平成27年度（2015年度）日本留学試験

問題冊子

数学（８０分）

【コース１(基本, Basic)・コース２(上級, Advanced)】

※　どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。

I　試験全体に関する注意

1．係員の許可なしに，部屋の外に出ることはできません。

2．この問題冊子を持ち帰ることはできません。

II　問題冊子に関する注意

1．試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見ないでください。

2．試験開始の合図があったら，下の欄に，受験番号と名前を，受験票と同じように記入してください。

3．コース１は１～13ページ，コース２は15～27ページにあります。

4．足りないページがあったら，手をあげて知らせてください。

5．メモや計算などを書く場合は，問題冊子に書いてください。

III　解答方法に関する注意

1．解答は，解答用紙に鉛筆(HB)で記入してください。

2．問題文中の**A**，**B**，**C**，…には，それぞれ－(マイナスの符号)，または，０から９までの数が一つずつ入ります。あてはまるものを選び，解答用紙(マークシート)の対応する解答欄にマークしてください。

3．同一の問題文中に $\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{BC}}$ などが繰り返し現れる場合，２度目以降は，$\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{BC}}$ のように表しています。

解答に関する記入上の注意

(1)　根号（$\sqrt{\ }$）の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。
（例：$\sqrt{32}$ のときは，$2\sqrt{8}$ ではなく $4\sqrt{2}$ と答えます。）

(2)　分数を答えるときは，符号は分子につけ，既約分数(reduced fraction)にして答えてください。
（例：$\frac{2}{6}$ は $\frac{1}{3}$，$-\frac{2}{\sqrt{6}}$ は $\frac{-2\sqrt{6}}{6}$ と分母を有理化してから約分し，$\frac{-\sqrt{6}}{3}$ と答えます。）

(3)　$\dfrac{\boxed{\text{A}}\sqrt{\boxed{\text{B}}}}{\boxed{\text{C}}}$ に $\dfrac{-\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は，下のようにマークしてください。

(4)　$\boxed{\text{DE}}\,x$ に $-x$ と答える場合は，**D**を－，**E**を１とし，下のようにマークしてください。

【解答用紙】

A	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
B	⊖	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
C	⊖	⓪	①	②	③	●	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
D	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
E	⊖	⓪	●	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

4．解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※　試験開始の合図があったら，必ず受験番号と名前を記入してください。

受験番号			＊					＊						
名　　前														

数学 コース 2
（上級コース）

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを<u>一つだけ</u>選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

＜解答用紙記入例＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

<u>選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。</u>

I

問 1　a, b は実数であり，$0 < b < 7$ とする。2 次関数

$$f(x) = x^2 - 6x + a$$

の $b \leqq x \leqq 7$ の範囲における最大値 M と最小値 m を考える。

$f(x)$ は

$$f(x) = \left(x - \boxed{\mathbf{A}}\right)^2 + a - \boxed{\mathbf{B}}$$

と表される。

(1)　次の文中の $\boxed{\mathbf{C}}$ ～ $\boxed{\mathbf{G}}$ には，下の ⓪ ～ ⑨ の中から適するものを選びなさい。

次の 2 つの場合に分けて，M, m を求める。

(i)　$0 < b \leqq \boxed{\mathbf{C}}$ のとき

$$M = \boxed{\mathbf{D}}, \quad m = \boxed{\mathbf{E}}$$

である。

(ii)　$\boxed{\mathbf{C}} < b < 7$ のとき

$$M = \boxed{\mathbf{F}}, \quad m = \boxed{\mathbf{G}}$$

である。

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3
④ $a-6$	⑤ $a+7$	⑥ $a+8$	⑦ $a-9$
⑧ b^2-6b+a	⑨ b^2+6b+a		

(2)　$M = 13,\ m = 1$ となるような a, b を求めると

$$a = \boxed{\mathbf{H}}, \quad b = \boxed{\mathbf{I}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　大中小 3 個のさいころを同時に投げて出た目の数をそれぞれ x, y, z とし

$$x=y=z \quad \text{である事象を } A,$$
$$x+y+z=6 \quad \text{である事象を } B,$$
$$x+y=z \quad \text{である事象を } C$$

とする。

(1)　事象 A, B, C の起こる場合の数は，それぞれ

A が $\boxed{\mathsf{J}}$，　B が $\boxed{\mathsf{KL}}$，　C が $\boxed{\mathsf{MN}}$

である。

(2)　事象 $A\cap B$，$B\cap C$，$C\cap A$ の起こる場合の数は，それぞれ

$A\cap B$ が $\boxed{\mathsf{O}}$，　$B\cap C$ が $\boxed{\mathsf{P}}$，　$C\cap A$ が $\boxed{\mathsf{Q}}$

である。

(3)　事象 $B\cup C$ の起こる確率 $P(B\cup C)$ は

$$P(B\cup C)=\frac{\boxed{\mathsf{RS}}}{\boxed{\mathsf{TUV}}}$$

である。

注）さいころ：dice

\- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{I}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{W}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

II

問１　O を原点とする座標空間の 2 点 $A(1,-1,0)$, $B(-2,1,2)$ に対して，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおく。

(1)　まず，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ を最小にする実数 t の値を求めよう。

$$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=\boxed{\text{A}}\,t^2-\boxed{\text{B}}\,t+\boxed{\text{C}}$$

であるから，$t=\dfrac{\boxed{\text{D}}}{\boxed{\text{E}}}$ のとき，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ は最小となる。また，このときの最小値は $\boxed{\text{F}}$ である。

(2)　次に，$\vec{a}$，$\vec{b}$ に直交するベクトル $\vec{c}$ は

$$\vec{c}=s\left(\boxed{\text{G}},\boxed{\text{H}},1\right)$$

と表される。ただし，s は 0 でない実数である。

いま，$\overrightarrow{OC}=\left(\boxed{\text{G}},\boxed{\text{H}},1\right)$，$\overrightarrow{OD}=3\vec{a}+\vec{b}$ を満たす点 C, D をとる。

このとき，$\angle CBD=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{I}}}$ であるから，三角形 BCD の面積は $\dfrac{\boxed{\text{J}}\sqrt{\boxed{\text{K}}}}{\boxed{\text{L}}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　複素数 z の方程式

$$z^4 = -324 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

の解と，正の実数 t に対して，複素数 z の方程式

$$z^4 = t^4 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

の解について考える。

(1)　① の解を求めるため，z を

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (r > 0,\ 0 < \theta \leqq 2\pi)$$

とおく。このとき

$$z^4 = r^{\boxed{\mathrm{M}}}\left(\cos\boxed{\mathrm{N}}\,\theta + i\sin\boxed{\mathrm{N}}\,\theta\right)$$

である。これが -324 となるような r と θ の値を求めると

$$r = \boxed{\mathrm{O}}\sqrt{\boxed{\mathrm{P}}}$$

$$\theta = \frac{\boxed{\mathrm{Q}}}{\boxed{\mathrm{R}}}\pi,\quad \frac{\boxed{\mathrm{S}}}{\boxed{\mathrm{R}}}\pi,\quad \frac{\boxed{\mathrm{T}}}{\boxed{\mathrm{R}}}\pi,\quad \frac{\boxed{\mathrm{U}}}{\boxed{\mathrm{R}}}\pi$$

となる。ただし，$\boxed{\mathrm{Q}} < \boxed{\mathrm{S}} < \boxed{\mathrm{T}} < \boxed{\mathrm{U}}$ とする。

(2)　② の解は $\boxed{\mathrm{V}}$ 個あり，それらは t と共に変わる。いま，① と ② の解を 1 つずつ取り出し，複素数平面上でその 2 つの解の距離 d を考える。このとき，t を $0 < t \leqq 4$ の範囲で動かすと，d の最小値は $\boxed{\mathrm{W}}$ であり，最大値は $\sqrt{\boxed{\mathrm{XY}}}$ である。

注）複素数：complex number，複素数平面：complex number plane

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

III

関数 $f(x)=x^4+2x^3-12x^2+4$ と y 軸上の点 $\mathrm{P}(0,p)$ を考える。点 $\mathrm{P}(0,p)$ から曲線 $y=f(x)$ に 3 本の接線が引けるような p の値を求めよう。

(i)　点 $\bigl(t,\ f(t)\bigr)$ における曲線 $y=f(x)$ の接線の方程式は

$$y=\left(\boxed{\mathsf{A}}\,t^3+\boxed{\mathsf{B}}\,t^2-\boxed{\mathsf{CD}}\,t\right)x-\boxed{\mathsf{E}}\,t^4-\boxed{\mathsf{F}}\,t^3+\boxed{\mathsf{GH}}\,t^2+\boxed{\mathsf{I}}$$

である。この直線が点 $\mathrm{P}(0,p)$ を通るための条件は

$$p=-\boxed{\mathsf{J}}\,t^4-\boxed{\mathsf{K}}\,t^3+\boxed{\mathsf{LM}}\,t^2+\boxed{\mathsf{N}} \qquad \cdots\cdots\cdots\ ①$$

である。

(ii)　次の文中の $\boxed{\mathsf{O}}$，$\boxed{\mathsf{S}}$ には，次の選択肢 ⓪，① のどちらか適するものを選び，他の $\boxed{\phantom{\mathsf{O}}}$ には適する数を入れなさい。

⓪　極小値　　①　極大値

等式 ① の右辺を $g(t)$ とおくと，関数 $g(t)$ は $\boxed{\mathsf{O}}$ を $t=\boxed{\mathsf{PQ}}$ と $t=\boxed{\mathsf{R}}$ でとる。また，$\boxed{\mathsf{S}}$ を $t=\boxed{\mathsf{T}}$ でとる。

したがって，点 $\mathrm{P}(0,p)$ から曲線 $y=f(x)$ に 3 本の接線が引けるような p の値は

$$p=\boxed{\mathsf{U}}\quad と\quad p=\boxed{\mathsf{V}}$$

である。ただし，$\boxed{\mathsf{U}}<\boxed{\mathsf{V}}$ とする。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\text{W}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

IV

動点 P の座標 (x, y) が時刻 t の関数として次の式で与えられている。

$$x = 4t - \sin 4t$$
$$y = 4 - \cos 4t$$

(1)　x, y をそれぞれ t で微分すると

$$\frac{dx}{dt} = \boxed{\text{A}}\left(\boxed{\text{B}} - \cos 4t\right)$$
$$\frac{dy}{dt} = \boxed{\text{C}}\ \sin 4t$$

である。よって

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \boxed{\text{DE}}\ \sin^2 \boxed{\text{F}}\, t$$

となる。

(2)　点 P が時刻 $t = 0$ から時刻 $t = 2\pi$ まで動くとき，点 P の速さ v が最大となる時刻が，全部で $\boxed{\text{G}}$ 回ある。それらの中で，最初の時刻を t_0，最後の時刻を t_1 とすると

$$t_0 = \frac{\boxed{\text{H}}}{\boxed{\text{I}}}\pi, \quad t_1 = \frac{\boxed{\text{J}}}{\boxed{\text{K}}}\pi$$

であり，また，最大の速さは $v = \boxed{\text{L}}$ である。

(3)　(2) の t_0, t_1 に対して，時刻 $t = t_0$ から時刻 $t = t_1$ までの間に点 P の動いた道のりは $\boxed{\text{MN}}$ である。

注） 道のり：distance

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\textsf{O}}$ ～ $\boxed{\textsf{Z}}$ はマークしないでください。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 2」が正しくマークしてあるか，
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。

〈数　学〉Mathematics

コース1 Course 1			
問 Q.		解答番号 row	正解 A.
Ⅰ	問1	AB	39
		C	3
		D	5
		E	7
		F	5
		G	8
		H	6
		I	5
	問2	J	6
		KL	10
		MN	15
		O	1
		P	2
		Q	0
		RSTUV	23216
Ⅱ	問1	ABC	231
		DE	12
		FG	23
		H	1
		IJ	12
		KL	12
		M	1
	問2	N	3
		OPQ	321
		RST	237
		U	5
		V	2
		WX	15
		Y	6
Ⅲ		AB	43
		CD	11
		EF	17
		G	6
		HI	41
		JK	41
		LM	73
Ⅳ		A	1
		B	3
		CD	21
		EF	31
		GHI	321
		JKLM	3121
		NO	31
		P	0
		QRS	152

コース2 Course 2			
問 Q.		解答番号 row	正解 A.
Ⅰ	問1	AB	39
		C	3
		D	5
		E	7
		F	5
		G	8
		H	6
		I	5
	問2	J	6
		KL	10
		MN	15
		O	1
		P	2
		Q	0
		RSTUV	23216
Ⅱ	問1	ABC	962
		DE	13
		F	1
		GH	22
		I	3
		JKL	932
	問2	MN	44
		OP	32
		QRSTU	14357
		V	4
		W	3
		XY	58
Ⅲ		ABCD	4624
		EFGHI	34124
		JKLMN	34124
		O	1
		PQ	−2
		R	1
		S	0
		T	0
		U	4
		V	9
Ⅳ		AB	41
		C	4
		DEF	642
		G	4
		HI	14
		JK	74
		L	8
		MN	24