2023年度　日本留学試験

数　学（８０分）

【コース１(基本, Basic)・コース２(上級, Advanced)】

※　どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。

Ⅰ　試験全体に関する注意

1．係員の許可なしに，部屋の外に出ることはできません。
2．この問題冊子を持ち帰ることはできません。

Ⅱ　問題冊子に関する注意

1．試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見ないでください。
2．試験開始の合図があったら，下の欄に，受験番号と名前を，受験票と同じように記入してください。
3．コース１は１～13ページ，コース２は15～27ページにあります。
4．足りないページがあったら，手をあげて知らせてください。
5．メモや計算などを書く場合は，問題冊子に書いてください。

Ⅲ　解答方法に関する注意

1．解答は，解答用紙に鉛筆（ＨＢ）で記入してください。
2．問題文中の**A**，**B**，**C**,…には，それぞれ－（マイナスの符号），または，０から９までの数が一つずつ入ります。適するものを選び，解答用紙（マークシート）の対応する解答欄にマークしてください。
3．同一の問題文中に $\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{BC}}$ などが繰り返し現れる場合，２度目以降は，$\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{BC}}$ のように表しています。

解答に関する記入上の注意

(1)　根号（$\sqrt{\ }$）の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。
（例：$\sqrt{32}$ のときは，$2\sqrt{8}$ ではなく $4\sqrt{2}$ と答えます。）

(2)　分数を答えるときは，符号は分子につけ，既約分数(reduced fraction)にして答えてください。
（例：$\frac{2}{6}$ は $\frac{1}{3}$，$-\frac{2}{\sqrt{6}}$ は $\frac{-2\sqrt{6}}{6}$ と分母を有理化してから約分し，$\frac{-\sqrt{6}}{3}$ と答えます。）

(3)　$\dfrac{\boxed{\text{A}}\sqrt{\boxed{\text{B}}}}{\boxed{\text{C}}}$ に $\dfrac{-\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は，下のようにマークしてください。

(4)　$\boxed{\text{DE}}\,x$ に $-x$ と答える場合は，**D**を－，**E**を１とし，下のようにマークしてください。

【解答用紙】

A	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
B	⊖	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
C	⊖	⓪	①	②	③	●	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
D	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
E	⊖	⓪	●	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

4．解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※　試験開始の合図があったら，必ず受験番号と名前を記入してください。

受験番号			*					*						
名　　前														

数学 コース 2
（上級コース）

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース１」と「コース２」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース２」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース２」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

＜ 解答用紙記入例 ＞

解答コース Course	
コース１ Course 1	コース２ Course 2
○	●

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

I

問 1　2 つの 2 次関数

$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 + ax - b, \qquad g(x) = -x^2 + cx + b$$

が，次の 2 つの条件 (A), (B) を満たすような a, b, c を求めよう。

(A)　グラフ $y = f(x)$ とグラフ $y = g(x)$ は 2 つの直線 $x = -1$, $x = 3$ 上で交わっている。

(B)　$g(x)$ の最大値と $f(x)$ の最小値の差は $\frac{16}{3}$ である。

条件 (A) より 2 つの 2 次関数のグラフは直線 $x = -1$ 上で交わっているから

$$3a + \boxed{\mathrm{A}}\,b - \boxed{\mathrm{B}}\,c = \boxed{\mathrm{C}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

であり，また，直線 $x = 3$ 上で交わっているから

$$\boxed{\mathrm{D}}\,a - 2b - \boxed{\mathrm{E}}\,c = -12 \quad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

を得る。① と ② より $b = \boxed{\mathrm{F}}$ である。

次に，条件 (B) と $b = \boxed{\mathrm{F}}$ より

$$\boxed{\mathrm{G}}\,a^2 + 3c^2 = \boxed{\mathrm{HI}}$$

を得る。これらから

$$a = -\frac{\boxed{\mathrm{J}}}{\boxed{\mathrm{K}}}, \qquad c = \boxed{\mathrm{L}}$$

となる。

- 計算欄 (memo) -

問 2　次の文中の $\boxed{\textsf{O}}$, $\boxed{\textsf{P}}$ には，適する数を入れ，その他の $\boxed{}$ には右のページの選択肢 ⓪ ～ ⑨ の中から適するものを選びなさい。

A，B，C の 3 つの箱に，それぞれ 9 枚のカードが入っている。9 枚のカードには，1 から 9 の数字が 1 つずつ書かれている。

(1)　A，B，C の箱から順に 1 枚ずつカードを取り出し，それらのカードに書かれた数字をそれぞれ a，b，c とする。

(i)　$a = b \neq c$ である確率は $\boxed{\textsf{M}}$ である。

(ii)　a，b，c の中に同じものがない確率は $\boxed{\textsf{N}}$ である。

(iii)　$a > 2b > 3c$ となる確率 p を求めよう。
条件を満たす a，b，c の組が存在するような b の範囲は

$$\boxed{\textsf{O}} \leqq b \leqq \boxed{\textsf{P}}$$

である。このことに注目して

$$p = \boxed{\textsf{Q}}$$

を得る。

(2)　A から 3 枚，B から 2 枚，合わせて 5 枚のカードを取り出す。

(i)　取り出した 5 枚のカードの中に奇数が 4 枚，偶数が 1 枚ある確率は $\boxed{\textsf{R}}$ である。

(ii)　取り出した 5 枚のカードの中に奇数が少なくとも 1 枚ある確率は $\boxed{\textsf{S}}$ である。

（問 2 は次ページに続く）

⓪ $\frac{8}{81}$　① $\frac{14}{81}$　② $\frac{56}{81}$　③ $\frac{64}{81}$

④ $\frac{25}{126}$　⑤ $\frac{35}{126}$　⑥ $\frac{115}{126}$　⑦ $\frac{125}{126}$

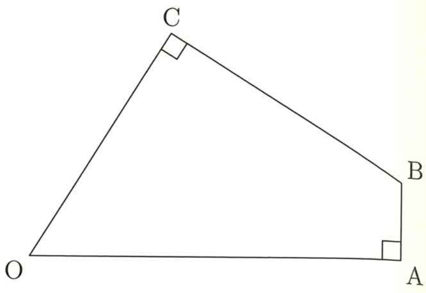
⑧ $\frac{8}{729}$　⑨ $\frac{10}{729}$

$\boxed{\text{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{I}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{T}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

II

問 1　次の文中の $\boxed{\text{J}}$，$\boxed{\text{K}}$，$\boxed{\text{L}}$ には，右のページの選択肢 ⓪ ～ ⑨ の中から適するものを選びなさい。また，その他の $\boxed{}$ には，適する数を入れなさい。

四角形 OABC において，∠OAB と ∠OCB は直角であり，辺 OA，OC の長さはそれぞれ 2，$\sqrt{2}$ であるとする。また，対角線 AC の長さは $\sqrt{3}$ であるとする。



このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおいて，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$ を求め，$\vec{b}$ を $\vec{a}$ と $\vec{c}$ で表そう。さらに，2 本の対角線 AC と OB の交点を D とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ が $\vec{b}$ の何倍であるか調べよう。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}-\vec{a}$ であるから，$\vec{c}\cdot\vec{a}=\dfrac{\boxed{\text{A}}}{\boxed{\text{B}}}$ である。

(2)　$\vec{a}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は垂直であるから，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{\text{C}}$ である。同様に $\vec{b}\cdot\vec{c}=\boxed{\text{D}}$ である。

(3)　$\vec{b}=s\vec{a}+t\vec{c}$ とおくと

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{\text{C}}\ \text{より，}\quad \boxed{\text{E}}s+\boxed{\text{F}}t=\boxed{\text{G}}\quad\text{であり}$$
$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\boxed{\text{D}}\ \text{より，}\quad \boxed{\text{H}}s+\boxed{\text{I}}t=4\quad\text{である。}$$

よって

$$s=\boxed{\text{J}},\qquad t=\boxed{\text{K}}$$

である。

（問 1 は次ページに続く）

(4)　点 D が線分 AC 上にあることから

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \boxed{\textsf{L}}\ \vec{b}$$

を得る。

⓪ $\dfrac{8}{23}$　① $\dfrac{10}{23}$　② $\dfrac{20}{23}$　③ $\dfrac{28}{23}$　④ $\dfrac{30}{23}$

⑤ $\dfrac{23}{28}$　⑥ $\dfrac{23}{30}$　⑦ $\dfrac{31}{46}$　⑧ $\dfrac{51}{46}$　⑨ $\dfrac{46}{51}$

問 2　a, b は実数とし，複素数平面上の異なる 3 点 A(z_1), B(z_2), C(z_3) に対して

$$\frac{z_3 - z_2}{z_2 - z_1} = a + bi$$

とおく。

(1)　次の文中の $\boxed{\text{M}}$ と $\boxed{\text{N}}$ には，この問いの下の選択肢 ⓪ 〜 ③ の中から適するものを選びなさい。

$a = 0$ ならば，$\boxed{\text{M}}$ となり，$b = 0$ ならば，$\boxed{\text{N}}$ となる。

⓪　直線 AB と 直線 BC は垂直
①　直線 BC と 直線 CA は垂直
②　直線 CA と 直線 AB は垂直
③　直線 AB と 直線 BC は同一直線

(2)　次の文中の $\boxed{\text{P}}$ と $\boxed{\text{Q}}$ には，この問いの下の選択肢 ⓪ 〜 ⑧ の中から適するものを選びなさい。また，その他の $\boxed{\phantom{\text{O}}}$ には，適する数または符号を入れなさい。

三角形 ABC の ∠A, ∠B, ∠C の大きさをそれぞれ A, B, C で表す。

$$a = \frac{(i\cos A + \sin A)(i\cos B - \sin B)}{\cos C - i\sin C}, \qquad b = \sqrt{3}$$

を満たす三角形 ABC について考える。この a の右辺は

$$\frac{(i\cos A + \sin A)(i\cos B - \sin B)}{\cos C - i\sin C} = \boxed{\text{O}}\left(\cos\boxed{\text{P}} + i\sin\boxed{\text{P}}\right)$$

と変形できる。a が実数であるから，三角形 ABC は $\boxed{\text{Q}} = \dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形であり，$a = \boxed{\text{RS}}$ である。

（問 2 は次ページに続く）

また，$a = \boxed{\text{RS}}$，$b = \sqrt{3}$ であるから

$$\theta = \arg\left(\frac{z_3 - z_2}{z_2 - z_1}\right) = \frac{\boxed{\text{T}}}{\boxed{\text{U}}}\pi, \qquad \left|\frac{z_3 - z_2}{z_2 - z_1}\right| = \boxed{\text{V}}$$

となる。ただし，偏角 θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。したがって，三角形 ABC は

$$A = \frac{\pi}{\boxed{\text{W}}}, \quad B = \frac{\pi}{\boxed{\text{X}}}, \quad C = \frac{\pi}{\boxed{\text{Y}}}$$

の直角三角形である。

⓪ A	① $(A+B-C)$	② $(-A-B+C)$
③ B	④ $(A-B+C)$	⑤ $(-A+B-C)$
⑥ C	⑦ $(A-B-C)$	⑧ $(-A+B+C)$

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

III

関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & (x<0) \\ -x^2+x+2 & (x \geqq 0) \end{cases}$$

と定義する。このとき $S(a)=\int_a^{a+2} f(x)dx$ を最大にする a の値と $S(a)$ の最大値を求めよう。

(1)　$S(-2)=\boxed{\mathsf{A}}$，$S(0)=\dfrac{\boxed{\mathsf{BC}}}{\boxed{\mathsf{D}}}$ である。

(2)　次の文中の $\boxed{\mathsf{E}}$ と $\boxed{\mathsf{F}}$ には，下の選択肢 ⓪ ～ ② の中から適するものを選びなさい。また，その他の $\boxed{}$ には，適する数を入れなさい。

⓪ $<$　　① $=$　　② $>$

a の範囲で場合分けして，$S(a)$ を考える。$y=f(x)$ のグラフより

$a<-2$ のとき，　$S(a)\ \boxed{\mathsf{E}}\ S(-2)$

$a>0$ のとき，　$S(a)\ \boxed{\mathsf{F}}\ S(0)$

である。

$-2 \leqq a \leqq 0$ のとき

$$S(a)=\frac{\boxed{\mathsf{GH}}}{\boxed{\mathsf{I}}}a^3-\boxed{\mathsf{J}}a^2-\boxed{\mathsf{K}}a+\frac{\boxed{\mathsf{LM}}}{\boxed{\mathsf{N}}}$$

である。$S(a)$ の導関数 $S'(a)$ は

$$S'(a)=-a^2-\boxed{\mathsf{O}}a-\boxed{\mathsf{P}}$$

であるから，$S(a)$ は $a=-\boxed{\mathsf{Q}}+\sqrt{\boxed{\mathsf{R}}}$ のとき極大となる。

（III は次ページに続く）

したがって，$S(a)$ を最大にする a の値は

$$-\boxed{\mathsf{S}}+\sqrt{\boxed{\mathsf{T}}}$$

であり，$S(a)$ の最大値は

$$\boxed{\mathsf{U}}+\frac{\boxed{\mathsf{V}}\sqrt{\boxed{\mathsf{W}}}}{\boxed{\mathsf{X}}}$$

である。

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\mathsf{Y}}$，$\boxed{\mathsf{Z}}$ はマークしないでください。

$\boxed{\text{IV}}$

a を実数とし，定積分で定義された関数

$$f(x)=\int_0^x t\left(a\sin^2 2t-1\right)dt \quad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

を考える。

$f(x)$ は $x=\dfrac{\pi}{12}$ で極値をもつと仮定する。

(1) $f(x)$ は $x=\dfrac{\pi}{12}$ で極値をもつので

$$a=\boxed{\text{A}}$$

である。また，$f(x)$ は $x=\dfrac{\pi}{12}$ 以外に，$x=\dfrac{\boxed{\text{B}}}{\boxed{\text{CD}}}\pi$ でも極値をもつ。

(2) $f(x)$ を求めよう。

$f(x)$ は

$$f(x)=\int_0^x t\left(\boxed{\text{E}}-\boxed{\text{F}}\cos\boxed{\text{G}}\,t\right)dt$$

と変形できるので

$$f(x)=\frac{\boxed{\text{H}}}{\boxed{\text{I}}}x^2-\frac{\boxed{\text{J}}}{\boxed{\text{K}}}x\sin\boxed{\text{L}}\,x-\frac{\boxed{\text{M}}}{\boxed{\text{N}}}\cos\boxed{\text{O}}\,x+\frac{\boxed{\text{P}}}{\boxed{\text{Q}}}$$

である。

（$\boxed{\text{IV}}$ は次ページに続く）

(3)　次の文中の $\boxed{\text{R}}$, $\boxed{\text{S}}$, $\boxed{\text{T}}$ には，この問いの下の選択肢 ⓪ ～ ⑨ の中から適するものを選びなさい。

$f(x)$ の最大値は

$$\boxed{\text{R}}\pi^2 + \boxed{\text{S}}\pi + \boxed{\text{T}}$$

である。

⓪ $\frac{1}{8}$　① $\frac{\sqrt{3}}{8}$　② $\frac{1}{16}$　③ $\frac{\sqrt{3}}{16}$　④ $\frac{\sqrt{3}}{24}$

⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{24}$　⑥ $\frac{\sqrt{3}}{48}$　⑦ $\frac{5\sqrt{3}}{48}$　⑧ $\frac{1}{288}$　⑨ $\frac{25}{288}$

(4)　次の文中の $\boxed{\text{U}}$, $\boxed{\text{V}}$, $\boxed{\text{W}}$ には，この問いの下の選択肢 ⓪ ～ ⑨ の中から適するものを選びなさい。

曲線 $y = f(x)$ の点 $\left(\frac{\pi}{4},\ f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ における接線の方程式は

$$y = \boxed{\text{U}}\pi x - \boxed{\text{V}}\pi^2 + \boxed{\text{W}}$$

である。

⓪ $\frac{1}{2}$　① $\frac{3}{2}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{3}{4}$　④ $\frac{5}{4}$

⑤ $\frac{3}{16}$　⑥ $\frac{5}{16}$　⑦ $\frac{3}{32}$　⑧ $\frac{5}{32}$　⑨ $\frac{7}{32}$

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\text{X}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。
コース 2 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。
解答用紙の解答コース欄に「コース 2」が正しくマークしてあるか，
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。