

数学（80分）

【コース1（基本, Basic）・コース2（上級, Advanced）】

※ どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。

I 試験全体に関する注意

1. 係員の許可なしに、部屋の外に出ることはできません。
2. この問題冊子を持ち帰ることはできません。

II 問題冊子に関する注意

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見ないでください。
2. 試験開始の合図があったら、下の欄に、受験番号と名前を、受験票と同じように記入してください。
3. コース1は1～13ページ、コース2は15～27ページにあります。
4. 足りないページがあったら、手をあげて知らせてください。
5. メモや計算などを書く場合は、問題冊子に書いてください。

III 解答方法に関する注意

1. 解答は、解答用紙に鉛筆(HB)で記入してください。
2. 問題文中のA, B, C, …には、それぞれ－(マイナスの符号)、または、0から9までの数が一つずつ入ります。あてはまるものを選び、解答用紙(マークシート)の対応する解答欄にマークしてください。
3. 同一の問題文中に **A**, **BC** などが繰り返し現れる場合、2度目以降は、**A**, **BC** のように表しています。

解答に関する記入上の注意

- (1) 根号($\sqrt{\quad}$)の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。
(例： $\sqrt{32}$ のときは、 $2\sqrt{8}$ ではなく $4\sqrt{2}$ と答えます。)
- (2) 分数を答えるときは、符号は分子につけ、既約分数(reduced fraction)にして答えてください。

(例： $\frac{2}{6}$ は $\frac{1}{3}$ ， $-\frac{2}{\sqrt{6}}$ は $-\frac{2\sqrt{6}}{6}$ と分母を有理化してから約分し， $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ と答えます。)

- (3) $\frac{\sqrt{A} \cdot B}{C}$ に $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は、以下のようにマークしてください。
- (4) $\sqrt{DE}x$ に $-x$ と答える場合は、Dを－，Eを1とし、以下のようにマークしてください。

【解答用紙】

A	●	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B	○	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9
C	○	0	1	2	3	●	5	6	7	8	9
D	●	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
E	○	0	●	2	3	4	5	6	7	8	9

4. 解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※ 試験開始の合図があったら、必ず受験番号と名前を記入してください。

受 験 番 号			*				*					
名 前												

数学 コース 2 (上級コース)

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので、どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は、右のように、解答用紙の「解答コース」の「コース2」を○で囲み、その下のマーク欄をマークしてください。

< 解答用紙記入例 >

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

選択したコースを正しくマークしないと、採点されません。

I

問 1 x の 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ が、次の条件【*】を満たしているとする。

【*】 $x = -1$ における値は $y = -8$ であり、 $x = 3$ における値は $y = 16$ である。

さらに、区間 $-1 \leq x \leq 3$ において、 x の値が増加すると共に y の値も増加する。

このとき、 a, b, c に関する条件を求めよう。

条件【*】より、 b, c は a を用いて

$$b = \boxed{\text{AB}} a + \boxed{\text{C}} \quad \dots\dots\dots \text{①}$$

$$c = \boxed{\text{DE}} a - \boxed{\text{F}} \quad \dots\dots\dots \text{②}$$

と表される。よって、この 2 次関数のグラフの軸の方程式は

$$x = \boxed{\text{G}} - \frac{\boxed{\text{H}}}{a}$$

である。

したがって、求める条件は、 a, b, c が関係式 ①, ② を満たし、さらに a が

$$0 < a \leq \frac{\boxed{\text{I}}}{\boxed{\text{J}}} \quad \text{または} \quad \frac{\boxed{\text{KL}}}{\boxed{\text{M}}} \leq a < 0$$

を満たすことである。

- 計算欄 (memo) -

問 2 a, b, c, d は $a < b < c < d$ を満たす実数とし、実数の部分集合

$$A = \{x \mid a \leq x \leq c\}, \quad B = \{x \mid b \leq x \leq d\}$$

が

$$A \cap B = \{x \mid x^2 - 4x + 3 \leq 0\}$$

を満たしているとする。

次の (1), (2) の各場合について答えなさい。

(1) A と B の和集合を

$$A \cup B = \{x \mid x^2 - 5x - 24 \leq 0\}$$

とする。このときの a, b, c, d の値は

$$a = \boxed{\text{NO}}, \quad b = \boxed{\text{P}}, \quad c = \boxed{\text{Q}}, \quad d = \boxed{\text{R}}$$

である。

(2) A と B の補集合 \overline{B} の共通部分を

$$A \cap \overline{B} = \{x \mid x^2 + 5x - 6 \leq 0 \text{ かつ } x \neq 1\}$$

とし、 A の補集合 \overline{A} と B の共通部分を

$$\overline{A} \cap B = \{x \mid x^2 - 9x + 18 \leq 0 \text{ かつ } x \neq 3\}$$

とする。このときの a, b, c, d の値は

$$a = \boxed{\text{ST}}, \quad b = \boxed{\text{U}}, \quad c = \boxed{\text{V}}, \quad d = \boxed{\text{W}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

☐ I の問題はこれで終わります。☐ I の解答欄 ☐ X ～ ☐ Z はマークしないでください。

II

O を中心とする半径 1 の球面 S 上に 3 点 A, B, C を

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$$

となるようにとる。ここで、 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ は \overrightarrow{OA} と \overrightarrow{OB} の内積を表す。他も同様である。

(1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \boxed{\text{A}}$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\boxed{\text{B}}}$, $\cos \angle BAC = \frac{\boxed{\text{C}}}{\boxed{\text{D}}}$ であり,

三角形 ABC の面積は $\frac{\sqrt{\boxed{\text{E}}}}{\boxed{\text{F}}}$ である。

(2) 三角形 ABC の重心を G とし、半直線 OG と S との交点を P とする。

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\boxed{\text{G}}}{\boxed{\text{H}}} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \text{ であるから}$$

$$|\overrightarrow{OG}| = \frac{\sqrt{\boxed{\text{I}}}}{\boxed{\text{J}}}, \quad |\overrightarrow{PG}| = \frac{\boxed{\text{K}} - \sqrt{\boxed{\text{L}}}}{\boxed{\text{M}}},$$

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{PG} = \boxed{\text{N}}$$

となる。したがって、四面体 PABC の体積は $\frac{\sqrt{\boxed{\text{O}}} - \boxed{\text{P}}}{\boxed{\text{Q}}}$ である。

注) 内積: inner product, 重心: center of gravity, 半直線: ray (half line), 四面体: tetrahedron

- 計算欄 (memo) -

Ⅱ の問題はこれで終わります。Ⅱ の解答欄 R ～ Z はマークしないでください。

III

実数 x, y が

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

を満たすとき

$$P = x^2 + xy + y^2$$

の最大値を求めよう。

条件を満たす x, y において、 $x = \sqrt{2} \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) とおくと

$$y = \boxed{\text{A}} \sin \theta$$

となる。よって P は

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{\boxed{\text{B}}} \sin 2\theta - \cos 2\theta + \boxed{\text{C}} \\ &= \sqrt{\boxed{\text{D}}} \sin (2\theta - \alpha) + \boxed{\text{E}} \end{aligned}$$

と表され

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{\boxed{\text{F}}}}{\boxed{\text{G}}}, \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{\boxed{\text{H}}}}{\boxed{\text{I}}} \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

である。したがって、 P の最大値は $\sqrt{\boxed{\text{J}}} + \boxed{\text{K}}$ である。

また、 P の値が最大になるときの θ を θ_0 とおくと

$$2\theta_0 = \alpha + \frac{\pi}{\boxed{\text{L}}}$$

であるから

$$\sin 2\theta_0 = \frac{\sqrt{\boxed{\text{M}}}}{\boxed{\text{N}}}, \quad \cos 2\theta_0 = -\frac{\sqrt{\boxed{\text{O}}}}{\boxed{\text{P}}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

III の問題はこれで終わります。III の解答欄 Q ～ Z はマークしないでください。

IV

問 1 数列 $\{S_n\}$ を

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と定めるとき、次の 2 つの極限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{2n} - S_n}{\sqrt{n}}$$

を求めよう。

- (1) 次の問題文中の **A** ~ **I** には、下の ① ~ ⑨の中から適するものを選びなさい。

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよう。関数 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ について考えると

$$y' = -\frac{\mathbf{A}}{2\sqrt{x}\mathbf{B}}$$

より、この関数 y は **C** である。

そこで、区間 $k \leq x \leq k+1$ ($k = 1, 2, \dots, n$) で考えると

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \mathbf{D} \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

が成り立つ。

この式の両辺を $k = 1$ から $k = n$ まで辺ごとに加えると

$$S_n \mathbf{E} \int_{\mathbf{F}}^{\mathbf{G}} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \mathbf{H} \left(\sqrt{\mathbf{G}} - 1 \right)$$

が得られ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \mathbf{I}$$

となる。

- | | | | |
|------------|---------|-------|-------|
| ① ∞ | ④ 1 | ⑦ 2 | ⑩ 3 |
| ② n | ⑤ $n+1$ | ⑧ $<$ | ⑪ $>$ |
| ③ 単調増加 | ⑥ 単調減少 | | |

(問 1 は次ページに続く)

- (2) 次の問題文中の $\boxed{\text{J}}$ ～ $\boxed{\text{P}}$ には、下の ① ～ ⑨ の中から適するものを選びなさい。

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{2n} - S_n}{\sqrt{n}}$ について考えると

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{\boxed{\text{J}}}}$$

であるから、区分求積法より

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{2n} - S_n}{\sqrt{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\boxed{\text{K}}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{\boxed{\text{L}} + \frac{k}{n}}} \\ &= \int_{\boxed{\text{M}}}^{\boxed{\text{N}}} \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx \\ &= \boxed{\text{O}} \left(\sqrt{\boxed{\text{P}}} - 1 \right) \end{aligned}$$

となる。

- | | | | | |
|---------|---------|---------|-----------|-----------|
| ① 0 | ② 1 | ③ 2 | ④ $n-1$ | ⑤ n |
| ⑥ $n+1$ | ⑦ $n-k$ | ⑧ $n+k$ | ⑨ $n+k-1$ | ⑩ $n+k+1$ |

注) 区分求積法 : quadrature (mensuration) by parts

問 2 次の問題文中の Q, S, V には, 下の ① ~ ⑦の中から適する式を選びなさい。また, それ以外の には, 適する数を入れなさい。

微分可能な関数 $f(x)$ が次の等式を満たしている。

$$\int_0^x f(t)dt = (1 + e^{-x})f(x) + 2x - 4\log 2 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

このとき, $f(x)$ を定め, 極限值 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ を求めよう。

① の両辺を x で微分し変形すると

$$(1 + e^{-x}) \left(\text{Q} \right) = \text{R} \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

を得る。次に, $f(x) = e^x g(x)$ とおくと, ② より

$$g'(x) = \frac{\text{S}}{1 + e^{-x}}$$

となる。よって

$$g(x) = \text{T} \log(1 + e^{-x}) + C$$

を得る。ここで C は積分定数である。

また, $g(0) = f(0)$ より, $C = \text{U}$ である。したがって, $g(x)$ が求まり

$$f(x) = \text{V} \log(1 + e^{-x})$$

と定まる。

最後に, $e^{-x} = t$ とおくと

$$f(x) = \text{W} \log(1 + t)^{\frac{1}{t}}$$

となる。よって

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow \text{X}} \text{W} \log(1 + t)^{\frac{1}{t}} = \text{Y}$$

と求まる。

- | | | |
|-------------------|------------------|-------------------|
| ① $f'(x) - f(x)$ | ① $f(x) - f'(x)$ | ② $f'(x) - 2f(x)$ |
| ③ $f(x) - 2f'(x)$ | ④ $2e^x$ | ⑤ $-2e^x$ |
| ⑥ $2e^{-x}$ | ⑦ $-2e^{-x}$ | |

注) 微分可能な: differentiable, 積分定数: integral constant

〈数 学〉

コース 1		
問	解答欄	正解
I	問1	ABC -26
		DEF -32
		GH 13
		IJ 32
		KLM -32
	問2	NO -3
		P 1
		Q 3
		R 8
		ST -6
		U 1
		V 3
		W 6
II	問1	AB 20
		C 4
		DE 12
		FGH 240
		I 5
		J 3
	問2	KL 24
		MNOP 1-11
		QRS 3-3
		TU -7
III		A 0
		B 3
		C 1
		D 0
		E 4
		F 2
		G 1
IV		ABC 120
		D 3
		EF 27
		GH 32
		IJ 33

コース 2					
問	解答欄	正解	問	解答欄	正解
I	問1	ABC -26	IV	AB	13
		DEF -32		C	9
		GH 13		D	7
		IJ 32		E	7
		KLM -32		FG	15
	問2	NO -3		H	2
		P 1		I	0
		Q 3		J	7
		R 8		KL	41
		ST -6		MN	01
		U 1		OP	22
		V 3		Q	1
		W 6		R	2
II		A 1		S	7
		B 2		T	2
		CD 12		U	0
		EF 32		V	4
		GH 13		W	2
		IJ 33		X	0
		KLM 333		Y	2
		N 0			
		OPQ 316			
III		A 2			
		BC 23			
		DE 33			
		FG 33			
		HI 63			
		JK 33			
		L 2			
		MN 63			
		OP 33			