平成21年度

日本留学試験（第1回）

試 験 問 題

数学 コース 2
(上級コース)

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の左上にある「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

< 解答用紙記入例 >

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

I

問 1　x の 2 次関数

$$y = a(x^2 - 2x - 8) + x \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

がある。ここで，a は 0 以外の実数である。

(1)　① のグラフの軸の方程式が $x = \dfrac{3}{4}$ であれば，$a = \boxed{\text{A}}$ である。このとき，$7x + y$ は $x = -\boxed{\text{B}}$ において 最小値 $-\boxed{\text{CD}}$ をとる。

(2)　① のグラフ上の点について考える。例えば，x 座標が 2 であるような ① のグラフ上の点 $(2, -\boxed{\text{E}}a + \boxed{\text{F}})$ の位置は，a の値とともに変わる。しかし，2 点

$$(\boxed{\text{G}}, \boxed{\text{H}}) \quad と \quad (-\boxed{\text{I}}, -\boxed{\text{J}})$$

は a の値に関係なく，つねに ① のグラフ上にある。

- 計算欄 (memo) -

問 2　x の整式

$$P = (x+1)(x+2)(x+4)(x+5) - 10$$

を考える。

(1)　P を因数分解すると

$$P = \left(x^2 + \boxed{\mathsf{K}}\,x + \boxed{\mathsf{L}}\right)\left(x^2 + \boxed{\mathsf{M}}\,x + \boxed{\mathsf{NO}}\right)$$

である。

(2)　$x = -3 + \sqrt{5}$ のとき

$$P = \boxed{\mathsf{PQ}}$$

である。

(3)　x の整式

$$Q = (2x+1)(2x+2)(2x+4)(2x+5) - 10$$

を因数分解すると

$$Q = \boxed{\mathsf{R}}\left(\boxed{\mathsf{S}}\,x^2 + \boxed{\mathsf{TU}}\,x + \boxed{\mathsf{V}}\right)\left(\boxed{\mathsf{W}}\,x^2 + \boxed{\mathsf{X}}\,x + \boxed{\mathsf{Y}}\right)$$

である。

注）因数分解する：factorize

- 計算欄 (memo) -

I	の問題はこれで終わりです。 I	の解答欄	Z	は空欄のままにしてください。

II

3 で割った余りが 2 となり，かつ，4 で割った余りが 3 となる自然数を小さい順に並べた数列 $\{a_n\}\,(n=1,2,3,\cdots)$ について考える。

(1)　$\{a_n\}$ の一般項は，$a_n = \boxed{\mathsf{AB}}\,n - \boxed{\mathsf{C}}$ である。

(2)　$\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和は

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n(\boxed{\mathsf{D}}\,n + \boxed{\mathsf{E}})$$

であり，初項から第 n 項までの各項の 2 乗の和は

$$a_1{}^2 + a_2{}^2 + \cdots + a_n{}^2 = n(\boxed{\mathsf{FG}}\,n^2 + \boxed{\mathsf{HI}}\,n + \boxed{\mathsf{JK}})$$

である。

(3)　$\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの n 個の項のうち，異なる 2 項の積の総和を S とおく。このとき

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = a_1{}^2 + a_2{}^2 + \cdots + a_n{}^2 + \boxed{\mathsf{L}}\,S$$

に，(2) の結果を代入して，整理すると

$$S = \frac{n}{2}(36n^3 + \boxed{\mathsf{MN}}\,n^2 - 35n - \boxed{\mathsf{OP}})$$

を得る。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{Q}}$ 〜 $\boxed{\textbf{Z}}$ は空欄のままにしてください。

III

xy 平面上の 3 点 O(0, 0), A(6, 0), B(4, − 2) を通る円を考え，その中心を C とする。

(1) この円の方程式は

$$x^2 + y^2 - \boxed{\mathsf{A}}\,x - \boxed{\mathsf{B}}\,y = \boxed{\mathsf{C}}$$

である。したがって，この円の半径は $\sqrt{\boxed{\mathsf{DE}}}$ であり，中心 C の座標は $\left(\boxed{\mathsf{F}}, \boxed{\mathsf{G}}\right)$ である。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ の内積は $\boxed{\mathsf{H}}$ であるから，$\angle \mathrm{ACB} = \theta$ とおくと

$$\cos\theta = \frac{\boxed{\mathsf{I}}}{\boxed{\mathsf{J}}}$$

である。

(3) 中心 C を通り，x 軸に平行な直線とこの円の交点で x 座標が正であるものを P とおく。この円の周上に点 Q をとり，弧 $\overparen{\mathrm{PQ}}$ の長さが弧 $\overparen{\mathrm{AB}}$ の長さの 2 倍となるようにするとき，点 Q の x 座標は

$$\boxed{\mathsf{K}} - \frac{\boxed{\mathsf{L}}\sqrt{\boxed{\mathsf{MN}}}}{\boxed{\mathsf{OP}}}$$

である。ただし，弧の長さは劣弧の長さを考える。

注） 内積 : inner product , 弧 : arc , 劣弧 : minor arc

\- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\ \mathbf{Q}\ }$ ～ $\boxed{\ \mathbf{Z}\ }$ は空欄のままにしてください。

IV

問 1　次の 2 つの関数

$$y = -x^2 + x + 2 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

$$y = x^2 - x - 2 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

を考える。以下では，点 $(-1, 0)$ における曲線 ① の接線を ℓ とする。

(1)　直線 ℓ の方程式は

$$y = \boxed{\mathsf{A}}\, x + \boxed{\mathsf{B}}$$

である。

(2)　曲線 ② と直線 ℓ の交点の x 座標は $\boxed{\mathsf{CD}}$ と $\boxed{\mathsf{E}}$ である。

(3)　次に，曲線 ① と曲線 ② および 直線 ℓ で囲まれた図形の面積 S を求めよう。

曲線 ② と直線 ℓ で囲まれた図形の面積は $\boxed{\mathsf{FG}}$ であり，曲線 ① と x 軸で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\mathsf{H}}}{\boxed{\mathsf{I}}}$ である。したがって，求める面積 S は $\boxed{\mathsf{JK}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　x の関数 $f(x)=\dfrac{\log 3x}{x}$ を考える。ただし，log は自然対数とする。

(1)　関数 $f(x)$ は $x=\dfrac{e}{\boxed{\mathsf{L}}}$ で極大値 $\dfrac{\boxed{\mathsf{M}}}{e}$ をとる。

(2)　$a>0$ とし，$(3x)^a=(3a)^x$ を満たす正の数 x の個数を N とする。このとき，$y=f(x)$ のグラフを用いて N を求めると次のようになる。ただし，$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ を用いてもよい。

$$0<a \leqq \frac{1}{\boxed{\mathsf{N}}} \quad \text{ならば} \quad N=\boxed{\mathsf{O}}$$

$$\frac{1}{\boxed{\mathsf{N}}}<a<\frac{e}{\boxed{\mathsf{P}}} \quad \text{ならば} \quad N=\boxed{\mathsf{Q}}$$

$$a=\frac{e}{\boxed{\mathsf{P}}} \quad \text{ならば} \quad N=\boxed{\mathsf{R}}$$

$$\frac{e}{\boxed{\mathsf{P}}}<a \quad \text{ならば} \quad N=\boxed{\mathsf{S}}$$

注）自然対数：natural logarithm

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\text{T}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ は空欄のままにしてください。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。

解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ は空欄のままにしてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。