Теория Вероятностей

Лекции

2024–2025

2024-09-06

Введение

$$\text{Итог} = 0.1 \cdot \text{ИДЗ} + 0.15 \cdot \text{Сем} + 0.25 \cdot \text{КР} + 50 \cdot \text{Экз}$$

Нужно набрать 4 — не 3.5

По ИДЗ бывают защиты

На семинарах могут быть самостоятельные

Кибзун, Горяинова, Наумов «ТВ и МС. Базовый курс с примерами к задачам» 2013 или 2014

КР на тему «случайные события и случайные величины (одномерные)» примерно после 7-ми занятий, в начале 20-ого модуля

Экз на тему «многомерные случайные величины»

Основные понятия

Опр. Теория Вероятностей — раздел математики, изучающий математические модели массовых случайных явлений

При большом кол-ве событий величина $\frac{m}{n} \to P$ стабилизируется

$\omega_1, ..., \omega_n$ — элементарные случайные события

Опр. Пространство Элементарных Событий (Ω) — совокупность элементарных случайных событий

Опр. Случайное событие — любое $A \subset \Omega$

Опр. Достоверное событие — событие, которое происходит в опыте всегда. Совпадает с Ω

Опр. Невозможное событие — событие, которое не происходит в опыте никогда. Является $\emptyset$

Операции над множествами/ событиями:
- Произведение событий $A \cdot B$ — событие из $A \cap B$
- Сумма событий $A + B$ — событие из $A \cup B$
- Разность событий $A \setminus B$
- Противоположное событие $\overline{A} = \Omega \setminus A$

Свойства операций над множествами:
- $A + A = A$
- $A \cdot A = A$
- $A \cdot \Omega = A$
- $A + \Omega = \Omega$
- $A + B = B + A$
- $A \cdot B = B \cdot A$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- $\overline{\overline{A}} = A$
- $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

Опр. σ-алгебра событий класс подмножеств в $\mathcal{A}$ на пространстве элементарных событий Ω, если:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$
3. $\forall A_1, ..., A_n, ... \in \mathcal{A} \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A} \wedge \Pi_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Классическое определение вероятности

Пусть Ω содержит **конечное** число **равновозможных взаимоисключающих** исходов, тогда:

Опр. Вероятность события A (классическое определение)

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

где |A| – мощность события, количество событий, входящих в A

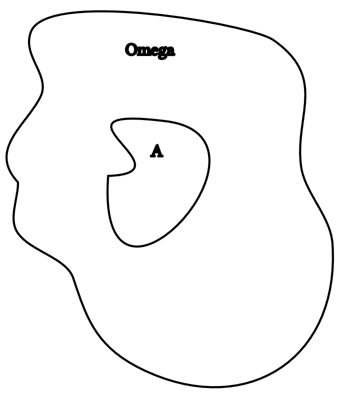
Свойства:
- $P(A) \in [0; 1]$
- $P(\Omega) = 1$
- Если $A \cdot B = \emptyset$, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$

2024-09-13

Геометрическое определение вероятности

Рассматриваем подмножества на $\mathbb{R}^n$, которые имеют конечную меру

Пример эксперимента: попадет ли случайная точка в подмножество



$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$

Опр. События **несовместны** — $A \cdot B = \emptyset$

Св-ва $P(A)$

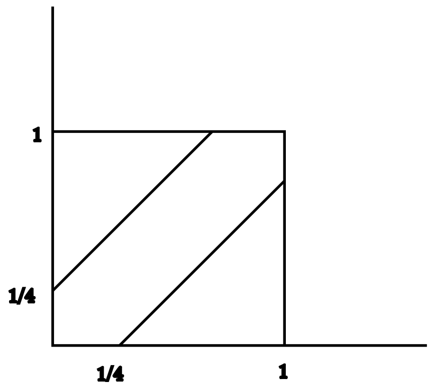
1. $P(A) \geq 0 \forall A \subset \Omega$
2. $P(\Omega) = 1$
3. если A_1 и A_2 несовместны, то $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

Задача

x — время прихода Джульеты

y — время прихода Ромео

$|x - y| < 14$



$$P\left(\overline{A}\right) = \frac{\mu\left(\overline{A}\right)}{\mu(\Omega)} = \frac{\frac{9}{16}}{1}$$

$$P(A) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

Частотное (статистическое) определение

Пусть опыт проведен N раз, и событие произошло m_A раз. Тогда **частота** события A: $\nu(A) = \frac{m_A}{N}$

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{m_A}{N}$$

Аксиоматическое определение Колмагорова

Пусть $\mathcal{A}$ — σ-алгебра событий на пространстве Ω. Числ функция $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^1$ — вероятность, если:

1. $\forall A \in \mathcal{A} P(A) \geq 0$ — аксиома неотрицательности
2. $P(\Omega) = 1$ — условие нормировки
3. если $A_1, ..., A_n, ...$ попарно несовместны, то $P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Число $P(A)$ называется вероятностью соб-я A

Тройка $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — вероятностное пространство

Свойства $P(A)$

1. $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$

Док-во

$$\Omega = A + \overline{A}$$

$$A \cdot \overline{A} = \emptyset$$

$$1 = P(\Omega) = P\left(A + \overline{A}\right) = P(A) + P\left(\overline{A}\right)$$

2. $P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 0$

3. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Док-во

$$B = A + (B \setminus A)$$

$$P(B) = P(A + (B \setminus A)) = P(A) + \underbrace{P(B \setminus A)}_{\geq 0}$$

4. $$\forall A : 0 \leq P(A) \leq 1$$

5. Теорема сложения: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$

Док-во

$$A = A\Omega = AB + A\overline{B}$$

$$B = B\Omega = AB + \overline{A}B$$

$$A + B = \underbrace{AB + A\overline{B} + \overline{A}B}_{\text{попарно несовместны}}$$

$$P(A) = P(AB) + P\left(A\overline{B}\right) \Rightarrow P(A) - P(AB) = P\left(A\overline{B}\right)$$

$$P(B) = P(AB) + P\left(\overline{A}B\right) \Rightarrow P(B) - P(AB) = P\left(\overline{A}B\right)$$

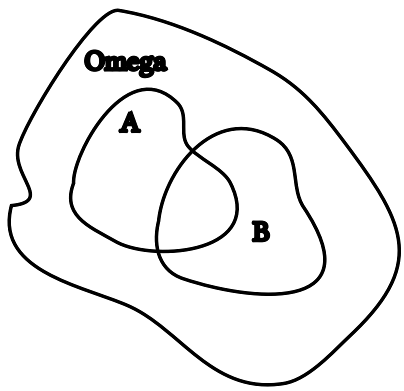
$$P(A + B) = P(AB) + P\left(A\overline{B}\right) + P\left(\overline{A}B\right) = P(AB) + P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

6. Обобщение теоремы сложения:

$$P\left(\underbrace{A_1 + A_2}_{A} + \underbrace{A_3}_{B}\right) = P(A) + P(B) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3)$$

$$P\left(\sum_i A_i\right) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P\left(A_iA_j\right) + \sum_{i<j<k} P\left(A_iA_jA_k\right) - \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \ldots A_n)$$

Условная вероятность



Переходим из Ω в B

Пусть $A, B \in \Omega$ и $P(B) \neq 0$, тогда вероятность A при условии B:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Опр. A и B **независимые**, если $P(A|B) = P(A)$

Опр. A и B **независимые**, если $P(AB) = P(A)P(B)$

Любые несовместные события зависимы

2024-09-20

Независимость в совокупности

Опр. События $A_1, ..., A_n$ **независимы в совокупности**, если

$$\forall 1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n : P(A_1 A_2 ...) = P\left(A_{i_1}\right) P\left(A_{i_2}\right) ...$$

- Независимы в совокупности $\rightarrow$ независимы попарно
- Независимы все подмножества $\rightarrow$ независимы совокупно

Тетраэдр; Стороны: красная, синяя, зеленая, все вместе

A_1 — выпала грань с **красным** цветом A_2 — выпала грань с **синим** цветом A_3 — выпала грань с **зеленым** цветом

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(A_1 A_2) = P(A_1 A_3) = P(A_2 A_3) = \frac{1}{4}$$

$$P(A_1 A_2 A_3) = \frac{1}{4} \neq P(A_1) P(A_2) P(A_3)$$

Теорема умножения вероятностей

Пусть $P(A_1 A_2 ... A_n) > 0$,

$$P\left(\overbrace{A_1 ... A_n}^{A}\right) = P(A_1) P(A_2 \mid A_1) P(A_3 \mid A_1 A_2) ... P(A_n \mid A_1 ... A_{n-1})$$

Док-во

Пусть:

$$\begin{gathered} B_{n-1} = A_1 ... A_{n-1} \\ B_{n-2} = A_1 ... A_{n-2} \\ \vdots \\ B_1 = A_1 \end{gathered}$$

Тогда

$$A = B_{n-1} A_n$$

$$
\begin{aligned}
P(A) = P(B_{n-1}A_n) = \\
= P\left(\overbrace{B_{n-1}}^{B_{n-2}A_{n-1}}\right)P(A_n \mid B_{n-1}) = \\
= P(A_n \mid A_1 ... A_{n-1})P(B_{n-2})P(A_{n-2} \mid B_{n-2}) = ...
\end{aligned}
$$

Пример

Перестановки: МАТАН

$$P('\text{М}' \ '\text{А}' \ '\text{Т}' \ '\text{А}' \ '\text{Н}') =$$

$$= P('\text{М}')P('\text{А}' \mid '\text{М}')P('\text{Т}' \mid '\text{М}' \ '\text{А}')P('\text{А}' \mid '\text{М}' \ '\text{А}' \ '\text{Т}')P('\text{Н}' \mid '\text{М}' \ '\text{А}' \ '\text{Т}' \ '\text{А}') =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1$$

Биномиальная схема испытаний Бернулли

Схема испытаний, которая удовлетворяет условиям:

- Исход двоичен. Происходит A (успех) или $\overline{A}$ (неудача)
- Всех испытания независимы в совокупности
- $p = P(A)$ не изменяется от опыта к опыту

k успехов из n испытаний:

$$P_{n(k)} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Док-во

Если все успехи в начале:

$$P\left(\underbrace{\text{УУ...У}}_{k}\text{НН...Н}\right) = p^k q^{n-k}$$

Учтем перестановки. Выберем, где места будут успехи (C_n^k способов):

$$P_{n(k)} = C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$P(k_1 \le k \le k_2) = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i q^{n-i}$$

$$1 = \sum_{k=0}^{n} P_{n(k)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^i p^i q^{n-i} = (p+q)^n = 1^n = 1$$

Наиболее вероятное число успехов

По определению:

$$k_0 = \operatorname{argmax}_{1 \le i \le n} C_n^i p^i q^{n-i}$$

По удобному:

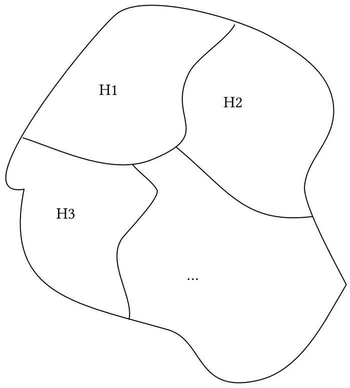
$$k_0 = \begin{cases} [(n+1)p] & \text{если } (n+1)p \notin \mathbb{Z} \\ (n+1)p \ \text{ и } (n+1)p-1 & \text{если } (n+1)p \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Формула полной вероятности

Опр. Пусть $H_1, ..., H_n \in \Omega$. Если
1. $\forall i \neq j : H_i \cdot H_j = \emptyset$
2. $H_1 + ... + H_n = \Omega$

то $H_1, ..., H_n$ **полная группа событий (гипотезы)**

Рис. 4. Полная группа событий (гипотезы)



Пусть $A \subset \Omega, H_1, ...H_n$ — полная группа событий

$$P(A) = P(A \cdot \Omega) = P(A \cdot (H_1 + ... + H_n)) =$$
$$= P(AH_1 + ...AH_n) \overset{\text{т.к несовместны}}{\widehat{=}} P(H_1)P(A \mid H_1) + ... + P(H_n)P(A \mid H_n)$$

Пример

N — всего билетов

m — билетов студент Сидоров выучил

A — Сидорову попался счастливый билет

Иванов заходит первый. Сидоров заходит второй.

H_1 — Иванов вытащил счастливый (для Сидорова)

H_2 — Иванов вытащил **не** счастливый (для Сидорова)

$$P(H_1) = \frac{m}{N}$$

$$P(H_2) = \frac{N-m}{N}$$

$$P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) =$$
$$= \frac{m}{N} \cdot \frac{m-1}{N-1} + \frac{N-m}{N} \cdot \frac{m}{N-1}$$

Для гипотез:
- Априорные вероятности — знаем ещё до опыта:

$$P(H_1), \ldots, P(H_n)$$

- Апостериорные вероятности — вероятности гипотез после эксперимента (когда знаем, что некоторое событие уже произошло):

$$P(H_1 \mid A), \ldots, P(H_n \mid A)$$

2024-09-27

Формула Байеса

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(AH_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A \mid H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j)P(A \mid H_j)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(H_i \mid A) = 1$$

Задача

Таблица 1. Условие

Завод	Процент поставленных деталей	Вероятность исправной детали
№ 1	65%	0.9
№ 2	35%	0.8

A — деталь с дефектом оказалась в самолете

H_1 — деталь взяли и 1-ого завода

$$P(H_1) = 0.65$$

$$P(A \mid H_1) = 0.1$$

H_2 — деталь взяли и 2-ого завода

$$P(H_1) = 0.35$$

$$P(A \mid H_1) = 0.2$$

$$P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + P(H_2)P(A \mid H_2) = 0.65 \cdot 0.1 + 0.35 \cdot 0.2$$

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1)P(A \mid H_1)}{P(A)} = \frac{65}{135} = 0.48$$

$$P(H_2 \mid A) = \frac{P(H_2)P(A \mid H_1)}{P(A)} = \frac{70}{135} = 0.52$$

Случайные величины (СВ)

Опр. Случайная величина — величина, которая после эксперимента принимает заранее неизвестное значение.

Числовая функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, которая удовлетворяет условию измеримости[1]:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \{\omega : \xi(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$$

Таблица 2. Пример с кубиком

$$\begin{array}{cccccc} \Omega = \{ & \omega_1, & \omega_2, & ..., & \omega_6 & \} \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ \xi = \{ & 1, & 2, & ..., & 3 & \} \end{array}$$

Опр. Функция распределения (вероятностей) случайно величины ξ называется функция

$$F_\xi(x) = P(\omega : \xi(\omega) \leq x)$$

Свойства $F(x)$:

1. $F(+\infty) = 1$

   $F(-\infty) = 0$

   $\forall x : 0 \leq F(x) \leq 1$

2. $F(x)$ не убывает: $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$

3. $F(x)$ непрерывна справа:

   $$F(x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0+} F(x_0 + \varepsilon),$$

   где x_0 — точка разрыва

Если некоторая $F(x)$ удовлетворяет условиям, то она является функцией распределения некоторой величины.

Случайные величины:
- Дискретные
- Непрерывные

Дискретный случайные величины

Опр. Случайную величину называют **дискретной**, если множество её возможных значений конечно или счетно.

Опр. Ряд распределения для дискретной СВ — табличка из ξ в P:

ξ	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Пример

ξ	-1	0	2
P	0.2	0.3	0.5

$$x < -1 : F(x) = 0$$

$$F(-1) = 0.2$$

[1] почти всегда исполняется

$$F(-0.5) = 0.2$$

$$F(0) = 0.2 + 0.3$$

$$F(2) = 1$$

$$x > 2 : F(x) = 1$$

Опр. Математическим ожиданием (E**)** дискретной СВ ξ называется число

$$E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

Предполагается, что ряд $\sum_{=1}^{\infty} |x_i| p_i$ сходится