平成30年度（2018年度）日本留学試験

数　学（８０分）

【コース１(基本, Basic)・コース２(上級, Advanced)】

※　どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。

Ⅰ　試験全体に関する注意

1．係員の許可なしに，部屋の外に出ることはできません。
2．この問題冊子を持ち帰ることはできません。

Ⅱ　問題冊子に関する注意

1．試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見ないでください。
2．試験開始の合図があったら，下の欄に，受験番号と名前を，受験票と同じように記入してください。
3．コース１は１～14ページ，コース２は15～27ページにあります。
4．足りないページがあったら，手をあげて知らせてください。
5．メモや計算などを書く場合は，問題冊子に書いてください。

Ⅲ　解答方法に関する注意

1．解答は，解答用紙に鉛筆(ＨＢ)で記入してください。
2．問題文中の**A**，**B**，**C**，…には，それぞれ－(マイナスの符号)，または，０から９までの数が一つずつ入ります。あてはまるものを選び，解答用紙(マークシート)の対応する解答欄にマークしてください。
3．同一の問題文中に $\boxed{\mathrm{A}}$，$\boxed{\mathrm{BC}}$ などが繰り返し現れる場合，２度目以降は，$\boxed{\mathrm{A}}$，$\boxed{\mathrm{BC}}$ のように表しています。

解答に関する記入上の注意

(1)　根号（$\sqrt{\ }$）の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。
　(例：$\sqrt{32}$ のときは，$2\sqrt{8}$ ではなく $4\sqrt{2}$ と答えます。)

(2)　分数を答えるときは，符号は分子につけ，既約分数(reduced fraction)にして答えてください。
　(例：$\frac{2}{6}$ は $\frac{1}{3}$，$-\frac{2}{\sqrt{6}}$ は $\frac{-2\sqrt{6}}{6}$ と分母を有理化してから約分し，$\frac{-\sqrt{6}}{3}$ と答えます。)

(3)　$\dfrac{\boxed{\mathrm{A}}\sqrt{\boxed{\mathrm{B}}}}{\boxed{\mathrm{C}}}$ に $\dfrac{-\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は，下のようにマークしてください。

(4)　$\boxed{\mathrm{DE}}\,x$ に $-x$ と答える場合は，**D**を－，**E**を１とし，下のようにマークしてください。

【解答用紙】

A	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
B	⊖	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
C	⊖	⓪	①	②	③	●	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
D	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
E	⊖	⓪	●	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

4．解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※　試験開始の合図があったら，必ず受験番号と名前を記入してください。

受験番号			*					*						
名　前														

数学 コース 2
（上級コース）

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

＜ 解答用紙記入例 ＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

I

問 1　2 次関数

$$f(x) = x^2 - 2(a+1)x + 2a^2$$

の $0 \leqq x \leqq 2$ における最大値 M と最小値 m について考える。ただし，a は $0 \leqq a \leqq 3$ を満たす定数とする。

(1)　$y = f(x)$ のグラフの頂点の座標は

$$\left(a + \boxed{\text{A}},\ a^2 - \boxed{\text{B}}\,a - \boxed{\text{C}}\right)$$

である。

(2)　次の文中の $\boxed{\text{D}}$ ～ $\boxed{\text{H}}$ には，下の選択肢 ⓪ ～ ⑨ の中から適するものを選びなさい。

最大値 M，最小値 m を軸の位置に応じて求めると

$0 \leqq a < \boxed{\text{D}}$ のとき

$$M = \boxed{\text{E}},\quad m = \boxed{\text{F}}$$

$\boxed{\text{D}} \leqq a \leqq 3$ のとき

$$M = \boxed{\text{G}},\quad m = \boxed{\text{H}}$$

である。

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3
④ $a^2 - 2a$	⑤ $a^2 - 2a - 1$	⑥ $2a^2$	
⑦ $2a^2 - 2a - 1$	⑧ $2a^2 - 4a$	⑨ $2a^2 - 6a + 3$	

(3)　m が最大となるのは $a = \boxed{\text{I}}$ のときであり，このときの m の値は $\boxed{\text{J}}$ である。また，m が最小となるのは $a = \boxed{\text{K}}$ のときであり，このときの m の値は $\boxed{\text{LM}}$ である。

問 2　1 個のさいころを 3 回投げて，1 回目，2 回目，3 回目に出る目の数をそれぞれ a, b, c とする。この a, b, c を用いて，2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ を考える。

(1)　$b = 4$ かつ 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつ確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{N}}}{\boxed{\mathsf{OPQ}}}$ である。

(2)　$f(10) > 453$ となる確率を求めよう。

$f(10) > 453$ となる (a, b, c) の場合の数を求めると，次のようになる。

$a = 4$ かつ $b = 5$ のとき，$\boxed{\mathsf{R}}$ 通り

$a = 4$ かつ $b = 6$ のとき，$\boxed{\mathsf{S}}$ 通り

$a = 5$ のとき，$\boxed{\mathsf{TU}}$ 通り

$a = 6$ のとき，$\boxed{\mathsf{VW}}$ 通り

よって，求める確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{X}}}{\boxed{\mathsf{Y}}}$ である。

注）さいころ：dice

II

問 1　数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = \frac{2}{9},\quad a_n = \frac{(n+1)(2n-3)}{3n(2n+1)}a_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

で与えられている。このとき，一般項 a_n と無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和を求めよう。

(1)　次の文中の $\boxed{\mathsf{A}}$ ～ $\boxed{\mathsf{E}}$ には，下の選択肢 ⓪ ～ ⑨ の中から適するものを選びなさい。

まず，$b_n = \dfrac{n+1}{3^n a_n}$ とおき，$\dfrac{b_n}{b_{n-1}}$ を n の式で表すと

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{\boxed{\mathsf{A}}}{\boxed{\mathsf{B}}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{\boxed{\mathsf{C}}}{\boxed{\mathsf{D}}}$$

となる。この式より

$$a_n = \frac{n+1}{3^n(\boxed{\mathsf{E}})(2n+1)}$$

である。

⓪ $n-1$　① n　② $n+1$　③ $2n-1$　④ $2n+1$

⑤ $2n-3$　⑥ $2n+3$　⑦ $3n-1$　⑧ $3n$　⑨ $3n+1$

(2)　次に，$c_n = \dfrac{1}{3^n(2n+1)}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ とおく。このとき，$a_n = Ac_{n-1} + Bc_n$ とおくと，$A = \dfrac{\boxed{\mathsf{F}}}{\boxed{\mathsf{G}}}$，$B = \dfrac{\boxed{\mathsf{HI}}}{\boxed{\mathsf{J}}}$ である。この式を用いて，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めると

$$S_n = \frac{\boxed{\mathsf{K}}}{\boxed{\mathsf{L}}}(\boxed{\mathsf{M}} - c_n)$$

となる。したがって

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\boxed{\mathsf{N}}}{\boxed{\mathsf{O}}}$$

を得る。

問 2　x 軸上の点 $(5, 0)$ を中心とする半径 4 の円 C を考える。

(1)　円 C 上に点 $\mathrm{P}(p, q)$ をとると

$$p^2 - \boxed{\mathbf{PQ}}\,p + q^2 + \boxed{\mathbf{R}} = 0$$

が成り立つ。また，点 $\mathrm{P}(p, q)$ における円 C の接線の方程式は

$$(p - \boxed{\mathbf{S}})x + qy = \boxed{\mathbf{T}}\,p - \boxed{\mathbf{U}}$$

である。

(2)　$a \geqq 0$ とし，y 軸上の点 $\mathrm{A}(0, a)$ から円 C に接線を引き，その接点を $\mathrm{P}(p, q)$ とおく。

線分 AP の長さが最小となるのは，$a = \boxed{\mathbf{V}}$ のときであり，その長さは $\boxed{\mathbf{W}}$ である。

また，点 A から円 C に引いた 2 本の接線が直交するのは，線分 AP の長さが $\boxed{\mathbf{X}}$ のときであり，このときの a の値は $a = \sqrt{\boxed{\mathbf{Y}}}$ である。

III

x の関数

$$f(x) = x^3 - 3ax^2 - 3(2a+1)x + a + 2$$

について，次の問いに答えなさい。

(1)　次の文中の $\boxed{\text{G}}$ ～ $\boxed{\text{K}}$ には，下の選択肢 ⓪ ～ ⑤ の中から適するものを選びなさい。また，他の $\boxed{}$ には，適する数を入れなさい。

$f(x)$ の導関数は

$$f'(x) = \boxed{\text{A}}\left(x - \boxed{\text{B}}\,a - \boxed{\text{C}}\right)\left(x + \boxed{\text{D}}\right)$$

であるから

(i)　$a > \boxed{\text{EF}}$ のとき，$f(x)$ は $x = -\boxed{\text{D}}$ で $\boxed{\text{G}}$ となり，

$x = \boxed{\text{B}}\,a + \boxed{\text{C}}$ で $\boxed{\text{H}}$ となる。

(ii)　$a = \boxed{\text{EF}}$ のとき，$f(x)$ はつねに $\boxed{\text{I}}$ となる。

(iii)　$a < \boxed{\text{EF}}$ のとき，$f(x)$ は $x = -\boxed{\text{D}}$ で $\boxed{\text{J}}$ となり，

$x = \boxed{\text{B}}\,a + \boxed{\text{C}}$ で $\boxed{\text{K}}$ となる。

⓪ 極大　　① 極小　　② 増加　　③ 減少

④ 最大　　⑤ 最小

（III は次ページに続く）

注）導関数：derivative

(2)　$-1 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最小値 m を a を用いて表そう。

(i)　$a \geqq \boxed{\text{L}}$ のとき，$m = \boxed{\text{MN}}\,a$ である。

(ii)　$\boxed{\text{OP}} \leqq a < \boxed{\text{L}}$ のとき，$m = \boxed{\text{QR}}\left(a^3 + \boxed{\text{S}}\,a^2 + \boxed{\text{T}}\,a\right)$ である。

(iii)　$a < \boxed{\text{OP}}$ のとき，$m = \boxed{\text{U}}\,a + \boxed{\text{V}}$ である。

(3)　(2) の m の値が最も大きくなるのは $a = \dfrac{-\boxed{\text{W}} + \sqrt{\boxed{\text{X}}}}{\boxed{\text{Y}}}$ のときである。

III の問題はこれで終わりです。III の解答欄 $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

IV

2つの関数

$$y = x\log ax \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

$$y = 2x - 3 \quad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

を考える。ただし，$a > 0$ とする。また，log は自然対数を表す。

(1)　① のグラフが ② のグラフに接するような a を求めよう。

点 $(t, t\log at)$ における ① のグラフの接線の方程式は $\boxed{\text{A}}$ である。ただし，$\boxed{\text{A}}$ には，次の選択肢 ⓪ ～ ③ の中から適するものを選びなさい。

⓪　$y = (\log at + 1)x - t$　　①　$y = (\log at + a)x - t$

②　$y = (a\log t + 1)x + t$　　③　$y = (a\log t + a)x + t$

したがって，① のグラフが ② のグラフに接するのは $a = \dfrac{e}{\boxed{\text{B}}}$ のときで，その接点の座標は $(\boxed{\text{C}}, \boxed{\text{D}})$ である。

(2)　$a = \dfrac{e}{\boxed{\text{B}}}$ のとき，関数 ① は $x = \boxed{\text{E}}\,e^{-\boxed{\text{F}}}$ で最小値 $-\boxed{\text{G}}\,e^{-\boxed{\text{H}}}$ をとる。

（IV は次ページに続く）

注）自然対数：natural logarithm

(3)　$a = \dfrac{e}{\boxed{\mathrm{B}}}$ のとき，① のグラフと ② のグラフおよび x 軸で囲まれる部分の面積 S を求めよう。

次の不定積分を求めると

$$\int x \log ax \, dx = \boxed{\quad \mathrm{I} \quad} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

である。ただし，$\boxed{\quad \mathrm{I} \quad}$ には，次の選択肢 ⓪ ～ ③ の中から適するものを選びなさい。

⓪ $\dfrac{1}{2}x^2 \log ax - \dfrac{1}{2}x^2$　　① $2x^2 \log ax - 2x^2$

② $\dfrac{1}{2}x^2 \log ax - \dfrac{1}{4}x^2$　　③ $2x^2 \log ax - 4x^2$

したがって

$$S = \frac{\boxed{\mathrm{J}}}{\boxed{\mathrm{K}}} e^{-\boxed{\mathrm{L}}}$$

である。

注）不定積分：indefinite integral

$\boxed{\mathrm{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\mathrm{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\mathrm{M}}$ ～ $\boxed{\mathrm{Z}}$ はマークしないでください。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\mathrm{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 2」が正しくマークしてあるか，もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。

〈数　学〉Mathematic

コース1　Course1

問Q.		解答番号 row	正解 A.
Ⅰ	問1	ABC	121
		D	1
		E	6
		F	5
		G	6
		H	8
		I	3
		J	6
		K	1
		LM	−2
	問2	NOPQ	5216
		R	3
		S	6
		TU	36
		VW	36
		XY	38
Ⅱ	問1	AB	23
		CD	23
		E	4
		F	1
		GH	14
		IJ	−5
		KL	−1
		M	3
	問2	N	2
		O	1
		P	0
		QR	43
		ST	13
		UV	23
		W	4
Ⅲ		ABCDE	23527
		FG	48
		H	3
		I	7
		JKL	200
		MNOPQ	28417
		R	2
		ST	57
Ⅳ		ABC	423
		DEF	423
		GH	31
		IJ	31
		KLMN	2313
		OPQR	2312
		STU	312
		VW	26
		XYZ	518

コース2　Course2

問Q.		解答番号 row	正解 A.
Ⅰ	問1	ABC	121
		D	1
		E	6
		F	5
		G	6
		H	8
		I	3
		J	6
		K	1
		LM	−2
	問2	NOPQ	5216
		R	3
		S	6
		TU	36
		VW	36
		XY	38
Ⅱ	問1	AB	28
		CD	45
		E	3
		FG	14
		HIJ	−14
		KLM	141
		NO	14
	問2	PQR	109
		STU	559
		V	0
		W	3
		X	4
		Y	7
Ⅲ		ABCD	3211
		EF	−1
		G	0
		H	1
		I	2
		J	1
		K	0
		L	0
		MN	−8
		OP	−1
		QRST	−432
		UV	44
		WXY	333
Ⅳ		A	0
		B	3
		CD	33
		EF	32
		GH	32
		I	2
		JKL	942