平成17年度

日本留学試験（第1回）

試験問題

数学 コース 2

(上級コース)

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらか一方のコースを選んで解答してください。「コース2」を選ぶ場合は，右のように，解答用紙の左上にある「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。選択したコースが正しくマークされていないと，採点されません。

< 解答用紙記入例 >

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

I

問 1　a，b を定数とする。x の整式

$$A = x^3 + ax^2 + 18, \qquad B = x^2 - 2x + b$$

について考える。

(1)　A を B で割ったときの商を Q とし，余りを R とすると，

$$Q = x + a + \boxed{\text{A}}$$

$$R = \left(\boxed{\text{B}}\,a - b + \boxed{\text{C}}\right)x - \left(a + \boxed{\text{D}}\right)b + \boxed{\text{EF}}$$

である。

(2)　A が B で割り切れるとき，a，b の値は

$$a = \boxed{\text{G}}, \qquad b = \boxed{\text{H}}$$

または

$$a = \boxed{\text{IJ}}, \qquad b = \boxed{\text{KL}}$$

である。

問 2　次の命題の $\boxed{\text{M}}$ から $\boxed{\text{Q}}$ について，最も適するものを下の ⓪ ～ ③ のうちから一つ選べ。ただし，a，b は実数とする。

(1)　$ab = 0$ は $a = b = 0$ であるための $\boxed{\text{M}}$。

(2)　$a^2 + b^2 = 0$ は $a = b = 0$ であるための $\boxed{\text{N}}$。

(3)　$(a + b)(a - b) = 0$ は $a = b = 0$ であるための $\boxed{\text{O}}$。

(4)　$a^2 - ab + b^2 = 0$ は $ab = 0$ であるための $\boxed{\text{P}}$。

(5)　$b \neq 0$ のとき，$a \geqq b$ かつ $a \geqq -b$ は $a \geqq 0$ であるための $\boxed{\text{Q}}$。

⓪ 必要十分条件である

① 必要条件であるが，十分条件ではない

② 十分条件であるが，必要条件ではない

③ 必要条件でも十分条件でもない

注）命題：proposition

$\boxed{\text{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{I}}$ の解答欄 $\boxed{\text{R}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ は空欄にしてください。

II

問 1　a，x，y は有理数とし

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}a}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = x + \sqrt{6}y$$

とする。

(1)　$x = \boxed{\mathsf{A\ B}}\,a + \boxed{\mathsf{C}}$，　$y = a - \boxed{\mathsf{D}}$ である。

(2)　a がどのような値をとっても，点 (x, y) はつねに直線

$$y = \frac{\boxed{\mathsf{E\ F}}}{\boxed{\mathsf{G}}}x + \frac{\boxed{\mathsf{H}}}{\boxed{\mathsf{I}}}$$

上にある。

注）有理数：rational number

問 2　a，b は定数とする。

放物線　$y = x^2 + ax + 4$　………　①

直線　$y = 4x + b$　………　②

について考える。

(1)　① と ② が共有点をもつための必要十分条件は，a，b の間に

$$b \geqq \frac{\boxed{\text{JK}}}{\boxed{\text{L}}} a^2 + \boxed{\text{M}}\, a \quad \cdots\cdots\cdots \quad ③$$

が成り立つことである。

(2)　ab 座標平面上で直線 $a + b = k$ 上の点 (a, b) がすべて ③ で表される領域に含まれるような k の最小値を k_0 とするとき，$k_0 = \boxed{\text{N}}$ である。

（問 2 は次ページに続く。）

(3)　$a+b=k_0$ のとき，① と ② の共有点のうちで，その x 座標が a に無関係な一定値となる点の座標は $\left(\boxed{\text{O P}}, \boxed{\text{Q}}-a\right)$ である。

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\text{R}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ は空欄にしてください。

$\boxed{\text{III}}$

問 1　三角形 ABC において，3 辺の長さを

$$AB = 5, \quad BC = 8, \quad CA = 7$$

とする。

(1)　$\angle B = \dfrac{\boxed{\text{A}}}{\boxed{\text{B}}}\pi$ であり，三角形 ABC の面積は $\boxed{\text{C D}}\sqrt{\boxed{\text{E}}}$ である。

（問 1 は次ページに続く。）

(2)　三角形 ABC の重心を G とし，$\overrightarrow{GA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{GB} = \vec{b}$ とすると

$$\overrightarrow{GC} = \boxed{\text{FG}}(\vec{a} + \vec{b})$$

である。

また，辺 BC 上に BM = 3 となるように点 M をとれば

$$\overrightarrow{GM} = \frac{1}{\boxed{\text{H}}}\left(\boxed{\text{IJ}}\,\vec{a} + \boxed{\text{K}}\,\vec{b}\right)$$

である。

さらに，辺 AC 上に AN = 2 となるように点 N をとり，上と同様に $\overrightarrow{GN}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せば

$$\overrightarrow{GM} + \frac{\boxed{\text{L}}}{\boxed{\text{M}}}\overrightarrow{GN} = \vec{0}$$

であり，3 点 G，M，N は同一直線上にあることがわかる。

注） 重心：center of gravity

問 2　a は定数とする。x の関数 $f(x) = \cos 3x + a \cos 2x$ について考える。

(1)　$\cos x = t$ とすると

$$\cos 2x = \boxed{\text{N}}\, t^2 - \boxed{\text{O}}, \qquad \cos 3x = \boxed{\text{P}}\, t^3 - \boxed{\text{Q}}\, t$$

である。

(2)　$f(x)$ が $\cos x = \frac{1}{4}$ で最小値をとれば $a = \dfrac{\boxed{\text{R}}}{\boxed{\text{S}}}$ であり，$f(x)$ の値域は

$$-\frac{\boxed{\text{T U}}}{\boxed{\text{V W}}} \leqq f(x) \leqq \frac{\boxed{\text{X Y}}}{\boxed{\text{Z}}}$$

である。

注）値域：range

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。

IV

問 1　a，b を定数とする。関数 $f(x) = (ax + b)e^{\frac{x}{2}}$ がすべての実数 x に対して

$$f(x) = e^{\frac{x}{2}} - 1 + \frac{1}{2}\int_0^x f(t)\,dt$$

を満たすとき，$f(0) = \boxed{\text{A}}$ であり

$$a = \frac{\boxed{\text{B}}}{\boxed{\text{C}}}, \qquad b = \boxed{\text{D}}$$

である。

また，曲線 $y = f(x)$ と x 軸および直線 $x = 2$ で囲まれる部分の面積 S は

$$S = \boxed{\text{E}}$$

である。

問 2　区間 $0 \leqq x \leqq 1$ において，2 つの曲線

$$C_1:\ y = x^2, \qquad C_2:\ y = \sqrt{x}$$

について考える。

(1)　2 曲線 C_1，C_2 で囲まれる部分の面積を S とすると $S = \dfrac{\boxed{\text{F}}}{\boxed{\text{G}}}$ である。

（問 2 は次ページに続く。）

(2)　$0 < t < 1$ を満たす実数 t に対して，直線 $x = t$ と2曲線 C_1，C_2 との交点をそれぞれ P，Q とする。線分 PQ の長さは

$$t = 2^{\frac{\boxed{\mathrm{H}\ \mathrm{I}}}{\boxed{\mathrm{J}}}}$$

のとき最大になり，そのときの PQ の長さは

$$3 \cdot 2^{\frac{\boxed{\mathrm{K}\ \mathrm{L}}}{\boxed{\mathrm{M}}}}$$

である。

$\boxed{\mathrm{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\mathrm{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\mathrm{N}}$ ～ $\boxed{\mathrm{Z}}$ は空欄にしてください。

コース2の問題はこれですべて終わりです。

解答用紙には $\boxed{\mathrm{V}}$ がありますが，$\boxed{\mathrm{V}}$ の問題はありませんので，空欄にしてください。

この問題用紙を持ち帰ることはできません。