平成20年度

日本留学試験（第2回）

試験問題

数学 コース 2
(上級コース)

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の左上にある「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

＜解答用紙記入例＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

I

問 1　次の 2 つの条件を満たす 2 次関数を求めよう:

(i)　$x = 1$ と $x = 5$ で同じ値をとる。

(ii)　$-2 \leqq x \leqq 6$ における最大値は 30 であり，最小値は -20 である。

求める 2 次関数を

$$y = ax^2 + bx + c$$

とおくと，条件 (i) より

$$b = -\boxed{\mathsf{A}}\,a$$

を得る。さらに，この 2 次関数は条件 (ii) を満たすから

$$\begin{cases} -\boxed{\mathsf{B}}\,a + c = -20 \\ \boxed{\mathsf{CD}}\,a + c = 30 \end{cases}$$

または

$$\begin{cases} -\boxed{\mathsf{B}}\,a + c = 30 \\ \boxed{\mathsf{CD}}\,a + c = -20 \end{cases}$$

を得る。したがって，求める 2 次関数は

$$y = \boxed{\mathsf{E}}\,x^2 - \boxed{\mathsf{FG}}\,x - \boxed{\mathsf{H}}$$

と

$$y = -\boxed{\mathsf{I}}\,x^2 + \boxed{\mathsf{JK}}\,x + \boxed{\mathsf{LM}}$$

である。

問 2　$P = 6ab + 9a - 4b - 6$　とする。

(1)　P は

$$P = (\boxed{\text{N}}a - \boxed{\text{O}})(\boxed{\text{P}}b + \boxed{\text{Q}})$$

と因数分解できる。

(2)　$a = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$P = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ のとき，$b = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{R}}} - \boxed{\text{S}}}{\boxed{\text{T}}}$ である。

(3)　$P = 17$ を満たす整数 a, b の組は

$$(a, b) = (\boxed{\text{U}}, \boxed{\text{V}}),\quad (a, b) = (\boxed{\text{WX}}, \boxed{\text{YZ}})$$

の 2 組である。

注）因数分解する：factorize

$\boxed{\text{I}}$ の問題はこれで終わりです。

II

等比数列 $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ は，初項から第 10 項までの和が 93 であり

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_8 + a_9 - a_{10} = 31$$

を満たす。このとき

(1) $\{a_n\}$ の公比は $\dfrac{\boxed{\mathsf{A}}}{\boxed{\mathsf{B}}}$，初項は $\dfrac{\boxed{\mathsf{CDE}}}{\boxed{\mathsf{FG}}}$ である。

(2) また

$$1 - \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_1}{a_3} - \frac{a_1}{a_4} + \frac{a_1}{a_5} - \frac{a_1}{a_6} + \frac{a_1}{a_7} - \frac{a_1}{a_8} + \frac{a_1}{a_9} - \frac{a_1}{a_{10}} = -\boxed{\mathsf{HIJ}}$$

である。

注） 等比数列：geometric progression， 公比：common ratio

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\mathsf{K}}$ ～ $\boxed{\mathsf{Z}}$ は空欄のままにしてください。

III

正の実数 a に対して，x の方程式

$$2^{x^2+6} = a^{2x-5} \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

の解の個数を調べよう。

① は

$$x^2 - \boxed{\text{A}}(\log_2 a)x + \boxed{\text{B}}\log_2 a + \boxed{\text{C}} = 0$$

と変形できる。この 2 次方程式の判別式を D とおくと

$$\frac{D}{4} = (\log_2 a + \boxed{\text{D}})(\log_2 a - \boxed{\text{E}})$$

となる。したがって

$\dfrac{\boxed{\text{F}}}{\boxed{\text{G}}} < a < \boxed{\text{HI}}$ のとき，解は $\boxed{\text{J}}$ 個

$a = \dfrac{\boxed{\text{F}}}{\boxed{\text{G}}}$, $\boxed{\text{HI}}$ のとき，解は $\boxed{\text{K}}$ 個

$a < \dfrac{\boxed{\text{F}}}{\boxed{\text{G}}}$, $\boxed{\text{HI}} < a$ のとき，解は $\boxed{\text{L}}$ 個

である。

また

$a = \dfrac{\boxed{\text{F}}}{\boxed{\text{G}}}$ のとき，① の解は $\boxed{\text{MN}}$

であり

$a = \boxed{\text{HI}}$ のとき，① の解は $\boxed{\text{O}}$

である。

注） 判別式：discriminant

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\text{P}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ は空欄のままにしてください。

IV

問 1　関数 $f(x)$ の導関数は x^2+x-1 である。さらに，$y=f(x)$ のグラフが直線 $y=x+1$ と接しているとき，$f(x)$ を求めよう。

まず，$y=f(x)$ と $y=x+1$ の接点の座標を求めよう。接線の傾きが $\boxed{\mathrm{A}}$ であるから

$$x^2+x-\boxed{\mathrm{B}}=0$$

を解くと，接点の x 座標 $\boxed{\mathrm{CD}}$，$\boxed{\mathrm{E}}$ が求まる。よって，接点の座標は

$$(\boxed{\mathrm{CD}},\ \boxed{\mathrm{FG}})\quad \text{または}\quad (\boxed{\mathrm{E}},\ \boxed{\mathrm{H}})$$

となる。

したがって，求める $f(x)$ は

$$y=f(x)=\frac{1}{\boxed{\mathrm{I}}}x^3+\frac{1}{\boxed{\mathrm{J}}}x^2-x-\frac{\boxed{\mathrm{K}}}{\boxed{\mathrm{L}}}\qquad\cdots\cdots\cdots\ \text{①}$$

または

$$y=f(x)=\frac{1}{\boxed{\mathrm{I}}}x^3+\frac{1}{\boxed{\mathrm{J}}}x^2-x+\frac{\boxed{\mathrm{MN}}}{\boxed{\mathrm{O}}}\qquad\cdots\cdots\cdots\ \text{②}$$

である。

さらに，① のグラフは ② のグラフを y 軸方向に平行移動したものであるから，①，② のグラフと 2 つの直線 $x=\boxed{\mathrm{CD}}$，$x=\boxed{\mathrm{E}}$ によって囲まれる部分の面積は $\dfrac{\boxed{\mathrm{PQ}}}{2}$ である。

注）導関数：derivative

- 計算欄 (memo) -

問 2　関数

$$f(x) = |\sin 2x| \cos 2x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

は $x = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{R}}}$, $x = \dfrac{\boxed{\text{S}}}{\boxed{\text{T}}}\pi$ で極大値 $\dfrac{1}{\boxed{\text{U}}}$ をとり，また，$x = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{V}}}$ のとき も極大値 $\boxed{\text{W}}$ をとる。

関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸が囲む図形の面積を S とおくと

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx = \frac{\boxed{\text{X}}}{\boxed{\text{Y}}}$$

に注意して

$$S = \boxed{\text{Z}}$$

を得る。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。

解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ は空欄のままにしてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。