Теория Вероятностей

Домашние задания

Савва Чубий, БПИ233

2024-2025

2024-09-16	
2021 07 10	
ДЗ 1	
2024-09-23	
ДЗ 2	5
2024-09-30	
ДЗ 3	9
2024-10-07	
ЛЗ 4	

2024-09-16

_____ ДЗ 1 _____

—— Задача 25 (1) ——

• (a)

1. При k > 17 все карманы пусты.

$$P = 1$$

2. При $k \le 17, k-1$ карманов пусты, всего карманов 17.

$$P = \frac{k-1}{17}$$

(б)

$$P = \frac{2}{17} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{15}{15} \cdot \frac{14}{14} = \frac{2}{17} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{136}$$

• (B)

$$P = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$$

----- Задача 26 (4) -----

• (A)

- 1. Способов выбрать два туза для первой пачки: C_4^2
- 2. Способов выбрать остальные карты для первой пачки: C_{48}^{24}
- 3. Всего способов разделить на две части: C_{52}^{26}
- 4. Итого,

$$P = \frac{C_4^2 C_{48}^{24}}{C_{52}^{26}}$$

• (В) Все тузы либо в первой пачке, либо во второй:

$$P = \frac{C_{48}^{22} + C_{48}^{26}}{C_{52}^{26}}$$

• (С) Либо в первой один туз, а во второй — три, либо наоборот. Выберем первую:

$$P = \frac{2 \cdot C_4^1 C_{48}^{25}}{C_{54}^{26}}$$

—— Задача 27 (5) ——

- Первый человек родился в некий день из 365
- Под второго осталось 365 1 = 364
- Под третьего -365-2=363

• ...

• Под r-того -365 - r + 1

$$P = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \dots \cdot \frac{365 - r + 1}{365}$$

При $r=23:P\approx 0.49$

Таблица 1. Число перестановок

Всего	6!
Буквы А	3!
Буквы Н	2!
Буквы С	1!
Различных	$\frac{6!}{3!2!1!} = 60$
Подходящих	1

$$P = \frac{1}{60}$$

Аналогично задаче 5.

$$P = \frac{30}{30} \cdot \frac{29}{30} \cdot \dots \cdot \frac{26}{30} = 0.7037(3)$$

Выбрать получивших номера: C_{10}^6

• (а) Выбрать 6 мужчин: $C_6^6=1$.

$$P = \frac{1}{C_{10}^6} = \frac{1}{210}$$

• (б) Выбрать 4 муж — C_6^4 , 2 жен — C_4^2 .

$$P = \frac{C_6^4 C_4^2}{C_{10}^6} = \frac{3}{7}$$

• (в) Обратно пункту а.

$$P = 1 - \frac{1}{210} = \frac{209}{210}$$

He все из 12-ти комбинаций равновероятны. Так, например, комбинация 6-4-1 соответствует шести ситуациям:

1-ая кость	2-ая кость	3-ая кость
1	4	6
1	6	4
4	1	6
4	6	1
6	1	4

1-ая кость	2-ая кость	3-ая кость
6	4	1

Комбинация 4-4-3 — трем:

1-ая кость	2-ая кость	3-ая кость
3	4	4
4	3	4
4	4	3

А комбинация 4-4-4 — только одной:

1-ая кость	2-ая кость	3-ая кость
4	4	4

• (а) выберем в одну (первую или вторую) из подгрупп шесть лидирующих и ещё три не лидирующие:

$$P = \frac{2 \cdot C_6^6 \cdot C_{12}^3}{C_{18}^9} = \frac{2 \cdot C_{12}^3}{C_{18}^9}$$

• (б) выберем три лидирующие команды и шесть не лидирующих команд в первую группу:

$$P = \frac{C_6^3 \cdot C_{12}^6}{C_{18}^9}$$

шампанское
 5

$$\rightarrow$$
 4

 белое вино
 3
 \rightarrow
 2

 красное вино
 2
 \rightarrow
 1

 всего
 10
 \rightarrow
 7

$$P = \frac{C_5^4 \cdot C_3^2 \cdot C_2^1}{C_{10}^7}$$

• (а) Рассмотрим обратное событие:

Айова
 2

$$\rightarrow$$
 0

 Остальные
 98
 \rightarrow
 50

 Всего
 100
 \rightarrow
 50

$$P = 1 - \frac{C_2^0 \cdot C_{98}^{50}}{C_{100}^{50}} = 1 - \frac{C_{98}^{50}}{C_{100}^{50}}$$

(б)

Штат 1 2
$$\rightarrow$$
 1
Штат 2 2 \rightarrow 1

...

$$\begin{array}{cccc} \text{III} \text{тат 50} & 2 & \rightarrow & 1 \\ \hline \text{Bcero} & 100 & \rightarrow & 50 \\ \end{array}$$

$$P = \frac{\left(C_2^1\right)^{50}}{C_{100}^{50}} = \frac{2^{50}}{C_{100}^{50}}$$

Рассмотрим обратное событие: все ботинки из разных пар.

$$P = 1 - \frac{20}{20} \cdot \frac{18}{19} \cdot \frac{16}{18} \cdot \frac{14}{17}$$

2024-09-23

Нужно чтобы из 5-ти товаров либо 4, либо 5 были с купоном.

Если четыре:

$$P_4 = \frac{C_{10000}^4 C_{490000}^1}{C_{500000}^5}$$

Если пять:

$$P_5 = \frac{C_{10000}^5 C_{490000}^0}{C_{500000}^5} = \frac{C_{10000}^5}{C_{500000}^5}$$

Итого:

$$P = P_4 + P_5 = \frac{C_{10000}^4 C_{490000}^1 + C_{10000}^5}{C_{500000}^5}$$

FIXME: ответ не сходится

Найдем P(A), P(B), P(AB) перебором вариантов.

$$P(A) = \frac{5}{6}$$

$$P(B) = \frac{1}{9}$$

$$P(AB) = \frac{1}{6}$$

Т.к.
$$P(AB)=\frac{1}{6}\neq \frac{5}{54}=P(A)P(B)$$
, то зависимы

Студент должен вытянуть либо 3, либо 4, либо 5 счастливых билетов:

$$P = \frac{C_{20}^3C_5^2 + C_{20}^4C_5^1 + C_{20}^5}{C_{25}^5}$$
 —— Задача 30 (31) ——
$$P(AB) = P(A)P(B) = P(P) \rightarrow P(A) = 1$$

$$P(A+B) = 1$$
 —— Задача 31 (32) ——
$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - P(AB) = \frac{7}{6} - P(AB) \le \frac{7}{6} - 1 = \frac{1}{6}$$

Верно

Вероятность того, что подбросили n раз равна:

$$P_n = 0.5^{n-1} \cdot 0.5 = 0.5^n$$

То есть n-1 раз выпадала решка и один раз герб.

$$\operatorname{argmin}_{1 < n} P_n = 1$$

Ответ. 1

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{35}$$

$$P(AB) = 0$$

$$P(A)P(B) = \frac{17}{280} \neq P(AB)$$

Ответ. Зависимы

Должны работать: первый и (второй или третий)

$$P=p_1\cdot[1-(1-p_2)(1-p_3)]=0.8\cdot[1-(1-0.7)(1-0.6)]=0.704$$
 — Задача 35 (43) —

• (a)
$$P_{12}=1-(1-p_1)(1-p_2)=1-(1-0.8)(1-0.7)=0.94$$

$$P_{123}=P_{12}\cdot p_3=0.564$$

$$P=1-(1-P_{123})(1-p_4)=0.782$$

• (б)
$$P_{12} = 0.94 \\ P_{34} = p_3 \cdot p_4 = 0.3$$

$$P_{345} = 1 - (1 - P_{34})(1 - p_5) = 0.58$$

$$P = P_{12} \cdot P_{345} \cdot p_6 = 0.16356$$

$$\begin{cases} 0.05 = P(AB) = P(B \mid A)P(A) \\ 0.079 = P\left(\overline{AB}\right) = P\left(\overline{B} \mid A\right)P(A) = (1 - P(B \mid A))P(A) \\ 0.089 = P\left(\overline{AB}\right) = P\left(B \mid \overline{A}\right)P\left(\overline{A}\right) \\ 0.782 = P\left(\overline{AB}\right) = P\left(\overline{B} \mid \overline{A}\right)P\left(\overline{A}\right) = \left(1 - P\left(B \mid \overline{A}\right)\right)P\left(\overline{A}\right) \end{cases}$$

Из (1, 2):

$$\frac{P(B \mid A)}{1 - P(B \mid A)} = \frac{0.05}{0.079} = 0.6329 \to P(B \mid A) = 0.3876$$

$$P(\overline{B} \mid A) = 1 - P(B \mid A) = 1 - 0.3876 = 0.6124$$

Из (3, 4):

$$\frac{P(B \mid \overline{A})}{1 - P(B \mid \overline{A})} = \frac{0.089}{0.782} = 0.1138 \rightarrow P(B \mid \overline{A}) = 0.1022$$
$$P(\overline{B} \mid \overline{A}) = 1 - P(B \mid \overline{A}) = 1 - 0.1022 = 0.8978$$

Игра закончится на k-ом шаге, если k-1 раз выпадет решка и один раз выпадет орел.

$$P_k = 0.5^{k-1} \cdot 0.5 = 0.5^k$$

Вероятность того, что игра закончится на четном ходу:

$$P_{\text{\tiny HET}} = P_2 + P_4 + \ldots = 0.5^2 + 0.5^4 + \ldots = 0.25^1 + 0.25^2 + \ldots = \frac{0.25}{1 - 0.25} = \frac{1}{3}$$

Вероятность того, что игра закончится на нечетном ходу:

$$P_{\text{\tiny He \tiny YeT}} = 1 - P_{\text{\tiny YeT}} = \frac{2}{3}$$

 H_1 — выбрана урна первого типа

 H_2 — выбрана урна второго типа

A — вытянули белый шар

$$P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = 0.4$$
——Запача 39 ——

Найдем значение перебором:

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Любая пара или тройка событий означает «на всех выпала одна цифра»: $P(AB)=P(BC)=P(AC)=P(ABC)=rac{1}{6^3}=rac{1}{216}$

События попарно зависимы т.к. $P(A)P(B) = P(A)P(C) = P(B)P(C) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{216}$

Т.к. зависимы попарно, то и совокупно зависимы.

• (a)

A — цель поражена

$$P = P(A) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3)$$

(б)

B — все заряды потрачены.

B происходит, если 1-ый и 2-ой промазали

$$P(B) = (1 - p_1)(1 - p_2)$$

AB происходит, если 1-ый и 2-ой промазали, а 3-ий попал:

$$P(AB) = (1-p_1)(1-p_2)p_3 \\$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = p_3$$

• (B)

$$P(B\mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{(1-p_1)(1-p_2)p_3}{1-(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)}$$
—— Задача 41——

$$P=1-($$
все мимо $)=1-(1-0.6)(1-0.7)(1-0.8)=1-0.4\cdot0.3\cdot0.2=0.976$

2024-09-30

_____ ДЗ 3 _____

—— Задача 18 ——

Среди первых 19 человек ровно 9 подошло. 20-ый тоже подошел.

$$P = P_{19(9)} \cdot 0.2 = C_{19}^9 \cdot 0.2^9 \cdot 0.8^{10} \cdot 0.2 \approx 0.0010157$$

1. A — система работает

Должны работать элементы 1, 6 и любой из 2-5:

$$\begin{split} P_{2-5} &= 1 - (1-p_2)(1-p_3)(1-p_4)(1-p_5) = 1 - \frac{1}{2^4} = \frac{15}{16} \\ P(A) &= p_1 \cdot p_6 \cdot P_{2-5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{15}{16} = \frac{15}{32} \end{split}$$

2. B — ровно два элемента из 2 — 5 отказали:

$$P(B) = P_4(2) = C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

3. AB, если и B, и 1, 6 работают:

$$P(AB) = P(B) \cdot p_1 \cdot p_2 = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$$

4.
$$P=P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{16}}{\frac{15}{32}}=\frac{2}{5}=0.4$$
 —— Задача 25 ——

$$p = 0.05$$

$$n=3$$

$$(n+1)p=0.05\cdot 3=0.15$$

$$\lfloor 0.15\rfloor =0$$

Ответ. 0

Среди первых 3-ех мальчик 1. 4-ый ребенок – мальчик.

$$P = P_3(1) \cdot p = C_3^1 \cdot p^1 \cdot q^2 \cdot p \approx 0.187$$
 — Залача 60 —

Нет. Событие (2, 1) не попадает ни в одну «гипотезу».

$$n=8$$
 $p=rac{1}{5}$

• (a)

$$P = P_n(3) = P_8(3) = C_8^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^5 \approx 0.1468$$

(б)

$$P = \sum_{i=0}^3 P_n(i) = \sum_{i=0}^3 C_8^i \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^i \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{8-i} \approx 0.9437$$
 — Задача 52 —
$$p=0.2$$

Среди первых 4-ех проверок, провалено 2-е. 5-ая тоже провалена.

$$P = P_4(2) \cdot p = C_4^2 \cdot 0.2^2 \cdot 0.8^2 \cdot 0.2 pprox 0.0307$$
 — Задача 53 —

В семье 2, 3, или 4 девочки

$$P = \sum_{i=2}^4 P_4(i) = \sum_{i=2}^4 C_4^i \cdot q^i \cdot p^{4-i} pprox 0.6647$$
 — Задача 54 —

Должны быть исправны 8 или 9 машин

$$P = \sum_{i=8}^{9} P_9(i) = \sum_{i=8}^{9} C_9^i \cdot 0.9^i \cdot 0.1^{9-i} \approx 0.7748$$

Взяли группу из равного количества мужчин и женщин. Из группы выбрали одного человека.

H — выбрали женщину

A — выбранный человек — дальтоник

Вероятность дальтонизма у мужчин значительно выше, чем у женщин, значит:

$$P(H \mid A) \ll 0.5$$

Т.к. в группе мужчин и женщин одинокого, то

$$P(H) = 0.5$$

Итого:

$$P(H \mid A) < P(H)$$

Ответ. Может

—— Задача 61 ——
$$P(H_1) + P(H_2) + ... + P(H_{10}) = 1$$

$$P(H_1) = P(H_2) = ... = P(H_{10}) = \frac{1}{10}$$

$$P(H_1 + H_{10}) = P(H_1) + P(H_{10}) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$
 —— Залача 67 ——

Да. Можно представить каждый маршрут в дереве, как гипотезу, а каждый лист, как «финальное» событие.

 $H_i (i=0,1,2) -$ в первой двойке мячей игранных было i

A — во второй двойке мячей игранных было 0.

$$P(H_0) = \frac{12}{20} \cdot \frac{11}{19} = 0.347$$

$$P(H_1) = \frac{12}{20} \cdot \frac{8}{19} + \frac{8}{20} \cdot \frac{12}{19} = 0.505$$

$$P(H_2) = \frac{8}{20} \cdot \frac{7}{19} = 0.147$$

$$P(A \mid H_0) = \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} = 0.237$$

$$P(A\mid H_1)=\frac{11}{20}\cdot\frac{10}{19}=0.289$$

$$P(A\mid H_2)=\frac{12}{20}\cdot\frac{11}{19}=0.347$$

$$P(A)=P(A\mid H_0)P(H_0)+P(A\mid H_1)P(H_1)+P(A\mid H_2)P(H_2)=0.279$$

$$P(H_0\mid A)=\frac{P(H_0)P(A\mid H_0)}{P(A)}=0.295$$
 —— Задача 65 ——

 $H_i(i=1,2,3)$ — телевизор был из i-ой фирмы

A — телевизор требует ремонта

$$P(H_1) = 0.1$$

$$P(H_2) = 0.3$$

$$P(H_3) = 0.6$$

$$P(A \mid H_1) = 0.15$$

$$P(A \mid H_2) = 0.10$$

$$P(A \mid H_3) = 0.07$$

$$P(AH_1) = P(A \mid H_1)P(H_1) = 0.015$$

$$P(AH_2) = P(A \mid H_2)P(H_2) = 0.03$$

$$P(AH_3) = P(A \mid H_3)P(H_3) = 0.042$$

$$P(A) = P(AH_1) + P(AH_2) + P(AH_3) = 0.087$$

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(AH_1)}{P(A)} = 0.172$$

$$P(H_2 \mid A) = \frac{P(AH_2)}{P(A)} = 0.345$$

$$P(H_3 \mid A) = \frac{P(AH_3)}{P(A)} = 0.483$$

$$P(H_1 \mid A) < P(H_2 \mid A) < P(H_3 \mid A)$$

Ответ. В третью фирму (потом во вторую, потом в третью)

Нас интересуют только детали, имеющие дефект. Далее рассматриваем только их.

 $H_i(i=1,2)$ — деталь проверял i-ый контролер

A — дефект был обнаружен

$$\begin{split} P(H_1) &= P(H_2) = \frac{1}{2} \\ P(A \mid H_1) &= p_1 \\ P(A \mid H_2) &= p_2 \\ P(AH_1) &= P(A \mid H_1) P(H_1) = \frac{1}{2} p_1 \\ P(AH_2) &= P(A \mid H_2) P(H_2) = \frac{1}{2} p_2 \\ P(A) &= P(AH_1) + P(AH_2) = \frac{p_1 + p_2}{2} \\ P(H_1 \mid A) &= \frac{P(AH_1)}{P(A)} = \frac{p_1}{p_1 + p_2} \\ P(H_2 \mid A) &= \frac{P(AH_2)}{P(A)} = \frac{p_2}{p_1 + p_2} \end{split}$$

Ответ. а) $\frac{p_1}{p_1 + p_2}$, б) $\frac{p_2}{p_1 + p_2}$

—— Задача 73 ——

Нужно, чтобы студент

- либо знал два случайно выбранных билета $P_1 = \frac{15}{20} \cdot \frac{14}{19}$
- либо знал первых билет, не знал второй и знал ещё один случайный $P_2=\frac{15}{20}\cdot\frac{5}{19}\cdot\frac{14}{18}$
- либо не знал первых билет, знал второй и знал ещё один случайный $P_3=rac{5}{20}\cdotrac{15}{19}\cdotrac{14}{18}$

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = 0.8596$$
 — Залача 77 —

Карандаш имеет сломанный грифель, если он из «плохой» коробки. Таких коробок 4 из 20-ти.

$$P = \frac{4}{20} = 0.2$$

—— Задача 78 ——

 $H_i(i=1,2)-1$ 3-ую страницу писала i-ая машинистка

A — на 13-ой странице есть опечатка

$$P(H_1) = \frac{1}{3}$$

$$P(H_2) = \frac{2}{3}$$

$$P(A \mid H_1) = 0.15$$

$$P(A \mid H_2) = 0.1$$

$$P(AH_1) = P(H_1)P(A \mid H_1) = \frac{1}{20}$$

$$P(AH_2) = P(H_2)P(A \mid H_2) = \frac{1}{15}$$

$$P(A) = P(AH_1) + P(AH_2) = \frac{7}{60}$$

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(AH_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{7}{60}} = \frac{3}{7}$$

$$P(H_2 \mid A) = \frac{P(AH_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{7}{60}} = \frac{4}{7}$$

Ответ. $P(H_1 \mid A) = \frac{3}{7}$

 $H_i(i=1,2,3)$ — пассажир пошел в i-ую кассу

A- в кассе **остались** билеты

$$P(H_1) = \frac{1}{3}$$

$$P(H_2) = \frac{1}{6}$$

$$P(H_3) = \frac{1}{2}$$

$$P(A \mid H_1) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \mid H_2) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \mid H_3) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P(AH_1) = P(H_1)P(A \mid H_1) = \frac{1}{12}$$

$$P(AH_2) = P(H_2)P(A \mid H_2) = \frac{1}{12}$$

$$P(AH_3) = P(H_3)P(A \mid H_3) = \frac{1}{6}$$

$$P(AH_3) = P(AH_3) + P(AH_2) + P(AH_3) = \frac{1}{3}$$

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(AH_1)}{P(A)} = \frac{1}{4}$$

Ответ. $P(H_1 \mid A) = \frac{1}{4}$

 H_1 — студент подготовлен **отлично** (знает $\frac{20}{20}$ вопросов) H_2 — студент подготовлен **хорошо** (знает $\frac{16}{20}$ вопросов) H_3 — студент подготовлен **удовлетворительно** (знает $\frac{10}{20}$ вопросов) H_4 — студент подготовлен **плохо** (знает $\frac{5}{20}$ вопросов)

A — студент ответил на все три вопроса

$$P(H_1) = \frac{3}{10}$$

$$P(H_2) = \frac{4}{10}$$

$$P(H_3) = \frac{2}{10}$$

$$P(H_4) = \frac{1}{10}$$

$$P(H_4) = \frac{1}{10}$$

$$P(A \mid H_1) = 1$$

$$P(A \mid H_2) = \frac{16}{20} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{14}{18} = \frac{28}{57}$$

$$P(A \mid H_3) = \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{8}{18} = \frac{2}{19}$$

$$P(A \mid H_4) = \frac{5}{20} \cdot \frac{4}{19} \cdot \frac{3}{18} = \frac{1}{114}$$

$$P(AH_4) = P(H_1)P(A \mid H_1) = \frac{3}{10}$$

$$P(AH_2) = P(H_2)P(A \mid H_2) = \frac{56}{285}$$

$$P(AH_3) = P(H_3)P(A \mid H_3) = \frac{2}{95}$$

$$P(AH_4) = P(H_4)P(A \mid H_4) = \frac{1}{1140}$$

$$P(A) = P(AH_1) + P(AH_2) + P(AH_3) + P(AH_4) = \frac{197}{380}$$

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(AH_1)}{P(A)} = \frac{114}{197} = 0.57868$$

$$P(H_4 \mid A) = \frac{P(AH_4)}{P(A)} = \frac{1}{591} = 0.00169$$

Ответ. a) $P(H_1 \mid A) = 0.57868$ б) $P(H_4 \mid A) = 0.00169$