平成18年度

日本留学試験（第2回）

試験問題

数学 コース 2

(上級コース)

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコース一つだけを選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の左上にある「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。選択したコースが正しくマークされていないと，採点されません。

＜ 解答用紙記入例 ＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

I

問 1　$a>0$ とする。2 次関数 $f(x)=ax^2-6ax+b$ の $1 \leqq x \leqq 4$ における最大値が 12，最小値が 4 であるとき，定数 a, b の値を求めたい。

$f(x)$ は

$$f(x)=a\left(x-\boxed{\mathsf{A}}\right)^2+b-\boxed{\mathsf{B}}a$$

と変形できる。

x のとる値の範囲は $1 \leqq x \leqq 4$ であるから，$f(x)$ は $x=\boxed{\mathsf{C}}$ で最大となり，$x=\boxed{\mathsf{D}}$ で最小となる。よって

$$a=\boxed{\mathsf{E}},\quad b=\boxed{\mathsf{FG}}$$

を得る。

問 2　次の問題文中の $\boxed{\text{H}}$ ～ $\boxed{\text{L}}$ に対して，それぞれの選択肢の中から当てはまるものを一つ選びなさい。

(1)　数直線上の部分集合 A, B, C を $A = \{ x \mid 3 < x < 6 \}$, $B = \{ x \mid -1 < x < 1 \}$, $C = \{ x \mid -3 < x < 5 \}$ とするとき

$$A \cup B = \boxed{\text{H}}, \quad \overline{(A \cup B)} \cap C = \boxed{\text{I}}$$

である。ただし，$\overline{(A \cup B)}$ は $A \cup B$ の補集合を表す。

⓪ $\{ x \mid -3 < x \leqq -1$ または $1 \leqq x \leqq 3 \}$　① ϕ

② $\{ x \mid -3 < x < 5 \}$　③ $\{ x \mid -3 < x < -1$ または $1 < x < 3 \}$

④ $\{ x \mid -1 < x < 1$ または $3 < x < 6 \}$　⑤ $\{ x \mid x < 5$ または $6 \leqq x \}$

(2)　(i) $a > 3$ かつ $b > 3$ であることは，$a + b > 5$ であるための $\boxed{\text{J}}$。

(ii) $a > 2$ かつ $b > 2$ であることは，$a + b > 5$ であるための $\boxed{\text{K}}$。

(iii) $| a + b | > 5$ であることは，$a + b > 5$ であるための $\boxed{\text{L}}$。

⓪ 必要十分条件である

① 必要条件であるが，十分条件ではない

② 十分条件であるが，必要条件ではない

③ 必要条件でも十分条件でもない

注）部分集合：subset，補集合：complement

$\boxed{\text{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{I}}$ の解答欄 $\boxed{\text{M}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ には何も書かないでください。

II

問 1 $\dfrac{y+z}{8}=\dfrac{z+x}{5}=\dfrac{x+y}{-1}\neq 0$ とするとき

$$x:y:z=\boxed{\text{AB}}:1:\boxed{\text{C}}$$

であり

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{yz+zx+xy}=\boxed{\text{DE}}$$

である。

問 2　等差数列 $\{a_n\}$ において，$a_1 = 2$，$a_p = 30$，$a_q = 51$ とする。

(1)　公差を d とすると

$$(p-1)d = \boxed{\mathsf{FG}}, \quad (q-1)d = \boxed{\mathsf{HI}}$$

が成り立つ。

(2)　公差 d が 1 より大きい整数になるのは，$d = \boxed{\mathsf{J}}$ のときで，そのとき，初項から第 q 項までの和は $\boxed{\mathsf{KLM}}$ である。

(3)　一般に，p と q の間には

$$\boxed{\mathsf{N}}\,q = \boxed{\mathsf{O}}\,p - 3$$

が成り立つ。

注）等差数列：arithmetic progression (sequence)，公差：common difference

$\boxed{\mathrm{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\mathrm{II}}$ の解答欄 $\boxed{\mathsf{P}}$ ～ $\boxed{\mathsf{Z}}$ には何も書かないでください。

III

問 1　平面上に三角形 OAB と点 P があり

$$7\overrightarrow{\mathrm{AP}} + 5\overrightarrow{\mathrm{BP}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{0}$$

を満たしている。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{\boxed{\mathrm{A}}}{\boxed{\mathrm{BC}}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{\boxed{\mathrm{D}}}{\boxed{\mathrm{E}}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ である。

(2)　直線 OP と直線 AB との交点を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = t\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とおくと

$$t = \frac{\boxed{\mathrm{F}}}{\boxed{\mathrm{G}}}$$

である。

問 2　次の各設問に答えなさい。

(1)　$0° \leqq x < 360°$ とする。関数 $f(x) = 2\sin x - \cos 2x$ は

$x = \boxed{\text{HI}}°$ のとき，最大値 $\boxed{\text{J}}$ をとり，

$x = \boxed{\text{KLM}}°$ および $x = \boxed{\text{NOP}}°$ のとき，最小値 $\dfrac{\boxed{\text{QR}}}{\boxed{\text{S}}}$ をとる。

ただし，$\boxed{\text{KLM}}° < \boxed{\text{NOP}}°$ とする。

(2)　$10^x = a$，$10^y = b$，$xy \neq 0$ とするとき

$$\log_{\sqrt{a}} b^2 = \frac{\boxed{\text{T}}\,y}{x}$$

と表せる。

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\text{U}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ には何も書かないでください。

IV

問 1　a, b を定数とし，x の関数

$$f(x) = \log \frac{ax^2 + 7}{bx + 3}$$

を考える。ただし，対数は自然対数である。

(1)　$f'(2) = \dfrac{\boxed{\mathsf{A}}\,a}{\boxed{\mathsf{B}}\,a + \boxed{\mathsf{C}}} - \dfrac{b}{\boxed{\mathsf{D}}\,b + \boxed{\mathsf{E}}}$

(2)　$f(x)$ が $x = 2$ で極小値 0 をとれば

$$a = \boxed{\mathsf{F}},\quad b = \boxed{\mathsf{G}}$$

である。

注）自然対数 : natural logarithm

問 2　$f(a) = \int_0^{2\pi} |\sin(x+a) - \sin x|\, dx \quad (0 < a < \pi)$ とする。

(1)　$\boxed{\text{H}}$ には次の ⓪ ～ ⑤ のうちから当てはまるものを一つ選びなさい。

$f(a)$ は，$f(a) = \boxed{\text{H}} \int_0^{2\pi} |\cos(x + \frac{a}{2})|\, dx$ と変形できる。

⓪ $\sin \frac{a}{2}$　　① $\cos \frac{a}{2}$

② $2 \sin \frac{a}{2}$　　③ $2 \cos \frac{a}{2}$

④ $\frac{1}{2} \sin \frac{a}{2}$　　⑤ $\frac{1}{2} \cos \frac{a}{2}$

(2)　$\boxed{\text{I}}$ には次の ⓪ ～ ③ のうちから当てはまるものを一つ選びなさい。

関数 $y = |\cos(x + \frac{a}{2})|$ の周期は $\boxed{\text{I}}$ である。

⓪ π　　① 2π　　② $\frac{\pi}{2}$　　③ $\frac{\pi}{4}$

この関数のグラフを考えて，次の定積分の値を求めると

$$\int_0^{2\pi} |\cos(x + \frac{a}{2})|\, dx = \boxed{\text{J}}$$

である。

(3)　$\lim_{a \to +0} \frac{f(a)}{a} = \boxed{\text{K}}$

注）周期：period

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\text{L}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ には何も書かないでください。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。

解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ の欄には何も書かないでください。

この問題用紙を持ち帰ることはできません。