数学 コース 2
（上級コース）

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

＜解答用紙記入例＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

I

問 1　a, b を定数とし，2 次関数 $f(x)=x^2+ax+b$ と 1 次関数 $h(x)=-2x$ を考える。関数 $y=h(x)$ のグラフと直線 $x=3$ との交点を A，関数 $y=h(x)$ のグラフと直線 $x=-2$ との交点を B とする。関数 $y=f(x)$ のグラフの頂点 P が線分 AB 上にあるとき

$$L=\{f(3)-h(3)\}+\{f(-2)-h(-2)\}$$

の値の範囲を求めよう。

点 P の座標は

$$\left(-\frac{a}{\boxed{\mathsf{A}}},\ -\frac{a^2}{\boxed{\mathsf{B}}}+b\right)$$

である。点 P が線分 AB 上にあるから，a の値の範囲は

$$-\boxed{\mathsf{C}}\leqq a\leqq\boxed{\mathsf{D}}$$

である。また，a, b は

$$b=\frac{a^2}{\boxed{\mathsf{E}}}+a$$

を満たす。よって，L は a を用いて

$$L=\frac{1}{2}a^2+\boxed{\mathsf{F}}\,a+\boxed{\mathsf{GH}}$$

と表される。

したがって，L の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\mathsf{IJ}}}{\boxed{\mathsf{K}}}\leqq L\leqq\boxed{\mathsf{LM}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　1 から 9 までの数字が 1 つずつ書かれた 9 枚のカードが，左から小さい順に並んでいる。この中から 2 枚のカードを選び，その位置を入れ換える操作を 2 回続けて行う。2 回の操作後の 9 枚のカードの並びを 9 桁の整数とみなすとき，この整数が偶数になる確率を求めよう。

(1)　まず，1 回目，2 回目ともカードの入れ換えが 9 枚のカードの中から 2 枚を選べるときの確率を考える。

(i)　1 回目に 9 の書かれたカード以外のカードを入れ換える場合，2 回の操作で偶数になる確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{N}}}{\boxed{\mathsf{OP}}}$ である。

(ii)　1 回目に 9 の書かれたカードを他のカードと入れ換える場合，2 回の操作で偶数になる確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{QR}}}{\boxed{\mathsf{STU}}}$ である。

したがって，このとき 2 回の操作で偶数になる確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{V}}}{\boxed{\mathsf{WX}}}$ である。

(2)　次に，2 回目のカードの入れ換えでは，1 回目に入れ換えた 2 枚を除いた残りの 7 枚から 2 枚を選んで入れ換えるときの確率を考える。このとき 2 回の操作で偶数になる確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{Y}}}{\boxed{\mathsf{Z}}}$ である。

\- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\mathrm{I}}$ の問題はこれで終わりです。

II

問 1　平面上の三角形 ABC に対して，点 P と実数 k は

$$9\overrightarrow{\mathrm{PA}} + 4\overrightarrow{\mathrm{PB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{PC}} = k\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

を満たしているとする。

(1)　点 P の存在範囲を求めよう。

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \left(\frac{\boxed{\mathsf{A}} + k}{\boxed{\mathsf{BC}}}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \left(\frac{\boxed{\mathsf{D}} - k}{\boxed{\mathsf{EF}}}\right)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

となる。これを変形すると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{\boxed{\mathsf{G}}}{\boxed{\mathsf{H}}}\left\{\left(\frac{\boxed{\mathsf{A}} + k}{6}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \left(\frac{\boxed{\mathsf{D}} - k}{6}\right)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\}$$

と表せる。また

$$\frac{\boxed{\mathsf{A}} + k}{6} + \frac{\boxed{\mathsf{D}} - k}{6} = \boxed{\mathsf{I}}$$

であるから，点 P の存在範囲は，辺 AB を $\boxed{\mathsf{J}} : \boxed{\mathsf{K}}$ に内分する点 Q，辺 AC を $\boxed{\mathsf{J}} : \boxed{\mathsf{K}}$ に内分する点 R を通る直線である。ただし，$\boxed{\mathsf{J}} : \boxed{\mathsf{K}}$ は最も簡単な整数比で答えなさい。

(2)　点 P が三角形 ABC の内部にあるための k の範囲は

$$-\boxed{\mathsf{L}} < k < \boxed{\mathsf{M}}$$

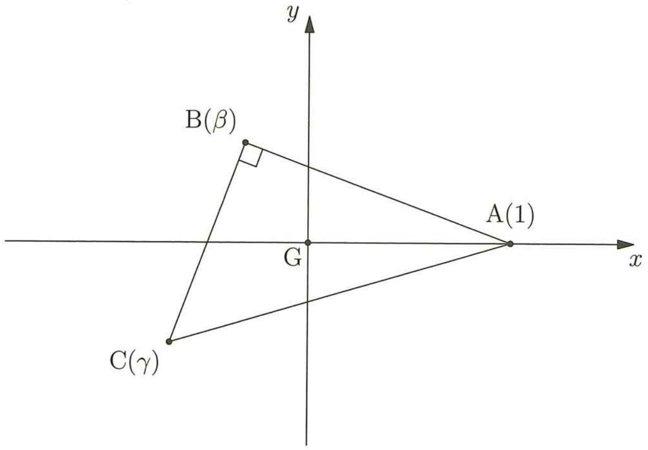
である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　解答は，すべて各問いの下の選択肢の中から選びなさい。

$\angle \mathrm{ABC} = \dfrac{\pi}{2}$ となる直角三角形 ABC を考える。この三角形の重心を G とし，$\mathrm{AG} = 1$ とする。$\angle \mathrm{BAC} = \theta$ とするとき，θ と線分 AG，BG，CG の長さとの関係について調べよう。

複素数平面上で考える。重心 G が原点と一致し，点 A を表す複素数が 1 となるようにする。さらに，点 B，C を表す複素数を β，γ とおくとき，β の虚部が正となるような三角形を考える。



(1)　$\angle \mathrm{ABC} = \dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\left|\frac{\gamma - 1}{\beta - 1}\right| = \boxed{\text{N}}$$

である。したがって

$$\frac{\gamma - 1}{\beta - 1} = \boxed{\text{O}}$$

である。これより，β，γ に関する関係式 $\boxed{\text{P}}$ を得る。

⓪ $\dfrac{1}{\sin\theta}$　① $\dfrac{1}{\cos\theta}$　② $\dfrac{1}{\tan\theta}$　③ $\tan\theta$

④ $\tan\theta + i$　⑤ $1 + i\tan\theta$　⑥ $1 - i\tan\theta$

⑦ $(\tan\theta + i)\beta - \gamma - \tan\theta + 1 - i = 0$

⑧ $(1 + i\tan\theta)\beta - \gamma - i\tan\theta = 0$

⑨ $(1 - i\tan\theta)\beta - \gamma + i\tan\theta = 0$

（問 2 は次ページに続く）

(2)　以後，$\tan\theta = t$ とおく。1，β，γ を頂点とする三角形の重心が原点と一致していることと，関係式 $\boxed{\text{P}}$ より，β，γ は t を用いて

$$\beta = \boxed{\text{Q}}, \qquad \gamma = \boxed{\text{R}}$$

と表される。したがって

$$\mathrm{BG} = \boxed{\text{S}}, \qquad \mathrm{CG} = \boxed{\text{T}}$$

である。

⓪ $-\dfrac{1+2ti}{2+ti}$　① $-\dfrac{1+ti}{2-ti}$　② $-\dfrac{1+ti}{1+2ti}$　③ $\dfrac{-1+ti}{2+ti}$

④ $\dfrac{-2+ti}{1+2ti}$　⑤ $\dfrac{-1+2ti}{2-ti}$　⑥ $\sqrt{\dfrac{4+t^2}{1+t^2}}$　⑦ $\sqrt{\dfrac{4+t^2}{1+4t^2}}$

⑧ $\sqrt{\dfrac{1+4t^2}{4+t^2}}$　⑨ $\sqrt{\dfrac{1+t^2}{4+t^2}}$

(3)　(2) で得た結果より

$$\lim_{\theta\to+0} \mathrm{BG} = \boxed{\text{U}}, \qquad \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0} \mathrm{BG} = \boxed{\text{V}},$$

$$\lim_{\theta\to+0} \mathrm{CG} = \boxed{\text{W}}, \qquad \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0} \mathrm{CG} = \boxed{\text{X}}$$

である。また，$\mathrm{BG} = \dfrac{2}{3}$ のとき，$\mathrm{CG} = \boxed{\text{Y}}$ である。

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4

⑤ $\dfrac{1}{2}$　⑥ $\dfrac{1}{4}$　⑦ $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$　⑧ $\dfrac{\sqrt{11}}{3}$　⑨ $\dfrac{\sqrt{13}}{3}$

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

$\boxed{\text{III}}$

関数

$$f(x)=2\log_{\frac{1}{3}}\frac{x-2}{\sqrt{x-1}}+\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}}\left(-x^2+4x-3\right)+\log_9(x-3)^2$$

の最大値と最小値について調べよう。

ただし，$\boxed{\text{O}}$，$\boxed{\text{P}}$，$\boxed{\text{Q}}$，$\boxed{\text{R}}$，$\boxed{\text{U}}$，$\boxed{\text{V}}$ には次の選択肢 ⓪ ～ ③ の中から適するものを選びなさい。また，その他の $\boxed{}$ には，適する数を入れなさい。

⓪ $<$　　① $>$　　② 最大　　③ 最小

対数の真数は正であるから，$f(x)$ の定義域は

$$\boxed{\text{A}}<x<\boxed{\text{B}}$$

である。$f(x)$ を変形すると

$$f(x)=\log_{\frac{1}{3}}\left\{-\left(x-\boxed{\text{C}}\right)\left(x-\boxed{\text{D}}\right)\left(x-\boxed{\text{E}}\right)^{\boxed{\text{F}}}\right\}$$

となる。ただし，$\boxed{\text{C}}<\boxed{\text{D}}$ とする。ここで

$$g(x)=-\left(x-\boxed{\text{C}}\right)\left(x-\boxed{\text{D}}\right)\left(x-\boxed{\text{E}}\right)^{\boxed{\text{F}}}$$

とすると，$f(x)=\log_{\frac{1}{3}}g(x)$ である。

$g(x)$ を微分すると

$$g'(x)=-\boxed{\text{G}}\left(x-\boxed{\text{H}}\right)\left(\boxed{\text{I}}x^2-\boxed{\text{J}}x+\boxed{\text{K}}\right)$$

であるから，$\boxed{\text{A}}<x<\boxed{\text{B}}$ の範囲で $g'(x)=0$ となるのは

$$x=\frac{\boxed{\text{L}}+\sqrt{\boxed{\text{M}}}}{\boxed{\text{N}}}$$

のときである。

（$\boxed{\text{III}}$ は次ページに続く）

また

$$\boxed{\text{A}} < x < \frac{\boxed{\text{L}}+\sqrt{\boxed{\text{M}}}}{\boxed{\text{N}}} \text{ のとき，} g'(x)\boxed{\textbf{O}}0,$$

$$\frac{\boxed{\text{L}}+\sqrt{\boxed{\text{M}}}}{\boxed{\text{N}}} < x < \boxed{\text{B}} \text{ のとき，} g'(x)\boxed{\textbf{P}}0$$

であるから，$\boxed{\text{A}} < x < \boxed{\text{B}}$ の範囲では，$g(x)$ は $\boxed{\textbf{Q}}$ 値をもたないが，

$x = \dfrac{\boxed{\text{L}}+\sqrt{\boxed{\text{M}}}}{\boxed{\text{N}}}$ で $\boxed{\textbf{R}}$ 値 $\dfrac{\boxed{\textbf{S}}}{\boxed{\textbf{T}}}$ をとる。

したがって，$f(x)$ は $\boxed{\textbf{U}}$ 値をもたないが，$x = \dfrac{\boxed{\text{L}}+\sqrt{\boxed{\text{M}}}}{\boxed{\text{N}}}$ で $\boxed{\textbf{V}}$ 値 $\log_{\boxed{\textbf{W}}} \boxed{\textbf{X}}$ をとる。

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{Y}}$，$\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

$\boxed{\text{IV}}$

a を正の整数とする。区間 $0 \leqq x \leqq \dfrac{2\pi}{3}$ で定義された 2 つの関数

$$f(x) = 3\cos x - a\sin^3 x, \qquad g(x) = a\cos^3 x - 3\sin x$$

について考える。

(1)　2 つの関数の差 $f(x) - g(x)$ は

$$f(x) - g(x) = (\sin x + \cos x)\left(\boxed{\ \mathsf{A}\ } - a + \frac{a}{\boxed{\ \mathsf{B}\ }}\sin 2x\right)$$

と変形できる。このとき，方程式 $\boxed{\ \mathsf{A}\ } - a + \dfrac{a}{\boxed{\ \mathsf{B}\ }}\sin 2x = 0$ が $0 \leqq x \leqq \dfrac{2\pi}{3}$ で解をもつならば，$\boxed{\ \mathsf{C}\ } \leqq a \leqq \boxed{\ \mathsf{C}\ } + 3$ である。

(2)　以下，$a = 4$ とする。

まず，2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ の極値を調べる。$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x) = -\boxed{\ \mathsf{D}\ }\sin x\left(\boxed{\ \mathsf{E}\ } + \boxed{\ \mathsf{F}\ }\sin 2x\right)$$

であるから，$f(x)$ は $x = \dfrac{\boxed{\ \mathsf{G}\ }\pi}{\boxed{\ \mathsf{HI}\ }}$ で極小値をもつ。また，$g(x)$ の導関数 $g'(x)$ は

$$g'(x) = -\boxed{\ \mathsf{J}\ }\cos x\left(\boxed{\ \mathsf{K}\ } + \boxed{\ \mathsf{L}\ }\sin 2x\right)$$

であるから，$g(x)$ は $x = \dfrac{\pi}{\boxed{\ \mathsf{M}\ }}$ で極小値をもち，$x = \dfrac{\boxed{\ \mathsf{N}\ }\pi}{\boxed{\ \mathsf{OP}\ }}$ で極大値をもつ。

次に，2 曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれた部分の面積 S を求めよう。$y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフの共有点の x 座標は $\dfrac{\pi}{\boxed{\ \mathsf{QR}\ }}$ と $\dfrac{\boxed{\ \mathsf{S}\ }\pi}{\boxed{\ \mathsf{TU}\ }}$ であるから

$$S = \int_{\frac{\pi}{\boxed{\mathsf{QR}}}}^{\frac{\boxed{\mathsf{S}}\pi}{\boxed{\mathsf{TU}}}} \{f(x) - g(x)\}\,dx = \frac{\boxed{\ \mathsf{V}\ }\sqrt{\boxed{\ \mathsf{W}\ }}}{\boxed{\ \mathsf{X}\ }}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\text{Y}}$, $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。
コース 2 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。
解答用紙の解答コース欄に「コース 2」が正しくマークしてあるか，
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。