.0002$$

$$a = nq = 2$$

$$x \sim \Pi(q) = \Pi(2)$$

$$P(x = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$$

$$P(0) = e^{-q} = \exp(0.0002) = 0.135$$

$$P(1) = a \cdot e^{-a} = 0.274$$

$$P(2) = \frac{a^2}{2} \cdot e^{-a} = 0.27$$

$$P(3) = \frac{a^3}{6} \cdot e^{-a} = 0.183$$

$$P(A) = 1 - P(0) - P(1) - P(2) - P(3) = ...$$

——— Задача ———

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x}, x \in (1, 3) \\ 0,\ x \notin (1, 3) \end{cases}$$

$$\int_1^3 f(x) dx = c \int_1^3 \frac{1}{x} dx = c \ln x \ |_1^3 = c(\ln 3 - \ln 1) = 1$$

$$c = \frac{1}{\ln 3}$$

$$Ex = \int_1^3 x \cdot \frac{c}{x} dx = c \int_1^3 dx = \frac{2}{\ln 3}$$

$$Ex^2 = \int_1^3 x^2 \frac{c}{x} dx = c \int_1^3 x dx = \frac{1}{\ln 3} \left(\frac{x^2}{2} \ |_1^3 \right) = \frac{4}{\ln 3}$$

$$Dx = Ex^2 - (Ex)^2 = \frac{4}{\ln 3} - \frac{4}{(\ln 3)^2}$$

$$P(x > 2) = c \int_2^3 \frac{1}{x} dx = \frac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 3}$$

——— Задача ———

- $$x \sim N(500, \sigma^2)$$
- $$P(|x - 500| \leq 9.8) = 0.95$$
- $$P(x < 480) = ?$$
- $$P(|x - 500| \leq 9.8) = 2\Phi_0 \left(\frac{9.8}{\sigma} \right)$$

$$\Phi_0\left(\frac{9.8}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} \cdot 0.95 = 0.475$$

По таблице:

$$\frac{9.8}{\sigma} = 1.95$$

$$\sigma = 5$$

$$P(-\infty < x < 480) = \Phi\left(\frac{480 - 500}{\sigma}\right) - \Phi(-\infty) = \Phi(-4) + \Phi(\infty) = \ldots$$

—— Задача ——

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x+5)^2}$$

$$E(3 - 2x + 4x^2) = ?$$

Решение

$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$E = -5$$

$$Ex^2 = D + (Ex)^2$$

$$E(3) - 2E(x) + 4E(x^2) = 115$$

—— Задача ——

$$x \sim N(0; 1)$$

$$P = 0.7$$

$$x_{0.25}$$

Решение

$$P(|x - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 0.7$$

$$\Phi(\varepsilon) = 0.35$$

Ищем ε из таблицы

$$\ldots$$

—— Задача ——

Отрезок $L = 35$ поделили на части по 25 и 10. Бросают три точки.

x — число точек, попавших на 10.

Построить график $F(x)$, найти $M(x)$, $D(x)$.

Решение

$$x \sim \mathrm{Ber}\left(\frac{5}{7}\right)$$

x	0	1	2	3
p	0.364	0.437	0.1749	0.0233

Задача

Вероятность ошибки $p = 0.21$

Наименьшее число измерений $N_{\min}$, чтобы с $P > 0.92$ хотя бы один результат неверный

Решение

$$1 - P_{\text{все верные}} = 1 - 0.79^2 > 0.92$$

$$0.08 \geq 0.79^n$$

$$n \geq \log_{0.79} 0.08 \approx 10.5$$

$$n \geq 11$$

2024-11-25

Переход от ковариационной матрицы к корреляционной

$$\operatorname{cov}(x, y) = \begin{pmatrix} 0.37 & 0.51 & 0.11 \\ 0.51 & 0.25 & 0.31 \\ 0.11 & 0.31 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = 0.37; D_2 = 0.25; D_3 = 0.4$$

$$r_{xy} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{0.51}{\sqrt{0.37}\sqrt{0.25}} & \frac{0.11}{\sqrt{0.37}\sqrt{0.4}} \\ \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Задачи

Задача

Гауссовский вектор: $\xi = (\xi_1, \xi_2)$

$$E\xi = (-4, 2)$$

$$\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.2 \\ -0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$\eta = 3\xi_1 - 4\xi_2$$

$$r_{\eta\xi} - ?$$

$P(\eta > -15) - ?$

Решение

Задача

$$\xi \sim N(m, \sigma^2)$$

$$M = (4; -1)$$

$$\xi = (\xi_1, \xi_2)$$

$$\text{cov} = \begin{pmatrix} 20 & 20 \\ 20 & 40 \end{pmatrix}$$

Найти: $P(\xi_1 - 3\xi_2 > 5) -?; r_{\xi\eta} -?;$

<u>Решение</u>