平成27年度

日本留学試験（第２回）

試験問題

The Examination

平成27年度（2015年度）日本留学試験

問題冊子

数　学（８０分）

【コース１(基本, Basic)・コース２(上級, Advanced)】

※　どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。

I　試験全体に関する注意

1．係員の許可なしに，部屋の外に出ることはできません。
2．この問題冊子を持ち帰ることはできません。

II　問題冊子に関する注意

1．試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見ないでください。
2．試験開始の合図があったら，下の欄に，受験番号と名前を，受験票と同じように記入してください。
3．コース１は１～13ページ，コース２は15～27ページにあります。
4．足りないページがあったら，手をあげて知らせてください。
5．メモや計算などを書く場合は，問題冊子に書いてください。

III　解答方法に関する注意

1．解答は，解答用紙に鉛筆(HB)で記入してください。
2．問題文中のA，B，C,…には，それぞれ－(マイナスの符号)，または，０から９までの数が一つずつ入ります。あてはまるものを選び，解答用紙(マークシート)の対応する解答欄にマークしてください。
3．同一の問題文中に $\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{BC}}$ などが繰り返し現れる場合，２度目以降は，$\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{BC}}$ のように表しています。

解答に関する記入上の注意

(1)　根号（$\sqrt{\ }$）の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。
　(例：$\sqrt{32}$ のときは，$2\sqrt{8}$ ではなく $4\sqrt{2}$ と答えます。)

(2)　分数を答えるときは，符号は分子につけ，既約分数(reduced fraction)にして答えてください。
　(例：$\frac{2}{6}$ は $\frac{1}{3}$，$-\frac{2}{\sqrt{6}}$ は $\frac{-2\sqrt{6}}{6}$ と分母を有理化してから約分し，$\frac{-\sqrt{6}}{3}$ と答えます。)

(3)　$\dfrac{\boxed{\text{A}}\sqrt{\boxed{\text{B}}}}{\boxed{\text{C}}}$ に $\dfrac{-\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は，下のようにマークしてください。

(4)　$\boxed{\text{DE}}\,x$ に $-x$ と答える場合は，Dを－，Eを１とし，下のようにマークしてください。

【解答用紙】

A	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
B	⊖	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
C	⊖	⓪	①	②	③	●	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
D	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
E	⊖	⓪	●	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

4．解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※　試験開始の合図があったら，必ず受験番号と名前を記入してください。

受験番号			＊					＊						
名　　前														

数学 コース 2
（上級コース）

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

＜解答用紙記入例＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

Ⅰ

問 1　a, b は実数であり，$0 < b < 7$ とする。2 次関数

$$f(x) = x^2 - 6x + a$$

の $b \leqq x \leqq 7$ の範囲における最大値 M と最小値 m を考える。

$f(x)$ は

$$f(x) = \left(x - \boxed{\text{A}}\right)^2 + a - \boxed{\text{B}}$$

と表される。

(1)　次の文中の $\boxed{\text{C}}$ ～ $\boxed{\text{G}}$ には，下の ⓪ ～ ⑨ の中から適するものを選びなさい。

次の 2 つの場合に分けて，M, m を求める。

(i)　$0 < b \leqq \boxed{\text{C}}$ のとき

$$M = \boxed{\text{D}},\quad m = \boxed{\text{E}}$$

である。

(ii)　$\boxed{\text{C}} < b < 7$ のとき

$$M = \boxed{\text{F}},\quad m = \boxed{\text{G}}$$

である。

⓪　0　　①　1　　②　2　　③　3

④　$a-6$　　⑤　$a+7$　　⑥　$a+8$　　⑦　$a-9$

⑧　b^2-6b+a　　⑨　b^2+6b+a

(2)　$M = 13,\ m = 1$ となるような a, b を求めると

$$a = \boxed{\text{H}},\quad b = \boxed{\text{I}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　大中小 3 個のさいころを同時に投げて出た目の数をそれぞれ x, y, z とし

$$x = y = z \quad \text{である事象を } A,$$
$$x + y + z = 6 \quad \text{である事象を } B,$$
$$x + y = z \quad \text{である事象を } C$$

とする。

(1)　事象 A, B, C の起こる場合の数は，それぞれ

A が $\boxed{\text{J}}$，　B が $\boxed{\text{KL}}$，　C が $\boxed{\text{MN}}$

である。

(2)　事象 $A \cap B$，$B \cap C$，$C \cap A$ の起こる場合の数は，それぞれ

$A \cap B$ が $\boxed{\text{O}}$，　$B \cap C$ が $\boxed{\text{P}}$，　$C \cap A$ が $\boxed{\text{Q}}$

である。

(3)　事象 $B \cup C$ の起こる確率 $P(B \cup C)$ は

$$P(B \cup C) = \frac{\boxed{\text{RS}}}{\boxed{\text{TUV}}}$$

である。

注）さいころ：dice

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{I}}$ の解答欄 $\boxed{\text{W}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

II

問 1　O を原点とする座標空間の 2 点 $A(1, -1, 0)$, $B(-2, 1, 2)$ に対して，$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおく。

(1)　まず，$|\vec{a} + t\vec{b}|$ を最小にする実数 t の値を求めよう。

$$|\vec{a} + t\vec{b}|^2 = \boxed{\textbf{A}}\,t^2 - \boxed{\textbf{B}}\,t + \boxed{\textbf{C}}$$

であるから，$t = \dfrac{\boxed{\textbf{D}}}{\boxed{\textbf{E}}}$ のとき，$|\vec{a} + t\vec{b}|$ は最小となる。また，このときの最小値は $\boxed{\textbf{F}}$ である。

(2)　次に，$\vec{a}$，$\vec{b}$ に直交するベクトル $\vec{c}$ は

$$\vec{c} = s\left(\boxed{\textbf{G}}, \boxed{\textbf{H}}, 1\right)$$

と表される。ただし，s は 0 でない実数である。

いま，$\overrightarrow{OC} = \left(\boxed{\textbf{G}}, \boxed{\textbf{H}}, 1\right)$，$\overrightarrow{OD} = 3\vec{a} + \vec{b}$ を満たす点 C, D をとる。

このとき，$\angle CBD = \dfrac{\pi}{\boxed{\textbf{I}}}$ であるから，三角形 BCD の面積は $\dfrac{\boxed{\textbf{J}}\sqrt{\boxed{\textbf{K}}}}{\boxed{\textbf{L}}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　複素数 z の方程式

$$z^4 = -324 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

の解と，正の実数 t に対して，複素数 z の方程式

$$z^4 = t^4 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

の解について考える。

(1)　① の解を求めるため，z を

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (r > 0,\ 0 < \theta \leqq 2\pi)$$

とおく。このとき

$$z^4 = r^{\boxed{\mathrm{M}}}\left(\cos\boxed{\quad\mathrm{N}\quad}\theta + i\sin\boxed{\quad\mathrm{N}\quad}\theta\right)$$

である。これが -324 となるような r と θ の値を求めると

$$r = \boxed{\quad\mathrm{O}\quad}\sqrt{\boxed{\quad\mathrm{P}\quad}}$$

$$\theta = \frac{\boxed{\quad\mathrm{Q}\quad}}{\boxed{\quad\mathrm{R}\quad}}\pi,\ \frac{\boxed{\quad\mathrm{S}\quad}}{\boxed{\quad\mathrm{R}\quad}}\pi,\ \frac{\boxed{\quad\mathrm{T}\quad}}{\boxed{\quad\mathrm{R}\quad}}\pi,\ \frac{\boxed{\quad\mathrm{U}\quad}}{\boxed{\quad\mathrm{R}\quad}}\pi$$

となる。ただし，$\boxed{\quad\mathrm{Q}\quad} < \boxed{\quad\mathrm{S}\quad} < \boxed{\quad\mathrm{T}\quad} < \boxed{\quad\mathrm{U}\quad}$ とする。

(2)　② の解は $\boxed{\quad\mathrm{V}\quad}$ 個あり，それらは t と共に変わる。いま，① と ② の解を 1 つずつ取り出し，複素数平面上でその 2 つの解の距離 d を考える。このとき，t を $0 < t \leqq 4$ の範囲で動かすと，d の最小値は $\boxed{\quad\mathrm{W}\quad}$ であり，最大値は $\sqrt{\boxed{\quad\mathrm{XY}\quad}}$ である。

注）複素数：complex number，複素数平面：complex number plane

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

III

関数 $f(x)=x^4+2x^3-12x^2+4$ と y 軸上の点 $\mathrm{P}(0,p)$ を考える。点 $\mathrm{P}(0,p)$ から曲線 $y=f(x)$ に 3 本の接線が引けるような p の値を求めよう。

(i)　点 $(t,\ f(t))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線の方程式は

$$y=\left(\boxed{\mathrm{A}}t^3+\boxed{\mathrm{B}}t^2-\boxed{\mathrm{CD}}t\right)x-\boxed{\mathrm{E}}t^4-\boxed{\mathrm{F}}t^3+\boxed{\mathrm{GH}}t^2+\boxed{\mathrm{I}}$$

である。この直線が点 $\mathrm{P}(0,p)$ を通るための条件は

$$p=-\boxed{\mathrm{J}}t^4-\boxed{\mathrm{K}}t^3+\boxed{\mathrm{LM}}t^2+\boxed{\mathrm{N}} \qquad \cdots\cdots\cdots \ ①$$

である。

(ii)　次の文中の $\boxed{\mathrm{O}}$, $\boxed{\mathrm{S}}$ には，次の選択肢 ⓪, ① のどちらか適するものを選び，他の $\boxed{}$ には適する数を入れなさい。

⓪　極小値　　①　極大値

等式 ① の右辺を $g(t)$ とおくと，関数 $g(t)$ は $\boxed{\mathrm{O}}$ を $t=\boxed{\mathrm{PQ}}$ と $t=\boxed{\mathrm{R}}$ でとる。また，$\boxed{\mathrm{S}}$ を $t=\boxed{\mathrm{T}}$ でとる。

したがって，点 $\mathrm{P}(0,p)$ から曲線 $y=f(x)$ に 3 本の接線が引けるような p の値は

$$p=\boxed{\mathrm{U}} \quad と \quad p=\boxed{\mathrm{V}}$$

である。ただし，$\boxed{\mathrm{U}}<\boxed{\mathrm{V}}$ とする。

\- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\text{W}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

IV

動点 P の座標 (x, y) が時刻 t の関数として次の式で与えられている。

$$x = 4t - \sin 4t$$
$$y = 4 - \cos 4t$$

(1)　x, y をそれぞれ t で微分すると

$$\frac{dx}{dt} = \boxed{\mathsf{A}}\left(\boxed{\mathsf{B}} - \cos 4t\right)$$
$$\frac{dy}{dt} = \boxed{\mathsf{C}}\ \sin 4t$$

である。よって

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \boxed{\mathsf{DE}}\ \sin^2 \boxed{\mathsf{F}}\, t$$

となる。

(2)　点 P が時刻 $t = 0$ から時刻 $t = 2\pi$ まで動くとき，点 P の速さ v が最大となる時刻が，全部で $\boxed{\mathsf{G}}$ 回ある。それらの中で，最初の時刻を t_0，最後の時刻を t_1 とすると

$$t_0 = \frac{\boxed{\mathsf{H}}}{\boxed{\mathsf{I}}}\pi, \quad t_1 = \frac{\boxed{\mathsf{J}}}{\boxed{\mathsf{K}}}\pi$$

であり，また，最大の速さは $v = \boxed{\mathsf{L}}$ である。

(3)　(2) の t_0, t_1 に対して，時刻 $t = t_0$ から時刻 $t = t_1$ までの間に点 P の動いた道のりは $\boxed{\mathsf{MN}}$ である。

注）道のり：distance

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\text{O}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

コース２の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース２」が正しくマークしてあるか，
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。