ОТЧЕТ:
студента 408 группы Котлярова Николая
по вычислительному практикуму

December 2, 2021

Задание 2. Наилучшее приближение в $L_2(\Omega)$ функции двух переменных.

1. Постановка задачи:
Для заданной функции $f(x, y) \in L_2(\Omega)$ требуется найти ее наилучшее приближение линейной комбинацией $\sum_{j=1}^{n} c_j g_j(x, y)$ линейно независимых элементов $g_1, ..., g_n \in L_2(\Omega)$, т.е. найти набор коэффициентов c_{j_0} такой, что:

$$\Delta = ||f - \sum_{j=1}^{n} c_{j0} g_j(x, y)|| = \inf_{c_1, \ldots, c_n} ||f - \sum_{j=1}^{n} c_j g_j(x, y)||$$

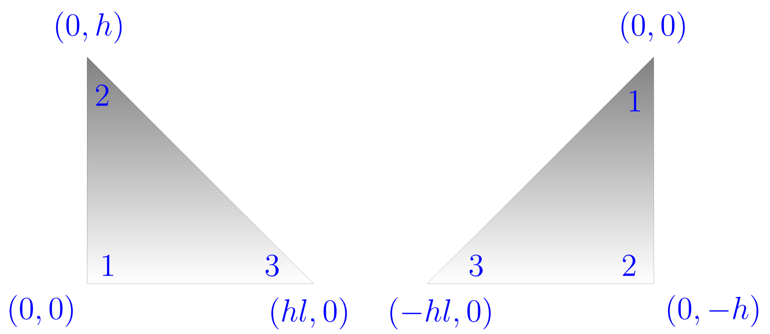
Здесь $||\psi|| = (\psi, \psi)$, где $(\psi, \phi) = \int \psi \overline{\phi} dxdy$.
Линейно независимые элементы g_j (x, y) строятся как базисные функции в методе конечных элементов для заданного способа разбиения области Ω и заданного набора узлов на конечном элементе.
Известно, что решение этой задачи существует, единственно и сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений вида $Ac = b$, где A — матрица Грама с элементами $a_{ij} = (g_i, g_j)$, b - вектор проекций заданной функции на базис, т.е. $b_j = (f, g_j)$, а c — искомый вектор коэффициентов наилучшего приближения.

Конкретная постановка задачи определяется:
1) формой области — $TPL(l) - 1$ (прямоугольный треугольник) с вершинами:

$$(0, 0), (1, 0), (0, l);$$

2) способом разбиения на конечные элементы — прямоуг. треуг. с катетами: h и lh;
3) выбором вершин треугольников в качестве узлов для построения функций форм;
4) методом решения системы линейных уравнений — метод 1 (Direct Lanczos).

2. Функции формы и локальная матрица Грамма:
Разбиение представлено двумя типами конечных элементов:



Функции формы конечных элементов:

$$\Phi_1 = 1 + \frac{-x - ly}{lh},\ \Phi_2 = \frac{y}{h},\ \Phi_3 = \frac{x}{hl}$$

$$\tilde{\Phi}_1 = 1 + \frac{x + ly}{lh},\ \tilde{\Phi}_2 = -\frac{y}{h},\ \tilde{\Phi}_3 = -\frac{x}{hl}$$

Локальная матрица Грама:

$$H_{3\times 3} = \frac{h^2 l}{24}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Глобальная матрица Грама и нумерация базисных векторов:

$$A_{\frac{(n+1)(n+2)}{2}\times\frac{(n+1)(n+2)}{2}} = \frac{h^2 l}{24}\begin{bmatrix} K_{n+1,n+1} & L_{n+1,n} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ L^T_{n+1,n} & M_{n,n} & L_{n,n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^T_{n,n-1} & M_{n-1,n-1} & L_{n-1,n-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & L^T_{3,2} & M_{2,2} & L_{2,1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & L^T_{2,1} & K_1 \end{bmatrix}$$

Где соответственно матрицы:

$$K_{n+1\times n+1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_{n\times n} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 12 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 12 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 12 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$L_{n+1\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ненулевых элементов всего:

$$NE = \frac{7n^2 + 9n + 2}{2}$$

Нумерация базисных векторов происходит так:

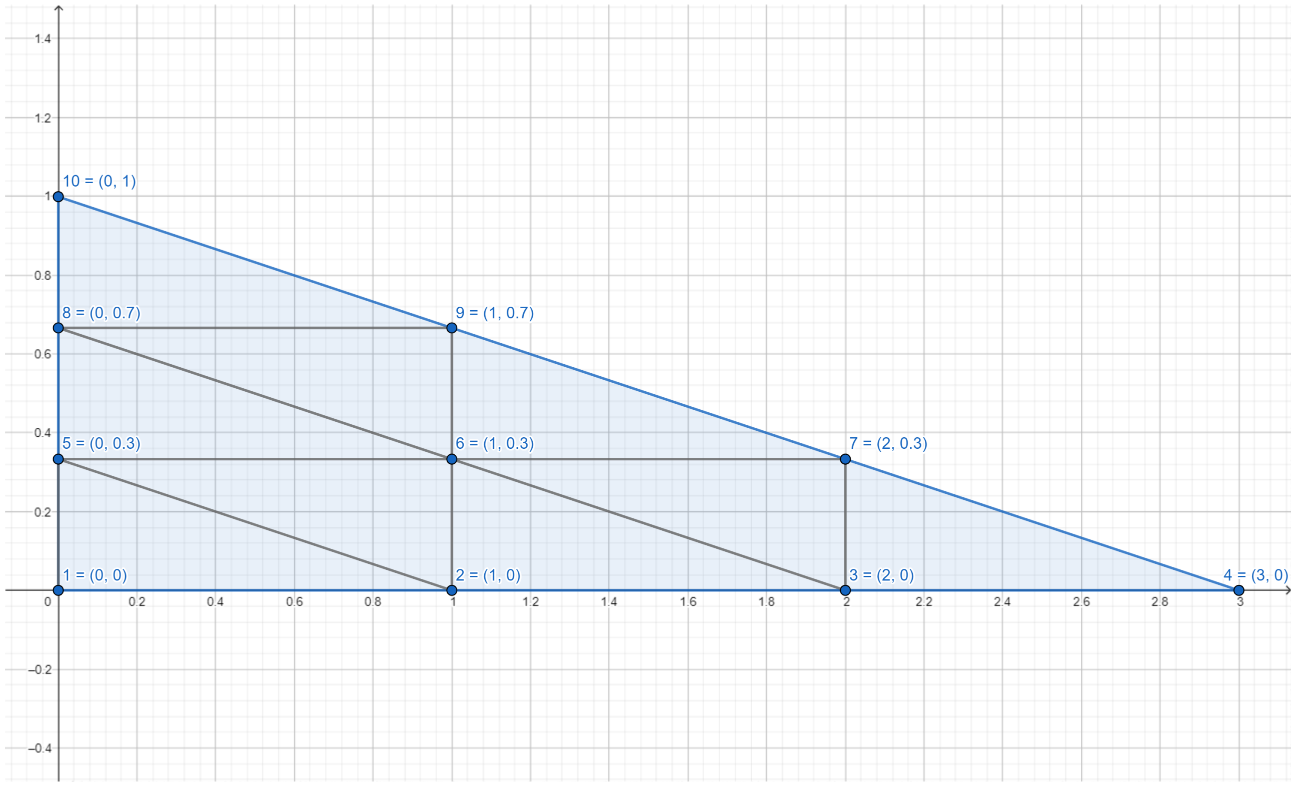


Figure 1: Нумерация базисных векторов

4. Метод решения систем линейных уравнений (алгоритм 1):

$$Algorithm(DirectLanczos)$$

1. *Compute* $r_0 := b - Ac_0$, $\xi_1 :=:= ||r_0||$, *and* $v_1 := \frac{r_0}{\beta}$
2. *Set* $\lambda_1 := \beta_1 := 0, p_0 := 0$
3. *For j = 1, 2, . . . until convergence Do:*
4. *Compute* $w := Av_j - \beta_j v_{j-1}$ *and* $\alpha_j := (w, v_j)$
5. *If j > 1 then compute* $\lambda_j := \frac{\beta_j}{\eta_{j-1}}$ *and* $\xi_j := \lambda_j \xi_{j-1}$
6. $\eta_j := \alpha_j \lambda_j \beta_j$
7. $p_j := (v_j - \beta_j p_{j-1})/\eta_j$
8. $c_j := c_{j-1} + \xi_j p_j$
9. $w := w - \alpha_j v_j$
10. $\beta_{j+1} := ||w||$, *and* $v_{j+1} := \frac{w}{\beta_{j+1}}$
11. *EndDo*

5. Таблица результатов счета при l = 1 (в скобочках - кол-во итераций):
1) Для $\epsilon = 10^{-4}$*:*

h/f	$f = 1$	$f = x + y$	$f = x^2 + y^2 + xy$
1/8	9.991e-05 (8)	1.776e-05 (11)	7.134e-04 (11)
1/16	9.642e-05 (10)	3.566e-05 (12)	1.812e-04 (12)
1/32	7.451e-05 (11)	5.849e-05 (11)	6.923e-05 (11)
1/64	9.988e-05 (10)	7.854e-05 (10)	3.413e-05 (11)

2) Для $\epsilon = 10^{-6}$*:*

h/f	*f = 1*	$f = x + y$	$f = x^2 + y^2 + xy$
1/8	*1.054e-08 (10)*	*4.512e-07 (14)*	*7.132e-04 (15)*
1/16	*7.811e-07 (13)*	*6.441e-07 (16)*	*1.783e-04 (17)*
1/32	*8.041e-07 (16)*	*7.112e-07 (16)*	*4.457e-05 (17)*
1/64	*5.558e-07 (16)*	*4.372e-07 (16)*	*1.115e-05 (16)*

Формулы для (f, f) *:*

1) $f = 1$*:* $(f, f) = \frac{l}{2}$

2) $f = d_1x + d_2y$*:* $(f, f) = l\frac{d_1^2l^2 + d_1d_2l + d_2^2}{12}$

3) $f = d_1x^2 + d_2y^2 + d_3xy$*:* $(f, f) = l\frac{6d_1^2l^4 + 3d_1d_2l^3 + (d_3^2 + 2d_1d_2)l^2 + 3d_2d_3l + 6d_2^2}{180}$