平成23年度

日本留学試験（第１回）

試験問題

数学 コース 2
(上級コース)

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース 1」と「コース 2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース 2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース 2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

< 解答用紙記入例 >

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

I

問 1　$x,\ y$ は

$$3x + y = 18, \quad x \geqq 1, \quad y \geqq 6$$

を満たすとする。このとき，xy の最大値と最小値を求めよう。

xy を x で表すと

$$xy = \boxed{\mathsf{AB}}\left(x - \boxed{\mathsf{C}}\right)^2 + \boxed{\mathsf{DE}}$$

である。

また，x のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\mathsf{F}} \leqq x \leqq \boxed{\mathsf{G}}$$

である。

よって，xy の値は

$x = \boxed{\mathsf{H}}$ のとき最大となり，その値は $\boxed{\mathsf{IJ}}$

$x = \boxed{\mathsf{K}}$ のとき最小となり，その値は $\boxed{\mathsf{LM}}$

である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　正の実数 a, b は

$$a^2 = 3 + \sqrt{5}, \quad b^2 = 3 - \sqrt{5}$$

を満たすとする。$a + b$ の小数部分を c とするとき，$\dfrac{1}{c} - c$ の値を求めよう。

(1)　$(ab)^2 = \boxed{\mathsf{N}}$，$(a+b)^2 = \boxed{\mathsf{OP}}$ である。

(2)　$\boxed{\mathsf{Q}} < a + b < \boxed{\mathsf{Q}} + 1$ であるから，c の値は $\sqrt{\boxed{\mathsf{RS}}} - \boxed{\mathsf{T}}$ である。

よって，$\dfrac{1}{c} - c = \boxed{\mathsf{U}}$ となる。

注）小数部分：fractional portion

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\mathrm{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\mathrm{I}}$ の解答欄 $\boxed{\mathbf{V}}$ ～ $\boxed{\mathbf{Z}}$ はマークしないでください。

II

数列 $\{a_n\}$ が次の条件

$$a_1 = 1$$
$$a_{n+1} = 2{a_n}^2 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を満たすとき，$a_n < 10^{60}$ となるような自然数 n の個数を求めよう。ただし，$\log_{10} 2 = 0.301$ とする。

条件より，すべての自然数 n に対して $a_n > 0$ であることがいえる。よって，① の両辺の常用対数を考えると

$$\log_{10} a_{n+1} = \log_{10} \boxed{\mathsf{A}} + \boxed{\mathsf{B}} \log_{10} a_n$$

を得る。ここで，$b_n = \log_{10} a_n + \log_{10} \boxed{\mathsf{A}}$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ は公比が $\boxed{\mathsf{C}}$ の等比数列となる。よって

$$\log_{10} a_n = \left(\boxed{\mathsf{D}}^{\,n-1} - \boxed{\mathsf{E}} \right) \log_{10} \boxed{\mathsf{F}}$$

を得る。さらに，$a_n < 10^{60}$ より

$$\boxed{\mathsf{D}}^{\,n-1} < \frac{\boxed{\mathsf{GH}}}{\log_{10} \boxed{\mathsf{F}}} + \boxed{\mathsf{E}} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

が得られる。この不等式 ② の右辺の値より大きい自然数の中で最小のものは $\boxed{\mathsf{IJK}}$ であるから，$a_n < 10^{60}$ を満たす自然数 n は $\boxed{\mathsf{L}}$ 個ある。

注） 常用対数 : common logarithm，公比 : common ratio，等比数列 : geometric progression

\- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\text{M}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

III

次の 2 つの方程式

$$\left(\log_4 2\sqrt{x}\right)^2 + \left(\log_4 2\sqrt{y}\right)^2 = \log_2\left(\sqrt[4]{2}\cdot x\sqrt{y}\right) \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

$$\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[4]{y} = 2^k \quad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

を考える。①, ② を同時に満たす正の実数 x, y が存在するとき，定数 k のとり得る値の範囲を求めよう。

$\log_2 x = X$, $\log_2 y = Y$ とおき，①, ② を X, Y を用いて表す。まず，① を考えよう。

$$\log_4 2\sqrt{x} = \frac{\log_2 x + \boxed{\mathsf{A}}}{\boxed{\mathsf{B}}}$$

および

$$\log_2\left(\sqrt[4]{2}\cdot x\sqrt{y}\right) = \frac{\boxed{\mathsf{C}}}{\boxed{\mathsf{D}}} + \log_2 x + \frac{\log_2 y}{\boxed{\mathsf{E}}}$$

より，① は

$$\left(X - \boxed{\mathsf{F}}\right)^2 + \left(Y - \boxed{\mathsf{G}}\right)^2 = \boxed{\mathsf{HI}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad ③$$

となる。② も同様にして

$$4X + \boxed{\mathsf{J}}\,Y = \boxed{\mathsf{KL}}\,k \quad \cdots\cdots\cdots \quad ④$$

となる。

XY平面上で考えると，円 ③ の中心から直線 ④ への距離 d は

$$d = \frac{\left|\boxed{\mathsf{MN}} - \boxed{\mathsf{OP}}\,k\right|}{\boxed{\mathsf{Q}}}$$

であるから，k のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\mathsf{R}} \leqq k \leqq \boxed{\mathsf{S}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\text{T}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

IV

問 1　$f(x) = \int_0^{2x} (t^2 - x^2) \sin 3t \, dt$ を x について微分しよう。

(1)　一般に，連続関数 $g(t)$ の原始関数の 1 つを $G(t)$ とするとき

$$\int_0^{2x} g(t)\, dt = G(2x) - G(0)$$

である。この両辺を x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\int_0^{2x} g(t)\, dt = \boxed{\text{A}}$$

となる。ただし，$\boxed{\text{A}}$ には次の ⓪ ～ ⑦ の中から適するものを選びなさい。

⓪ $g(x)$　① $\frac{1}{2}g(x)$　② $2g(x)$　③ $g(2x)$

④ $\frac{1}{2}g(2x)$　⑤ $2g(2x)$　⑥ $g(x) - g(0)$　⑦ $g(2x) - g(0)$

(2)　$f(x) = \int_0^{2x} t^2 \sin 3t \, dt - \int_0^{2x} x^2 \sin 3t \, dt$ であり

$$\frac{d}{dx}\int_0^{2x} t^2 \sin 3t \, dt = \boxed{\text{B}}\, x^2 \sin \boxed{\text{C}}\, x$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^{2x} x^2 \sin 3t \, dt = \frac{\boxed{\text{D}}}{\boxed{\text{E}}}\, x \left(-\cos \boxed{\text{F}}\, x + \boxed{\text{G}} + \boxed{\text{H}}\, x \sin \boxed{\text{I}}\, x \right)$$

であるから

$$f'(x) = \frac{\boxed{\text{D}}}{\boxed{\text{E}}}\, x \left(\cos \boxed{\text{J}}\, x - \boxed{\text{K}} + \boxed{\text{L}}\, x \sin \boxed{\text{M}}\, x \right)$$

である。

注）連続関数 : continuous function ，原始関数 : primitive function

- 計算欄 (memo) -

問 2　a は正の実数とする。2 つの曲線

$$C_1 : y = \frac{3}{x}$$
$$C_2 : y = \frac{a}{x^2}$$

の交点を P とし，C_2 の点 P における接線を ℓ とする。C_1 と ℓ で囲まれた部分の面積 S を求めよう。

P の座標は $\left(\dfrac{a}{\boxed{\text{N}}}, \dfrac{\boxed{\text{O}}}{a} \right)$ であるから，ℓ の方程式は

$$y = -\frac{\boxed{\text{PQ}}}{a^2}x + \frac{\boxed{\text{RS}}}{a}$$

である。

したがって，S は

$$p = \frac{a}{\boxed{\text{T}}}, \qquad q = \frac{a}{\boxed{\text{U}}} \qquad (p < q)$$

とおくとき

$$S = \Big[\boxed{\text{V}} \Big]_p^q$$

を計算することによって求まる。ただし，$\boxed{\text{V}}$ には，下の ⓪ ～ ⑤ の中から適するものを選びなさい。

よって

$$S = \frac{\boxed{\text{W}}}{\boxed{\text{X}}} - 3\log \boxed{\text{Y}}$$

である。

⓪ $\dfrac{18}{a^2}x^2 - \dfrac{27}{a}x + 3\log|x|$

① $\dfrac{9}{a^2}x^2 - \dfrac{9}{a}x + 3\log|x|$

② $-\dfrac{27}{a^2}x^2 + \dfrac{18}{a}x - 3\log|x|$

③ $-\dfrac{27}{a^2}x^2 + \dfrac{27}{a}x - 3\log|x|$

④ $\dfrac{27}{a^2}x^2 - \dfrac{27}{a}x + 3\log|x|$

⑤ $-\dfrac{18}{a^2}x^2 + \dfrac{27}{a}x - 3\log|x|$

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 2」が正しくマークしてあるか，
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。