平成22年度

日本留学試験(第1回)

試験問題

数学 コース 2
（上級コース）

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の左上にある「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

＜ 解答用紙記入例 ＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

I

問 1　方程式

$$(x-1)^2 = |3x-5| \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を考える。

(1)　方程式 ① の解のうち $x \geqq \dfrac{5}{3}$ を満たす解は，$x =$ $\boxed{\textbf{A}}$，$\boxed{\textbf{B}}$ である。ただし，$\boxed{\mathrm{A}} < \boxed{\mathrm{B}}$ とする。

(2)　方程式 ① の解は全部で $\boxed{\textbf{C}}$ 個ある。その解のうちで最小のものを α とすると，$m-1 < \alpha \leqq m$ を満たす整数 m は $\boxed{\textbf{DE}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　実数 x, y に関する次の 3 つの条件 (a), (b), (c) を考える。

(a)　$x+y=5$,　$xy=3$ を満たす

(b)　$x+y=5$,　$x^2+y^2=19$ を満たす

(c)　$x^2+y^2=19$,　$xy=3$ を満たす

(1)　等式 $x^2+y^2=(x+y)^2-\boxed{\mathsf{F}}\,xy$ を用いると

条件 (b) のとき　$xy=\boxed{\mathsf{G}}$,

条件 (c) のとき　$x+y=\boxed{\mathsf{H}}$　または　$x+y=\boxed{\mathsf{IJ}}$

が得られる。

(2)　次の $\boxed{\mathsf{K}}$ ～ $\boxed{\mathsf{M}}$ には，下の ⓪ ～ ③ のうちから適するものを一つずつ選びなさい。

(i)　(a) は (b) であるための $\boxed{\mathsf{K}}$。

(ii)　(b) は (c) であるための $\boxed{\mathsf{L}}$。

(iii)　(c) は (a) であるための $\boxed{\mathsf{M}}$。

⓪　必要十分条件である

①　十分条件であるが，必要条件ではない

②　必要条件であるが，十分条件ではない

③　必要条件でも十分条件でもない

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{I}}$ の解答欄 $\boxed{\text{N}}$ 〜 $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

II

xy 平面上に 2 直線

$$y = 1, \quad y = -1$$

および点 A(0, 3) が与えられている。

いま，直線 $y = 1$ 上に点 P を，直線 $y = -1$ 上に点 Q をとり

$$\angle \mathrm{PAQ} = 90^\circ$$

であるとする。2 点 P, Q がこれらの条件を満たして動くとき，線分 PQ の長さの最小値を求めよう。

まず，P の座標を $(\alpha, 1)$，Q の座標を $(\beta, -1)$ とする。このとき，$\angle \mathrm{PAQ} = 90^\circ$ を満たすことは，$\alpha \neq 0$，$\beta \neq 0$ で

$$\alpha\beta = \boxed{\mathbf{AB}}$$

となることである。よって，α, β は異符号であるから，$\alpha < 0 < \beta$ としよう。

このとき

$$\begin{aligned} \mathrm{PQ}^2 &= (\beta - \alpha)^2 + \boxed{\mathbf{C}} \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + \boxed{\mathbf{DE}} \\ &\geqq 2|\alpha\beta| + \boxed{\mathrm{DE}} = \boxed{\mathbf{FG}} \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって

$$\mathrm{PQ} \geqq \boxed{\mathbf{H}}$$

である。よって，PQ は

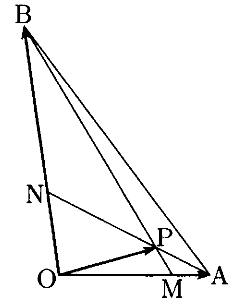
$$\alpha = \boxed{\mathbf{IJ}}\sqrt{\boxed{\mathbf{K}}}, \quad \beta = \boxed{\mathbf{L}}\sqrt{\boxed{\mathbf{M}}}$$

のとき，最小値 $\boxed{\mathrm{H}}$ をとる。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\text{N}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

III



三角形 OAB を考える。辺 OA を 3 : 1 に内分する点を M，辺 OB を 1 : 2 に内分する点を N とし，線分 AN と線分 BM の交点を P とする。

(1) ベクトル $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ をそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$ とおくとき，ベクトル $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表すことを考える。

$$\mathrm{AP} : \mathrm{PN} = s : (1-s) \qquad (0 < s < 1)$$
$$\mathrm{BP} : \mathrm{PM} = t : (1-t) \qquad (0 < t < 1)$$

とおくと

$$\overrightarrow{OP} = (\boxed{\text{A}} - s)\vec{a} + \frac{\boxed{\text{B}}}{\boxed{\text{C}}} s\,\vec{b}$$
$$= \frac{\boxed{\text{D}}}{\boxed{\text{E}}} t\,\vec{a} + (\boxed{\text{F}} - t)\vec{b}$$

が成り立つから

$$s = \frac{\boxed{\text{G}}}{\boxed{\text{H}}}, \qquad t = \frac{\boxed{\text{I}}}{\boxed{\text{J}}}$$

である。したがって，$\overrightarrow{OP}$ は $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\boxed{\text{K}}}{\boxed{\text{L}}} \vec{a} + \frac{\boxed{\text{M}}}{\boxed{\text{N}}} \vec{b}$$

と表される。

(問は次ページに続く)

注） 内分する : divide internally ， 内積 : inner product

(2)　$\mathrm{OA}=6$，$\mathrm{OB}=9$ のとき，線分 OP の長さと $\angle\mathrm{AOB}$ の大きさとの関係を調べよう。

OP の長さを ℓ とおくとき，ℓ^2 を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を用いて表すと

$$\ell^2=\frac{\boxed{\mathsf{O}}}{\boxed{\mathsf{PQ}}}\vec{a}\cdot\vec{b}+\boxed{\mathsf{RS}}$$

を得る。

したがって，例えば，$\ell=4$ のとき

$$\cos\angle\mathrm{AOB}=\frac{\boxed{\mathsf{TU}}}{\boxed{\mathsf{V}}}$$

である。

一方，$\angle\mathrm{AOB}$ の大きさを変えるとき，ℓ のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\mathsf{W}}<\ell<\boxed{\mathsf{X}}$$

である。

III の問題はこれで終わりです。III の解答欄 $\boxed{\mathsf{Y}}$，$\boxed{\mathsf{Z}}$ はマークしないでください。

IV

問 1　x の関数 $f(x)=\log(4x-\log x)$ がある。ここで，log は自然対数とする。$f''(x)$ を求めて $f(x)$ の極値を調べよう。

ただし，$\boxed{\mathsf{K}}$，$\boxed{\mathsf{L}}$ には，下の ⓪ ～ ⑥ のうちから最も適するものを一つずつ選びなさい。

まず，$f'(x)$，$f''(x)$ を求めると

$$f'(x) = \frac{\boxed{\mathsf{A}} - \dfrac{\boxed{\mathsf{B}}}{x}}{4x-\log x}$$

$$f''(x) = \frac{\dfrac{1}{x^{\boxed{\mathsf{C}}}}(4x-\log x) - \left(\boxed{\mathsf{A}} - \dfrac{\boxed{\mathsf{B}}}{x}\right)^{\boxed{\mathsf{D}}}}{(4x-\log x)^2}$$

となる。これより

$$f'\left(\frac{\boxed{\mathsf{E}}}{\boxed{\mathsf{F}}}\right) = 0$$

$$f''\left(\frac{\boxed{\mathsf{E}}}{\boxed{\mathsf{F}}}\right) = \frac{\boxed{\mathsf{GH}}}{\boxed{\mathsf{I}}+\log\boxed{\mathsf{J}}}$$

となる。このとき

$$f''\left(\frac{\boxed{\mathsf{E}}}{\boxed{\mathsf{F}}}\right) \ \boxed{\mathsf{K}}\ 0$$

であるから，$f(x)$ は $x=\dfrac{\boxed{\mathsf{E}}}{\boxed{\mathsf{F}}}$ で $\boxed{\mathsf{L}}$ となる。また，そのときの値は

$\log\left(\boxed{\mathsf{M}}+\log\boxed{\mathsf{N}}\right)$ である。

⓪ $=$　① $>$　② $\geqq$　③ $<$　④ $\leqq$　⑤ 極大　⑥ 極小

注） 自然対数：natural logarithm

- 計算欄 (memo) -

問 2　曲線 $y=2\cos 2x$ と曲線 $y=4\cos x+k$ は，$x=a$ $\left(0<a\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ で共通の接線をもつとする。

(1)　$f(x)=2\cos 2x$，$g(x)=4\cos x+k$ とおく。題意より，2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ は $x=a$ で共通の接線をもつから

$$f'(a)=g'(a),\quad f(a)=g(a)$$

である。

$f'(a)=g'(a)$ と $0<a\leqq\dfrac{\pi}{2}$ から $a=\dfrac{\pi}{\boxed{\mathsf{O}}}$ であり，$f(a)=g(a)$ から $k=-\boxed{\mathsf{P}}$ を得る。

したがって，接点の座標は $\left(\dfrac{\pi}{\boxed{\mathsf{O}}},\ -\boxed{\mathsf{Q}}\right)$ であり，共通の接線の方程式は

$$y=-\boxed{\mathsf{R}}\sqrt{\boxed{\mathsf{S}}}\left(x-\frac{\pi}{\boxed{\mathsf{T}}}\right)-\boxed{\mathsf{U}}$$

である。

(2)　$-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲において，この 2 つの曲線で囲まれた部分の面積 S を求めよう。

2 つの曲線はともに y 軸に関して対称であるから，$b=\boxed{\mathsf{V}}$，$c=\dfrac{\pi}{\boxed{\mathsf{O}}}$ として

$$S=\boxed{\mathsf{W}}\int_b^c(2\cos 2x-4\cos x-k)\,dx$$

であり，これを計算して

$$S=\boxed{\mathsf{X}}\pi-\boxed{\mathsf{Y}}\sqrt{\boxed{\mathsf{Z}}}$$

を得る。

\- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 2」が正しくマークしてあるか、
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。