

平成24年度（2012年度）日本留学試験

数 学（80分）

【コース1（基本, Basic）・コース2（上級, Advanced）】

※ どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。

I 試験全体に関する注意

1. 係員の許可なしに、部屋の外に出ることはできません。
2. この問題冊子を持ち帰ることはできません。

II 問題冊子に関する注意

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見ないでください。
2. 試験開始の合図があったら、下の欄に、受験番号と名前を、受験票と同じように記入してください。
3. コース1は1～13ページ、コース2は15～27ページにあります。
4. 足りないページがあったら、手をあげて知らせてください。
5. 問題冊子には、メモや計算などを書いてよいです。

III 解答方法に関する注意

1. 解答は、解答用紙に鉛筆(HB)で記入してください。
2. 問題文中のA, B, C, …には、それぞれ－(マイナスの符号)、または、0から9までの数が一つずつ入ります。あてはまるものを選び、解答用紙(マークシート)の対応する解答欄にマークしてください。

解答に関する記入上の注意

- (1) 根号($\sqrt{\quad}$)の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。
(例： $\sqrt{12}$ のときは、 $2\sqrt{3}$ と答えます。)
- (2) 分数を答えるときは、符号は分子につけ、既約分数(reduced fraction)にして答えてください。

(例： $\frac{2}{6}$ は $\frac{1}{3}$ ， $-\frac{2}{\sqrt{6}}$ は $-\frac{2\sqrt{6}}{6}$ と分母を有理化してから約分し， $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ と答えます。)

- (3) $\frac{\boxed{A}\sqrt{\boxed{B}}}{\boxed{C}}$ に $\frac{-\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は、以下のようにマークしてください。

- (4) $\boxed{D}\boxed{E}x$ に $-x$ と答える場合は、Dを－，Eを1とし、以下のようにマークしてください。

【解答用紙】

A	●	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B	○	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9
C	○	0	1	2	3	●	5	6	7	8	9
D	●	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
E	○	0	●	2	3	4	5	6	7	8	9

3. 解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※ 試験開始の合図があったら、必ず受験番号と名前を記入してください。

受 験 番 号			*				*					
名 前												

数学 コース 2

(上級コース)

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので、どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は、右のように、解答用紙の「解答コース」の「コース2」を○で囲み、その下のマーク欄をマークしてください。

＜ 解答用紙記入例 ＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	<div style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 5px; display: inline-block;"> コース 2 Course 2 </div>
○	●

選択したコースを正しくマークしないと、採点されません。

I

問 1 a, b を定数とし, $a > 0$ とする。2 次関数

$$y = 4x^2 + 2ax + b$$

のグラフを x 軸方向に a , y 軸方向に $1 - 7a$ だけ平行移動する。平行移動したグラフが点 $(0, 4)$ を通るとき

$$b = \boxed{\text{AB}} a^2 + \boxed{\text{C}} a + \boxed{\text{D}}$$

であり, そのグラフを表す 2 次関数は

$$y = \boxed{\text{E}} x^2 - \boxed{\text{F}} ax + \boxed{\text{G}} \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

である。

2 次関数 ① のグラフが x 軸に接するとき, $a = \frac{\boxed{\text{H}}}{\boxed{\text{I}}}$ であり, そのときの接点の x 座標は $x = \boxed{\text{J}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

問 2 多項式

$$P = x^2 + 2(a-1)x - 8a - 8$$

を考える。

- (1) a を有理数とする。 $x = 1 - \sqrt{2}$ に対して、 P の値が有理数になるのは $a = \boxed{\text{K}}$ のときであり、そのときの P の値は $P = \boxed{\text{LM}}$ である。

- (2) x, a を正の整数とする。 P の値が素数になるような x, a をみつけよう。

P を因数分解して

$$P = (x - \boxed{\text{N}})(x + \boxed{\text{O}}a + \boxed{\text{P}})$$

を得る。したがって、 $x = \boxed{\text{Q}}$ である。

さらに、 P の値が素数になるような a の中で最小のものは $a = \boxed{\text{R}}$ であり、そのときの P の値は $P = \boxed{\text{ST}}$ である。

注) 有理数 : rational number , 因数分解する : factorize

- 計算欄 (memo) -

☐ I の問題はこれで終わります。☐ I の解答欄 ☐ U ～ ☐ Z はマークしないでください。

II

初項から第 n 項までの和が

$$\sum_{k=1}^n a_k = n^2 + 3n$$

である数列 $\{a_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を考える。

(1) $a_n = \boxed{\text{A}}n + \boxed{\text{B}}$ である。

(2) $b_n = n^2 - 5n - 6$ である数列 $\{b_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) に対して, $b_n < 0$ となる項は全部で $\boxed{\text{C}}$ 個あり, それらの項の和は $-\boxed{\text{DE}}$ である。

(3) (1), (2) の a_n, b_n に対して

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^2 b_k}{a_k} = \frac{1}{\boxed{\text{F}}} n(n + \boxed{\text{G}})(n^2 - \boxed{\text{H}}n - \boxed{\text{I}})$$

である。

- 計算欄 (memo) -

Ⅱ の問題はこれで終わります。Ⅱ の解答欄 **J** ～ **Z** はマークしないでください。

III

a, b, c を正の実数とする。座標平面上の 3 点 $A(a, 0)$, $B(3, b)$, $C(0, c)$ を頂点とする三角形 ABC を考える。その三角形 ABC の外接円は原点 $O(0, 0)$ を通り, $\angle BAC = 60^\circ$ とする。

(1) $\angle AOB = \boxed{\text{AB}}^\circ$ であるから, $b = \sqrt{\boxed{\text{C}}}$ である。

(2) 外接円を表す方程式は

$$\left(x - \frac{a}{\boxed{\text{D}}}\right)^2 + \left(y - \frac{c}{\boxed{\text{E}}}\right)^2 = \frac{a^2 + c^2}{\boxed{\text{F}}}$$

であり, c は a を用いて $c = \sqrt{\boxed{\text{G}}}(\boxed{\text{H}} - a)$ と表される。

(3) 線分 OB と線分 AC の交点を D とし, $\angle OAC = \alpha$, $\angle ADB = \beta$ とおく。

$a = 2\sqrt{3}$ のとき

$$\tan \alpha = \boxed{\text{I}} - \sqrt{\boxed{\text{J}}}, \quad \tan \beta = \boxed{\text{K}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

III の問題はこれで終わります。III の解答欄 L ～ Z はマークしないでください。

IV

問 1 a を正の実数とすると、関数

$$f(x) = x^2 - 5 + 4a \log(2x + a + 8) \quad \left(-\frac{a}{2} - 4 < x < -2\right)$$

の極値について調べよう。

(1) 関数 $f(x)$ を x について微分して

$$f'(x) = \frac{\boxed{\text{A}} (\boxed{\text{B}} x + a) (x + \boxed{\text{C}})}{\boxed{\text{D}} x + a + \boxed{\text{E}}}$$

を得る。

(2) 条件 $a > 0$ と関数 $f(x)$ の定義域が $-\frac{a}{2} - 4 < x < -2$ であることを考慮すると、 $f(x)$ が極大値、極小値の両方をとるのは

$$\boxed{\text{F}} < a < \boxed{\text{G}} \quad \text{または} \quad \boxed{\text{G}} < a$$

のときである。そのとき、 $f(x)$ の極大値と極小値の和は

$$\frac{a^2}{\boxed{\text{H}}} + \boxed{\text{I}} + \boxed{\text{J}} a \log \boxed{\text{K}} a$$

である。

- 計算欄 (memo) -

問 2 正の整数 n と実数 a に対して、関数

$$f_n(a) = \int_0^\pi (\cos x + a \sin 2nx)^2 dx$$

を考える。

(1) 関数 $f_n(a)$ を

$$f_n(a) = \int_0^\pi \left\{ \frac{1 + \cos \boxed{\text{L}} x}{2} + a^2 \frac{1 - \cos \boxed{\text{M}} nx}{2} + a \left(\sin (2n+1)x + \sin (2n-1)x \right) \right\} dx$$

と変形して、この右辺の定積分を計算すると

$$f_n(a) = \frac{\pi}{\boxed{\text{N}}} a^2 + \frac{\boxed{\text{O}} n}{\boxed{\text{P}} n^2 - \boxed{\text{Q}}} a + \frac{\pi}{\boxed{\text{R}}}$$

を得る。

(2) $f_n(a)$ を最小にする a の値を a_n とし、 $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{n}$ とおく。

このとき

$$\begin{aligned} S_N &= -\frac{\boxed{\text{S}}}{\pi} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{2n - \boxed{\text{T}}} - \frac{1}{2n + \boxed{\text{U}}} \right) \\ &= -\frac{\boxed{\text{S}}}{\pi} \left(\boxed{\text{V}} - \frac{1}{\boxed{\text{W}} N + \boxed{\text{X}}} \right) \end{aligned}$$

である。よって

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = -\frac{\boxed{\text{Y}}}{\pi}$$

を得る。

- 計算欄 (memo) -

Ⅳ の問題はこれで終わります。Ⅳ の解答欄 Z はマークしないでください。
 コース 2 の問題はこれですべて終わります。解答用紙の V はマークしないでください。
 解答用紙の解答コース欄に「コース 2」が正しくマークしてあるか、
 もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。

〈数 学〉

コース 1			
問		解答欄	正解
I	問1	ABCD	-273
		EF	46
		G	4
		HI	43
		J	1
	問2	K	0
		LM	-7
		NOP	422
		Q	5
		R	2
		ST	11
II	問1	ABC	881
		D	5
		E	4
		FG	4
		HI	32
		J	1
		KL	16
	問2	MN	29
		O	3
		PQ	16
		RST	336
III		A	2
		B	2
		C	4
		D	1
		E	2
		FGH	124
		I	0
		J	1
IV		ABCD	1032
		EF	-2
		G	1
		H	2
		IJ	-1

コース 2			
問		解答欄	正解
I	問1	ABCD	-273
		EF	46
		G	4
		HI	43
		J	1
	問2	K	0
		LM	-7
		NOP	422
		Q	5
		R	2
		ST	11
II		AB	22
		C	5
		DE	50
		FGHI	8174
III		AB	30
		C	3
		DE	22
		F	4
		GH	34
		IJ	23
		K	1
IV	問1	ABC	224
		DE	28
		F	4
		G	8
		HIJK	4648
	問2	LM	24
		NOPQR	28412
		STU	411
		VWX	121
		Y	4