平成28年度

日本留学試験（第２回）

試験問題

The Examination

平成28年度（2016年度）日本留学試験

数　学（８０分）

【コース１(基本, Basic)・コース２(上級, Advanced)】

※　どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。

Ⅰ　試験全体に関する注意

1．係員の許可なしに，部屋の外に出ることはできません。

2．この問題冊子を持ち帰ることはできません。

Ⅱ　問題冊子に関する注意

1．試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見ないでください。

2．試験開始の合図があったら，下の欄に，受験番号と名前を，受験票と同じように記入してください。

3．コース１は１～13ページ，コース２は15～27ページにあります。

4．足りないページがあったら，手をあげて知らせてください。

5．メモや計算などを書く場合は，問題冊子に書いてください。

Ⅲ　解答方法に関する注意

1．解答は，解答用紙に鉛筆（ＨＢ）で記入してください。

2．問題文中の**A**，**B**，**C**，…には，それぞれ－（マイナスの符号），または，０から９までの数が一つずつ入ります。あてはまるものを選び，解答用紙（マークシート）の対応する解答欄にマークしてください。

3．同一の問題文中に $\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{BC}}$ などが繰り返し現れる場合，２度目以降は，$\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{BC}}$ のように表しています。

解答に関する記入上の注意

(1)　根号（$\sqrt{\ }$）の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。
（例：$\sqrt{32}$ のときは，$2\sqrt{8}$ ではなく $4\sqrt{2}$ と答えます。）

(2)　分数を答えるときは，符号は分子につけ，既約分数(reduced fraction)にして答えてください。
（例：$\frac{2}{6}$ は $\frac{1}{3}$，$-\frac{2}{\sqrt{6}}$ は $\frac{-2\sqrt{6}}{6}$ と分母を有理化してから約分し，$\frac{-\sqrt{6}}{3}$ と答えます。）

(3)　$\dfrac{\boxed{\text{A}}\sqrt{\boxed{\text{B}}}}{\boxed{\text{C}}}$ に $\dfrac{-\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は，下のようにマークしてください。

(4)　$\boxed{\text{DE}}\,x$ に $-x$ と答える場合は，**D**を－，**E**を１とし，下のようにマークしてください。

【解答用紙】

A	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
B	⊖	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
C	⊖	⓪	①	②	③	●	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
D	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
E	⊖	⓪	●	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

4．解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※　試験開始の合図があったら，必ず受験番号と名前を記入してください。

受験番号			*					*					
名　　前													

数学 コース 2
(上級コース)

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを 一つだけ 選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

＜解答用紙記入例＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

I

問 1　x の 2 次関数

$$y = ax^2 + bx + c \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を考える。関数 ① は $x = 1$ のとき最大値 16 をとり，そのグラフは x 軸と 2 点で交わり，その 2 点を結ぶ線分の長さを 8 とする。このとき，a, b, c の値を求めよう。

条件より，① は

$$y = a(x - \boxed{\mathsf{A}})^2 + \boxed{\mathsf{BC}}$$

と表すことができる。また，① のグラフと x 軸が交わる 2 点の座標は

$$\left(-\boxed{\mathsf{D}}, 0\right), \quad \left(\boxed{\mathsf{E}}, 0\right)$$

である。

したがって，$a = \boxed{\mathsf{FG}}$ である。よって

$$b = \boxed{\mathsf{H}}, \quad c = \boxed{\mathsf{IJ}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　箱の中に 0 から 9 までの数字が書かれたカードが，それぞれ 1 枚ずつ，計 10 枚入っている。この箱の中から 3 枚のカードを次の 2 通りの方法で取り出す。このとき，次の確率について考える。

(1)　3 枚のカードを同時に取り出す。このとき

(i)　3 枚のカードに書かれた数が，すべて 2 以上 6 以下である確率は $\dfrac{\boxed{\mathrm{K}}}{\boxed{\mathrm{LM}}}$ である。

(ii)　最も小さい数が 2 以下で，最も大きい数が 8 以上である確率は $\dfrac{\boxed{\mathrm{NO}}}{\boxed{\mathrm{PQ}}}$ である。

(2)　1 枚のカードを取り出し，数字を見てから元の箱に戻す試行を 3 回続ける。このとき，最も小さい数が 2 以上で，最も大きい数が 6 以下である確率は $\dfrac{\boxed{\mathrm{R}}}{\boxed{\mathrm{S}}}$ である。

注）試行：trial

\- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\mathrm{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\mathrm{I}}$ の解答欄 $\boxed{\mathrm{T}}$ ～ $\boxed{\mathrm{Z}}$ はマークしないでください。

II

正の数からなる数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ は

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 10$$

$$(a_n)^2 a_{n-2} = (a_{n-1})^3 \quad (n = 3, 4, \cdots) \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を満たしている。このとき，$\lim_{n \to \infty} a_n$ を求めよう。

① の両辺の常用対数を考えて

$$\boxed{\text{A}} \log_{10} a_n + \log_{10} a_{n-2} = \boxed{\text{B}} \log_{10} a_{n-1}$$

を得る。いま，$b_n = \log_{10} a_n \ (n = 1, 2, \cdots)$ とおくと，この式は

$$\boxed{\text{A}}\, b_n + b_{n-2} = \boxed{\text{B}}\, b_{n-1} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

となる。② を変形すると

$$b_n - b_{n-1} = \frac{1}{\boxed{\text{C}}}(b_{n-1} - b_{n-2}) \quad (n = 3, 4, \cdots)$$

となるから

$$b_n - b_{n-1} = \left(\frac{1}{\boxed{\text{C}}}\right)^{n-\boxed{\text{D}}}(b_2 - b_1) \quad (n = 2, 3, \cdots) \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ③$$

が成り立つ。

（ II は次ページに続く）

注） 常用対数：common logarithm

ここで，$b_1 = \boxed{\text{E}}$，$b_2 = \boxed{\text{F}}$ であるから，③ より

$$b_n = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{\boxed{\text{C}}} \right)^{k-\boxed{\text{G}}}$$

を得る。よって

$$b_n = \boxed{\text{H}} - \left(\frac{1}{\boxed{\text{C}}} \right)^{n-\boxed{\text{I}}}$$

である。したがって

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \boxed{\text{JKL}}$$

である。

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\text{M}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

III

2 次方程式 $x^2+\sqrt{3}x+1=0$ の 2 つの解を α, β とする。ただし，$0<\arg\alpha<\arg\beta<2\pi$ である。このとき，次の 3 つの条件を満たす複素数 z を考える。

$$\begin{cases} \arg\dfrac{\alpha-z}{\beta-z}=\dfrac{\pi}{2} & \cdots\cdots\cdots \text{①} \\ (1+i)z+(1-i)\overline{z}+k=0 & \cdots\cdots\cdots \text{②} \\ \dfrac{\pi}{2}<\arg z<\pi & \cdots\cdots\cdots \text{③} \end{cases}$$

ただし，k は実数とする。

また，複素数平面上で α, β, z を表す点をそれぞれ A, B, P とおく。

(1)　α, β の偏角は

$$\arg\alpha=\frac{\boxed{\text{A}}}{\boxed{\text{B}}}\pi,\quad \arg\beta=\frac{\boxed{\text{C}}}{\boxed{\text{D}}}\pi$$

である。

(2)　次の文中の $\boxed{\text{E}}$ ～ $\boxed{\text{Q}}$ には，下の ⓪ ～ ⑨ の中から適するものを選びなさい。

① より，$\boxed{\text{E}}=\dfrac{\pi}{2}$ であるから，点 P は中心 $-\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{F}}}}{\boxed{\text{G}}}$，半径 $\dfrac{\boxed{\text{H}}}{\boxed{\text{I}}}$ の円周上にある。

また，② より，点 P は傾きが $\boxed{\text{J}}$ であり，虚軸との交点が $\dfrac{\boxed{\text{K}}}{\boxed{\text{L}}}ki$ であるような直線の上にある。

以上より，①, ②, ③ を同時に満たす複素数 z の個数を n とすると，n の最大値は $\boxed{\text{M}}$ であり，そのときの k の値の範囲は

$$\boxed{\text{N}}+\sqrt{\boxed{\text{O}}}<k<\sqrt{\boxed{\text{P}}}+\sqrt{\boxed{\text{Q}}}$$

である。ただし，$\boxed{\text{P}}<\boxed{\text{Q}}$ とする。

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4
⑤ 5	⑥ 6	⑦ ∠PAB	⑧ ∠PBA	⑨ ∠APB

注）複素数：complex number，複素数平面：complex plane，偏角：argument，
虚軸：imaginary axis

\- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\text{R}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

IV

問 1　x が不等式

$$2\left(\log_{\frac{1}{3}} x\right)^2 + 9\log_{\frac{1}{3}} x + 9 \leqq 0 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を満たすとき，関数

$$f(x) = (\log_3 x)\left(\log_3 \frac{x}{3}\right)\left(\log_3 \frac{x}{9}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

の最大値を求めよう。

① を満たす x の値の範囲は

$$\boxed{\mathsf{A}}\sqrt{\boxed{\mathsf{B}}} \leqq x \leqq \boxed{\mathsf{CD}}$$

である。

ここで，$\log_3 x = t$ とおくと，t のとる値の範囲は

$$\frac{\boxed{\mathsf{E}}}{\boxed{\mathsf{F}}} \leqq t \leqq \boxed{\mathsf{G}}$$

である。

また，② の右辺を t で表して，その式が表す関数を $g(t)$ とおくと，その導関数は

$$g'(t) = \boxed{\mathsf{H}}\,t^2 - \boxed{\mathsf{I}}\,t + \boxed{\mathsf{J}}$$

である。したがって，$f(x)$ は $x = \boxed{\mathsf{KL}}$ で最大値 $\boxed{\mathsf{M}}$ をとる。

注）導関数：derivative

\- 計算欄 (memo) -

問 2　$a>0$ とする。曲線 $y=\sqrt{x}e^{-x}$ と x 軸および x 軸上の点 $\mathrm{A}(a,0)$ を通る直線 $x=a$ で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を V とする。

(1)　V は a の関数として

$$V=-\frac{\pi}{4}\left\{\left(\boxed{\mathsf{N}}\,a+\boxed{\mathsf{O}}\right)e^{-\boxed{\mathsf{P}}\,a}-\boxed{\mathsf{Q}}\right\}$$

と表される。

(2)　点 A は原点を出発して，x 軸上を正の方向に移動し，その t 秒後の速度を $4t$ とする。このとき，t 秒後の V の変化率を求めると

$$\frac{dV}{dt}=\boxed{\mathsf{R}}\,\pi t^{\boxed{\mathsf{S}}}e^{-\boxed{\mathsf{T}}\,t^{\boxed{\mathsf{U}}}}$$

である。また，この変化率が最も大きくなるのは

$$t=\frac{\sqrt{\boxed{\mathsf{V}}}}{4}$$

のときで，そのときの V の値は

$$V=-\frac{\pi}{8}\left(\boxed{\mathsf{W}}\,e^{-\frac{\boxed{\mathsf{X}}}{\boxed{\mathsf{Y}}}}-\boxed{\mathsf{Z}}\right)$$

である。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 2」が正しくマークしてあるか,
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。