

数学（80分）

【コース1（基本, Basic）・コース2（上級, Advanced）】

※ どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。

I 試験全体に関する注意

1. 係員の許可なしに、部屋の外に出ることはできません。
2. この問題冊子を持ち帰ることはできません。

II 問題冊子に関する注意

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見ないでください。
2. 試験開始の合図があったら、下の欄に、受験番号と名前を、受験票と同じように記入してください。
3. コース1は1～13ページ、コース2は15～27ページにあります。
4. 足りないページがあったら、手をあげて知らせてください。
5. メモや計算などを書く場合は、問題冊子に書いてください。

III 解答方法に関する注意

1. 解答は、解答用紙に鉛筆(HB)で記入してください。
2. 問題文中のA, B, C, …には、それぞれ－(マイナスの符号)、または、0から9までの数が一つずつ入ります。あてはまるものを選び、解答用紙(マークシート)の対応する解答欄にマークしてください。
3. 同一の問題文中に \boxed{A} , \boxed{BC} などが繰り返し現れる場合、2度目以降は、 \boxed{A} , \boxed{BC} のように表しています。

解答に関する記入上の注意

- (1) 根号($\sqrt{\quad}$)の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。
(例： $\sqrt{32}$ のときは、 $2\sqrt{8}$ ではなく $4\sqrt{2}$ と答えます。)
- (2) 分数を答えるときは、符号は分子につけ、既約分数(reduced fraction)にして答えてください。

(例： $\frac{2}{6}$ は $\frac{1}{3}$ ， $-\frac{2}{\sqrt{6}}$ は $-\frac{2\sqrt{6}}{6}$ と分母を有理化してから約分し、 $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ と答えます。)

- (3) $\frac{\boxed{A}\sqrt{\boxed{B}}}{\boxed{C}}$ に $\frac{-\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は、下のようにマークしてください。
- (4) $\boxed{DE}x$ に $-x$ と答える場合は、Dを－、Eを1とし、下のようにマークしてください。

【解答用紙】

A	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
B	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
C	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
D	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
E	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

4. 解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※ 試験開始の合図があったら、必ず受験番号と名前を記入してください。

受験番号			*				*					
名前												

数学 コース 2

(上級コース)

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので、どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は、右のように、解答用紙の「解答コース」の「コース2」を○で囲み、その下のマーク欄をマークしてください。

< 解答用紙記入例 >

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

選択したコースを正しくマークしないと、採点されません。

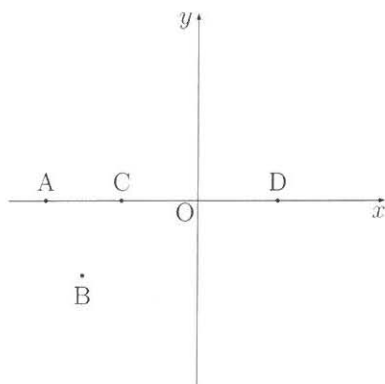
I

問1 2つの放物線

$$\ell: y = ax^2 + 2bx + c$$

$$m: y = (a+1)x^2 + 2(b+2)x + c+3$$

を考える。点 A, B, C, D が右図のような位置関係にあるとする。このとき、この2つの放物線のうち、一方は、3点 A, B, C を通り、もう一方は、3点 B, C, D を通るとする。



- (1) 3点 A, B, C を通る放物線は A である。ただし、A には、次の ① か ② のどちらか適するものを選びなさい。

② 放物線 ℓ

① 放物線 m

- (2) 2つの放物線 ℓ, m は、どちらも2点 B, C を通るので、点 B, C の x 座標は、2次方程式

$$x^2 + \text{B}x + \text{C} = 0$$

の解である。よって、点 B の x 座標は DE、点 C の x 座標は FG である。

- (3) 特に、 $AB = BC$, $CO = OD$ のとき、 a, b, c の値を求めよう。

2点 C, D は y 軸に関して対称であるから、 $b = \text{H}$ である。また、 $AB = BC$ より、直線 $x = \text{IJ}$ が A の軸である。したがって、 $a = -\frac{\text{K}}{\text{L}}$ である。よって、

$$c = \frac{\text{M}}{\text{N}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

問 2 2つの袋 A, B がある。A の袋には白球が 4 個、赤球が 1 個入っており、B の袋には白球が 2 個、赤球が 3 個入っている。はじめに A の袋から同時に 2 個の球を取り出し、続いて、B の袋から同時に 2 個の球を取り出す。

(1) A から 2 個の白球を取り出し、B からは白球と赤球をそれぞれ 1 個ずつ取り出す確率は $\frac{\boxed{O}}{\boxed{PQ}}$ である。

(2) 取り出した 4 個の球の中に、3 個の白球と 1 個の赤球が入っている確率は $\frac{\boxed{R}}{\boxed{S}}$ である。

(3) 取り出した 4 個の球がすべて同じ色である確率は $\frac{\boxed{T}}{\boxed{UV}}$ である。

(4) 取り出した 4 個の球の中に含まれる白球が 2 個以下である確率は $\frac{\boxed{WX}}{\boxed{YZ}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

II

問 1 2つのベクトル \vec{a} と \vec{b} のなす角は 60° であり、 $|\vec{a}| = 1$ 、 $|\vec{b}| = 2$ とする。また、実数 x に対して、 $\vec{u} = x\vec{a} + \vec{b}$ 、 $\vec{v} = x\vec{a} - \vec{b}$ とする。 $x > 1$ のとき、 \vec{u} と \vec{v} のなす角が 30° となるような x の値を求めよう。以下、 $\vec{u} \cdot \vec{v}$ は \vec{u} と \vec{v} の内積を表し、 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ は \vec{a} と \vec{b} の内積を表す。

まず、ベクトル \vec{u} と \vec{v} のなす角は 30° であるから

$$\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right)^2 = \frac{\boxed{\text{A}}}{\boxed{\text{B}}} |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2$$

を得る。 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \boxed{\text{C}}$ であることに注意して、この式を x で表すと

$$x^4 - \boxed{\text{DE}} x^2 + \boxed{\text{FG}} = 0$$

となる。これを変形して

$$\left(x^2 - \boxed{\text{H}}\right)^2 = \left(\boxed{\text{I}} x\right)^2$$

を得る。

したがって、 $x > 1$ に注意して、これを解くと

$$x = \boxed{\text{J}} + \sqrt{\boxed{\text{KL}}}$$

となる。

- 計算欄 (memo) -

問 2 複素数平面上で、 z^3 が実数となるような複素数 z を考える。

- (1) 上の条件を満たす複素数 $z = x + iy$ が描く図形を C とする。その複素数 z の偏角は

$$\arg z = \frac{\pi}{\boxed{\text{M}}} k \quad (k \text{ は整数})$$

を満たすので、図形 C は x, y の方程式

$$y = \boxed{\text{N}}, \quad y = \sqrt{\boxed{\text{O}}} x, \quad y = -\sqrt{\boxed{\text{P}}} x$$

で表される 3 直線である。

- (2) C 上に $|z - 1 - i| = r$ を満たす複素数 z がただ 1 個だけ存在するとする。このとき、 r の値は

$$r = \frac{\sqrt{\boxed{\text{Q}}} - \boxed{\text{R}}}{\boxed{\text{S}}}$$

となる。また、そのときの z の値は

$$z = \frac{\boxed{\text{T}} + \sqrt{\boxed{\text{U}}}}{\boxed{\text{V}}} (1 + \sqrt{\boxed{\text{W}}} i)$$

である。

- 計算欄 (memo) -

III

3 次関数

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{t+2}{2}x^2 + 2tx + \frac{2}{3}$$

の区間 $x \leq 4$ における最大値が 6 より大きくなるような実数 t の値の範囲を求めよう。

まず, $f(x)$ の導関数は

$$f'(x) = (x - \boxed{\text{A}})(x - t)$$

であるから, t の値の範囲を次のように分けて考える。

(i) $t > \boxed{\text{A}}$ のとき, $f(x)$ は $x = \boxed{\text{A}}$ で極大, $x = t$ で極小となる。

また, $f(4) = \boxed{\text{B}}$ であるから, $f(\boxed{\text{A}}) > 6$ となる t の値の範囲を求めればよい。

(ii) $t = \boxed{\text{A}}$ のとき, 区間 $x \leq 4$ における $f(x)$ の最大値は $f(\boxed{\text{C}}) = \boxed{\text{D}}$ となり, 条件は満たされない。

(iii) $t < \boxed{\text{A}}$ のとき, $f(x)$ は $x = t$ で極大, $x = \boxed{\text{A}}$ で極小となる。

また, $f(4) = \boxed{\text{B}}$ であるから, $f(t) > 6$ となる t の値の範囲を求めればよい。

ここで

$$f(t) - 6 = -\frac{1}{6} \left(t + \boxed{\text{E}} \right) \left(t - \boxed{\text{F}} \right)^2$$

であることに注意する。

以上より, 求める t の値の範囲は

$$t > \frac{\boxed{\text{GH}}}{\boxed{\text{I}}} \quad \text{または} \quad t < \boxed{\text{JK}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

IV

関数

$$f(x) = \frac{\sin x}{3 - 2\cos x} \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

を考える。

(1) $f(x)$ の導関数は

$$f'(x) = \frac{\boxed{A} \cos x - \boxed{B}}{\left(\boxed{C} - \boxed{D} \cos x \right)^2}$$

である。したがって、関数 $f(x)$ が極値をとる x の値を α とおくと

$$\cos \alpha = \frac{\boxed{E}}{\boxed{F}}$$

である。

(2) 関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸によって囲まれる部分は直線 $x = \alpha$ によって 2 つの部分に分けられる。その左側の部分の面積を S_1 とおくと

$$S_1 = \int_{\frac{\boxed{G}}{\boxed{H}}}^{\boxed{I}} \frac{dt}{\boxed{J} - \boxed{K} t} = \frac{\boxed{L}}{\boxed{M}} \log \frac{\boxed{N}}{\boxed{O}}$$

である。

また、右側の部分の面積を S_2 とおくと

$$S_2 = \frac{\boxed{P}}{2} \log \boxed{Q}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

IV の問題はこれで終わります。IV の解答欄 R ～ Z はマークしないでください。

コース2の問題はこれですべて終わります。解答用紙の V はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース2」が正しくマークしてあるか、
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。

〈数 学〉 Mathematics

コース 1 Course 1			
問 Q.		解答番号 row	正解 A.
I	問 1	ABCD	5723
		EFGH	5435
		I	2
	問 2	JKL	925
		MN	25
		OPQ	350
		RSTU	2750
II	問 1	A	1
		BC	43
		DE	-3
		FG	-1
		H	0
		IJ	-3
		KL	13
		MN	13
	問 2	OPQR	2469
		STUV	9246
		WX	46
		YZ	15
III		AB	11
		CDEF	2257
		GHI	319
		JKL	311
IV		AB	37
		CDE	932
		F	1
		G	3
		HI	27
		JK	60
		L	2
		MNO	737

コース 2 Course 2			
問 Q.		解答番号 row	正解 A.
I	問 1	A	1
		BC	43
		DE	-3
		FG	-1
		H	0
		IJ	-3
		KL	13
		MN	13
	問 2	OPQ	925
		RS	25
		TUV	350
		WXYZ	2750
II	問 1	AB	34
		C	1
		DEFG	4416
		HI	46
	問 2	JKL	313
		M	3
		NOP	033
		QRS	312
		TUVW	1343
III		A	2
		B	6
		CD	46
		EF	24
		GHI	103
		JK	-2
IV		ABCD	3232
		EF	23
		GHI	231
		JK	32
		LMNO	1253
		PQ	13