

平成16年度
日本留学試験(第1回)

試験問題

語学留学企業

平成16年度(2004年度)日本留学試験

数 学 (80分)

【コース1(基本, Basic)・コース2(上級, Advanced)】

(どちらか一方のコースを選んで解答してください。)

I 注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題用紙の中を見ないでください。
2. コース1は1～12ページ、コース2は13～24ページにあります。
3. 解答は、解答用紙に鉛筆(HB)で記入してください。
4. 問題用紙の余白は、計算やメモに使ってもいいです。
5. 監督者の許可なしに、部屋の外に出ることはできません。
6. 試験が終わっても、この問題用紙を持ち帰ることはできません。
7. 受験番号と名前を下の欄に、受験票と同じように記入してください。

II 解答上の注意

1. 問題文中のA, B, C, ...には、それぞれ－(マイナスの符号)、または、0から9までの数が一つずつ入ります。あてはまるものを選び、解答用紙(マークシート)の対応する解答欄にマークしてください。

ただし、平方根については、たとえば、 $\sqrt{12}$ は $2\sqrt{3}$ のように、根号($\sqrt{\quad}$)の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。また、分数については、符号は分子につけ、分母・分子は既約分数(reduced fraction)にして解答してください。

【例】

$\frac{A}{CD} \sqrt{\frac{B}{CD}}$ に $\frac{-\sqrt{3}}{14}$ と答える場合は、以下のようにマークする。

【解答用紙】

A	<input checked="" type="radio"/>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B	<input type="radio"/>	0	1	2	<input checked="" type="radio"/>	4	5	6	7	8	9
C	<input type="radio"/>	0	<input checked="" type="radio"/>	2	3	4	5	6	7	8	9
D	<input type="radio"/>	0	1	2	3	<input checked="" type="radio"/>	5	6	7	8	9

2. 解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

受験番号			*				*					
名前												

数学 コース 2

(上級コース)

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので、どちらか一方のコースを選んで解答してください。

「コース2」を選ぶ場合は、右のように、解答用紙の左上にある「解答コース」の「コース2」を○で囲み、その下のマーク欄をマークしてください。選択したコースが正しくマークされていないと、採点されません。

< 解答用紙記入例 >

解答コース Course	
コース1 Course 1	コース2 Course 2
○	●

I

次の各問題文中の A ～ H に対して、それぞれの選択肢の中から最も適するものを一つ選びなさい。

問 1 a を定数とし、 x の整式 P, Q を

$$P = x^4 - (a+8)x^2 - 2ax + 4a + 1$$

$$Q = x^2 - 2x - a$$

とする。

(1) P を Q で割ったときの商は A であり、余りは B である。

① $x^2 + 2x + 4$

① $x^2 + 2x - 4$

② $x^2 - 2x + 4$

③ $x^2 - 2x - 4$

④ $4x + 1$

⑤ $-4x + 1$

⑥ $8x + 1$

⑦ $-8x + 1$

(2) $x = -1 + \sqrt{5}$ のとき、 P の値は

$$P = \text{C}$$

である。

① $8 + 9\sqrt{5}$

① $8 - 9\sqrt{5}$

② $9 + 8\sqrt{5}$

③ $9 - 8\sqrt{5}$

問 2 実数 k について次の条件を考える。

(a) $k < 1$

(b) $|k| < 1$

(c) $|k - 1| < 2\sqrt{3}$

(d) 2 次関数 $y = x^2 + (k - 1)x + 3$ のグラフの頂点が第 1 象限にある。

(1) (c) は, (b) であるための D。

(2) (a) かつ (c) は, (d) であるための E。

(3) (b) は, (d) であるための F。

④ 必要十分条件である

① 必要条件であるが, 十分条件ではない

② 十分条件であるが, 必要条件ではない

③ 必要条件でも十分条件でもない

問 3

(1) $a = \sqrt[3]{2}$, $b = \sqrt[3]{4}$, $c = \sqrt[3]{8}$ に対し, が成り立つ。

(2) $a = 10^{10}$, $b = 3^{20}$, $c = 2^{30}$ に対し, が成り立つ。

① $a < b < c$

② $a < c < b$

③ $b < a < c$

④ $b < c < a$

⑤ $c < a < b$

⑥ $c < b < a$

の問題はこれで終わります。 の解答欄 ～ は空欄にしてください。

II

次の各問題文中の A ～ Z には、それぞれ - (負号, minus sign) か 0 ～ 9 の数字のいずれか一つが入る。適するものを選びなさい。

問 1 a, b は定数とし、 $b \neq 0$ とする。2 次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ の 2 つの解が $p, 2q$ で、2 次方程式 $x^2 - px + q = 0$ の 2 つの解が $a, \frac{1}{2}b$ ならば

$$a = \frac{\boxed{A B}}{\boxed{C}}, \quad b = \boxed{D E}$$

である。

問2 2組のカードがあり、それぞれの組は6枚のカードからなる。6枚のカードには1から6までの数が1つずつ書かれている。P、Qの2人がそれぞれ1組ずつもち、おのおの無作為に自分のもつ組の中から1枚のカードを取り出し、次のルールで得点を競う。

- (i) 2人の取り出したカードの数が異なる場合は、
 大きい方の数を出した人の得点は自分の出した数とし、
 小さい方の数を出した人の得点は0とする。
- (ii) 2人が同じ数のカードを取り出した場合は、2人の得点はともに0とする。

- (1) Pが得点3を得る確率は $\frac{1}{\boxed{\text{F G}}}$ である。
- (2) Pが1以上の得点を得る確率は $\frac{\boxed{\text{H}}}{\boxed{\text{I J}}}$ である。
- (3) Pの得点の期待値は $\frac{\boxed{\text{K L}}}{\boxed{\text{M N}}}$ である。

注) 無作為に : at random

問 3 α は第 2 象限の角で, $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ とする。

(1) $\cos \alpha = \frac{\boxed{\text{O}} \sqrt{\boxed{\text{P}}}}{3}$, $\sin 2\alpha = \frac{\boxed{\text{Q R}} \sqrt{\boxed{\text{S}}}}{3}$ である。

(2) $f(x) = \cos x + \cos(x + 2\alpha)$ ($0^\circ \leq x < 360^\circ$) を変形すると

$$f(x) = \frac{\boxed{\text{T}} \sqrt{\boxed{\text{U}}}}{3} \sin x + \frac{4}{3} \cos x$$

となる。さらに, $\tan \beta = \sqrt{\boxed{\text{V}}}$ ($0^\circ < \beta < 90^\circ$) となる β に対して

$$f(x) = \frac{\boxed{\text{W}} \sqrt{\boxed{\text{X}}}}{3} \sin(x + \beta)$$

と変形できる。したがって, $f(x)$ の最大値は $\frac{\boxed{\text{Y}} \sqrt{\boxed{\text{Z}}}}{3}$ である。

II の問題はこれで終わります。

III

次の各問題文中の A ～ T には、それぞれ - (負号, minus sign) か 0 ～ 9 の数字のいずれか一つが入る。適するものを選びなさい。

問 1 放物線 $y = x^2 + 1$ を C 、直線 $3x + 4y = 0$ を ℓ とし、 C 上の点 $(t, t^2 + 1)$ を P とする。
また、 P から ℓ にひいた垂線と ℓ との交点を H とし、 $PH = d$ とする。

(1) P は領域 $3x + 4y > 0$ にあるから

$$d = \frac{1}{\boxed{A}} \left(\boxed{B} t^2 + \boxed{C} t + \boxed{D} \right)$$

である。

(2) P を C 上で動かし、(1) の d を最小にする P を求めると、その座標は

$$\left(\frac{\boxed{E} \boxed{F}}{\boxed{G}}, \frac{\boxed{H} \boxed{I}}{\boxed{J} \boxed{K}} \right)$$

である。

問 2 空間において、点 $A(1, -1, 1)$ を中心とする半径 3 の球面 S_1 と、点 $B(t, 1-t, 1+t)$ を中心とする半径 2 の球面 S_2 がある。

S_1 と S_2 が共有点をもつのは、 t が

$$1 - \frac{\sqrt{\frac{LM}{N}}}{\frac{N}{Q}} \leq t \leq 1 + \frac{\sqrt{\frac{OP}{Q}}}{\frac{Q}{Q}}$$

を満たすときである。

また、点 B が点 A に最も近づくのは $t = \boxed{R}$ のときである。このとき、 S_1 と S_2 が交わってできる円の半径は $\frac{\sqrt{\boxed{ST}}}{4}$ である。

III の問題はこれで終わりです。III の解答欄 $\boxed{U} \sim \boxed{Z}$ は空欄にしてください。

IV 次の各問題文中の A ～ N には、それぞれ - (負号, minus sign) か 0 ～ 9 の数字のいずれか一つが入る。適するものを選びなさい。

問 1 0 でない定数 a, b, c は、次式を満たすとする。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a\sqrt{x+4}+b}{x} = c$$

- (1) b を a の式で表すと、 $b = \boxed{\text{A B}} a$ である。
- (2) $c = 2$ のとき、 $a = \boxed{\text{C}}$, $b = \boxed{\text{D E F}}$ である。

問 2 関数 $f(x) = \frac{\log x}{x}$ ($1 \leq x \leq 4$) を考える。ただし、対数は自然対数とする。

- (1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めると

$$f'(x) = \frac{\boxed{\text{G}} - \log x}{x^2}$$

である。

- (2) $t = \log x$ と置換することによって不定積分 $\int f(x) dx$ を求めると

$$\int f(x) dx = \frac{\boxed{\text{H}}}{\boxed{\text{I}}} (\log x)^{\boxed{\text{J}}} + C$$

である。ここで、 C は積分定数である。

- (3) 2つの曲線 $y = f(x)$ と $y = \frac{1}{3x}$ の交点の x 座標は $e^{\frac{\boxed{\text{K}}}{\boxed{\text{L}}}}$ である。また、曲線 $y = f(x)$, $y = \frac{1}{3x}$ および直線 $x = e$ で囲まれる図形の面積 S を求めると

$$S = \frac{\boxed{\text{M}}}{\boxed{\text{N}}}$$

である。

Ⅳの問題はこれで終わりです。Ⅳの解答欄 $\boxed{\text{O}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ は空欄にしてください。
コース2の問題はこれですべて終わりです。解答用紙には $\boxed{\text{V}}$ がありますが、 $\boxed{\text{V}}$ の問題は
ありませんので、空欄にしてください。

この問題用紙を持ち帰ることはできません。

平成16年度
日本留学試験(第1回)
参考資料

平成16年度
日本留学試験(第1回)

正 解 表

語学留学企業館

〈数 学〉

コース1

問	I								
	問1			問2			問3		
	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	
解答欄	A	B	C	D	E	F	G	A	
答	3	4	7	1	2	0	0	5	

問	II							
	問1		問2			問3		
			(1)	(2)	(3)			
解答欄	ABC	DE	FGH	IJK	LMN	O	PQ	RS
答	-12	-3	715	280	640	2	30	22

問	III										
	問1					問2					
	(1)		(2)			(1)		(2)		(3)	
解答欄	A	BCD	EFG	HIJK	L	MNO	PQ	R	STU	VW	XYZ
答	5	434	-38	7364	8	896	15	2	988	28	448

問	IV									
	問1					問2				
	(1)		(2)			(1)		(2)		
解答欄	A	BC	DE	FG	HI	JK	L	MN	OP	QRST
答	2	12	16	16	83	-1	0	-2	-4	-316

コース2

問	I							
	問1			問2			問3	
	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)
解答欄	A	B	C	D	E	F	G	H
答	1	7	3	1	0	2	0	5

問	II										
	問1		問2				問3				
			(1)	(2)	(3)	(1)	(2)				
解答欄	ABC	DE	FG	HIJ	KLMN	OP	QRS	TU	V	WX	YZ
答	-12	-3	18	512	3518	-6	-22	22	2	26	26

問	III								
	問1				問2				
	(1)		(2)						
解答欄	A	BCD	EFG	HIJK	LMN	OPQ	R	ST	
答	5	434	-38	7364	693	693	1	46	

問	IV							
	問1				問2			
	(1)	(2)	(1)	(2)	(3)			
解答欄	AB	C	DEF	G	HI	J	KL	MN
答	-2	8	-16	1	12	2	13	29