平成19年度

日本留学試験（第1回）

試 験 問 題

数学 コース 2

(上級コース)

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコース一つだけを選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の左上にある「解答コース」の「コース2」を○で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。選択したコースが正しくマークされていないと，採点されません。

< 解答用紙記入例 >

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

I

問 1　2次関数 $f(x)=x^2-ax+a^2$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最小値 m を求めよう。

$f(x)$ は

$$f(x)=\left(x-\frac{a}{\boxed{\mathsf{A}}}\right)^2+\frac{\boxed{\mathsf{B}}}{\boxed{\mathsf{C}}}a^{\boxed{\mathsf{D}}}$$

と変形できる。したがって，$f(x)$ は

$a \leqq \boxed{\mathsf{E}}$ のとき，$x=\boxed{\mathsf{F}}$ で最小となり，$m=a^{\boxed{\mathsf{G}}}$

$\boxed{\mathsf{E}} < a < \boxed{\mathsf{H}}$ のとき，$x=\dfrac{a}{\boxed{\mathsf{I}}}$ で最小となり，$m=\dfrac{\boxed{\mathsf{J}}}{\boxed{\mathsf{K}}}a^{\boxed{\mathsf{L}}}$

$\boxed{\mathsf{H}} \leqq a$ のとき，$x=\boxed{\mathsf{M}}$ で最小となり，$m=\boxed{\mathsf{N}}-a+a^{\boxed{\mathsf{O}}}$

となる。

問 2　数直線上の集合 A, B を

$$A=\{x \mid |x-1| \geqq 9\},\quad B=\{x \mid a+3 \leqq x \leqq 2a\}$$

とする。ただし，$B \neq \phi$ とする。

(1)　$A=\{x \mid x \leqq \boxed{\mathrm{PQ}}$ または $\boxed{\mathrm{RS}} \leqq x\}$ である。

(2)　$B \neq \phi$ であるから，a のとり得る値の範囲は

$$a \geqq \boxed{\mathrm{T}}$$

である。

(3)　集合 A, B に対して

実数 x が「A に属する」ことは「B に属する」ための必要条件である

とする。このとき，a のとり得る値の範囲は

$$a \geqq \boxed{\mathrm{U}}$$

である。

$\boxed{\mathrm{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\mathrm{I}}$ の解答欄 $\boxed{\mathrm{V}}$ ～ $\boxed{\mathrm{Z}}$ には何も書かないでください。

II

問 1　$\boxed{\mathsf{A}}$ ～ $\boxed{\mathsf{J}}$ には，下の ⓪ ～ ⑨ のうちから最も適するものを一つずつ選びなさい。

(1)　a, b, c が実数のとき

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ \boxed{\mathsf{A}}\ 0$$

であるから

$$ab+bc+ca \ \boxed{\mathsf{B}}\ a^2+b^2+c^2$$

が成り立つ。

(2)　a, b, c が実数で，$c>0$ とする。さらに

$$a+b>c,\quad b+c>a,\quad c+a>b \qquad \cdots\cdots\cdots \text{①}$$

であるとき，$a^2+b^2+c^2$ と $2(ab+bc+ca)$ の大小を比べよう。

$P=a^2+b^2+c^2-2(ab+bc+ca)$ とおくと

$$P=(a-b)^2-c^2+\boxed{\mathsf{C}}(c^2-bc-ca)$$

となる。次に，$Q=(a-b)^2-c^2$，$R=c^2-bc-ca$ とおくと

$$Q=(\boxed{\mathsf{D}}+c)(\boxed{\mathsf{E}}-c),\quad R=-c(\boxed{\mathsf{F}}-c)$$

となる。ここで，① を用いれば

$$Q\ \boxed{\mathsf{G}}\ 0,\quad R\ \boxed{\mathsf{H}}\ 0$$

であるから

$$P\ \boxed{\mathsf{I}}\ 0$$

である。よって

$$a^2+b^2+c^2\ \boxed{\mathsf{J}}\ 2(ab+bc+ca)$$

を得る。

⓪ 0　① $a+b$　② 2　③ $a-b$　④ 4
⑤ $-(a+b)$　⑥ $\leqq$　⑦ $\geqq$　⑧ $<$　⑨ $>$

問 2　数列 $\{a_n\}$ は次の条件を満たしている。

$$a_n > 0,\quad 4\sqrt{S_n} = a_n + 4 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

ただし，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ とする。

(1)　$a_1 = \boxed{\text{K}}$ である。

(2)　a_n と a_{n+1} は

$$\boxed{\text{LM}}\, a_{n+1} = (a_{n+1} + \boxed{\text{N}})^2 - (a_n + \boxed{\text{O}})^2$$

を満たすから

$$a_{n+1} - a_n = \boxed{\text{P}}$$

である。

(3)　$a_n = 68$ ならば，$n = \boxed{\text{Q}}$ である。

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\text{R}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ には何も書かないでください。

III

問 1　平面上に三角形 OAB があり

$$\angle \mathrm{AOB} = 90^\circ,\quad \mathrm{OA} = 8,\quad \mathrm{OB} = 6$$

である。この平面上の点 P に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2y\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする。

(1)　P が三角形 OAB の重心であれば

$$x = \frac{\boxed{\mathsf{A}}}{\boxed{\mathsf{B}}},\quad y = \frac{\boxed{\mathsf{C}}}{\boxed{\mathsf{D}}}$$

である。

(2)　$\angle$AOB の二等分線と辺 AB との交点を C とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{\boxed{\mathsf{E}}}{\boxed{\mathsf{F}}}\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{\boxed{\mathsf{G}}}{\boxed{\mathsf{H}}}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

となるから，P が $\angle$AOB の二等分線上の点であれば

$$y = \frac{\boxed{\mathsf{I}}}{\boxed{\mathsf{J}}}\,x$$

である。

(3)　P が O を通り辺 AB に垂直な直線上の点であれば

$$y = \frac{\boxed{\mathsf{K}}}{\boxed{\mathsf{L}}}\,x$$

である。

注）重心：center of gravity，$\angle$AOB の二等分線：bisector of $\angle$AOB

問 2　x, y が $x \geqq 1$, $y \geqq 1$ であり

$$\log_2 x + \log_2 y = (\log_2 x)^2 + (\log_2 y)^2 \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を満たしている。このとき，$\log_2 x = X$, $\log_2 y = Y$ とおくと

$$X \geqq \boxed{\text{M}}, \quad Y \geqq \boxed{\text{N}}$$

であり，等式 ① は

$$\left(X - \frac{\boxed{\text{O}}}{\boxed{\text{P}}}\right)^2 + \left(Y - \frac{\boxed{\text{Q}}}{\boxed{\text{R}}}\right)^2 = \frac{\boxed{\text{S}}}{\boxed{\text{T}}}$$

と変形される。したがって，xy のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{U}} \leqq xy \leqq \boxed{\text{V}} \quad \text{および} \quad xy = \boxed{\text{W}}$$

である。

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\text{X}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ には何も書かないでください。

IV

問 1　$f(x) = \sin x \cos^3 x$，$g(x) = \sqrt{4-x}$

とする。

(1)　$f'(x) = \cos^4 x - \boxed{\text{A}} \sin^{\boxed{\text{B}}} x \cos^2 x$

$$g'(x) = \frac{\boxed{\text{CD}}}{\boxed{\text{E}}\sqrt{4-x}}$$

である。

(2)　曲線 $y = g(x)$ の接線のうち，曲線 $y = f(x)$ の点 $\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ における接線と同じ傾きをもつものを ℓ とする。このとき，$y = g(x)$ と ℓ の接点の座標は $\left(\boxed{\text{F}}, \boxed{\text{G}}\right)$ であり，ℓ の方程式は

$$y = \frac{\boxed{\text{HI}}}{\boxed{\text{J}}}x + \frac{\boxed{\text{K}}}{\boxed{\text{L}}}$$

である。

問 2　a を実数とする。定積分

$$\int_0^1 (e^x - ax)^2\, dx$$

を最小にする a の値とその定積分の最小値を求めよう。ただし，e は自然対数の底である。

不定積分 $\int (e^x - ax)^2\, dx$ を求めると

$$\int (e^x - ax)^2\, dx = \frac{1}{\boxed{\text{M}}} e^{2x} - \boxed{\text{N}}\, a(x-1)e^x + \frac{1}{\boxed{\text{O}}} a^2 x^{\boxed{\text{P}}} + C \quad \left(C \text{ は積分定数} \right)$$

であるから

$$\int_0^1 (e^x - ax)^2\, dx = \frac{1}{\boxed{\text{Q}}} a^2 - \boxed{\text{R}}\, a + \frac{1}{\boxed{\text{S}}} e^2 - \frac{1}{\boxed{\text{T}}}$$

を得る。したがって，$a = \boxed{\text{U}}$ のとき，この定積分は最小になり，その最小値は

$$\frac{\boxed{\text{V}}}{\boxed{\text{W}}} e^2 - \frac{\boxed{\text{X}}}{\boxed{\text{Y}}}$$

である。

注） 積分定数：constant of integration，自然対数の底：the base of the natural logarithm

- 計算欄 (memo) -

IV の問題はこれで終わりです。IV の解答欄 Z には何も書かないでください。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。

解答用紙の V の欄には何も書かないでください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。