平成20年度

日本留学試験（第1回）

試験問題

数学 コース 2

(上級コース)

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の左上にある「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

＜ 解答用紙記入例 ＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

I

問 1　放物線 $y = 2x^2 + 4x + 5$ を x 軸方向に 4，y 軸方向に b だけ平行移動して得られる放物線を C とする。x の値の範囲が $a \leqq x \leqq 2$ のとき，C をグラフとする 2 次関数の最小値が 1 で最大値が 49 となるような定数 a, b を求めよう。

$y = 2x^2 + 4x + 5$ は

$$y = 2(x + \boxed{\mathsf{A}})^2 + \boxed{\mathsf{B}}$$

と変形できる。したがって，C をグラフとする 2 次関数は

$$y = 2(x - \boxed{\mathsf{C}})^2 + \boxed{\mathsf{B}} + b$$

である。この関数が $a \leqq x \leqq 2$ において最小値 1 と最大値 49 をもつから

$$b = \boxed{\mathsf{DE}}$$

であり，a は

$$(a - \boxed{\mathsf{C}})^2 = \boxed{\mathsf{FG}}$$

を満たす。これより

$$a = \boxed{\mathsf{HI}}$$

を得る。

問 2　整式 $P=a^4-2a^2+1$ に対して，整式 Q は

$$3P+2Q=3a^4+6a-9$$

を満たす。このとき

(1)　$Q=\boxed{\mathsf{J}}a^2+\boxed{\mathsf{K}}a-\boxed{\mathsf{L}}$ である。

(2)　$P,\ Q$ はそれぞれ

$$P=(a-\boxed{\mathsf{M}})^2(a+\boxed{\mathsf{N}})^2,\quad Q=\boxed{\mathsf{O}}(a-\boxed{\mathsf{P}})(a+\boxed{\mathsf{Q}})$$

と因数分解できる。

(3)　集合 $A,\ B$ をそれぞれ

$$A=\left\{\left|a-\boxed{\mathsf{M}}\right|,\ \left|a+\boxed{\mathsf{N}}\right|\right\},\quad B=\left\{\left|a-\boxed{\mathsf{P}}\right|,\ \left|a+\boxed{\mathsf{Q}}\right|\right\}$$

とする。集合 X に含まれる異なる要素の個数を $n(X)$ で表すとき

(i)　$n(B)=1$ ならば，$a=\dfrac{\boxed{\mathsf{RS}}}{\boxed{\mathsf{T}}}$ である。

(ii)　$a=0$ ならば，$n(A\cup B)=\boxed{\mathsf{U}}$，$n(A\cap B)=\boxed{\mathsf{V}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{I}}$ の解答欄 $\boxed{\text{W}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ には何も書かないでください。

II

等差数列 $\{a_n\}\,(n=1,2,3,\cdots)$ において $a_5=-27$, $a_{16}=28$ とする。

(1) 公差を d とすると，与えられた2つの条件式より

$$a_1+\boxed{\mathsf{A}}\,d=\boxed{\mathsf{BCD}},\quad a_1+\boxed{\mathsf{EF}}\,d=\boxed{\mathsf{GH}}$$

を得る。これより，$a_1=\boxed{\mathsf{IJK}}$, $d=\boxed{\mathsf{L}}$ である。

(2) 初項から第 n 項までの和 S_n を n の式で表すと

$$S_n=\frac{n}{2}\left(\boxed{\mathsf{M}}\,n-\boxed{\mathsf{NO}}\right)$$

となる。

(3) $T_n=2^{a_1}+2^{a_2}+\cdots+2^{a_n}$ を n の式で表すと

$$T_n=\frac{1}{2^{\boxed{\mathsf{PQ}}}}\cdot\frac{\boxed{\mathsf{RS}}^{\,n}-\boxed{\mathsf{T}}}{\boxed{\mathsf{UV}}}$$

となる。

注） 等差数列：arithmetic progression， 公差：common difference

- 計算欄 (memo) -

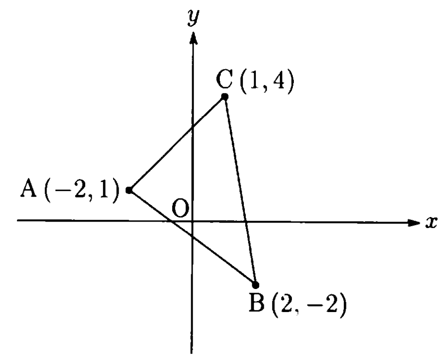
$\boxed{\mathrm{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\mathrm{II}}$ の解答欄 $\boxed{\quad \mathrm{W} \quad}$ ～ $\boxed{\quad \mathrm{Z} \quad}$ には何も書かないでください。

III

原点を O とする xy 平面上に 3 点

$$\mathrm{A}(-2,1),\quad \mathrm{B}(2,-2),\quad \mathrm{C}(1,4)$$

をとり，$\triangle$ABC を考える。x 軸上に点 P，第 1 象限内に点 Q をとり，$\triangle$OPQ が $\triangle$ABC と合同になるようにしたい。ベクトルを用いて，点 P, Q の座標を求めよう。



ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の成分はそれぞれ

$$(\boxed{\mathrm{A}},-3),\quad (\boxed{\mathrm{B}},3)$$

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の内積の値は

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\boxed{\mathrm{C}}$$

である。また

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\boxed{\mathrm{D}},\quad |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\boxed{\mathrm{E}}\sqrt{\boxed{\mathrm{F}}}$$

であるから，$\angle\mathrm{BAC}=\theta$ とおくと

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{\boxed{\mathrm{G}}}}{\boxed{\mathrm{HI}}},\quad \sin\theta=\frac{\boxed{\mathrm{J}}\sqrt{\boxed{\mathrm{K}}}}{\boxed{\mathrm{LM}}}$$

である。

したがって，点 P, Q の座標は，それぞれ

$$(\boxed{\mathrm{N}},0),\quad \left(\frac{\boxed{\mathrm{O}}}{\boxed{\mathrm{P}}},\frac{\boxed{\mathrm{QR}}}{\boxed{\mathrm{S}}}\right)$$

である。

注）第 1 象限：first quadrant，合同な：congruent，内積：inner product

\- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{T}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ には何も書かないでください。

IV

問 1　a, b を定数，t を正の数とする。x の 3 次関数

$$f(x) = 4x^3 + 4ax^2 + bx$$

は，$x = t$ で極小値 0 をとるとする。

このとき，a, b を t で表すと

$$a = \boxed{\text{AB}}\,t,\quad b = \boxed{\text{C}}\,t^2$$

である。

曲線 $y = f(x)$ と x 軸によって囲まれた部分の面積を S_1 とすると

$$S_1 = \frac{\boxed{\text{D}}}{\boxed{\text{E}}}\,t^{\boxed{\text{F}}}$$

である。

一方，曲線 $y = f(x)$ の原点における接線の方程式は

$$y = \boxed{\text{G}}\,t^2x$$

であり，この接線と $y = f(x)$ の共有点の x 座標は，0 と $\boxed{\text{H}}\,t$ である。この接線と $y = f(x)$ によって囲まれた部分の面積を S_2 とすると

$$S_2 = \frac{\boxed{\text{IJ}}}{\boxed{\text{K}}}\,t^{\boxed{\text{L}}}$$

である。

したがって，$\dfrac{S_2}{S_1}$ は t の値によらず，一定の値 $\boxed{\text{MN}}$ をとる。

\- 計算欄 (memo) -

問 2　x の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = xe^{-x^2}$$

とする。ただし，e は自然対数の底である。

(1)　$f(x)$ を最大にする x の値を $x = a$ とすると，$a = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{O}}}}{\boxed{\text{P}}}$ であり，その最大値は $\dfrac{1}{\sqrt{\boxed{\text{Q}}\,e}}$ である。

(2)　関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸，および，直線 $x = a$ によって囲まれる部分の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{\boxed{\text{R}}} - \frac{1}{\boxed{\text{S}}\sqrt{e}}$$

である。

(3)　$t > 0$ とする。関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸，および，直線 $x = t$ によって囲まれる部分の面積を $S(t)$ とすると

$$\lim_{t \to \infty} S(t) = \frac{1}{\boxed{\text{T}}}$$

である。

注）自然対数の底：the base of the natural logarithm

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\text{U}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ にはなにも書かないでください。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。

解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ の欄にはなにも書かないでください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。