平成26年度

日本留学試験（第２回）

試験問題

The Examination

数学 コース 2
(上級コース)

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

＜ 解答用紙記入例 ＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

$\boxed{\text{I}}$

問 1　a, b は実数であり，$a > 0$ とする。2 つの 2 次関数

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 5, \quad g(x) = x^2 + ax + b$$

を考える。

関数 $g(x)$ が次の 2 つの条件を満たすとき，a, b の値を求めよう。

(i)　$g(x)$ の最小値は $f(x)$ の最小値より 8 だけ小さい

(ii)　$f(x) = g(x)$ を満たす x がただ 1 つ存在する

$f(x)$ の最小値は $\boxed{\textbf{A}}$ であるから，条件 (i) より，等式

$$b = \frac{a^2}{\boxed{\textbf{B}}} - \boxed{\textbf{C}}$$

を得る。

よって，$f(x) = g(x)$ を満たす x を求める方程式は

$$x^2 - (a + \boxed{\textbf{D}})x - \frac{a^2}{\boxed{\textbf{E}}} + \boxed{\textbf{FG}} = 0$$

である。

したがって，条件 (ii) と $a > 0$ より

$$a = \boxed{\textbf{H}}, \quad b = \boxed{\textbf{IJ}}$$

を得る。このとき，$f(x) = g(x)$ を満たす x は $\boxed{\textbf{K}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　集合 $A=\{4m\,|\,m$ は自然数$\}$，$B=\{6m\,|\,m$ は自然数$\}$ を考える。

(1)　次の $\boxed{\text{L}}$ ～ $\boxed{\text{O}}$ には，下の ⓪ ～ ③ の中から適するものを選びなさい。

n は自然数とする。

(i)　$n\in A$ であることは，n が 2 で割り切れるための $\boxed{\text{L}}$。

(ii)　$n\in B$ であることは，n が 24 で割り切れるための $\boxed{\text{M}}$。

(iii)　$n\in A\cup B$ であることは，n が 3 で割り切れるための $\boxed{\text{N}}$。

(iv)　$n\in A\cap B$ であることは，n が 12 で割り切れるための $\boxed{\text{O}}$。

⓪　必要十分条件である
①　必要条件であるが，十分条件ではない
②　十分条件であるが，必要条件ではない
③　必要条件でも十分条件でもない

(2)　$C=\{m\,|\,m$ は $1\leqq m\leqq 100$ を満たす自然数$\}$ とする。

$(\overline{A}\cup\overline{B})\cap C$ の要素の個数は $\boxed{\text{PQ}}$ であり，$\overline{A}\cap\overline{B}\cap C$ の要素の個数は $\boxed{\text{RS}}$ である。ただし，$\overline{A}$，$\overline{B}$ はそれぞれ，全体集合を自然数の全体としたときの A, B の補集合を表す。

注）全体集合：universal set，補集合：complement

\- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{I}}$ の解答欄 $\boxed{\text{T}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

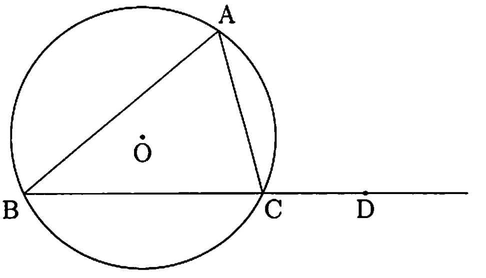
II

点 O を中心とし，半径 1 の円の周を S とする。

三角形 ABC は，すべての頂点が S 上にあり，AB : AC = 3 : 2 を満たすとする。図のように辺 BC の延長線上に点 D をとり

$$\mathrm{BC} : \mathrm{CD} = 2 : k$$

とおく。また



$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$$

とする。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，k を用いて表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \left(\frac{k}{\boxed{\mathsf{A}}} + \boxed{\mathsf{B}}\right)\vec{c} - \frac{k}{\boxed{\mathsf{C}}}\vec{b}$$

である。

(2) 等式

$$\left|\vec{b} - \vec{a}\right| = \frac{\boxed{\mathsf{D}}}{\boxed{\mathsf{E}}}\left|\vec{c} - \vec{a}\right|$$

が成り立つので，内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を内積 $\vec{a} \cdot \vec{c}$ を用いて表すと

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\boxed{\mathsf{F}}}{\boxed{\mathsf{G}}}\vec{a} \cdot \vec{c} - \frac{\boxed{\mathsf{H}}}{\boxed{\mathsf{I}}}$$

である。

(3) 点 A における S の接線が点 D を通るとき

$$k = \frac{\boxed{\mathsf{J}}}{\boxed{\mathsf{K}}}$$

である。

注） 内積 : inner product

\- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{L}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

III

$p>1$，$q>1$ とする。方程式

$$e^{2x}-ae^{x}+b=0 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

において，$t=e^{x}$ とおくとき，t に関する 2 次方程式

$$t^{2}-at+b=0$$

は解 $\log_{q^2} p$ と $\log_{p^3} q$ をもつとする。

このとき，a の最小値とそのときの方程式 ① の解を求めよう。

(1)　まず

$$b=\frac{\boxed{\text{A}}}{\boxed{\text{B}}}$$

であり

$$a=\frac{\boxed{\text{C}}}{\boxed{\text{D}}}\log_{q} p+\frac{\boxed{\text{E}}}{\boxed{\text{F}}}\log_{p} q$$

である。

(2)　$p,\ q$ が $p>1$，$q>1$ を満たしながら動くとき，$\log_{p} q>\boxed{\text{G}}$ である。

したがって，a は最小値 $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{H}}}}{\boxed{\text{I}}}$ を $\log_{p} q=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{J}}}}{\boxed{\text{K}}}$ のときにとる。

そのときの方程式 ① の解は

$$x=-\frac{\boxed{\text{L}}}{\boxed{\text{M}}}\log_{e}\boxed{\text{N}}$$

である。

\- 計算欄 (memo) -

III の問題はこれで終わりです。 III の解答欄 O ～ Z はマークしないでください。

IV

問 1　a, t は共に正の実数とする。関数 $y = ax^3$ のグラフ C の点 P (t, at^3) における接線 ℓ が C と再び交わる点を Q とする。さらに，点 P を通って x 軸に平行な直線 p と点 Q を通って y 軸に平行な直線 q が交わる点を R とする。

いま，曲線 C と直線 p，直線 q によって囲まれる部分の面積を S_1，曲線 C と接線 ℓ によって囲まれる部分の面積を S_2 で表すとき，$\dfrac{S_1}{S_2}$ の値を求めよう。

まず，接線 ℓ の方程式は

$$y = \boxed{\text{A}}\,at^{\boxed{\text{B}}}x - \boxed{\text{C}}\,at^{\boxed{\text{D}}}$$

であるから，点 Q の x 座標は $-\boxed{\text{E}}\,t$ である。

したがって，S_1 を求めると

$$S_1 = \frac{\boxed{\text{FG}}}{\boxed{\text{H}}}at^{\boxed{\text{I}}}$$

となる。また，S_2 は三角形 PQR の面積から S_1 を引いたものであるから

$$S_2 = \frac{\boxed{\text{JK}}}{\boxed{\text{L}}}at^{\boxed{\text{M}}}$$

である。

よって，$\dfrac{S_1}{S_2}$ の値は a, t の値に関係なく，常に

$$\frac{S_1}{S_2} = \boxed{\text{N}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　x の関数

$$f_n(x) = \sin^n x \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

について次の問いに答えなさい。

(1)　次の等式が成り立つ場合を考える。ただし，a, b, c は実数である。

$$\lim_{x \to 0} \frac{a - x^2 - (b - x^2)^2}{f_n(x)} = c$$

(i)　$a = b^{\boxed{\text{O}}}$ である。

(ii)　$n = 2$ のとき，$c = 6$ ならば $b = \dfrac{\boxed{\text{P}}}{\boxed{\text{Q}}}$ である。

(iii)　$n = 4$ のとき，$b = \dfrac{\boxed{\text{R}}}{\boxed{\text{S}}}$，$c = -\boxed{\text{T}}$ である。

(問 2 は次ページに続く)

(2)　この $f_n(x)$ を用いて，定積分

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\sin 2x\,dx \quad (n = 1,\,2,\,3,\cdots)$$

を考える。

積分の計算をすると

$$I_n = \frac{\boxed{\mathsf{U}}}{n + \boxed{\mathsf{V}}}$$

である。したがって

$$\lim_{n\to\infty}(I_{n-1} + I_n + I_{n+1} + \cdots + I_{2n-2}) = \int_0^{\boxed{\mathsf{W}}} \frac{\boxed{\mathsf{X}}}{\boxed{\mathsf{Y}} + x}\,dx$$

$$= \log \boxed{\mathsf{Z}}$$

である。

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 2」が正しくマークしてあるか，もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。