平成18年度

日本留学試験（第1回）

試験問題

数学 コース 2

（上級コース）

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース 1」と「コース 2」がありますので，どちらか一方のコースを選んで解答してください。「コース 2」を選ぶ場合は，右のように，解答用紙の左上にある「解答コース」の「コース 2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。選択したコースが正しくマークされていないと，採点されません。

＜ 解答用紙記入例 ＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

I

問 1　2 次関数 $y = 5x^2 + 2x$ のグラフを C とする。C は頂点の座標が

$$\left(\frac{\boxed{\mathsf{AB}}}{\boxed{\mathsf{C}}}, \frac{\boxed{\mathsf{DE}}}{\boxed{\mathsf{F}}} \right)$$

の放物線である。

(1)　C を原点に関して対称移動してできる放物線の方程式は $y = \boxed{\mathsf{GH}}\,x^2 + \boxed{\mathsf{I}}\,x$ である。

(2)　C を y 軸方向に a だけ平行移動して得られる放物線の頂点が直線 $y = ax + 3$ 上にあるとき，$a = \dfrac{\boxed{\mathsf{J}}}{\boxed{\mathsf{K}}}$ である。

注）対称移動：symmetric transformation，平行移動：parallel translation

問 2　$A = \{x \mid x^2 \leqq 9\}$，$B = \{x \mid 2x^2 - 4x - 5 > 0\}$ とする。集合 $A \cap B$ に属するすべての整数の個数を求めよう。

$$A = \left\{x \,\middle|\, -\boxed{\text{L}} \leqq x \leqq \boxed{\text{M}}\right\}$$

$$B = \left\{x \,\middle|\, x < \boxed{\text{N}} - \frac{\sqrt{\boxed{\text{OP}}}}{\boxed{\text{Q}}} \text{ または } \boxed{\text{N}} + \frac{\sqrt{\boxed{\text{OP}}}}{\boxed{\text{Q}}} < x\right\}$$

であるから，$A \cap B$ に属する整数は $\boxed{\text{R}}$ 個である。

$\boxed{\text{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{I}}$ の解答欄 $\boxed{\text{S}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ は空欄にしてください。

II

問 1　関数

$$y = \begin{cases} |x-2| & (x \geqq 0) \\ |x+2| & (x < 0) \end{cases}$$

のグラフを ℓ とし，$y = ax + 1$ のグラフを m とする。

(1)　$a = \dfrac{1}{4}$ のとき，ℓ と m の共有点の個数は $\boxed{\text{A}}$ 個である。

$a = -1$ のとき，ℓ と m の共有点の個数は $\boxed{\text{B}}$ 個である。

(2)　ℓ と m が 4 個の共有点をもつような a の値の範囲は

$$-\frac{\boxed{\text{C}}}{\boxed{\text{D}}} < a < \frac{\boxed{\text{E}}}{\boxed{\text{F}}}$$

である。

問 2　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。条件

$$a_1 = 1, \qquad S_n = na_n - 2n^3 + 2n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たす数列 $\{a_n\}$ を考える。このとき

$$S_{n-1} = (n-1)a_{n-1} - \boxed{\text{G}}\,n^3 + \boxed{\text{H}}\,n^2 - \boxed{\text{I}}\,n \qquad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

であるから

$$a_n - a_{n-1} = \boxed{\text{J}}\,n \qquad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

が成り立つ。したがって

$$a_n = \boxed{\text{K}}\,n^2 + \boxed{\text{L}}\,n - \boxed{\text{M}} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

である。また

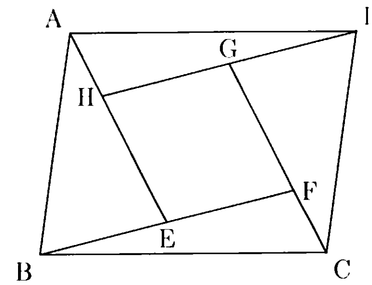
$$\lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{na_n} = \frac{\boxed{\text{N}}}{\boxed{\text{O}}}$$

である。

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\text{P}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ は空欄にしてください。

III

問 1　右図の平行四辺形 ABCD において



$$\mathrm{AE} \parallel \mathrm{GC},\qquad \mathrm{BF} \parallel \mathrm{HD},$$

$$\mathrm{AH} : \mathrm{HE} = 1 : 2,\qquad \mathrm{BE} : \mathrm{EF} = 1 : 1$$

とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{b}$ とする。このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \vec{a} + \frac{\boxed{\mathsf{A}}}{\boxed{\mathsf{B}}}\overrightarrow{\mathrm{BF}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{HD}} = \vec{b} - \frac{\boxed{\mathsf{C}}}{\boxed{\mathsf{D}}}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$$

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \frac{\boxed{\mathsf{E}}}{\boxed{\mathsf{F}}}\vec{a} + \frac{\boxed{\mathsf{G}}}{\boxed{\mathsf{H}}}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BF}} = -\frac{\boxed{\mathsf{I}}}{\boxed{\mathsf{J}}}\vec{a} + \frac{\boxed{\mathsf{K}}}{\boxed{\mathsf{L}}}\vec{b}$$

となる。

(2)　$\angle\mathrm{BAD} = 120^\circ$ で，$\mathrm{AE}\perp\mathrm{BF}$ のとき，$\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}} = \dfrac{\boxed{\mathsf{M}}}{\boxed{\mathsf{N}}}$ である。

問 2

(1)　任意の定数 a に対し，2 直線 $ax+y=8$，$x-ay=6$ の交点は，円

$$(x-\boxed{\text{O}})^2+(y-\boxed{\text{P}})^2=\boxed{\text{QR}} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

の周上にある。

(2)　点 (x, y) $(x \neq 0)$ が ① の円周上を動くとき $\dfrac{y+1}{x}=m$ とすれば，m のとりうる値の範囲は

$$m \leqq -\frac{\boxed{\text{ST}}}{\boxed{\text{U}}} \quad \text{または} \quad \boxed{\text{V}} \leqq m$$

である。

III の問題はこれで終わりです。III の解答欄 $\boxed{\text{W}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ は空欄にしてください。

$\boxed{\text{IV}}$

問 1　$f(x) = x(x-1)^{\frac{3}{2}}$，$g(x) = \dfrac{5+\log x}{1+\log x}$ に対して，$h(x) = f(g(x))$ とする。このとき

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x-1)^{\frac{\boxed{\text{A}}}{\boxed{\text{B}}}}\left(\boxed{\quad\text{C}\quad}x - \boxed{\quad\text{D}\quad}\right)$$

$$g'(x) = -\frac{\boxed{\quad\text{E}\quad}}{x(1+\log x)^{\boxed{\text{F}}}}$$

$$h'(x) = -\frac{4\left(\boxed{\text{GH}} + \boxed{\quad\text{I}\quad}\log x\right)}{x(1+\log x)^{\frac{\boxed{\text{J}}}{\boxed{\text{K}}}}}$$

である。ただし，対数は自然対数とする。

注）自然対数：natural logarithm

問 2　a は定数とする。

(1)　$\displaystyle\int (x-a)\sin x\,dx = \boxed{\text{L}}$ である。

$\boxed{\text{L}}$ には次の ⓪ ～ ③ のうちから適する式を一つ選べ。ただし，C は積分定数とする。

⓪　$(x-a)\cos x + \sin x + C$　　①　$(a-x)\cos x + \sin x + C$

②　$(x-a)\cos x - \sin x + C$　　③　$(a-x)\cos x - \sin x + C$

(2)　$f(a) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |x-a|\sin x\,dx$ とすると

$$a \leqq \boxed{\text{M}} \quad \text{のとき} \quad f(a) = \boxed{\text{NO}}\,a + \boxed{\text{P}},$$

$$\boxed{\text{M}} < a \leqq \frac{\pi}{\boxed{\text{Q}}} \quad \text{のとき} \quad f(a) = a + \boxed{\text{R}} - \boxed{\text{S}}\sin a,$$

$$\frac{\pi}{\boxed{\text{Q}}} < a \quad \text{のとき} \quad f(a) = a - \boxed{\text{T}}$$

である。

$f(a)$ を a の関数とみると，$f(a)$ は $a = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{U}}}$ で最小値

$$\frac{\pi}{\boxed{\text{V}}} - \sqrt{\boxed{\text{W}}} + \boxed{\text{X}}$$

をとる。

注）積分定数：integration constant

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\text{Y}}$，$\boxed{\text{Z}}$ は空欄にしてください。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。

解答用紙には $\boxed{\text{V}}$ がありますが，$\boxed{\text{V}}$ の問題はありませんので，空欄にしてください。

この問題用紙を持ち帰ることはできません。