

数 学（80分）

【コース1（基本, Basic）・コース2（上級, Advanced）】

※ どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。

I 試験全体に関する注意

1. 係員の許可なしに、部屋の外に出ることはできません。
2. この問題冊子を持ち帰ることはできません。

II 問題冊子に関する注意

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見ないでください。
2. 試験開始の合図があったら、下の欄に、受験番号と名前を、受験票と同じように記入してください。
3. コース1は1～13ページ、コース2は15～27ページにあります。
4. 足りないページがあったら、手をあげて知らせてください。
5. メモや計算などを書く場合は、問題冊子に書いてください。

III 解答方法に関する注意

1. 解答は、解答用紙に鉛筆(HB)で記入してください。
2. 問題文中のA, B, C, …には、それぞれ－(マイナスの符号)、または、0から9までの数が一つずつ入ります。あてはまるものを選び、解答用紙(マークシート)の対応する解答欄にマークしてください。
3. 同一の問題文中に , などが繰り返し現れる場合、2度目以降は、 , のように表しています。

解答に関する記入上の注意

- (1) 根号($\sqrt{\quad}$)の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。
(例： $\sqrt{32}$ のときは、 $2\sqrt{8}$ ではなく $4\sqrt{2}$ と答えます。)
- (2) 分数を答えるときは、符号は分子につけ、既約分数(reduced fraction)にして答えてください。

(例： $\frac{2}{6}$ は $\frac{1}{3}$, $-\frac{2}{\sqrt{6}}$ は $-\frac{2\sqrt{6}}{6}$ と分母を有理化してから約分し、 $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ と答えます。)

- (3) $\sqrt{\frac{\text{B}}{\text{C}}}$ に $\frac{-\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は、以下のようにマークしてください。

- (4) x に $-x$ と答える場合は、Dを－, Eを1とし、以下のようにマークしてください。

【解答用紙】

A	●	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B	○	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9
C	○	0	1	2	3	●	5	6	7	8	9
D	●	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
E	○	0	●	2	3	4	5	6	7	8	9

4. 解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※ 試験開始の合図があったら、必ず受験番号と名前を記入してください。

受 験 番 号			*				*					
名 前												

数学 コース 2

(上級コース)

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので、どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は、右のように、解答用紙の「解答コース」の「コース2」を○で囲み、その下のマーク欄をマークしてください。

＜ 解答用紙記入例 ＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	<div style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 5px; display: inline-block;"> コース 2 Course 2 </div>
○	●

選択したコースを正しくマークしないと、採点されません。

I

問 1 $a \neq 0$ とする。 x の 2 次関数

$$y = ax^2 - 4x - 4a \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

のグラフと原点 $(0, 0)$ に関して対称な曲線を G とする。

(1) 2 次関数 $\textcircled{1}$ のグラフの頂点の座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{A}}}{a}, -\frac{\boxed{\text{B}}}{a} - 4a \right)$$

である。

(2) G を表す 2 次関数は、以下の選択肢の中の $\boxed{\text{C}}$ である。

- $\textcircled{0} \ y = ax^2 + 4x + 4a$ $\textcircled{1} \ y = ax^2 + 4x - 4a$ $\textcircled{2} \ y = ax^2 - 4x + 4a$
 $\textcircled{3} \ y = -ax^2 + 4x + 4a$ $\textcircled{4} \ y = -ax^2 - 4x + 4a$ $\textcircled{5} \ y = -ax^2 - 4x - 4a$

(3) G は、2 次関数 $\textcircled{1}$ のグラフと 2 点

$$\left(\boxed{\text{DE}}, \boxed{\text{F}} \right), \left(\boxed{\text{G}}, \boxed{\text{HI}} \right)$$

で交わる。

(4) $a = 2$ とする。このとき、 G を表す 2 次関数の区間 $\boxed{\text{DE}} \leq x \leq \boxed{\text{G}}$ における
 最大値は $\boxed{\text{JK}}$ ，最小値は $\boxed{\text{LM}}$ である。

注) 対称な : symmetric

- 計算欄 (memo) -

問 2 a を定数とし、 x の方程式

$$|ax - 11| = 4x - 10 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を考える。

(1) 方程式 ① は、絶対値の記号を使わないで表すと

$$ax \geq 11 \text{ のとき, } (a - \boxed{\text{N}})x = \boxed{\text{O}}$$

$$ax < 11 \text{ のとき, } (a + \boxed{\text{P}})x = \boxed{\text{QR}}$$

となる。

(2) $a = \sqrt{7}$ のとき、方程式 ① の解は

$$x = \frac{\boxed{\text{S}} \left(\boxed{\text{T}} - \sqrt{\boxed{\text{U}}} \right)}{\boxed{\text{V}}}$$

である。

(3) 特に、 a を正の整数とする。方程式 ① が正の整数解をもつとき、 $a = \boxed{\text{W}}$ である。

また、そのときの正の整数解は $x = \boxed{\text{X}}$ である。

注) 絶対値: absolute value

- 計算欄 (memo) -

☐ I の問題はこれで終わります。☐ I の解答欄 ☐ Y , ☐ Z はマークしないでください。

II

半径が 2 の円 O に内接する三角形 ABC が

$$3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0} \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を満たしているとする。

直線 AO と線分 BC の交点を D とおくとき、線分 AD と線分 BD の長さを求めよう。

- (1) k を実数として、 $\overrightarrow{OD} = k\overrightarrow{OA}$ とおくと

$$\overrightarrow{OD} = -\frac{\boxed{A}}{\boxed{B}} k\overrightarrow{OB} - \frac{\boxed{C}}{\boxed{D}} k\overrightarrow{OC}$$

と表すことができる。さらに、3 点 B, C, D が一直線上にあることから、 $k = \frac{\boxed{EF}}{\boxed{G}}$

を得る。したがって、 $OD = \boxed{H}$ が求まり

$$AD = \boxed{I}$$

を得る。

- (2) (1) より $BD = \frac{\boxed{J}}{\boxed{K}} BC$ となるので、線分 BD の長さを求めるためには、線分 BC の長さを求めればよい。

まず

$$BC^2 = \boxed{L} - \boxed{M} \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$$

である。ただし、 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$ は \overrightarrow{OB} と \overrightarrow{OC} の内積を表すものとする。また、 $\textcircled{1}$ より、 $|4\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}|^2 = \boxed{NO}$ であるから

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{\boxed{PQR}}{\boxed{S}}$$

を得る。したがって、 $BC = \frac{\boxed{T} \sqrt{\boxed{U}}}{\boxed{V}}$ が求まり

$$BD = \frac{\sqrt{\boxed{W}}}{\boxed{X}}$$

を得る。

注) 内接する : be inscribed , 内積 : inner product

- 計算欄 (memo) -

Ⅱ の問題はこれで終わります。Ⅱ の解答欄 Y , Z はマークしないでください。

III

正の数 x, y が

$$(\log_2 x)^2 + (\log_2 y)^2 = \log_2 \frac{8x^2}{y^2} \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を満たしながら変わるとき、 xy^2 の最大値 およびそのときの x, y の値を求めよう。

(1) ① の右辺は

$$\log_2 \frac{8x^2}{y^2} = \boxed{\text{A}} \log_2 x - \boxed{\text{B}} \log_2 y + \boxed{\text{C}}$$

と変形できる。

したがって、 $\log_2 x = X$, $\log_2 y = Y$ とおくとき、① は X, Y を用いて

$$\left(X - \boxed{\text{D}}\right)^2 + \left(Y + \boxed{\text{E}}\right)^2 = \boxed{\text{F}} \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

と表せる。

(2) $\log_2 xy^2 = k$ とおく。この式は (1) の X, Y を用いて

$$X + \boxed{\text{G}} Y - k = 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

と表せる。

ここで、 XY 平面を考えると、② のグラフは円、③ のグラフは直線となる。 k が最大になるのは、その円と直線が接するときである。よって、 $k = \boxed{\text{H}}$ のとき、 xy^2 は最大値 $\boxed{\text{IJ}}$ をとる。また、このとき $x = \boxed{\text{K}}$, $y = \boxed{\text{L}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

III の問題はこれで終わります。III の解答欄 M ～ Z はマークしないでください。

IV

問 1 a を定数とする。関数

$$f(x) = 2\sin^3 x + a\sin 2x + \frac{9}{2}\cos 2x - 9\cos x - 2ax + 6$$

が $x = \frac{\pi}{3}$ で極値をもつとき、 $f(x)$ の区間 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ における最大値と最小値について調べよう。

- (1) $f(x)$ が $x = \frac{\pi}{3}$ で極値をもつから、 $a = \frac{\boxed{\text{A}}}{\boxed{\text{B}}}$ である。

したがって、 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x) = \boxed{\text{C}} \sin x \left(\boxed{\text{D}} \cos x - 1 \right) \left(\sin x - \boxed{\text{E}} \right)$$

と表される。

- (2) (1) の結果より、 $f(x)$ は区間 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ における最大値を $x = \boxed{\text{F}}$ でとり、最小値を $x = \boxed{\text{G}}$ でとる。

ただし、 $\boxed{\text{F}}$ 、 $\boxed{\text{G}}$ には、下の ①～④の中から適当なものを選びなさい。

- ① 0 ② $\frac{\pi}{6}$ ③ $\frac{\pi}{4}$ ④ $\frac{\pi}{3}$ ⑤ $\frac{\pi}{2}$

- 計算欄 (memo) -

問 2 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \int_0^{\frac{1}{4}} x^n e^{-x} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。

このとき

$$a_1 = -\frac{\boxed{\text{H}}}{\boxed{\text{I}}} e^{\frac{\boxed{\text{JK}}}{\boxed{\text{L}}}} + 1$$

である。

また, a_{n+1} は a_n を用いて

$$a_{n+1} = -\left(\frac{\boxed{\text{M}}}{\boxed{\text{N}}}\right)^{n+1} e^{\frac{\boxed{\text{JK}}}{\boxed{\text{L}}}} + \left(n + \boxed{\text{O}}\right) a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と表される。これを変形すると

$$na_n = a_{n+1} - a_n + \left(\frac{\boxed{\text{M}}}{\boxed{\text{N}}}\right)^{n+1} e^{\frac{\boxed{\text{JK}}}{\boxed{\text{L}}}}$$

となり

$$\sum_{k=1}^n ka_k = a_{n+1} - a_1 + \frac{\boxed{\text{P}}}{\boxed{\text{QR}}} e^{\frac{\boxed{\text{JK}}}{\boxed{\text{L}}}} \left\{ 1 - \left(\frac{\boxed{\text{S}}}{\boxed{\text{T}}}\right)^n \right\}$$

を得る。

ここで, $0 \leq x$ のとき, e^{-x} のとり得る値の範囲は $0 < e^{-x} \leq \boxed{\text{U}}$ であるから

$$0 < a_n < \int_0^{\frac{1}{4}} \boxed{\text{U}} x^n dx = \frac{1}{\boxed{\text{V}}^{n+1} (n+1)}$$

が成り立つ。よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \boxed{\text{W}}$$

であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n ka_k = \frac{\boxed{\text{X}}}{\boxed{\text{Y}}} e^{\frac{\boxed{\text{JK}}}{\boxed{\text{L}}}} - 1$$

を得る。

- 計算欄 (memo) -

Ⅳ の問題はこれで終わります。Ⅳ の解答欄 **Z** はマークしないでください。
 コース 2 の問題はこれですべて終わります。解答用紙の **V** はマークしないでください。
 解答用紙の解答コース欄に「コース 2」が正しくマークしてあるか、
 もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。

〈数 学〉

コース 1		
問	解答欄	正解
I	問1	AB 24
		C 4
		DEF -28
		GHI 2-8
		JK 10
		LM -8
	問2	NO 41
		PQR 421
		STUV 7473
		W 3
II	問1	X 3
		A 5
		BC 12
		D 0
		EFG 225
	問2	HI 45
		JK 20
		L 4
		M 8
		NOPQ 2020
III	問1	RS 25
		TU 25
	問2	A 6
		B 2
		CD 52
		EF 20
		GH 32
		IJK 568
		L 2
		M 4
IV	問1	N 4
		O 6
		PQ 94
		ABC 443
		DEF -44
		GHI 348
	問2	JK -8
		L 4

コース 2		
問	解答欄	正解
I	問1	AB 24
		C 4
		DEF -28
		GHI 2-8
		JK 10
		LM -8
	問2	NO 41
		PQR 421
		STUV 7473
		W 3
II	問1	X 3
		ABCD 4323
		EFG -12
		H 1
		I 3
	問2	JK 13
		LM 82
		NO 36
		PQRS -114
		TUV 362
III	問1	WX 62
		ABC 223
		DEF 115
		G 2
		H 4
	問2	IJ 16
		K 4
		L 2
		AB 34
		CDE 323
IV	問1	F 0
		G 3
	問2	HIJKL 54-14
		MNO 141
		PQRST 11214
		U 1
		V 4
		W 0
		XY 43