平成21年度

日本留学試験（第2回）

試 験 問 題

数学 コース 2

(上級コース)

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の左上にある「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

＜ 解答用紙記入例 ＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

I

問 1　$6-\sqrt{5}$ の整数部分を a，小数部分を b とする。このとき

$$a = \boxed{\mathsf{A}}, \qquad b + \frac{4}{b} = \boxed{\mathsf{B}}$$

である。

また

$$b^3 + \left(\frac{4}{b}\right)^3 = \left(b + \frac{4}{b}\right)^{\boxed{\mathsf{C}}} - \boxed{\mathsf{DE}}\left(b + \frac{4}{b}\right)$$

であるから

$$4a^3 - \left\{b^3 + \left(\frac{4}{b}\right)^3\right\} = \boxed{\mathsf{FGH}}$$

を得る。

- 計算欄 (memo) -

問 2　$a>0$ とし，x の 2 次関数

$$y = 3ax^2 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を考える。

(1)　① のグラフを x 軸方向に $2a$，y 軸方向に $12a$ だけ平行移動すると，そのグラフを表す 2 次関数は

$$y = 3a(x - \boxed{\text{I}}\,a)^2 + \boxed{\text{JK}}\,a$$

である。さらに，このグラフと直線 $y = 12a$ に関して対称なグラフを表す 2 次関数は

$$y = \boxed{\text{LM}}\,a(x^2 - \boxed{\text{N}}\,ax + \boxed{\text{O}}\,a^2 - \boxed{\text{P}}) \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

となる。① と ② のグラフが異なる 2 点で交わるとき，a のとりうる値の範囲は

$$0 < a < \sqrt{\boxed{\text{Q}}}$$

である。

(2)　(1) において，a が整数の場合を考える。このとき，① と ② のグラフの交点の x 座標は $\boxed{\text{R}}$ と $\boxed{\text{S}}$ である。ただし，$\boxed{\text{R}} < \boxed{\text{S}}$ とする。さらに，直線 $x = k$ $\left(\boxed{\text{R}} < k < \boxed{\text{S}}\right)$ と ①, ② のグラフの交点をそれぞれ P, Q とする。線分 PQ の長さを k の式で表すと

$$\text{PQ} = -\boxed{\text{T}}\,k^2 + \boxed{\text{UV}}\,k$$

となるから，$k = \boxed{\text{W}}$ のとき，PQ の値は最も大きくなる。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\mathrm{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\mathrm{I}}$ の解答欄 $\boxed{\ \mathsf{X}\ }$ ～ $\boxed{\ \mathsf{Z}\ }$ は空欄のままにしてください。

II

等差数列 $\{a_n\}$ と等比数列 $\{b_n\}$ は，どちらも初項が c，すなわち，$a_1 = c$，$b_1 = c$ であって，$\{a_n\}$ の公差と $\{b_n\}$ の公比は同じ正の数 d であるとする。

(1)　$a_5 = b_3$ かつ $a_7 = b_5$ が成り立つとき，c と d の値を求めよう。

上の条件式を順に c, d を用いて表すと

$$c + \boxed{\text{A}}\,d = cd^{\boxed{\text{B}}}, \qquad c + \boxed{\text{C}}\,d = cd^{\boxed{\text{D}}}$$

となる。この 2 式から c を消去すると，$d = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{E}}}}{\boxed{\text{F}}}$ が得られ，これより

$$c = \boxed{\text{GH}}\sqrt{\boxed{\text{I}}}$$

も得られる。

(2)　c と d が (1) で求めた値のとき，$\{b_n\}$ の初項から第 $2m$ 項までのうち，有理数となる項の和は

$$\boxed{\text{J}}\left\{\left(\frac{\boxed{\text{K}}}{\boxed{\text{L}}}\right)^m - \boxed{\text{M}}\right\}$$

である。

注）等差数列：arithmetic progression，等比数列：geometric progression，

公差：common difference，公比：common ratio

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\text{N}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ は空欄のままにしてください。

III

c は実数とする。不等式

$$x^2+y^2+4x-8y+c<0 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

と連立不等式

$$\begin{cases} x-y+8>0 \\ 4x+3y-24<0 \\ y>0 \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

を考える。不等式 ① が解をもつとき，①, ② が表す領域を参考にして，次の各問に答えなさい。

(1) 不等式 ① が表す領域の境界は中心が $(\boxed{\mathsf{AB}}, \boxed{\mathsf{C}})$ であり，半径が $\sqrt{\boxed{\mathsf{DE}}-c}$ の円である。

(2) 次の 2 つの条件 p, q を考える。

p : x と y は不等式 ① を満たす

q : x と y は連立不等式 ② を満たす

このとき，p が q の十分条件となるような c の値の範囲は

$$\boxed{\mathsf{FG}} \leqq c < \boxed{\mathsf{HI}}$$

である。

また，p が q の必要条件となるような c の値の範囲は

$$c \leqq \boxed{\mathsf{JKL}}$$

である。

注） 領域 : region , 境界 : boundary

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\text{M}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ は空欄のままにしてください。

IV

問 1　関数 $f(x)$ は

$$x \leqq 3 \text{ のとき} \qquad f(x) = x + 1$$

$$x > 3 \text{ のとき} \qquad f(x) = -2x + 10$$

で与えられている。このとき，$x \geqq 0$ に対して，関数 $g(x)$ が

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

で定められている。

(1)　$0 \leqq x \leqq 3$ のとき

$$g(x) = \frac{\boxed{\text{A}}}{\boxed{\text{B}}} x^{\boxed{\text{C}}} + x$$

であり，$x > 3$ のとき

$$g(x) = -x^2 + \boxed{\text{DE}}\,x - \frac{\boxed{\text{FG}}}{\boxed{\text{H}}}$$

である。

(2)　曲線 $y = g(x)$ を C とする。C 上の点 $\mathrm{P}\bigl(a,\, g(a)\bigr)$（ただし，$a > 3$ ）における C の接線が点 $\left(0,\, \dfrac{5}{2}\right)$ を通るとき，その傾きは $\boxed{\text{I}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　関係式

$$f(x) = 3x + 3\int_0^x f(t)\,dt + 4\int_0^1 f(t)\,dt \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を満たす微分可能な関数 $f(x)$ を求めよう。

まず

$$f(0) = \boxed{\mathsf{J}}\int_0^1 f(t)\,dt \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

である。

次に，① の両辺を x で微分すると

$$f'(x) = \boxed{\mathsf{K}}\left(\boxed{\mathsf{L}} + f(x)\right)$$

を得る。これより

$$\frac{\left(\boxed{\mathsf{L}} + f(x)\right)'}{\boxed{\mathsf{L}} + f(x)} = \boxed{\mathsf{K}} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ③$$

ここで，③ の両辺を x で積分して変形すると

$$f(x) = Ce^{\boxed{\mathsf{M}}x} - \boxed{\mathsf{N}} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ④$$

となる。ただし，C は定数である。

よって，② より，④ の C の値を求めると

$$C = \frac{\boxed{\mathsf{O}}}{\boxed{\mathsf{P}}e^{\boxed{\mathsf{Q}}} - \boxed{\mathsf{R}}}$$

となり，$f(x)$ が求まる。

注）　微分可能な：differentiable

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\quad \mathsf{S} \quad}$ ～ $\boxed{\quad \mathsf{Z} \quad}$ は空欄のままにしてください。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。

解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ は空欄のままにしてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。