

Теория Вероятностей

Лекции

Автор конспектов: Чубий Савва Андреевич

Преподаватель: Горяинова Елена Рудольфовна

2024–2025

2024-09-06	
Введение	4
Основные понятия	4
Классическое определение вероятности	5
Свойства вероятности	5
2024-09-13	
Геометрическое определение вероятности	5
Свойства $P(A)$	5
Задача	5
Частотное (статистическое) определение	6
Аксиоматическое определение Колмагорова	6
Свойства $P(A)$	6
Условная вероятность	7
2024-09-20	
Независимость в совокупности	8
Теорема умножения вероятностей	8
Биномиальная схема испытаний Бернулли	9
Наиболее вероятное число успехов	9
Формула полной вероятности	10
2024-09-27	
Формула Байеса	11
Задача	11
Случайные величины	12
Дискретные случайные величины	12
Числовые характеристики дискретных случайных величин	13
Математическое ожидание	13
2024-10-04	
Свойства математического ожидания	13
Дисперсия	13
Свойства дисперсии	13
Другие	14
Часто встречающиеся дискретные распределения	14

Распределение Бернулли	14
Биномиальное распределение	14
Распределение Пуассона	15
Геометрическое распределение	16
 2024-10-11	
Непрерывные случайные величины	16
Свойства плотности распределения	17
Числовые характеристики	18
Математическое ожидание	18
Свойства математического ожидания	18
Квантиль	18
Часто встречающиеся непрерывные распределения	19
Равномерное на интервале $(a; b)$	19
 2024-10-18	
Экспоненциальное (показательное) распределение	19
Распределение Гаусса (Нормальное распределение)	20
Стандартное распределение Гаусса	21
Уравнение Лапласа	21
Вероятность попадания в заданный интервал	21
 2024-11-01	
Неравенства Чебышева	22
Частные случаи	22
Пример	22
Случайные векторы	23
Свойства функции распределения	23
Дискретные случайные векторы	23
Непрерывные случайные векторы	24
Плотность распределения	24
Свойства плотности распределения	24
 2024-11-08	
Математическое ожидание	25
Свойства математического ожидания	25
Ковариация	26
Свойства ковариации	26
 2024-11-15	
Свойства коэффициента корреляции	27
Ковариационная матрица	28
Свойства ковариационной матрицы	28
Корреляционной матрица	28
Свойства корреляционной матрицы	28
Формула свертки	28
Пример	29
 2024-11-22	

Условные распределения	29
Для дискретных величин	29
Формула полного матожидания	30
Для непрерывных величин	30
Свойства условного матожидания	31
<hr/>	
2024-11-29	
Свойства условной дисперсии	31
Гауссовский вектор	31
Свойства гауссовского распределения	32
Виды сходимости случайных последовательностей	34
<hr/>	
2024-11-06	
<hr/>	
2024-12-13	
Неравенство Берри-Эссена	34
Закон больших чисел (ЗБЧ)	35
Теорема Чебышева	35
Теорема	35
Теорема	35
Усиленный закон больших чисел	36
Теорема Колмогорова	36
Метод Монте-Карло	36

2024-09-06

Введение

$$\text{Итог} = 0.1 \cdot \text{ИДЗ} + 0.15 \cdot \text{Сем} + 0.25 \cdot \text{КР} + 0.5 \cdot \text{Экз}$$

Нужно набрать 4 — не 3.5

По ИДЗ бывают защиты

На семинарах могут быть самостоятельные

Кибзун, Горяинова, Наумов «ТВ и МС. Базовый курс с примерами к задачам» 2013 или 2014

КР на тему «случайные события и случайные величины (одномерные)» примерно после 7-ми занятий, в начале 20-ого модуля

Экз на тему «многомерные случайные величины»

Основные понятия

Опр. Теория Вероятностей — раздел математики, изучающий математические модели массовых случайных явлений

При большом кол-ве событий величина $\frac{m}{n} \rightarrow P$ стабилизируется

$\omega_1, \dots, \omega_n$ — элементарные случайные события

Опр. Пространство Элементарных Событий (Ω) — совокупность элементарных случайных событий

Опр. Случайное событие — любое $A \subset \Omega$

Опр. Достоверное событие — событие, которое происходит в опыте всегда. Совпадает с Ω

Опр. Невозможное событие — событие, которое не происходит в опыте никогда. Является \emptyset

Операции над множествами/ событиями:

- Произведение событий $A \cdot B$ — событие из $A \cap B$
- Сумма событий $A + B$ — событие из $A \cup B$
- Разность событий $A \setminus B$
- Противоположное событие $\bar{A} = \Omega \setminus A$

Свойства операций над событиями:

- $A + A = A$
- $A \cdot A = A$
- $A \cdot \Omega = A$
- $A + \Omega = \Omega$
- $A + B = B + A$
- $A \cdot B = B \cdot A$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $\overline{A \cdot (B \cdot C)} = (\bar{A} \cdot \bar{B}) \cdot \bar{C}$
- $\overline{\bar{A}} = A$
- $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$

Опр. σ -алгебра событий класс подмножеств в \mathcal{A} на пространстве элементарных событий Ω , если:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$

$$2. A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$$

$$3. \forall A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A} \wedge \prod_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$

———— Классическое определение вероятности ————

Опр. Пусть Ω содержит **конечное** число **равновозможных** **взаимоисключающих** исходов, тогда, **вероятность события A :**

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

где $|A|$ – мощность события, количество событий, входящих в A

———— Свойства вероятности ————

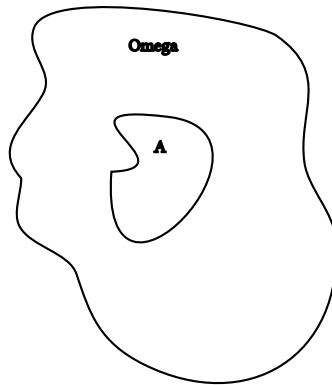
- $P(A) \in [0; 1]$
- $P(\Omega) = 1$
- Если $A \cdot B = \emptyset$, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$

2024-09-13

———— Геометрическое определение вероятности ————

Рассматриваем подмножества на \mathbb{R}^n , которые имеют конечную меру

Пример эксперимента: попадет ли случайная точка в подмножество



$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Опр. События **несовместны** – $A \cdot B = \emptyset$

———— Свойства $P(A)$ ————

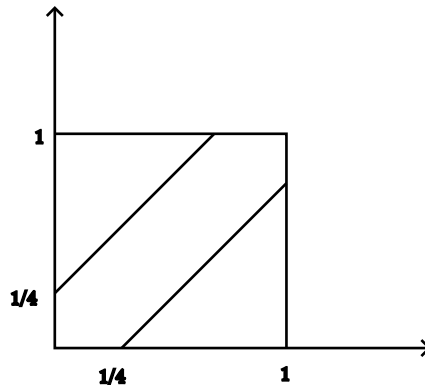
1. $P(A) \geq 0 \forall A \subset \Omega$
2. $P(\Omega) = 1$
3. если A_1 и A_2 несовместны, то $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

———— Задача ————

x – время прихода Джульеты

y – время прихода Ромео

$$|x - y| < 14$$



$$P(\overline{A}) = \frac{\mu(\overline{A})}{\mu(\Omega)} = \frac{9}{16}$$

$$P(A) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

Частотное (статистическое) определение

Опр. Пусть опыт проведен N раз, и событие произошло m_A раз. Тогда **частота** события A :

$$\nu(A) = \frac{m_A}{N}$$

Опр.

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \nu(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{m_A}{N}$$

Аксиоматическое определение Колмагорова

Пусть \mathcal{A} — σ -алгебра событий на пространстве Ω . Числовая функция $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ — **вероятность**, если:

1. $\forall A \in \mathcal{A} : P(A) \geq 0$ — аксиома неотрицательности
2. $P(\Omega) = 1$ — условие нормировки
3. если A_1, \dots, A_n, \dots попарно несовместны, то $P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Число $P(A)$ называется вероятностью события A

Тройка (Ω, \mathcal{A}, P) — вероятностное пространство

Свойства $P(A)$

$$1. P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Док-во

$$\Omega = A + \overline{A}$$

$$A \cdot \overline{A} = \emptyset$$

$$1 = P(\Omega) = P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$$

$$2. P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 0$$

$$3. A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

Док-во

$$B = A + (B \setminus A)$$

$$P(B) = P(A + (B \setminus A)) = P(A) + \underbrace{P(B \setminus A)}_{\geq 0}$$

4. $\forall A : 0 \leq P(A) \leq 1$

5. Теорема сложения: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$

Док-во

$$A = A\Omega = AB + A\bar{B}$$

$$B = B\Omega = AB + \bar{A}B$$

$$A + B = \underbrace{AB + A\bar{B} + \bar{A}B}_{\text{попарно несовместны}}$$

$$P(A) = P(AB) + P(A\bar{B}) \Rightarrow P(A) - P(AB) = P(A\bar{B})$$

$$P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B) \Rightarrow P(B) - P(AB) = P(\bar{A}B)$$

$$P(A + B) = P(AB) + P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) =$$

$$= P(AB) + P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

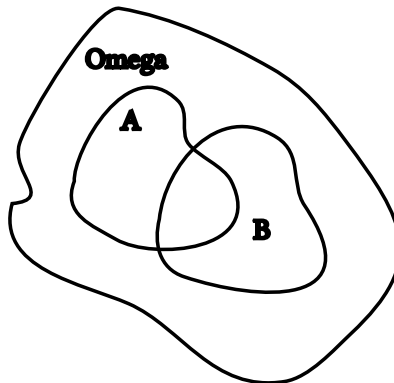
6. Обобщение теоремы сложения:

$$P\left(\underbrace{A_1 + A_2}_A + \underbrace{A_3}_B\right) = P(A) + P(B) =$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3)$$

$$P\left(\sum_i A_i\right) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_iA_j) + \sum_{i < j < k} P(A_iA_jA_k) - \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \dots A_n)$$

Условная вероятность



Переходим из Ω в B

Пусть $A, B \in \Omega$ и $P(B) \neq 0$, тогда вероятность A при условии B :

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Опр. A и B **независимые**, если $P(A|B) = P(A)$

Опр. A и B **независимые**, если $P(AB) = P(A)P(B)$

Любые несовместные события зависимы

2024-09-20

Независимость в совокупности

Опр. События A_1, \dots, A_n **независимы в совокупности**, если

$$\forall 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n : P(A_{i_1} A_{i_2} \dots) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \dots$$

- Независимы в совокупности \rightarrow независимы попарно
- Независимы все подмножества \rightarrow независимы совокупно

Пример

Дан тетраэдр. Четыре стороны покрашены в красный, синий, зеленая и все три цвета соответственно.

A_1 — выпала грань с **красным** цветом

A_2 — выпала грань с **синим** цветом

A_3 — выпала грань с **зеленым** цветом

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(A_1 A_2) = P(A_1 A_3) = P(A_2 A_3) = \frac{1}{4}$$

$$P(A_1 A_2 A_3) = \frac{1}{4} \neq P(A_1) P(A_2) P(A_3)$$

Теорема умножения вероятностей

Пусть $P(A_1 A_2 \dots A_n) > 0$,

$$P\left(\overbrace{A_1 \dots A_n}^A\right) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 A_2) \dots P(A_n | A_1 \dots A_{n-1})$$

Док-во

Пусть:

$$B_{n-1} = A_1 \dots A_{n-1}$$

$$B_{n-2} = A_1 \dots A_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$B_1 = A_1$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 A &= B_{n-1}A_n \\
 P(A) &= P(B_{n-1}A_n) = \\
 &= P\left(\overbrace{B_{n-2}A_{n-1}}^{B_{n-1}}\right)P(A_n | B_{n-1}) = \\
 &= P(A_n | A_1 \dots A_{n-1})P(B_{n-2})P(A_{n-2} | B_{n-2}) = \dots
 \end{aligned}$$

Пример

Перестановки: МАТАН

$$\begin{aligned}
 &P('M' 'A' 'T' 'A' 'H') = \\
 &= P('M')P('A' | 'M')P('T' | 'M' 'A')P('A' | 'M' 'A' 'T')P('H' | 'M' 'A' 'T' 'A') = \\
 &= \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1
 \end{aligned}$$

Биномиальная схема испытаний Бернулли

Схема испытаний, которая удовлетворяет условиям:

- Исход двоичен. Происходит A (успех) или \bar{A} (неудача)
- Всех испытания независимы в совокупности
- $p = P(A)$ не изменяется от опыта к опыту

k успехов из n испытаний:

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Док-во

Если все успехи в начале:

$$P\left(\underbrace{Y Y \dots Y}_k H H \dots H\right) = p^k q^{n-k}$$

Учтем перестановки. Выберем, где места будут успехи (C_n^k способов):

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$P(k_1 \leq k \leq k_2) = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i q^{n-i}$$

$$1 = \sum_{k=0}^n P_{n(k)} = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1$$

Наиболее вероятное число успехов

По определению:

$$k_0 = \operatorname{argmax}_{1 \leq i \leq n} C_n^i p^i q^{n-i}$$

По удобному:

$$k_0 = \begin{cases} [(n+1)p] & \text{если } (n+1)p \notin \mathbb{Z} \\ (n+1)p & \text{и } (n+1)p - 1 \text{ если } (n+1)p \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

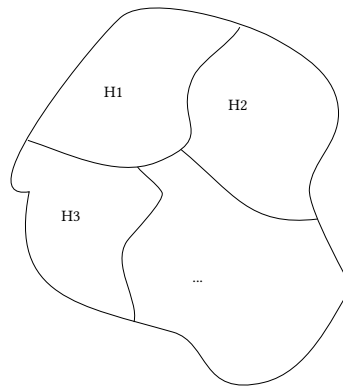
Формула полной вероятности

Опр. Пусть $H_1, \dots, H_n \in \Omega$. Если

1. $\forall i \neq j : H_i \cdot H_j = \emptyset$
2. $H_1 + \dots + H_n = \Omega$

то H_1, \dots, H_n **полная группа событий (гипотезы)**

Рис. 4. Полная группа событий (гипотезы)



Пусть $A \subset \Omega$, H_1, \dots, H_n — полная группа событий

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cdot \Omega) = P(A \cdot (H_1 + \dots + H_n)) = \\ &= P(AH_1 + \dots + AH_n) \stackrel{\text{т.к. несовместны}}{=} P(H_1)P(A | H_1) + \dots + P(H_n)P(A | H_n) \end{aligned}$$

Пример

N — всего билетов

m — билетов студент Сидоров выучил

A — Сидорову попался счастливый билет

Иванов заходит первый. Сидоров заходит второй.

H_1 — Иванов вытащил счастливый (для Сидорова)

H_2 — Иванов вытащил **не** счастливый (для Сидорова)

$$P(H_1) = \frac{m}{N}$$

$$P(H_2) = \frac{N-m}{N}$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1)P(A | H_1) + P(H_2)P(A | H_2) = \\ &= \frac{m}{N} \cdot \frac{m-1}{N-1} + \frac{N-m}{N} \cdot \frac{m}{N-1} \end{aligned}$$

Для гипотез:

- Априорные вероятности — знаем ещё до опыта:

$$P(H_1), \dots, P(H_n)$$

- Апостериорные вероятности — вероятности гипотез после эксперимента (когда знаем, что некоторое событие уже произошло):

$$P(H_1 | A), \dots, P(H_n | A)$$

2024-09-27

Формула Байеса

$$P(H_i | A) = \frac{P(AH_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A | H_i)}{\sum_{j=1}^n P(H_j)P(A | H_j)}$$

$$\sum_{i=1}^n P(H_i) = 1$$

$$\sum_{i=1}^n P(H_i | A) = 1$$

Задача

Таблица 1. Условие

За- вод	Процент поставленных деталей	Вероятность исправной детали
№ 1	65%	0.9
№ 2	35%	0.8

A — деталь с дефектом оказалась в самолете

H_1 — деталь взяли и 1-ого завода

$$P(H_1) = 0.65$$

$$P(A | H_1) = 0.1$$

H_2 — деталь взяли и 2-ого завода

$$P(H_2) = 0.35$$

$$P(A | H_2) = 0.2$$

$$P(A) = P(H_1)P(A | H_1) + P(H_2)P(A | H_2) = 0.65 \cdot 0.1 + 0.35 \cdot 0.2$$

$$P(H_1 | A) = \frac{P(H_1)P(A | H_1)}{P(A)} = \frac{65}{135} = 0.48$$

$$P(H_2 | A) = \frac{P(H_2)P(A | H_2)}{P(A)} = \frac{70}{135} = 0.52$$

Случайные величины

Опр. Случайная величина (СВ) — величина, которая после эксперимента принимает заранее неизвестное значение.

Числовая функция $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, которая удовлетворяет условию измеримости¹:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \{\omega : \xi(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$$

Таблица 2. Пример с кубиком

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega = \{ & \omega_1, & \omega_2, & \dots, & \omega_6 & \} \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ \xi = \{ & 1, & 2, & \dots, & 3 & \} \end{array}$$

Опр. Функция распределения (вероятностей) случайной величины ξ называется функция

$$F_\xi(x) = P(\omega : \xi(\omega) \leq x)$$

Свойства $F(x)$:

$$1. F(+\infty) = 1$$

$$F(-\infty) = 0$$

$$\forall x : 0 \leq F(x) \leq 1$$

$$2. F(x) \text{ не убывает: } x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$$

3. $F(x)$ непрерывна справа:

$$F(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} F(x_0 + \varepsilon),$$

где x_0 — точка разрыва

Если некоторая $F(x)$ удовлетворяет условиям, то она является функцией распределения некоторой величины.

Случайные величины:

- Дискретные
- Непрерывные

Дискретные случайные величины

Опр. Случайную величину называют **дискретной**, если множество её возможных значений конечно или счетно.

Опр. Ряд распределения для дискретной СВ — табличка из ξ в P :

ξ	x_1	x_2	\dots	x_n
P	p_1	p_2	\dots	p_n

Пример

¹почти всегда выполняется

ξ	-1	0	2
P	0.2	0.3	0.5

$$x < -1 : F(x) = 0$$

$$F(-1) = 0.2$$

$$F(-0.5) = 0.2$$

$$F(0) = 0.2 + 0.3$$

$$F(2) = 1$$

$$x > 2 : F(x) = 1$$

Числовые характеристики дискретных случайных величин

Математическое ожидание

Опр. Математическим ожиданием E (среднее значение) дискретной СВ ξ называется число

$$E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

Предполагается, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i$ сходится

2024-10-04

Свойства математического ожидания

1. $Ec = c$
2. $E(c\xi) = cE(\xi)$
3. Если $a \leq \xi \leq b$, то $a \leq E\xi \leq b$.
4. $E(\xi_1 + \xi_2) = E(\xi_1) + E(\xi_2)$
5. Пусть $\eta = \varphi(\xi)$, где φ — детерминированная функция, тогда $E\eta = E\varphi(\xi) = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) p_i$

Дисперсия

Опр. Дисперсией случайной величины ξ называется число

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2$$

Свойства дисперсии

1. $Dc = 0$
2. $D(c\xi) = c^2 D(\xi)$
3. $\forall \xi : D(\xi) \geq 0$
4. $D(\xi) = E(\xi^2 - 2\xi E\xi + (E\xi)^2) = E(\xi^2) - 2(E\xi)^2 + (E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$ — удобная формула для вычислений
5. $D(\xi_1 + \xi_2) = E(\xi_1 + \xi_2)^2 - (E(\xi_1 + \xi_2))^2 = E(\xi_1^2) + 2E(\xi_1 \xi_2) + E(\xi_2^2) - (E\xi_1)^2 - 2E\xi_1 E\xi_2 + (E\xi_2)^2 = D\xi_1 + D\xi_2 + 2 \underbrace{(E(\xi_1 \xi_2) - E\xi_1 E\xi_2)}_{\text{ковариация}} = D\xi_1 + D\xi_2 + 2 \text{ cov}(\xi_1, \xi_2)$
6. Если ξ_1 и ξ_2 независимы, то $\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0 \rightarrow D(\xi_1 + \xi_2) = D\xi_1 + D\xi_2$

· Другие ·

Опр. Среднеквадратическое отклонение: $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$

Опр. Начальный момент порядка k ($k = 1, 2, \dots$): $\mu_k = E\xi^k$

$$\mu_1 = E\xi$$

Опр. Центральный момент порядка k ($k = 2, 3, \dots$): $\nu_k = E(\xi - E\xi)^k$

$$\nu_2 = D\xi$$

Опр. Центрированная случайная величина: $\xi^0 = \xi - E\xi$

$$E\xi^0 = 0$$

Опр. Нормированная случайная величина: $\xi^* = \frac{\xi^0}{\sigma}$

$$D\xi^* = D\frac{\xi^0}{\sigma} = \frac{1}{\sigma^2}D\xi^0 = 1$$

—— Часто встречающиеся дискретные распределения ——

· Распределение Бернулли ·

$\xi \underset{\text{имеет распределение}}{\sim} \text{Ber}(p), 0 < p < 1$

ξ	0	1
P	$1-p$	p

ξ^2	0	1
P	$1-p$	p

$$E\xi = 0 + 1 \cdot p = p$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

· Биномиальное распределение ·

$$\xi \sim \text{Bi}(n, p), 0 < p < 1$$

ξ	0	...	k	...	n
P	$C_n^k p^k q^{n-k}$

Матожидание. Способ 1:

$$\begin{aligned} E\xi &= \sum_{k=0}^n k \cdot C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^n k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = np \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} q^{n-k} = \\ &= \{i = k-1\} = np \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!} p^i q^{n-1-i} = np \cdot 1 = np \end{aligned}$$

Матожидание. Способ 2:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \dots + \xi_n$$

$$\xi_i \sim \text{Ber}(p)$$

$$E\xi = E\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n (E\xi_i) = np$$

Дисперсия. Способ 1:

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \sum_{k=0}^n k^2 \cdot C_n^k p^k q^{n-k} = \dots$$

Дисперсия. Способ 2:

$$D\xi = D\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) \underset{\text{т.к. независимы}}{\equiv} \sum_{i=1}^n D(\xi_i) = npq$$

Пример

Бросаем монетку 10 раз.

$$n = 10, p = 0.5 \rightarrow \begin{cases} E\xi = 10 \cdot 0.5 = 5 \\ D\xi = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 2.5 \end{cases}$$

Распределение Пуассона

$$\xi \sim \Pi(\lambda), \lambda > 0$$

$$\xi = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$P(\xi = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

Проверим условие нормировки:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

Матожидание:

$$E\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

Дисперсия:

$$\begin{aligned} D\xi &= E\xi^2 - (E\xi)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} - \lambda^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{(k-1)!} - \lambda^2 = \\ &= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} (k-1+1) \frac{e^{-\lambda} \lambda^{k-1}}{(k-1)!} - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda \end{aligned}$$

Теорема Пуассона Пусть проводятся испытания по схеме Бернулли, причем $n \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$, $np \rightarrow \lambda$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

Док-во

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{n^k} \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k} = 1 \cdot \frac{e^{-\lambda}}{1} = e^{-\lambda} \end{aligned}$$

Погрешность при замене Бернулли на Пуассона:

$$\left| C_n^k p^k q^{n-k} - \frac{e^{-np} (np)^k}{k!} \right| \leq np^2$$

Геометрическое распределение

$$\xi \sim G(p), 0 < p < 1$$

$$\xi = \{1, 2, \dots\}$$

$$P(\xi = k) = q^{k-1} p$$

Смысл: Испытание с двумя исходами. Останавливаемся, когда произошел первый успех.

Матожидание:

$$\begin{aligned} E\xi &= \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} (q^k)' = \\ &= p \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k \right)' = p \left(\frac{q}{1-q} \right)' = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Дисперсия:

$$D\xi = \frac{q}{p^2}$$

Пример

Студент знает 80% материала. Его спрашивают, пока не завалят.

$$\xi \sim G(0.2)$$

2024-10-11

Непрерывные случайные величины

Нельзя задать рядом распределения

Можно задать функцией распределения

Опр. Плотность $f_{\xi}(x)$ случайно величины — такая неотрицательная кусочная функция, что

$$\forall x \in R : F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(t) dt$$

Опр. Случайные величины, для которых определена плотность определения, будем называть **непрерывными**².

Канторова лестница

Пример функции, которая непрерывна, но плотности не имеет

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}F(3x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}F(3x-2), & \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

В точках дифференцируемости функции $F(x)$: $f(x) = F'(x)$

С какой вероятностью будет принято какое-то конкретное значение x :

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < \xi \leq x + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$f(x)\Delta x \underset{\Delta x \rightarrow 0}{\rightleftharpoons} P(x < \xi \leq x + \Delta x)$$

Итого, ответ 0

—— Свойства плотности распределения ——

- $\forall x : f(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = F(+\infty) = 1$
- $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 < \xi \leq x_2)$
- Пусть
 - ξ имеет плотность распределения $f_{\xi}(x)$
 - $\eta = \varphi(\xi)$, где φ — монотонная, дифференцируемая, детерминированная функция

Тогда,

$$f_{\eta}(y) = f_{\xi}(\varphi^{-1}(y)) |(\varphi^{-1}(y))'|$$

Док-во

1. Пусть $\varphi(x)$ — монотонно возрастающая

$$F_{\eta}(y) = P(\eta \leq y) = P(\varphi(\xi) \leq y) = P(\xi \leq \varphi^{-1}(y)) = F_{\xi}(\varphi^{-1}(y))$$

$$f_{\eta}(y) = (F_{\eta}(y))' = f_{\xi}(\varphi^{-1}(y))(\varphi^{-1}(y))'$$

2. Пусть $\varphi(x)$ — монотонно убывающая

²На самом деле есть три вида величин:

1. Дискретные
2. Сингулярные
3. Абсолютно непрерывные

Но мы рассматриваем только два вида

$$F_{\eta}(y) = P(\eta \leq y) = P(\varphi(\xi) \leq y) = P(\xi \geq \varphi^{-1}(y)) = 1 - F_{\xi}(\varphi^{-1}(y))$$

$$f_{\eta}(y) = (F_{\eta}(y))' = -f_{\xi}(\varphi^{-1}(y)) \underbrace{(\varphi^{-1}(y))'}_{<0}$$

- Если функция не монотонная, то нужно разделить её на интервалы монотонности и применить прошлый пункт

— Числовые характеристики —

· Математическое ожидание ·

Опр. Математическим ожиданием непрерывной случайной величины ξ называется число

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x) dx,$$

если интеграл сходится абсолютно:

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_{\xi}(x) dx.$$

Для бесконечностей:

- Если $f(x) > 0$ только при $x > 0$ и $\int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x) dx$ расходится, то $E\xi = +\infty$
- Если $f(x) > 0$ только при $x < 0$ и $\int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x) dx$ расходится, то $E\xi = -\infty$

Свойства математического ожидания

1. $Ec = c$
2. $E(c\xi) = cE(\xi)$
3. Если $a \leq \xi \leq b$, то $a \leq E\xi \leq b$.
4. $E(\xi_1 + \xi_2) = E(\xi_1) + E(\xi_2)$
5. Пусть $\eta = \varphi(\xi)$, где φ — детерминированная функция, тогда $E\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_{\xi}(x) dx$

— Квантиль —

Опр. Число z_{γ} , $0 < \gamma < 1$ называется **γ -квантилью** непрерывного строго монотонного распределения $F_{\xi}(x)$, если $\underbrace{F_{\xi}(z_{\gamma})}_{=P(\xi \leq z_{\gamma})} = \gamma$

Для непрерывного распределения верно:

$$\int_{-\infty}^{z_{\gamma}} f_{\xi}(x) dx = \gamma$$

Для дискретных величин в качестве квантили берут минимальное подходящее число:

$$z_{\gamma} = \min\{x : F(x) \geq \gamma\}$$

Если $\forall x : f(-x) = f(x)$, то $z_{\gamma} = -z_{1-\gamma}$.

Опр. Квантиль уровня 0.5 называется **медианой**.

Опр. Квантили уровня 0.25 и 0.75 называются **нижним и верхним квартилем**.

— Часто встречающиеся непрерывные распределения —

Равномерное на интервале $(a; b)$

$$\xi \sim R(a, b)$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (a, b) \\ \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b) \end{cases}$$

$$E\xi = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \underbrace{\int_{-\infty}^a 0 dt}_{=0} + \underbrace{\int_a^x \frac{1}{b-a} dt}_{=1} = \frac{x-a}{b-a}, & x \in (a, b) \\ \underbrace{\int_{-\infty}^a 0 dt}_{=0} + \underbrace{\int_a^x \frac{1}{b-a} dt}_{=1} + \underbrace{\int_b^x 0 dt}_{=0} = 1, & x \geq b \end{cases}$$

2024-10-18

Пусть есть генератор случайной величины $\xi \sim R(0; 1)$.

Хотим получить случайную величину $\eta \sim F_\eta(y)$

$$\eta = F_\eta^{-1}(\xi)$$

Обратная функция всегда существует т.к. F возрастает

Экспоненциальное (показательное) распределение

$$\xi \sim E(\lambda), \lambda > 0$$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E\xi &= \int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x} dx = \{\text{по частям}\} = \\ &= \underbrace{-e(-\lambda x) \Big|_0^\infty}_0 + \frac{1}{\lambda} \underbrace{\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx}_{=1 \text{ (из усл. нормировки)}} = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

$$D\xi = E\xi^2 - \frac{1}{\lambda^2} = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \dots = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = -e^{-\lambda t} \Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Характеристическое свойство экспоненциального распределения

Пусть:

$$\xi \sim E(\lambda)$$

Тогда:

$$\forall t > 0 \forall \tau > 0 : P(\xi > t + \tau \mid \xi > t) = P(\xi > \tau)$$

Док-во

$$\begin{aligned} P(\xi > t + \tau \mid \xi > t) &= \frac{P(\xi > t + \tau)}{P(\xi > t)} = \frac{1 - F(t + \tau)}{1 - F(t)} = \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+\tau)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda \tau} = 1 - F(\tau) = P(\xi > \tau) \end{aligned}$$

Из непрерывных только экспоненциальное обладает этим свойством. Из дискретных — только геометрическое.

Пример применения: теория массового обслуживания (например, обслуживание клиентов, обработка интернет-запросов)

Распределение Гаусса (Нормальное распределение)

$$\xi \sim N(m, \sigma^2)$$

m — математическое ожидание

σ^2 — дисперсия

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Симметрична относительно прямой $x = m$

$$f_{\max} = f(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

При увеличении σ график становится шире, но ниже.

Интеграл от $f(x)$ не берется, $F(x)$ записать нельзя, поэтому используют таблички.

$$\begin{aligned} E\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-m+m}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-m}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) dx}_{\text{нечетная}} + m \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx}_{=1} = m \end{aligned}$$

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-m)^2}{\sqrt{1\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) = \left\{y = \frac{x-m}{\sigma}\right\} =$$

$$= 2\sigma^2 \int_0^{+\infty} \frac{y^2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy = 2\sigma^2 \left(\underbrace{\frac{y}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)}_{=0} \Big|_0^{+\infty} - \underbrace{\int_0^{\infty} f(y) dy}_{=\frac{1}{2}} \right) = \sigma^2$$

Стандартное распределение Гаусса

Чтобы использовать таблички, используем **стандартное** гауссовское распределение.

$$\xi \sim N(0; 1)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Рис. 5. Купюра с изображением гауссовского распределения



Уравнение Лапласа

$$\Phi_0(x) = \int_0^x \frac{\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} dt$$

Очень быстро стремится к нулю (для числа пять почти равна нулю (до 7-ого знака))

$$\Phi_0(+\infty) = \frac{1}{2}$$

$$\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$$

$$-\frac{1}{2} \leq \Phi_0(x) \leq \frac{1}{2}$$

$$\Phi(x) := F(x) = \Phi_0(x) + \frac{1}{2}$$

Вероятность попадания в заданный интервал

Хотим посчитать вероятность попадания ξ в интервал (α, β) .

Общий случай:

$$P(\alpha < \xi < \beta) = \left\{ y = \frac{x-m}{\sigma}; dy = \frac{1}{\sigma} dx \right\} = \int_{\frac{\alpha-m}{\sigma}}^{\frac{\beta-m}{\sigma}} \frac{\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} = \Phi_0\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right)$$

Если интервал симметричен относительно m

$$P(|\xi - m| < \delta) = \Phi_0\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi_0\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

Правило трех сигм:

$$P(|\xi - m| < 3\sigma) = 2\Phi_0\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi_0(3) \approx 0.997$$

Т.е. почти все значение лежат в промежутке $(-3\sigma, 3\sigma)$.

2024-11-01

Неравенства Чебышева

Пусть

$$E|\xi|^r < \infty,$$

Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 : P(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{E|\xi|^r}{\varepsilon^r}.$$

Часто дает очень грубую оценку

Док-во

$$E|r| = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^2 f(x) dx \geq \int_{|x| \geq \varepsilon} |x|^2 f(x) dx \geq \varepsilon^r \int_{|x| \geq \varepsilon} f(x) dx = \varepsilon^r P(|\xi| \geq \varepsilon)$$

Частные случаи

- Неравенство Маркова: $r = 1$ и $P(\xi \geq 0) = 1$

$$P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{E(\xi)}{\varepsilon}$$

- $r = 2$:

$$P(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{E\xi^2}{\varepsilon^2}$$

- $r = 2$ и $\eta = \varepsilon - E\xi$:

$$P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D}{\varepsilon^2}$$

Пример

ξ — расход электроэнергии $E\xi = 4000 \frac{\text{Кв}}{\text{ч}}$

Оценить, что в какой-то день $P(\xi \geq 10000)$

$$r = 1$$

$$P(\xi \geq 0) = 1$$

$$P(\xi \geq 10000) = \frac{4000}{10000} = 0.4$$

———— Случайные векторы ————

Опр. Вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, где ξ_1, \dots, ξ_n — случайные величины, называется **случайным вектором**.

Случайные вектора нужны, так как случайные величины обычно полезно рассматривать в совокупности.

Опр. Функцией распределения случайного вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ называется функция

$$F_\xi(x_1, \dots, x_n) := P(\xi_1 \leq x_1 \wedge \dots \wedge \xi_n \leq x_n)$$

Пусть $n = 2$: $F_\xi(xy) = P(\xi_1 \leq x, \xi_2 \leq y)$

———— Свойства функции распределения ————

На примере $n = 2$

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq F(x, y) \leq 1$
2. $F(-\infty, -\infty) = F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$
3. $F(+\infty, +\infty) = 1$
4. $F_\xi(+\infty, y) = F_{\xi_2}(y)$
 $F_\xi(x, +\infty) = F_{\xi_1}(x)$
5. $P(a_1 \leq \xi_1 \leq a_2, b_1 \leq \xi_2 \leq b_2) = F(a_2, b_2) - F(a_1, b_2) - F(a_2, b_1) + F(a_1, b_1)$
6. $F(x, y)$ монотонно не убывает по каждому аргументу

Док-во

$$F(x + \Delta x, y) = P(\xi_1 \leq x + \Delta x, \xi_2 \leq y) = \underbrace{P(\xi_1 \leq x, \xi_2 \leq y)}_{=F(x,y)} + \underbrace{P(x \leq \xi_1 \leq x + \Delta x, \xi_2 \leq y)}_{\geq 0}$$

Опр. Частное/ маргинальное распределение — распределение одной из компонент вектора

Опр. Компоненты ξ_1, ξ_2 случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ называются **независимыми**, если $F_\xi(x, y) = F_{\xi_1}(x) \cdot F_{\xi_2}(y)$

———— Дискретные случайные векторы ————

Опр. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ называется **дискретным**, если ξ_1 и ξ_2 — дискретные случайные величины.

Табличный способ задания

	y_1	\dots	y_k
x_1	p_{11}	\dots	p_{1k}
\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
x_n	p_{n1}	\dots	p_{nk}

$$P_{ij} = P(\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j)$$

$$P_{i\cdot} := \sum_{j=1}^k p_{ij}$$

$$P(\xi_1 = x_1) = p_{1\cdot}$$

$$P(\xi_2 = y_1) = p_{\cdot 1}$$

Опр. Компоненты ξ_1, ξ_2 дискретного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ **независимы**, если $\forall i, j : P_{ij} = p_{i\cdot} p_{\cdot j}$

Непрерывные случайные векторы

Плотность распределения

Опр. Неотрицательная кусочно непрерывная функция $f_\xi(x, y)$, такая что

$$F_\xi(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(t_1, t_2) dt_2 dt_1$$

называется **плотностью распределения** $\xi = (\xi_1, \xi_2)$.

В точках, где $F_\xi(x, y)$ дифференцируема:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Свойства плотности распределения

- $\forall x, y : f(x, y) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = F(+\infty, +\infty) = 1$
- $\int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dx dy = F(a_2, b_2) - F(a_2, b_1) - (F(a_1, b_2) - F(a_1, b_1)) = P(a_1 \leq \xi_1 \leq a_2, b_1 \leq \xi_2 \leq b_2)$
- $P(\xi \in D) = \iint_D f(x, y) dx dy$

$$F_{\xi_1}(x) = F_\xi(x, +\infty) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1, t_2) dt_2 dt_1$$

$$f_{\xi_1}(x) = \frac{d}{dx} F_{\xi_1}(x) = \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1, t_2) dt_2 dt_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t_2) dt_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

2024-11-08

Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ — непрерывный случайный вектор. Тогда

ξ_1 и ξ_2 независимы $\Leftrightarrow f_\xi(x, y) = f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y)$

Док-во

• (\rightarrow)

$$f_\xi(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F_{\xi_1}(x) F_{\xi_2}(y)}{\partial x \partial y} = \frac{dF_{\xi_1}(x)}{dx} \frac{dF_{\xi_2}(y)}{dy} = f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y)$$

• (\leftarrow)

$$F_\xi(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_\xi(t, s) ds dt = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{\xi_1}(t) f_{\xi_2}(s) ds dt = F_{\xi_1}(x) F_{\xi_2}(y)$$

Опр. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ имеет равномерное распределение в области $D \in \mathbb{R}^n$, если

$$f_{\xi}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} c, & \text{if } (x_1, \dots, x_n) \in D \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

При $n = 2 : c = \frac{1}{S_D}$

Пример 1

Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ распределен равномерно в прямоугольнике с углами в $(0, 0), (1, 1)$. Хотим проверить [не]зависимость компонент.

$$f_{\xi}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \in (0, 1) \wedge y \in (0, 1) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi}(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^1 1 dy = 1, & \text{if } x \in (0, 1) \\ 0, & \text{if } x \notin (0, 1) \end{cases}$$

$$f_{\xi_2}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi}(x, y) dx = \begin{cases} \int_0^1 1 dx = 1, & \text{if } y \in (0, 1) \\ 0, & \text{if } y \notin (0, 1) \end{cases}$$

Т.к. $f_{\xi}(x, y) = f_{\xi_1}(x) \cdot f_{\xi_2}(y)$, то компоненты независимы

Пример 2

Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ распределен равномерно в круге с центром $(0, 0)$ и радиусом r .

$$f_{\xi}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi r^2}, & \text{if } x^2 + y^2 \leq R^2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{1}{\pi r^2} dy = \begin{cases} \frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi r^2}, & \text{if } |x| \leq r \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f_{\xi_2}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \frac{1}{\pi r^2} dx = \begin{cases} \frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi r^2}, & \text{if } |y| \leq r \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Т.к. $f_{\xi}(x, y) \neq f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y)$, то ξ_1 и ξ_2 — зависимы

Математическое ожидание

Опр. Математическим ожиданием вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ называется вектор

$$E\xi = (E\xi_1, \dots, E\xi_n).$$

Свойства математического ожидания

- $E(\xi_1 + \xi_2) = E\xi_1 + E\xi_2$

Док-во

Для дискретного случая (для непрерывного аналогично):

$$\begin{aligned} E\left(\underbrace{\xi_1 + \xi_2}_{\eta}\right) &= \sum_i \sum_j (x_i + y_j) p_{ij} = \sum_i \sum_j x_i p_{ij} + \sum_i \sum_j y_j p_{ij} = \\ &= \sum_i x_i p_{i\cdot} + \sum_j y_j p_{\cdot j} = E\xi_1 + E\xi_2 \end{aligned}$$

- Если ξ_1 и ξ_2 независимы, то $E(\xi_1 \xi_2) = E\xi_1 \cdot E\xi_2$

Док-во

Для непрерывного случая (для дискретного аналогично):

$$\begin{aligned} E\xi_1 \xi_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x, y) dx dy \stackrel{\text{независимы}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi_1}(x) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{\xi_2}(y) dy = E\xi_1 E\xi_2 \end{aligned}$$

— Ковариация —

Опр. Ковариация³ ξ_1 и ξ_2 ($\text{cov}(\xi_1, \xi_2)$ или $k_{\xi_1 \xi_2}$):

$$k_{\xi_1 \xi_2} = E(\xi_1 - E\xi_1)(\xi_2 - E\xi_2) = E\xi_1^0 \xi_2^0$$

Опр. Коэффициентом корреляции ξ_1 и ξ_2 называется

$$\rho_{\xi_1 \xi_2} = \frac{k_{\xi_1 \xi_2}}{\sqrt{D\xi_1 D\xi_2}} = k_{\xi_1^* \xi_2^*}$$

Опр. Величины ξ_1 и ξ_2 называются **некоррелированными**, если $\rho_{\xi_1 \xi_2} = 0$

Опр. Величины ξ_1 и ξ_2 называются **положительно коррелированными**, если $\rho_{\xi_1 \xi_2} > 0$

Опр. Величины ξ_1 и ξ_2 называются **отрицательно коррелированными**, если $\rho_{\xi_1 \xi_2} < 0$

Свойства ковариации

- $\text{cov}(\xi, \xi) = D\xi$
 - $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2 \text{cov}(\xi, \eta)$
 - $\text{cov}(\xi, \eta) = \text{cov}(\eta, \xi)$
 - $\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta) = \dots = E\xi\eta - E\xi E\eta$
 - $\text{cov}(a\xi + b, c\eta + d) = ac \text{cov}(\xi, \eta)$
 - $|\rho_{\xi\eta}| = \frac{|\text{cov}(\eta, \xi)|}{\sigma_\xi \sigma_\eta} \leq 1$ — коэффициент корреляции
- $$|\text{cov}(\eta, \xi)| \leq \sigma_\xi \sigma_\eta$$

Док-во

$$\begin{aligned} 0 \leq D(\xi^* + \eta^*) &= D\xi^* + D\eta^* + 2 \text{cov}(\xi^*, \eta^*) = 1 + 1 + 2\rho_{\xi\eta} \\ &\Rightarrow \rho_{\xi\eta} \geq -1 \end{aligned}$$

³от «совместная изменяемость»

$$0 \leq D(\xi^* - \eta^*) = D\xi^* + D\eta^* - 2 \operatorname{cov}(\xi^*, \eta^*) = 1 + 1 - 2\rho_{\xi\eta}$$

$$\Rightarrow \rho_{\xi\eta} \leq 1$$

$$-1 \leq \rho_{\xi\eta} \leq 1$$

- Если ξ и η независимы и с конечными дисперсиями, то $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 0$

Док-во

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(\xi, \eta) &= E\xi^0\eta^0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_\xi)(y - m_\eta) f(x, y) dx dy = \\ &\stackrel{\substack{\text{независимы}}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_\xi) f_\xi(x) (y - m_\eta) f_\eta(y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_\xi) f_\xi dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (y - m_\eta) f_\eta dy = 0 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

2024-11-15

Свойства коэффициента корреляции

- $\rho_{\xi\eta} \leq 1$
- $\rho_{\xi\xi} = 1$
- Если $\eta = a\xi + b, a \neq 0$, то

$$\rho_{\xi\eta} = \begin{cases} 1, & \text{if } a > 0 \\ -1, & \text{if } a < 0 \end{cases}$$

Док-во

$$\begin{aligned} \rho_{\xi\eta} &= \frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}} = \frac{E\xi\eta - E\xi E\eta}{\sqrt{D\xi D\eta}} = \frac{E\xi(a\xi + b) - E\xi E(a\xi + b)}{\sqrt{D\xi D(a\xi + b)}} = \\ &= \frac{aE\xi^2 + bE\xi - a(E\xi)^2 - bE\xi}{\sqrt{a^2(D\xi)^2}} = \frac{a(E\xi^2 - (E\xi)^2)}{|a|D\xi} = \frac{aD\xi}{|a|D\xi} \end{aligned}$$

- Пусть $|\rho_{\xi\eta}| = 1 \Rightarrow \eta = a\xi + b$

Док-во

- Пусть $\rho_{\xi\eta} = 1$:

$$\begin{aligned} D(\xi^* - \eta^*) &= D\xi^* + D\eta^* + 2 \operatorname{cov}(\xi^*, -\eta^*) = \\ &= D\xi^* + D\eta^* - 2 \operatorname{cov}(\xi^*, \eta^*) = 2 - 2\rho_{\xi\eta} = 2(1 - \rho_{\xi\eta}) = 0 \end{aligned}$$

$$D(\xi^* - \eta^*) = 0$$

$$\xi^* - \eta^* = c$$

$$\frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi} - \frac{\eta - m_\eta}{\sigma_\eta} = c$$

► Пусть $\rho_{\xi\eta} = -1$:

$$D(\xi^* + \eta^*) = D\xi^* + D\eta^* + 2 \operatorname{cov}(\xi^*, \eta^*) = 2(1 + \rho_{\xi\eta}) = 0$$

Пример: зависимы, но не коррелированы

$$x \sim R(-a, a)$$

$$n = \xi^2$$

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = E\xi\eta - \underbrace{E\xi E\eta}_{=0} = E\xi^3 = \int_{-a}^a \xi^3 \cdot \frac{1}{2a} dx = 0$$

Так получается, потому что ковариация «отлавливает» только линейные зависимости

— Ковариационная матрица —

Опр. Ковариационной матрицей вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ называется матрица $K_\xi = (k_{ij})$, где $k_{ij} = \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j)$

· Свойства ковариационной матрицы ·

- $k_{ij} = k_{ji}$
- $k_{ii} = D\xi_i$
- K_ξ — неотрицательно определенная:

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} : \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j k_{ij} \geq 0$$

Док-во

$$0 \leq E \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i^0 \right)^2 = E \left(\sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j \xi_i^0 \xi_j^0 \right) = \lambda_i \lambda_j \sum_i \sum_j E(\xi_i^0 \xi_j^0) = \lambda_i \lambda_j \sum_i \sum_j k_{ij}$$

— Корреляционной матрица —

Опр. Корреляционной матрицей вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ называется матрица $R_\xi = (\rho_{ij})$, где $\rho_{ij} = \rho(\xi_i, \xi_j)$

· Свойства корреляционной матрицы ·

- $\rho_{ij} = \rho_{ji}$
- $\rho_{ii} = 1$
- ρ_ξ — неотрицательно определенная

По ковариационной матрице можно построить корреляционную, а наоборот – не можем

— Формула свертки —

Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимы, $\xi_1 \sim f_{\xi_1}(x)$, $\xi_2 \sim f_{\xi_2}(y)$, $\eta = \xi_1 + \xi_2$. $f_\eta(z) = ?$

$$F_{\eta(z)} = P(\eta \leq z) = P(\xi_1 + \xi_2 \leq z) = \iint_{x+y \leq z} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y) dy dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z-x} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y) dy dx$$

$$f_{\eta}(z) = \frac{d}{dz} F_{\eta}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(z-x) dx$$

Пример

$$\xi_1 \sim N(0, 1); \xi_2 \sim N(0, 1)$$

ξ_1, ξ_2 — независимы

$$\eta = \xi_1 + \xi_2$$

$$\begin{aligned} f_{\eta}(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2} - \left(\frac{z^2}{2} - \frac{2xz}{2} + \frac{x^2}{2}\right)} dx = \\ &= \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}}} e^{-(x-\frac{z}{2})^2} dx = \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Снова получили гауссово распределение

Пусть ξ_1, \dots, ξ_n — независимые случайные величины такие, что $\xi_i \sim N(m_i, \sigma_i^2)$, то

$$(\eta = \xi_1 + \dots + \xi_n) \sim N(m_{\eta}, D_{\eta}),$$

где

$$m_{\eta} = \sum m_i$$

$$D_{\eta} = \sum D_i$$

2024-11-22

Условные распределения

Для дискретных величин

	y_1	\dots	y_k
x_1	p_{11}	\dots	p_{1k}
\vdots			
x_m	p_{m1}	\dots	p_{mk}

$$P(\xi = x_i | \eta = y_j) = \frac{P(\xi = x_i \wedge \eta = y_j)}{P(\eta = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{.j}}$$

Опр. Набор вероятностей $\frac{p_{ij}}{p_{.j}}, \forall i = 1 \dots m$ называется **условным распределением вероятности** ξ при условии $\{\eta = y_j\}$.

Опр. Условной функцией распределения ξ при условии $\{\eta = y_j\}$ называется

$$F_{\xi}(x | y_j) = P(\xi \leq x | \eta = y_j)$$

Опр. Условным математическим ожиданием ξ при условии $\{\eta = y_j\}$ называется

$$E(\xi | \eta = y_j) = \sum_{i=1}^m x_i P(\xi = x_i | \eta = y_j) = \sum_{i=1}^m x_i \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$$

- Если η уже зафиксирована, то $E(\xi | \eta = y_j)$ — число.
- Если η ещё неизвестна, то $E(\xi | \eta)$ — функция от аргумента η .

$E(\xi \eta)$	$E(\xi \eta = y_1)$...	$E(\xi \eta = y_k)$
P	$p_{\cdot 1}$...	$p_{\cdot k}$

—— Формула полного матожидания ——

$$E(E(\xi | \eta)) = E(\xi)$$

Док-во

$$E(E(\xi | \eta)) = \sum_{j=1}^k E(\xi | \eta = y_j) p_{\cdot j} = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m x_i \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^m x_i \sum_{j=1}^k p_{ij} = \sum_{i=1}^m x_i p_{i\cdot} = E\xi$$

—— Для непрерывных величин ——

Опр. Пусть $f(x, y)$ и $f_{\eta}(y)$ — непрерывны в точке y и $f_{\eta}(y) > 0$. Тогда **условной функцией распределения** ξ при условии $\{\eta = y\}$ называется функция

$$F_{\xi}(x | y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0+} P(\xi \leq x | y < \eta \leq y + \Delta y)$$

Корректность определения:

$$\begin{aligned} F_{\xi}(x | y) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0+} P(\xi \leq x | y < \eta \leq y + \Delta y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0+} \frac{P(\xi \leq x \wedge y < \eta \leq y + \Delta y)}{P(y < \eta \leq y + \Delta y)} = \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0+} \frac{\int_{-\infty}^x \int_y^{y+\Delta y} f(t, s) ds dt}{\int_y^{y+\Delta y} f_{\eta}(s) ds} = \left\{ \begin{array}{l} \text{По теореме о среднем значении} \\ s', s'' \in (y; y + \Delta y) \\ \Delta y \rightarrow 0 \Rightarrow s', s'' \rightarrow 0 \end{array} \right\} = \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0+} \frac{\Delta y \int_{-\infty}^x f(t, s') dt}{\Delta y f_{\eta}(s'')} = \frac{\int_{-\infty}^x f(t, y) dt}{f_{\eta}(y)} \end{aligned}$$

Опр. Пусть $f(x, y), f_{\eta}(y)$ непрерывны в точке y и $f_{\eta}(y) > 0$. Функция $f_{\eta}(x | y)$ называется **условной плотностью** ξ при условии $\{\eta = y\}$, если

$$F_{\xi}(x | y) = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(t | y) dt$$

В точках дифференцируемости функции $F_{\xi}(x | y)$:

$$F(x | y) = (F_{\xi}(x | y))'_x$$

Утв: ξ и η независимы, если $f(x | y) = f_{\xi}(x)$

Док-во

$$f_{\xi}(x | y) = \left(\frac{\int_{-\infty}^x f(t, y) dt}{f_{\eta}(y)} \right)'_x = \frac{f(x, y)}{f_{\eta}(y)}$$

Пример

Пусть (ξ, η) распределена равномерно в круге радиуса R с центром в $(0, 0)$.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2}, & \text{if } x^2 + y^2 \leq R^2 \\ 0, & \text{if } x^2 + y^2 > R^2 \end{cases}$$

$$f_{\eta}(y) = \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \frac{1}{\pi R^2} dx = \begin{cases} \frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2}, & \text{if } |y| < R \\ 0, & \text{if } |y| > R \end{cases}$$

$$\forall y (|y| < R) : f_{\xi}(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_{\eta}(y)} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{R^2-y^2}}, & \text{if } -\sqrt{R^2-y^2} < x < \sqrt{R^2-y^2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Получаем равномерное распределение

$$E(\xi | \eta = y)$$

——— Свойства условного математического ожидания ———

- $E(c | \eta) = c$
- $E(c\xi | \eta) = cE(\xi | \eta)$
- $E(\varphi(\xi)\psi(\eta) | \eta) = \psi(\eta)E(\varphi(\xi) | \eta)$
- Пусть ξ и η независимы, тогда $E(\xi | \eta) = E(\xi)$
- Формула полного математического ожидания: $E(E(\xi | \eta)) = E(\xi)$

Док-во

$$\begin{aligned} E(E(\xi | \eta)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x | y) dx \right) f_{\eta}(y) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{f(x, y)}{f_{\eta}(y)} f_{\eta}(y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi}(x) dx = \\ &= E\xi \end{aligned}$$

2024-11-29

——— Свойства условной дисперсии ———

- $D(\xi | \eta = y_j) = \sum_{i=1}^m (x_i - E(\xi | \eta = y_j))^2 \frac{p_{ij}}{p_j}$
- $D(\xi | \eta = y) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(\xi | \eta = y))^2 f_{\xi}(x | y) dx$

——— Гауссовский вектор ———

Условие нормировки для распределения Гаусса

Пусть ξ_1 и ξ_2 независимы и $\xi_1, \xi_2 \sim N(0, 1)$.

$$\xi = (\xi_1, \xi_2)$$

$$f_{\xi_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$f_{\xi}(x, y) = f_{\xi_1}(x)f_{\xi_2}(y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(x, y) dx dy &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_2}(y) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) = \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ |J| = r \end{array} \right\} = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{r}{2\pi} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) dr d\varphi = \int_0^{+\infty} r \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) dr = \\ &= \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) d\frac{r^2}{2} = -\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \Big|_0^{+\infty} = 1 \end{aligned}$$

Опр. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$ имеет нормальное (гауссовское) распределение $\xi \sim N(m, K)$, если плотность распределения имеет вид:

- в векторном виде:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det K}} \exp\left(-\frac{1}{2}((x-m)^T K^{-1}(x-m))\right)$$

- в виде функции от n переменных:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\sqrt{\det C}}{\sqrt{(2\pi)^n}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\sum_r \sum_j c_{rj} (x_r - m_r)(x_j - m_j) \right)\right)$$

— Свойства гауссовского распределения —

- $E\xi = m; K_{\xi} = k$
- Любой подвектор гауссового вектора — тоже гауссовый вектор
- Пусть $\eta = \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i$ и не все $\alpha_i = 0$, тогда η тоже имеет гауссовое распределение.
- Пусть $\eta = A\xi + B$, где A — матрица размера $K \times n$, а B — вектор размера K .

$$\eta \sim N(Am_{\xi} + B, AK_{\xi}A^T)$$

- Если компоненты гауссового вектора попарно некоррелированы, то они независимы⁴

Док-во

$$\forall i \neq j : \rho_{\xi_i \xi_j} = 0 \Rightarrow \text{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0$$

⁴Это работает именно для гауссового распределение

$$K = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

$$C = K^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_n^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \sigma_1 \dots \sigma_n}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} (x_i - m_i)^2\right) = \\ &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_1 - m_1)^2}{\sigma_1^2}\right)}_{f_{\xi_1}(x_1)} \cdot \dots \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_n - m_n)^2}{\sigma_n^2}\right)}_{f_{\xi_n}(x_n)} \end{aligned}$$

• Теорема о нормальной корреляции

Пусть

$$z = (z_1, \dots, z_n)^T \sim N(m_z, K_z)$$

$$\eta = (z_1, \dots, z_l)^T$$

$$\xi = (z_{l+1}, \dots, z_m)^T$$

$$m_z^T = (m_\eta^T, m_\xi^T)$$

$$K_z = \begin{pmatrix} K_{\eta\eta} & K_{\eta\xi} \\ K_{\xi\eta} & K_{\xi\xi} \end{pmatrix}$$

Тогда

$$(\eta \mid \xi = x) \sim N(m_{\eta \mid \xi=x}, K_{\eta \mid \xi=x}),$$

где

$$m_{\eta \mid \xi=x} = m_\eta + K_{\eta\xi} K_{\xi\xi}^{-1} (x - m_\xi)$$

$$K_{\eta \mid \xi=x} = K_{\eta\eta} - K_{\eta\xi} K_{\xi\xi}^{-1} K_{\xi\eta}^T$$

При $n = 2$:

$$m_{\eta \mid \xi=x} = m_\eta + \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{D\xi} (x - m_\xi)$$

$$D(\eta \mid \xi = x) = D\eta - \frac{(\text{cov}(\xi, \eta))^2}{D\xi}$$

Пример

На бирже акциями торгуют A и B .

$$(\xi_A, \xi_B) \sim N(m, K)$$

$$m = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 4 & 3.6 \\ 3.6 & 9 \end{pmatrix}$$

- $P(\xi_A > \xi_B) - ?$
- $\xi_B = 14; E(\xi_A \mid \xi_B = 14) - ?; D(\xi_A \mid \xi_B = 14) - ?$

Решение:

$$P(\xi_A > \xi_B) = P(\xi_A - \xi_B > 0)$$

$$\xi_A - \xi_B \sim N(-2, 2.4^2)$$

Дальше по функции Лапласа

$$E(\xi_A \mid \xi_B = 14) = 10 + \frac{3.6}{9}(14 - 12) = 10.8$$

$$D(\xi_A \mid \xi_B) = 4 - \frac{3.6^2}{9} = 2.56$$

Виды сходимости случайных последовательностей

Опр. Последовательность случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ определенных на одном вероятностном пространстве Ω , называют **случайной последовательностью**: $\{\xi_n\}_{n=1, \dots}$.

Опр. Случайная последовательность ξ_n **сходится по вероятности** к ξ : $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, если

$$\forall \varepsilon > 0 : P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

2024-11-06

Тут пропущена лекция

2024-12-13

Неравенство Берри-Эссена

Пусть ξ_1, \dots, ξ_n — независимые, одинаково распределены и $D\xi_i < \infty$,

$$\eta_n = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - E \sum_{i=1}^n \xi_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n D\xi_i}}$$

То

$$\sup_x |F_{\eta_n}(x) - \Phi(x)| \leq \frac{C \cdot E|\xi_1 - m_1|^3}{\sqrt{n}\sigma^3}$$

Где C — некоторая константа, которая постоянно уточняется. Сейчас известно, что $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \leq C < 0.478$.

———— Закон больших чисел (ЗБЧ) ————

Говорят, что случайная последовательность ξ_1, \dots, ξ_n удовлетворяет ЗБЧ, если

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\xi_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0$$

———— Теорема Чебышева ————

Пусть ξ_1, \dots, ξ_n некоррелированы и $D\xi_1, \dots, D\xi_n$ ограничены в совокупности (т.е. $\exists C > 0 : \forall k : D\xi_k \leq C$), тогда ЗБЧ.

Док-во

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 : P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\xi_i\right| > \varepsilon\right) &\leq \frac{D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i\right)}{\varepsilon^2} \leq \dots \\ D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i\right) &\underset{\text{т.к. некоррелированы}}{\equiv} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D\xi_i \leq \frac{C \cdot n}{n^2} = \frac{C}{n} \\ \dots &\leq \frac{C}{\varepsilon^2 \cdot n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \end{aligned}$$

———— Теорема ————

Пусть ξ_1, \dots, ξ_n одинаково распределены и $D\xi_i < \infty$, тогда ЗБЧ.

Док-во

$$\forall \varepsilon > 0 : P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\xi_i\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i\right)}{\varepsilon^2} = \frac{n \cdot D}{n^2 \cdot \varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

———— Теорема ————

Пусть ξ_k — количество «успехов» в k испытаниях Бернулли с вероятностью p .

$p^* = \frac{\xi_n}{n}$ — СВ, частота успеха

$$\xi_n = \eta_1 + \dots + \eta_n, \text{ где } \eta_i \sim \text{Bi}(p)$$

$$p^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta_i$$

$$Ep^* = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta_i\right) = p$$

$$D\eta_i = pq < \infty$$

По ЗБЧ:

$$p^* = \frac{1}{n} \xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} p$$

Усиленный закон больших чисел

Говорят, что случайная последовательность ξ_1, \dots, ξ_n удовлетворяет УЗБЧ, если

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\xi_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п. н.}} 0$$

Если УЗБЧ, то и ЗБЧ.

Теорема Колмогорова

Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ независимы, одинаково распределены и $m < \infty$, тогда УЗБЧ: т.е. $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п. н.}} m$

Метод Монте-Карло

Пример. Хотим посчитать $\int_a^b g(x) dx$

$$\xi_1, \dots, \xi_n \sim R(a, b)$$

ξ_1, \dots, ξ_n независимы

По УЗБЧ: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п. н.}} E g(\xi_i) = \int_a^b g(x) \underbrace{f_\xi(x) dx}_{\frac{1}{b-a}}$

$$I^* = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п. н.}} \int_a^b g(x) dx$$

Имеет смысл применять в многомерных случаях.

I — истинное значение интеграла

$$P(|I^* - I| < \delta) = p$$

По ЦПТ:

$$\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) - I}{\sqrt{D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\right)}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} U,$$

где $U \sim N(0, 1)$

$$\sqrt{D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\right)} = \frac{n}{n^2} D(g(\xi_1)) = \frac{Dg(\xi_1)}{n}$$

$$P(|I^* - I| < \delta) = 2\Phi_0\left(\frac{\delta}{\sqrt{D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\right)}}\right) = p = 2\Phi_0\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sqrt{Dg(\xi_1)}}\right)$$

Для применения этой формулы полезно ограничить дисперсию, а не считать её напрямую.