平成29年度

日本留学試験（第２回）

試験問題

The Examination

平成29年度（2017年度）日本留学試験

数　学（８０分）

【コース１（基本，Basic）・コース２（上級，Advanced）】

※　どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。

Ⅰ　試験全体に関する注意

1．係員の許可なしに，部屋の外に出ることはできません。
2．この問題冊子を持ち帰ることはできません。

Ⅱ　問題冊子に関する注意

1．試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見ないでください。
2．試験開始の合図があったら，下の欄に，受験番号と名前を，受験票と同じように記入してください。
3．コース１は１～13ページ，コース２は15～27ページにあります。
4．足りないページがあったら，手をあげて知らせてください。
5．メモや計算などを書く場合は，問題冊子に書いてください。

Ⅲ　解答方法に関する注意

1．解答は，解答用紙に鉛筆（ＨＢ）で記入してください。
2．問題文中のＡ，Ｂ，Ｃ，…には，それぞれ－（マイナスの符号），または，０から９までの数が一つずつ入ります。あてはまるものを選び，解答用紙（マークシート）の対応する解答欄にマークしてください。
3．同一の問題文中に $\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{BC}}$ などが繰り返し現れる場合，２度目以降は，$\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{BC}}$ のように表しています。

解答に関する記入上の注意

(1)　根号（$\sqrt{\ }$）の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。
（例：$\sqrt{32}$ のときは，$2\sqrt{8}$ ではなく $4\sqrt{2}$ と答えます。）

(2)　分数を答えるときは，符号は分子につけ，既約分数（reduced fraction）にして答えてください。
（例：$\frac{2}{6}$ は $\frac{1}{3}$，$-\frac{2}{\sqrt{6}}$ は $\frac{-2\sqrt{6}}{6}$ と分母を有理化してから約分し，$\frac{-\sqrt{6}}{3}$ と答えます。）

(3)　$\dfrac{\boxed{\text{A}}\sqrt{\boxed{\text{B}}}}{\boxed{\text{C}}}$ に $\dfrac{-\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は，下のようにマークしてください。

(4)　$\boxed{\text{DE}}\,x$ に $-x$ と答える場合は，Ｄを－，Ｅを１とし，下のようにマークしてください。

【解答用紙】

A	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
B	⊖	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
C	⊖	⓪	①	②	③	●	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
D	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
E	⊖	⓪	●	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

4．解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※　試験開始の合図があったら，必ず受験番号と名前を記入してください。

受験番号			＊					＊						
名　前														

数学 コース 2
（上級コース）

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

＜解答用紙記入例＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

I

問 1　x の 2 次関数 $f(x) = 2x^2 + ax - 1$ は

$$f(-1) \geqq -3, \quad f(2) \geqq 3 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を満たしている。このとき，$f(x)$ の最小値 m を考える。

(1)　m は a を用いて

$$m = -\frac{\boxed{\mathsf{A}}}{\boxed{\mathsf{B}}}a^2 - \boxed{\mathsf{C}}$$

と表される。

(2)　$f(x)$ が条件 ① を満たすような a の値の範囲は

$$\boxed{\mathsf{DE}} \leqq a \leqq \boxed{\mathsf{F}}$$

である。

(3)　m の値が最も大きくなるのは，$y = f(x)$ のグラフの軸が直線 $x = \boxed{\mathsf{G}}$ のときである。また，そのときの m の値は $\boxed{\mathsf{HI}}$ である。

(4)　m の値が最も小さくなるのは，$y = f(x)$ のグラフの軸が直線 $x = \boxed{\mathsf{JK}}$ のときである。また，そのときの m の値は $\boxed{\mathsf{LM}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　平面上に三角形 ABC があって，1 個の球が頂点 A に置かれている。いま，1 個のサイコロを投げ，次の規則にしたがって球を動かす。

(i)　球が A にあるとき，出た目が 1 であれば B に動かし，その他の場合は A から動かさない。

(ii)　球が B にあるとき，出た目が 4 以下であれば C に動かし，その他の場合は B から動かさない。

ただし，球が C に到達すれば試行を止める。

このとき，サイコロを投げて，4 回以内に球が C に到達する確率を求めよう。

(1)　サイコロを投げて 2 回目に球が C に到達する確率は $\dfrac{1}{\boxed{\text{N}}}$ である。

(2)　サイコロを投げて 3 回目に球が C に到達する確率は $\dfrac{\boxed{\text{O}}}{\boxed{\text{PQ}}}$ である。

(3)　サイコロを投げて 4 回目に球が C に到達する確率は $\dfrac{\boxed{\text{RS}}}{\boxed{\text{TUV}}}$ である。

以上から，4 回以内に球が C に到達する確率は $\dfrac{\boxed{\text{WX}}}{\boxed{\text{YZ}}}$ である。

注）サイコロ：dice，試行：trial

\- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{I}}$ の問題はこれで終わりです。

II

問 1　漸化式

$$a_1 = 18, \quad a_{n+1} - 12a_n + 3^{n+2} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよう。

数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \frac{a_n}{\boxed{\ \mathbf{A}\ }^n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

と定めると，$\{b_n\}$ は

$$b_1 = \boxed{\ \mathbf{B}\ }, \quad b_{n+1} - \boxed{\ \mathbf{C}\ }b_n + \boxed{\ \mathbf{D}\ } = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たす。この漸化式は

$$b_{n+1} - \boxed{\ \mathbf{E}\ } = \boxed{\ \mathbf{F}\ }\left(b_n - \boxed{\ \mathbf{E}\ }\right)$$

と変形できる。ここで，数列 $\{c_n\}$ を

$$c_n = b_n - \boxed{\ \mathbf{E}\ } \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

と定めると，$\{c_n\}$ は初項 $\boxed{\ \mathbf{G}\ }$，公比 $\boxed{\ \mathbf{H}\ }$ の等比数列である。

したがって

$$a_n = \boxed{\ \mathbf{I}\ }^n\left(\boxed{\ \mathbf{J}\ } \cdot \boxed{\ \mathbf{K}\ }^{n-1} + \boxed{\ \mathbf{L}\ }\right) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

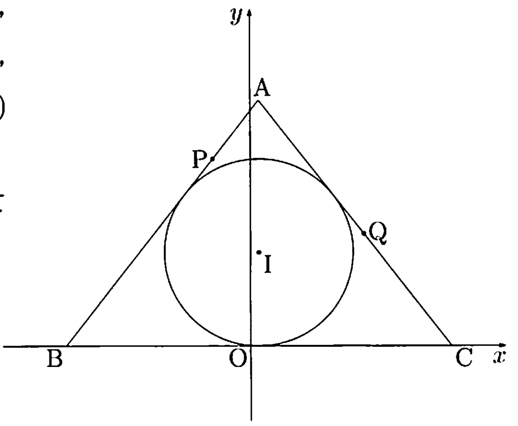
である。

注）漸化式：recurrence formula，公比：common ratio，等比数列：geometric progression

- 計算欄 (memo) -

問 2　右図のような，原点を O とする xy 平面上で，AB = AC の二等辺三角形 ABC を考える。ただし，辺 AB は点 P$(-1, 5)$ を通り，辺 AC は点 Q$(3, 3)$ を通るものとする。

このとき，三角形 ABC の内接円の半径について考えよう。



2 点 A, B を通る直線を ℓ_1 とし，2 点 A, C を通る直線を ℓ_2 とする。ℓ_1 の傾きを a とすると，ℓ_1, ℓ_2 の方程式は

$$\ell_1 :\ y = ax + a + \boxed{\mathsf{M}}$$

$$\ell_2 :\ y = -ax + \boxed{\mathsf{N}}\,a + \boxed{\mathsf{O}}$$

である。

また，内接円の中心を I とおき，半径を r とおくと，I の座標は $\left(\boxed{\mathsf{P}} - \dfrac{\boxed{\mathsf{Q}}}{a},\ r\right)$ である。

したがって，r は a を用いて

$$r = \frac{\boxed{\mathsf{R}}\,a + \boxed{\mathsf{S}}}{\boxed{\mathsf{T}} + \sqrt{a^2 + \boxed{\mathsf{U}}}}$$

と表される。

特に，$r = \dfrac{5}{2}$ のとき，頂点 A の座標は $\left(\dfrac{\boxed{\mathsf{V}}}{\boxed{\mathsf{W}}},\ \dfrac{\boxed{\mathsf{XY}}}{\boxed{\mathsf{Z}}}\right)$ である。

注）内接円：inscribed circle

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。

III

すべての正の実数 x に対して，不等式

$$\frac{\log 3x}{4x+1} \leqq \log\left(\frac{2kx}{4x+1}\right) \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

が成り立つような正の実数 k の値の範囲を求めよう。ただし，$\log$ は自然対数とする。

(1)　次の文中の $\boxed{\text{A}}$ ，$\boxed{\text{B}}$ には，下の選択肢 ⓪ ～ ⑧ の中から適するものを選びなさい。

不等式 ① を変形して

$$\log k \geqq \boxed{\text{A}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

を得る。

ここで，② の右辺を $g(x)$ とおき，$g(x)$ を x で微分すると

$$g'(x) = \boxed{\text{B}}$$

である。

⓪ $\dfrac{\log 3x}{4x+1} - \log(4x+1) - \log 2x$　　① $\dfrac{\log 3x}{4x+1} - \log(4x+1) + \log 2x$

② $\dfrac{\log 3x}{4x+1} + \log(4x+1) + \log 2x$　　③ $\dfrac{\log 3x}{4x+1} + \log(4x+1) - \log 2x$

④ $\dfrac{4\log 3x}{(4x+1)^2}$　　⑤ $\dfrac{3x+2+\log 3x}{(4x+1)^2}$

⑥ $-\dfrac{4\log 3x}{(4x+1)^2}$　　⑦ $\dfrac{3x-2-\log 2x}{(4x+1)^2}$

⑧ $-\dfrac{3\log 2x}{(4x+1)^2}$

（III は次ページに続く）

注）自然対数：natural logarithm

(2)　次の文中の $\boxed{\text{E}}$，$\boxed{\text{F}}$，$\boxed{\text{G}}$ には，下の選択肢 ⓪ ～ ③ の中から適するものを選び，他の $\boxed{}$ には適する数を入れなさい。

$g(x)$ は区間 $0 < x < \dfrac{\boxed{\text{C}}}{\boxed{\text{D}}}$ で $\boxed{\text{E}}$ し，また，区間 $\dfrac{\boxed{\text{C}}}{\boxed{\text{D}}} < x$ で $\boxed{\text{F}}$ する。よって，$g(x)$ は $x = \dfrac{\boxed{\text{C}}}{\boxed{\text{D}}}$ で $\boxed{\text{G}}$ になる。

したがって，すべての正の実数 x に対して不等式 ① が成り立つような k の値の範囲は

$$k \geqq \frac{\boxed{\text{H}}}{\boxed{\text{I}}}$$

である。

⓪　増加　　①　減少　　②　最大　　③　最小

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\text{J}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

IV

次の２つの曲線を考える。

$$x^2+y^2=1 \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

$$4xy=1 \quad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

ただし，$x>0$，$y>0$ とする。このとき，曲線 ① と曲線 ② で囲まれる部分の面積 S を求めよう。

(1)　まず，曲線 ① と曲線 ② の交点を P, Q，それらの x 座標をそれぞれ p, q $(p<q)$ とする。

曲線 ① と曲線 ② の交点の座標 (x, y) は，① より，$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおける。このとき，② より

$$\sin\boxed{\text{A}}\theta=\frac{\boxed{\text{B}}}{\boxed{\text{C}}}$$

となる。これより

$$\theta=\frac{\boxed{\text{D}}}{\boxed{\text{EF}}}\pi,\quad \frac{\boxed{\text{G}}}{\boxed{\text{HI}}}\pi$$

となる。ただし，$\frac{\boxed{\text{D}}}{\boxed{\text{EF}}}<\frac{\boxed{\text{G}}}{\boxed{\text{HI}}}$ となるように答えなさい。

よって

$$p=\cos\frac{\boxed{\text{J}}}{\boxed{\text{KL}}}\pi,\quad q=\cos\frac{\boxed{\text{M}}}{\boxed{\text{NO}}}\pi$$

を得る。

（IV は次ページに続く）

(2)　S の値を求めよう。

$$S = \int_p^q \left(\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4x}\right) dx$$

であるから

$$I = \int_p^q \sqrt{1-x^2}\, dx, \quad J = \int_p^q \frac{1}{x}\, dx$$

の値を求めればよい。

I については，$x = \cos\theta$ とおいて置換積分の計算をすると

$$I = \frac{\boxed{\mathsf{P}}}{\boxed{\mathsf{Q}}}\pi$$

となる。また

$$J = \log\left(\boxed{\mathsf{R}} + \sqrt{\boxed{\mathsf{S}}}\right)$$

である。ただし，log は自然対数である。

以上より

$$S = \frac{\boxed{\mathsf{P}}}{\boxed{\mathsf{Q}}}\pi - \frac{\boxed{\mathsf{T}}}{\boxed{\mathsf{U}}}\log\left(\boxed{\mathsf{R}} + \sqrt{\boxed{\mathsf{S}}}\right)$$

となる。

注）置換積分：integration by substitution，自然対数：natural logarithm

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\mathsf{V}}$ ～ $\boxed{\mathsf{Z}}$ はマークしないでください。

コース２の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース２」が正しくマークしてあるか，もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。