

# 数学（80分）

## 【コース1（基本, Basic）・コース2（上級, Advanced）】

※ どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。

### I 試験全体に関する注意

1. 係員の許可なしに、部屋の外に出ることはできません。
2. この問題冊子を持ち帰ることはできません。

### II 問題冊子に関する注意

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見ないでください。
2. 試験開始の合図があったら、下の欄に、受験番号と名前を、受験票と同じように記入してください。
3. コース1は1～13ページ、コース2は15～27ページにあります。
4. 足りないページがあったら、手をあげて知らせてください。
5. メモや計算などを書く場合は、問題冊子に書いてください。

### III 解答方法に関する注意

1. 解答は、解答用紙に鉛筆（HB）で記入してください。
2. 問題文中のA, B, C, …には、それぞれ－（マイナスの符号）、または、0から9までの数が一つずつ入ります。あてはまるものを選び、解答用紙（マークシート）の対応する解答欄にマークしてください。
3. 同一の問題文中に **A**, **BC** などが繰り返し現れる場合、2度目以降は、**A**, **BC** のように表しています。

#### 解答に関する記入上の注意

- (1) 根号（ $\sqrt{\quad}$ ）の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。  
(例： $\sqrt{32}$  のときは、 $2\sqrt{8}$  ではなく  $4\sqrt{2}$  と答えます。)
- (2) 分数を答えるときは、符号は分子につけ、既約分数(reduced fraction)にして答えてください。  
(例： $\frac{2}{6}$  は  $\frac{1}{3}$ ,  $-\frac{2}{\sqrt{6}}$  は  $-\frac{2\sqrt{6}}{6}$  と分母を有理化してから約分し、 $-\frac{\sqrt{6}}{3}$  と答えます。)
- (3)  $\frac{\mathbf{A}\sqrt{\mathbf{B}}}{\mathbf{C}}$  に  $\frac{-\sqrt{3}}{4}$  と答える場合は、下のようにマークしてください。
- (4)  $\mathbf{DE}x$  に  $-x$  と答える場合は、Dを－、Eを1とし、下のようにマークしてください。

#### 【解答用紙】

A	<input checked="" type="radio"/>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B	<input type="radio"/>	0	1	2	<input checked="" type="radio"/>	4	5	6	7	8	9
C	<input type="radio"/>	0	1	2	3	<input checked="" type="radio"/>	5	6	7	8	9
D	<input checked="" type="radio"/>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
E	<input type="radio"/>	0	<input checked="" type="radio"/>	2	3	4	5	6	7	8	9

4. 解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※ 試験開始の合図があったら、必ず受験番号と名前を記入してください。

受験番号			*				*					
名前												

## 数学 コース 2

(上級コース)

### 「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので、どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は、右のように、解答用紙の「解答コース」の「コース2」を○で囲み、その下のマーク欄をマークしてください。

#### < 解答用紙記入例 >

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

選択したコースを正しくマークしないと、採点されません。

I

問 1  $a$  を実数とし、2 次関数

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - (2a - 1)x + a$$

について考える。

(1)  $y = f(x)$  のグラフの頂点の座標は

$$\left( \boxed{A}a - \boxed{B}, -\boxed{C}a^2 + \boxed{D}a - \boxed{E} \right)$$

である。

(2)  $y = f(x)$  のグラフと  $x$  軸が異なる 2 点 A, B で交わるような  $a$  の値の範囲は

$$a < \frac{\boxed{F}}{\boxed{G}}, \quad \boxed{H} < a$$

である。

(3) (2) の 2 点 A, B で、それらの  $x$  座標がともに 0 以上 6 以下となる  $a$  の値の範囲は

$$\boxed{I} < a \leq \frac{\boxed{JK}}{\boxed{LM}}$$

である。

問 2 大きさの異なる 4 枚のカードがある。これらのカードに赤, 黒, 青, 黄の色を塗る。ただし, どのカードにも 1 つの色のみを使い, また同じ色のカードが 2 枚以上あってもよいものとする。

- (1) 全部で **NOP** 通りの塗り方がある。
- (2) 全部の色を使う塗り方は **QR** 通りある。
- (3) 2 枚は赤で, 1 枚が黒, 1 枚が青となるような塗り方は **ST** 通りある。
- (4) 3 つの色を使う塗り方は **UVW** 通りある。
- (5) 2 つの色を使う塗り方は **XY** 通りある。



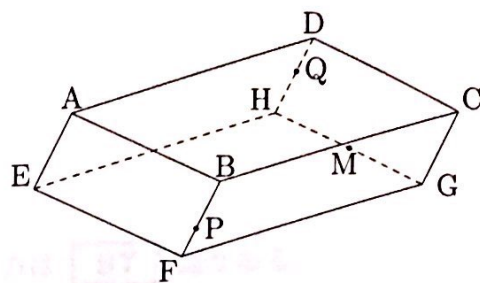
II

問1 右図の平行六面体は

$$AB = 2, \quad AD = 3, \quad AE = 1$$

$$\angle BAD = 60^\circ, \quad \angle BAE = 90^\circ, \quad \angle DAE = 120^\circ$$

を満たしている。辺 GH の中点を M とする。また、  
辺 BF, DH 上にそれぞれ点 P, Q をとる。このとき、  
4 点 A, P, M, Q は同一平面上にあるとする。その  
ような P, Q の中で線分 PQ の長さが最大になるも  
のを求めよう。



- (1)  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AE} = \vec{c}$  とおくと、これらのベクトルの内積について

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \boxed{A}, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = -\frac{\boxed{B}}{\boxed{C}}, \quad \vec{c} \cdot \vec{a} = \boxed{D}$$

が成り立つ。

- (2)  $s, t$  を  $0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1$  とし、 $BP : PF = s : (1-s)$ ,  $DQ : QH = t : (1-t)$  とおく。

4 点 A, P, M, Q が同一平面上にあるから

$$\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AP} + \beta \overrightarrow{AQ}$$

が成り立つような実数  $\alpha, \beta$  が存在する。したがって、 $s, t$  は

$$s = \boxed{E} \left( \boxed{F} - t \right)$$

を満たす。このとき、 $|\overrightarrow{PQ}|$  は  $t$  を用いて

$$|\overrightarrow{PQ}|^2 = \boxed{G} t^2 - \boxed{HI} t + \boxed{JK}$$

と表される。

よって、線分 PQ の長さが最大になるのは  $\boxed{L}$  のときである。ただし、 $\boxed{L}$  には、下の選択肢 ① ~ ⑤ の中から適するものを選びなさい。

①  $s = 0, \quad t = 1$

②  $s = 0, \quad t = \frac{1}{2}$

③  $s = \frac{1}{2}, \quad t = \frac{3}{4}$

④  $s = \frac{2}{3}, \quad t = \frac{2}{3}$

⑤  $s = 1, \quad t = \frac{1}{2}$

⑥  $s = 1, \quad t = \frac{2}{3}$

問 2  $x > 0, y > 0$  を満たす  $x, y$  に対して,  $\frac{y}{x}, x, \frac{8}{y}$  の中で最も小さい値を  $m$  とおく。

また,  $m = \frac{y}{x}$  となるような点  $(x, y)$  の集合を  $A$ ,  $m = \frac{8}{y}$  となるような点  $(x, y)$  の集合を  $B$  とする。

- (1) 次の文中の  $\boxed{\text{M}}$  ~  $\boxed{\text{S}}$  には, 下の選択肢 ① ~ ⑦の中から適するものを選びなさい。

$A, B$  を求めると次のようになる。

$$A = \left\{ (x, y) \mid \boxed{\text{M}} \leq \boxed{\text{N}}, \boxed{\text{O}} \leq 8 \boxed{\text{P}} \right\}$$

$$B = \left\{ (x, y) \mid 8 \boxed{\text{Q}} \leq \boxed{\text{R}}, 8 \leq \boxed{\text{S}} \right\}$$

- ①  $x$       ②  $y$       ③  $x + y$       ④  $x - y$   
 ⑤  $x^2$       ⑥  $xy$       ⑦  $y^2$       ⑧  $x^2 + y^2$

- (2) 次の文中の  $\boxed{\text{T}}$ ,  $\boxed{\text{U}}$  には, 右ページの選択肢 ① ~ ⑧の中から適するものを選びなさい。

$xy$  平面上に  $A, B$  を図示すると,  $A$  は  $\boxed{\text{T}}$ ,  $B$  は  $\boxed{\text{U}}$  の灰色部分である。ただし, 座標軸は灰色部分に含まれない。

- (3) 点  $P(x, y)$  が  $A \cup B$  を動くとき,  $m$  の最大値を求めよう。

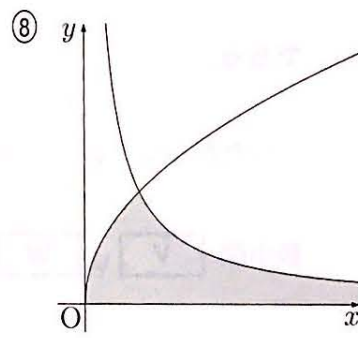
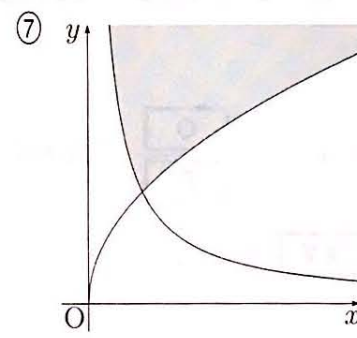
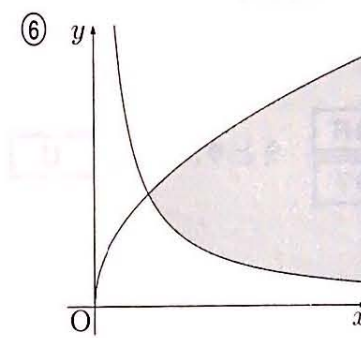
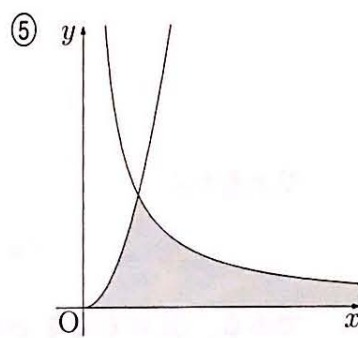
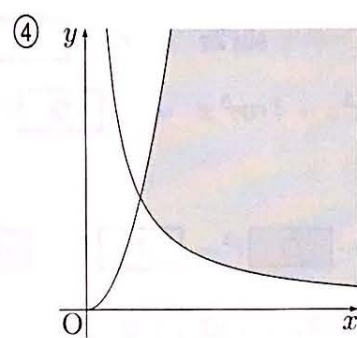
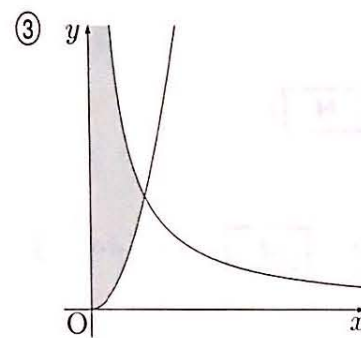
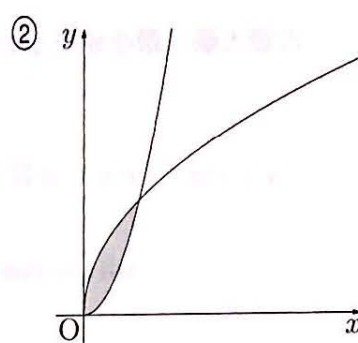
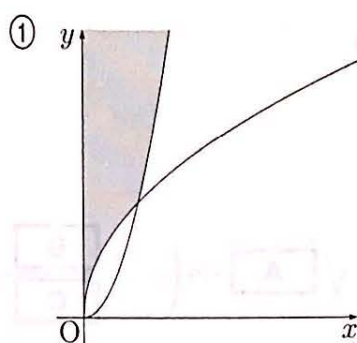
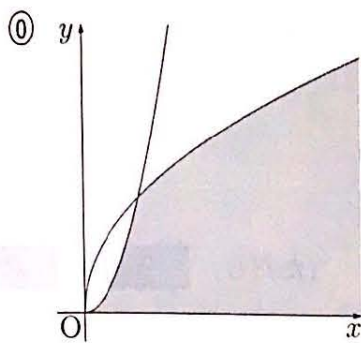
$P(x, y) \in A$  のとき,  $y = mx$  であるから, 原点  $O$  と  $P$  を通る直線の傾きを最大にする点  $P$  を見つけばよい。

また,  $P(x, y) \in B$  のとき,  $m = \frac{8}{y}$  であるから,  $P$  の  $y$  座標が最小になる点  $P$  を見つけばよい。

以上より,  $m$  は  $(x, y) = (\boxed{\text{V}}, \boxed{\text{W}})$  のとき, 最大値  $\boxed{\text{X}}$  をとる。

(問 2 は次ページに続く)

[ (2) の選択肢 ]



II の問題はこれで終わります。II の解答欄 Y, Z はマークしないでください。



III

$0 \leq x \leq \pi$  のとき、関数

$$f(x) = 4\sin^3 x + 4\cos^3 x - 8\sin 2x - 7$$

の最大値，最小値を求めよう。

$t = \sin x + \cos x$  とおく。

$$\sin x + \cos x = \sqrt{\boxed{\text{A}}} \sin\left(x + \frac{\boxed{\text{B}}}{\boxed{\text{C}}} \pi\right) \quad (\text{ただし, } \boxed{\text{B}} < \boxed{\text{C}})$$

であるから， $t$  のとる値の範囲は  $-\boxed{\text{D}} \leq t \leq \sqrt{\boxed{\text{E}}}$  である。また

$$\sin 2x = t^2 - \boxed{\text{F}}$$

$$4\sin^3 x + 4\cos^3 x = -\boxed{\text{G}} t^3 + \boxed{\text{H}} t$$

であるから

$$f(x) = -\boxed{\text{G}} t^3 - \boxed{\text{I}} t^2 + \boxed{\text{H}} t + \boxed{\text{J}} \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

である。① の右辺を  $g(t)$  とおき， $t$  で微分すると

$$g'(t) = -\boxed{\text{K}} (\boxed{\text{L}} t - \boxed{\text{M}}) (t + \boxed{\text{N}})$$

である。

したがって， $g(t) (= f(x))$  は， $t = \frac{\boxed{\text{O}}}{\boxed{\text{P}}}$  で最大値  $\frac{\boxed{\text{QR}}}{\boxed{\text{ST}}}$  をとり， $t = \sqrt{\boxed{\text{U}}}$  で

最小値  $\boxed{\text{V}} \sqrt{\boxed{\text{W}}} - \boxed{\text{XY}}$  をとる。



IV

$a_n = \int_0^1 x^{2n} \sqrt{1-x^2} dx$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) とおくとき, 極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$  を求めよう。

(1) まず,  $a_0, a_1$  を求めてみよう。半径 1 の円の面積は  $\pi$  であるから

$$a_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{\boxed{\text{A}}}$$

である。 $a_1$  は部分積分法により

$$\begin{aligned} a_1 &= \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx \\ &= -\frac{\boxed{\text{B}}}{\boxed{\text{C}}} \left[ x(1-x^2)^{\frac{\boxed{\text{D}}}{\boxed{\text{E}}}} \right]_0^1 + \frac{\boxed{\text{F}}}{\boxed{\text{G}}} \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{\boxed{\text{H}}}{\boxed{\text{I}}}} dx \\ &= \frac{\boxed{\text{J}}}{\boxed{\text{K}}} \left\{ \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx - \int_0^1 x^{\boxed{\text{L}}} \sqrt{1-x^2} dx \right\} \end{aligned}$$

となる。よって,  $a_1 = \frac{\pi}{\boxed{\text{MN}}}$  である。

(IV は次ページに続く)

- (2) 次の文中の  O  ~  U  には、下の選択肢 ① ~ ⑨の中から適するものを選びなさい。

$a_1$  を求めたのと同様にして、 $a_n$  は部分積分法により

$$a_n = \frac{\text{O}}{\text{P}} \left\{ \int_0^1 x^{\text{Q}} \sqrt{1-x^2} dx - \int_0^1 x^{\text{R}} \sqrt{1-x^2} dx \right\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

となる。よって

$$(\text{S}) a_n = (\text{T}) a_{n-1}$$

となる。したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \text{U}$$

を得る。

- |          |          |        |          |          |
|----------|----------|--------|----------|----------|
| ① 0      | ① 1      | ② 2    | ③ 3      | ④ 4      |
| ⑤ $2n-2$ | ⑥ $2n-1$ | ⑦ $2n$ | ⑧ $2n+1$ | ⑨ $2n+2$ |

IV  の問題はこれで終わります。 IV  の解答欄  V  ~  Z  はマークしないでください。

コース2の問題はこれですべて終わります。解答用紙の  V  はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース2」が正しくマークしてあるか、  
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。

〈数 学〉 Mathematics

コース 1 Course 1			
問 Q.		解答番号 row	正解 A.
I	問 1	AB	42
		CDE	451
		FG	14
		H	1
		I	1
	問 2	JKLM	1511
		NOP	256
		QR	24
		ST	12
		UVW	144
II	問 1	XY	84
		AB	18
		C	1
		D	3
		E	3
	問 2	FGH	336
		I	3
		JKL	352
		MN	-1
		OP	-2
III	問 1	Q	4
		RS	12
		TU	-2
		V	1
		WX	17
	問 2	AB	66
		CD	65
		E	2
		F	3
		G	6
IV	問 1	HI	11
		J	5
		K	5
		L	6
		MN	16
	問 2	OP	11
		QR	23
		ST	43
		AB	12
		CD	23
V	問 1	EF	94
		GHI	235
		JKL	235
		MN	74
		OP	79
	問 2	QRST	7325

コース 2 Course 2			
問 Q.		解答番号 row	正解 A.
I	問 1	AB	42
		CDE	451
		FG	14
		H	1
		I	1
	問 2	JKLM	1511
		NOP	256
		QR	24
		ST	12
		UVW	144
II	問 1	XY	84
		A	3
		BC	32
		D	0
		EF	21
	問 2	GHIJK	92117
		L	4
		MNOP	1460
		QRS	065
		T	0
III	問 1	U	7
		VW	24
		X	2
		ABC	214
		DE	12
	問 2	F	1
		GH	26
		IJ	81
		KLMN	2313
		OP	13
IV	問 1	QRST	5527
		U	2
		VWXY	2215
	問 2	A	4
		BCDEFGHI	13321332
		JKL	132
		MN	16
		OPQR	6357
	問 3	ST	96
		U	1