MAT12003 Todennäköisyyslaskenta I
Kurssikoe 9.3.2018 – Ratkaisut (MK)

1. (a) Merkitään

N = "tulee klaava ja heittää noppaa",

K = "tulee kruuna ja heittää 5 lisäkertaa kolikkoa".

Tällöin $\{N, K\}$ on ositus ja $P(N) = \frac{1}{2}$, $P(K) = \frac{1}{2}$. Merkitään lisäksi

M_k = "Mikan pistemäärä on k", $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. (+1p)

Tällöin

$$P(M_1|N) = P(M_2|N) = \dots = P(M_6|N) = \frac{1}{6},$$

$$P(M_1|K) = \binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32},$$

$$P(M_2|K) = \binom{5}{1}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{32},$$

$$P(M_3|K) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10}{32},$$

$$P(M_4|K) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10}{32},$$

$$P(M_5|K) = \binom{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right) = 5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{32},$$

$$P(M_6|K) = \binom{5}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}.$$ (+1p)

Näin ollen kokonaistodennäköisyyden kaavan perusteella

$$P(M_2) = P(N)P(M_2|N) + P(K)P(M_2|K)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{32} = \frac{16}{192} + \frac{15}{192} = \underline{\underline{\frac{31}{192}}} \ (\approx 0{,}161).$$

(+1p)

b) Bayesin kaavan perusteella

$P(N|M_2)$ (+1p)

$$= \frac{P(N)P(M_2|N)}{P(M_2)}$$ (+1p)

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{31}{192}} = \frac{1}{12}\cdot\frac{192}{31} = \underline{\underline{\frac{16}{31}}} \approx 0{,}516.$$

(+1p)

2. Merkitään

X = "asiakkaan palveluaika",

jolloin $X \sim Exp(\lambda)$ ja $EX = 5$ (min). (+1p)

Näin ollen $\lambda = \frac{1}{5}$. (+1p)

Saadaan

$P(X > 4)$ (+1p)

$= 1 - P(X \leq 4)$ (+1p)

$= 1 - F_X(4)$

$= 1 - (1 - e^{-\frac{4}{5}})$ (+1p)

$= e^{-\frac{4}{5}} \approx \underline{0{,}449}$. (+1p)

(3) Merkitään

X = "kurssille ilmoittautuneiden lukumäärä",

jolloin $X \sim \text{Poisson}(100)$.

Nyt $EX = 100$, $D^2X = 100$, $DX = 10$, (+1p)

joten

$$P(X \geq 120) \overset{\text{jatk. korj.}}{=} P(X \geq 119{,}5) \quad \text{(+1p)}$$

$$\overset{\text{stand.}}{=} P\left(\frac{X-100}{10} \geq \frac{119{,}5-100}{10}\right) \quad \text{(+1p)}$$

$$= P\left(\frac{X-100}{10} \geq 1{,}95\right)$$

$$= 1 - P\left(\frac{X-100}{10} < 1{,}95\right) \quad \text{(+1p)}$$

$$= 1 - \Phi(1{,}95)$$

$$= 1 - 0{,}974412 \quad \text{(+1p)}$$

$$= 0{,}025588 \approx \underline{\underline{0{,}0256}}. \quad \text{(+1p)}$$

4. Oletetaan, että tapahtumat A ja B ovat riippumattomia. Tällöin siis

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$. (+1p)

Nyt

$$
\begin{aligned}
&P(A \cap B^c) && (+1p) \\
&= P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) && (+1p) \\
&= P(A) - P(A)P(B) && (+1p) \\
&= P(A)(1 - P(B)) && (+1p) \\
&= P(A)P(B^c). && (+1p)
\end{aligned}
$$

Näin ollen A ja B^c ovat riippumattomia. $\square$