平成24年度

日本留学試験（第２回）

試験問題

数学 コース 2
(上級コース)

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを<u>一つだけ</u>選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

< 解答用紙記入例 >

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

<u>**選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。**</u>

I

問 1　$a \neq 0$ とする。x の 2 次関数

$$y = ax^2 - 4x - 4a \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

のグラフと原点 (0, 0) に関して対称な曲線を G とする。

(1)　2 次関数 ① のグラフの頂点の座標は

$$\left(\frac{\boxed{\mathsf{A}}}{a},\ -\frac{\boxed{\mathsf{B}}}{a} - 4a \right)$$

である。

(2)　G を表す 2 次関数は，以下の選択肢の中の $\boxed{\mathsf{C}}$ である。

⓪ $y = ax^2 + 4x + 4a$　① $y = ax^2 + 4x - 4a$　② $y = ax^2 - 4x + 4a$

③ $y = -ax^2 + 4x + 4a$　④ $y = -ax^2 - 4x + 4a$　⑤ $y = -ax^2 - 4x - 4a$

(3)　G は，2 次関数 ① のグラフと 2 点

$$\left(\boxed{\mathsf{DE}},\ \boxed{\mathsf{F}} \right),\quad \left(\boxed{\mathsf{G}},\ \boxed{\mathsf{HI}} \right)$$

で交わる。

(4)　$a = 2$ とする。このとき，G を表す 2 次関数の区間 $\boxed{\mathsf{DE}} \leqq x \leqq \boxed{\mathsf{G}}$ における最大値は $\boxed{\mathsf{JK}}$，最小値は $\boxed{\mathsf{LM}}$ である。

注）対称な：symmetric

- 計算欄 (memo) -

問 2　a を定数とし，x の方程式

$$|ax-11| = 4x-10 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を考える。

(1)　方程式 ① は，絶対値の記号を使わないで表すと

$ax \geqq 11$ のとき，　$\left(a-\boxed{\mathrm{N}}\right)x = \boxed{\mathrm{O}}$

$ax < 11$ のとき，　$\left(a+\boxed{\mathrm{P}}\right)x = \boxed{\mathrm{QR}}$

となる。

(2)　$a=\sqrt{7}$ のとき，方程式 ① の解は

$$x = \frac{\boxed{\mathrm{S}}\left(\boxed{\mathrm{T}}-\sqrt{\boxed{\mathrm{U}}}\right)}{\boxed{\mathrm{V}}}$$

である。

(3)　特に，a を正の整数とする。方程式 ① が正の整数解をもつとき，$a=\boxed{\mathrm{W}}$ である。また，そのときの正の整数解は $x=\boxed{\mathrm{X}}$ である。

注）絶対値：absolute value

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{I}}$ の解答欄 $\boxed{\text{Y}}$, $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

II

半径が 2 の円 O に内接する三角形 ABC が

$$3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=\vec{0} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を満たしているとする。

直線 AO と線分 BC の交点を D とおくとき，線分 AD と線分 BD の長さを求めよう。

(1)　k を実数として，$\overrightarrow{OD}=k\overrightarrow{OA}$ とおくと

$$\overrightarrow{OD}=-\frac{\boxed{\mathrm{A}}}{\boxed{\mathrm{B}}}k\overrightarrow{OB}-\frac{\boxed{\mathrm{C}}}{\boxed{\mathrm{D}}}k\overrightarrow{OC}$$

と表すことができる。さらに，3 点 B, C, D が一直線上にあることから，$k=\dfrac{\boxed{\mathrm{EF}}}{\boxed{\mathrm{G}}}$

を得る。したがって，OD $=\boxed{\mathrm{H}}$ が求まり

$$\mathrm{AD}=\boxed{\mathrm{I}}$$

を得る。

(2)　(1) より BD $=\dfrac{\boxed{\mathrm{J}}}{\boxed{\mathrm{K}}}$BC となるので，線分 BD の長さを求めるためには，線分 BC の長さを求めればよい。

まず

$$\mathrm{BC}^2=\boxed{\mathrm{L}}-\boxed{\mathrm{M}}\,\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$$

である。ただし，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$ は $\overrightarrow{OB}$ と $\overrightarrow{OC}$ の内積を表すものとする。また，① より，$\left|4\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}\right|^2=\boxed{\mathrm{NO}}$ であるから

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{\boxed{\mathrm{PQR}}}{\boxed{\mathrm{S}}}$$

を得る。したがって，BC $=\dfrac{\boxed{\mathrm{T}}\sqrt{\boxed{\mathrm{U}}}}{\boxed{\mathrm{V}}}$ が求まり

$$\mathrm{BD}=\frac{\sqrt{\boxed{\mathrm{W}}}}{\boxed{\mathrm{X}}}$$

を得る。

注）内接する：be inscribed，内積：inner product

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\text{Y}}$, $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

III

正の数 x, y が

$$(\log_2 x)^2+(\log_2 y)^2 = \log_2 \frac{8x^2}{y^2} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を満たしながら変わるとき，xy^2 の最大値 および そのときの x, y の値を求めよう。

(1)　① の右辺は

$$\log_2 \frac{8x^2}{y^2} = \boxed{\text{A}}\log_2 x - \boxed{\text{B}}\log_2 y + \boxed{\text{C}}$$

と変形できる。

したがって，$\log_2 x = X$，$\log_2 y = Y$ とおくとき，① は X，Y を用いて

$$\left(X - \boxed{\text{D}}\right)^2 + \left(Y + \boxed{\text{E}}\right)^2 = \boxed{\text{F}} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

と表せる。

(2)　$\log_2 xy^2 = k$ とおく。この式は (1) の X，Y を用いて

$$X + \boxed{\text{G}}Y - k = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ③$$

と表せる。

ここで，XY平面を考えると，② のグラフは円，③ のグラフは直線となる。k が最大になるのは，その円と直線が接するときである。よって，$k = \boxed{\text{H}}$ のとき，xy^2 は最大値 $\boxed{\text{IJ}}$ をとる。また，このとき $x = \boxed{\text{K}}$，$y = \boxed{\text{L}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{M}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

IV

問 1　a を定数とする。関数

$$f(x)=2\sin^3 x+a\sin 2x+\frac{9}{2}\cos 2x-9\cos x-2ax+6$$

が $x=\frac{\pi}{3}$ で極値をもつとき，$f(x)$ の区間 $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ における最大値と最小値について調べよう。

(1)　$f(x)$ が $x=\frac{\pi}{3}$ で極値をもつから，$a=\frac{\boxed{\mathsf{A}}}{\boxed{\mathsf{B}}}$ である。

したがって，$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x)=\boxed{\mathsf{C}}\sin x\left(\boxed{\mathsf{D}}\cos x-1\right)\left(\sin x-\boxed{\mathsf{E}}\right)$$

と表される。

(2)　(1) の結果より，$f(x)$ は区間 $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ における最大値を $x=\boxed{\mathsf{F}}$ でとり，最小値を $x=\boxed{\mathsf{G}}$ でとる。

ただし，$\boxed{\mathsf{F}}$，$\boxed{\mathsf{G}}$ には，下の ⓪ ～ ④ の中から適当なものを選びなさい。

⓪ 0　　① $\frac{\pi}{6}$　　② $\frac{\pi}{4}$　　③ $\frac{\pi}{3}$　　④ $\frac{\pi}{2}$

注）導関数：derivative

- 計算欄 (memo) -

問 2　数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \int_0^{\frac{1}{4}} x^n e^{-x} dx \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める。

このとき

$$a_1 = -\frac{\boxed{\text{H}}}{\boxed{\text{I}}} e^{\frac{\boxed{\text{JK}}}{\boxed{\text{L}}}} + 1$$

である。

また，a_{n+1} は a_n を用いて

$$a_{n+1} = -\left(\frac{\boxed{\text{M}}}{\boxed{\text{N}}}\right)^{n+1} e^{\frac{\boxed{\text{JK}}}{\boxed{\text{L}}}} + \left(n + \boxed{\text{O}}\right) a_n \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

と表される。これを変形すると

$$na_n = a_{n+1} - a_n + \left(\frac{\boxed{\text{M}}}{\boxed{\text{N}}}\right)^{n+1} e^{\frac{\boxed{\text{JK}}}{\boxed{\text{L}}}}$$

となり

$$\sum_{k=1}^{n} ka_k = a_{n+1} - a_1 + \frac{\boxed{\text{P}}}{\boxed{\text{QR}}} e^{\frac{\boxed{\text{JK}}}{\boxed{\text{L}}}} \left\{1 - \left(\frac{\boxed{\text{S}}}{\boxed{\text{T}}}\right)^n\right\}$$

を得る。

ここで，$0 \leqq x$ のとき，e^{-x} のとり得る値の範囲は $0 < e^{-x} \leqq \boxed{\text{U}}$ であるから

$$0 < a_n < \int_0^{\frac{1}{4}} \boxed{\text{U}}\, x^n dx = \frac{1}{\boxed{\text{V}}^{n+1}(n+1)}$$

が成り立つ。よって

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \boxed{\text{W}}$$

であるから

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} ka_k = \frac{\boxed{\text{X}}}{\boxed{\text{Y}}} e^{\frac{\boxed{\text{JK}}}{\boxed{\text{L}}}} - 1$$

を得る。

－ 計算欄 (memo) －

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 2」が正しくマークしてあるか，
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。