

Теория Вероятностей

Лекции

2024–2025

2024-09-06

Введение	2
Основные понятия	2
Классическое определение вероятности	3

2024-09-13

Геометрическое определение вероятности	3
Св-ва $P(A)$	3
Задача	3
Частотное (статистическое) определение	4
Аксиоматическое определение Колмагорова	4
Свойства $P(A)$	4
Условная вероятность	5

2024-09-06

Введение

$$\text{Итог} = 0.1 \cdot \text{ИДЗ} + 0.15 \cdot \text{Сем} + 0.25 \cdot \text{КР} + 50 \cdot \text{Экз}$$

Нужно набрать 4 — не 3.5

По ИДЗ бывают защиты

На семинарах могут быть самостоятельные

Кибзун, Горяинова, Наумов «ТВ и МС. Базовый курс с примерами к задачам» 2013 или 2014

КР на тему «случайные события и случайные величины (одномерные)» примерно после 7-ми занятий, в начале 20-ого модуля

Экз на тему «многомерные случайные величины»

Основные понятия

Опр. Теория Вероятностей: раздел математики, изучающий математические модели массовых случайных явлений

При большом кол-ве событий величина $\frac{m}{n} \rightarrow P$ стабилизируется

$\omega_1, \dots, \omega_n$ — элементарные случайные события

Опр. Пространство Элементарных Событий (Ω): Совокупность элементарных случайных событий

Опр. Случайное событие: любое $A \subset \Omega$

Опр. Достоверное событие: событие, которое происходит в опыте всегда. Совпадает с Ω

Опр. Невозможное событие: событие, которое не происходит в опыте никогда. Является \emptyset

Операции над множествами/ событиями:

- Произведение событий $A \cdot B$ — событие из $A \cap B$
- Сумма событий $A + B$ — событие из $A \cup B$
- Разность событий $A \setminus B$
- Противоположное событие $\bar{A} = \Omega \setminus A$

Свойства операций над множествами:

- $A + A = A$
- $A \cdot A = A$
- $A \cdot \Omega = A$
- $A + \Omega = \Omega$
- $A + B = B + A$
- $A \cdot B = B \cdot A$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $\overline{A \cdot (B \cdot C)} = (\bar{A} \cdot \bar{B}) \cdot \bar{C}$
- $\overline{\bar{A}} = A$
- $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$

Опр. σ -алгебра событий: класс подмножеств в \mathcal{A} на пространстве элементарных событий Ω , если:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$

$$2. A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$$

$$3. \forall A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A} \wedge \prod_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$

Классическое определение вероятности

Пусть Ω содержит **конечное** число **равновозможных** **взаимоисключающих** исходов, тогда:

Опр. Вероятность (классическое определение) события A :

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

где $|A|$ – мощность события, количество событий, входящих в A

Свойства:

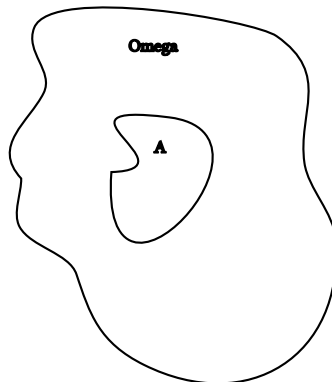
- $P(A) \in [0; 1]$
- $P(\Omega) = 1$
- Если $A \cdot B = \emptyset$, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$

2024-09-13

Геометрическое определение вероятности

Рассматриваем подмножества на \mathbb{R}^n , которые имеют конечную меру

Пример эксперимента: попадет ли случайная точка в подмножество



$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Опр. События несовместны: $A \cdot B = \emptyset$

Св-ва $P(A)$

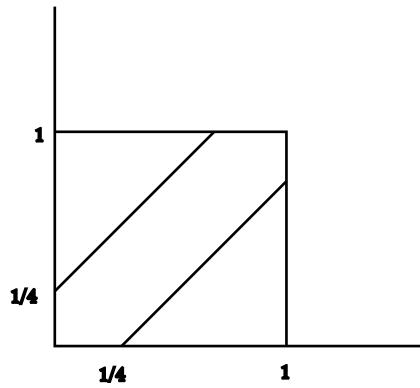
1. $P(A) \geq 0 \forall A \subset \Omega$
2. $P(\Omega) = 1$
3. если A_1 и A_2 несовместны, то $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

Задача

x – время прихода Джульеты

y – время прихода Ромео

$$|x - y| < 14$$



$$P(\overline{A}) = \frac{\mu(\overline{A})}{\mu(\Omega)} = \frac{9}{16}$$

$$P(A) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

Частотное (статистическое) определение

Пусть опыт проведен N раз, и событие произошло m_A раз. Тогда **частота** события A :

$$\nu(A) = \frac{m_A}{N}$$

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{m_A}{N}$$

Аксиоматическое определение Колмагорова

Пусть \mathcal{A} — σ -алгебра событий на пространстве Ω . Числ функция $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^1$ — вероятность, если:

1. $\forall A \in \mathcal{A} P(A) \geq 0$ — аксиома неотрицательности
2. $P(\Omega) = 1$ — условие нормировки
3. если A_1, \dots, A_n, \dots попарно несовместны, то $P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Число $P(A)$ называется вероятностью соб-я A

Тройка (Ω, \mathcal{A}, P) — вероятностное пространство

Свойства $P(A)$

$$1. P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Док-во:

$$\Omega = A + \overline{A}$$

$$A \cdot \overline{A} = \emptyset$$

$$1 = P(\Omega) = P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$$

$$2. P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 0$$

$$3. A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

Док-во:

$$B = A + (B \setminus A)$$

$$P(B) = P(A + (B \setminus A)) = P(A) + \underbrace{P(B \setminus A)}_{\geq 0}$$

4. $\forall A : 0 \leq P(A) \leq 1$

5. Теорема сложения: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$

Док-во:

$$A = A\Omega = AB + A\bar{B}$$

$$B = B\Omega = AB + \bar{A}B$$

$$A + B = \underbrace{AB + A\bar{B} + \bar{A}B}_{\text{попарно несовместны}}$$

$$P(A) = P(A\bar{B}) + P(AB) \Rightarrow P(A) - P(AB) = P(A\bar{B})$$

$$P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B) \Rightarrow P(B) - P(AB) = P(\bar{A}B)$$

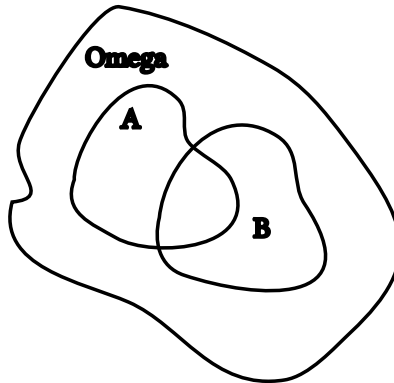
$$P(A + B) = P(AB) + P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) = P(AB) + P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

6. Обобщение теоремы сложения:

$$P\left(\underbrace{A_1 + A_2}_A + \underbrace{A_3}_B\right) = P(A) + P(B) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3)$$

$$P\left(\sum_i A_i\right) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_iA_j) + \sum_{i < j < k} P(A_iA_jA_k) - \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \dots A_n)$$

Условная вероятность



Переходим из Ω в B

Пусть $A, B \in \Omega$ и $P(B) \neq 0$, тогда вероятность A при условии B :

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Опр. A и B независимые, если $P(A|B) = P(A)$

Опр. A и B независимые, если $P(AB) = P(A)P(B)$

Любые несовместные события зависимы