

# 数 学（80分）

## 【コース1（基本, Basic）・コース2（上級, Advanced）】

※ どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。

### I 試験全体に関する注意

1. 係員の許可なしに、部屋の外に出ることはできません。
2. この問題冊子を持ち帰ることはできません。

### II 問題冊子に関する注意

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見ないでください。
2. 試験開始の合図があったら、下の欄に、受験番号と名前を、受験票と同じように記入してください。
3. コース1は1～13ページ、コース2は15～27ページにあります。
4. 足りないページがあったら、手をあげて知らせてください。
5. メモや計算などを書く場合は、問題冊子に書いてください。

### III 解答方法に関する注意

1. 解答は、解答用紙に鉛筆(HB)で記入してください。
2. 問題文中のA, B, C, …には、それぞれ－(マイナスの符号)、または、0から9までの数が入ります。あてはまるものを選び、解答用紙(マークシート)の対応する解答欄にマークしてください。
3. 同一の問題文中に **A**, **BC** などが繰り返し現れる場合、2度目以降は、**A**, **BC** のように表しています。

#### 解答に関する記入上の注意

- (1) 根号( $\sqrt{\quad}$ )の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。  
(例： $\sqrt{32}$  のときは、 $2\sqrt{8}$  ではなく  $4\sqrt{2}$  と答えます。)
- (2) 分数を答えるときは、符号は分子につけ、既約分数(reduced fraction)にして答えてください。

(例： $\frac{2}{6}$  は  $\frac{1}{3}$ ,  $-\frac{2}{\sqrt{6}}$  は  $-\frac{2\sqrt{6}}{6}$  と分母を有理化してから約分し、 $-\frac{\sqrt{6}}{3}$  と答えます。)

- (3)  $\frac{\boxed{A}\sqrt{\boxed{B}}}{\boxed{C}}$  に  $\frac{-\sqrt{3}}{4}$  と答える場合は、下のようにマークしてください。
- (4)  $\boxed{DE}x$  に  $-x$  と答える場合は、Dを－、Eを1とし、下のようにマークしてください。

#### 【解答用紙】

A	●	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B	○	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9
C	○	0	1	2	3	●	5	6	7	8	9
D	●	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
E	○	0	●	2	3	4	5	6	7	8	9

4. 解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※ 試験開始の合図があったら、必ず受験番号と名前を記入してください。

受 験 番 号			*					*					
名 前													

## 数学 コース 2

(上級コース)

### 「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので、どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は、右のように、解答用紙の「解答コース」の「コース2」を○で囲み、その下のマーク欄をマークしてください。

＜ 解答用紙記入例 ＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	<div style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 5px; display: inline-block;">                     コース 2 Course 2                 </div>
○	●

選択したコースを正しくマークしないと、採点されません。

I

問 1  $x$  の 2 次関数

$$y = -\frac{1}{8}x^2 + ax + b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

を考える。関数 ① のグラフの頂点の座標を  $(p, q)$  とすると

$$p = \boxed{\text{A}} a, \quad q = \boxed{\text{B}} a^2 + b$$

である。

(1) 点  $(p, q)$  が直線  $x + y = 1$  の上を動くとき、 $a, b$  は

$$b = \boxed{\text{CD}} a^2 - \boxed{\text{E}} a + \boxed{\text{F}}$$

を満たす。

このとき、 $8a + b$  は  $a = \boxed{\text{G}}$  で最大値  $\boxed{\text{H}}$  をとる。

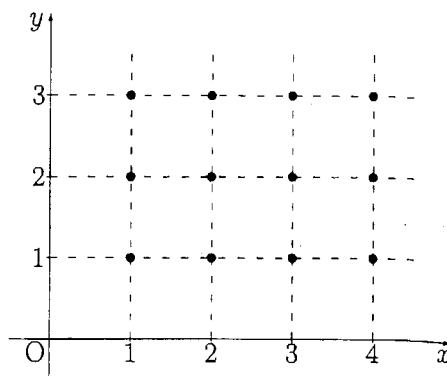
(2) 関数 ① のグラフが  $x$  軸に接するとき、 $a + b$  の値の範囲は

$$a + b \leq \frac{\boxed{\text{I}}}{\boxed{\text{J}}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

問2 座標平面上に、右の図のように12個の点が並んでいる。これらの点から3個の点を選び、それらを頂点とする三角形を作る。このとき、三角形が全部で何個できるかを調べよう。



まず、12個の点から3個の点を選び出す場合の数は **KLM** 通りである。

次に、12個の点のうち、3個以上が一直線上に並ぶ場合の数を数えよう。

このような直線のうち

(i) 4点を通る直線は **N** 本ある。

(ii) 3点を通る直線は **O** 本ある。

したがって、同一直線上にあり、三角形の頂点とならない3点の組み合わせは、(i) の場合は **PQ** 通りあり、(ii) の場合は **R** 通りある。

以上より、求める三角形は **STU** 個である。

特に、点(1,1)をA、点(4,1)をBとすると、線分AB上に2つの頂点をもつ三角形は **VW** 個である。

- 計算欄 (memo) -

☐ I の問題はこれで終わります。 ☐ I の解答欄 ☐ X ～ ☐ Z はマークしないでください。

II

問 1 三角形 ABC は

$$AB=2, \quad BC=3, \quad CA=4$$

を満たしている。

(1)  $\angle ABC = \theta$  とおくと、ベクトル  $\overrightarrow{AB}$  とベクトル  $\overrightarrow{BC}$  の内積  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$  は

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \boxed{AB} \cos \theta$$

である。また、余弦定理より  $\cos \theta$  の値を求めて

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{\boxed{C}}{\boxed{D}} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を得る。

(2) 辺 BC を  $n$  等分する点を B から近い順に  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  とおき、 $B=P_0, C=P_n$

とおく。このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \overrightarrow{AP_{k-1}} \cdot \overrightarrow{AP_k}$  を求めよう。

まず、 $\overrightarrow{AP_{k-1}}$  と  $\overrightarrow{AP_k}$  の内積を ① を用いて計算すると

$$\overrightarrow{AP_{k-1}} \cdot \overrightarrow{AP_k} = \boxed{E} + \frac{\boxed{F}k - \boxed{G}}{2n} + \frac{\boxed{H}(k^2 - k)}{n^2}$$

である。

したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \overrightarrow{AP_{k-1}} \cdot \overrightarrow{AP_k} = \frac{\boxed{IJ}}{\boxed{K}}$$

となる。

---

注) 内積 : inner product, 余弦定理 : the law of cosines

- 計算欄 (memo) -



問 2 複素数  $z$  が条件

$$z\bar{z} - (1-2i)z - (1+2i)\bar{z} \leq 15 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を満たすとする。

(1) 複素数平面上で不等式 ① が表す図形は、中心  $\boxed{L} + \boxed{M}i$ 、半径  $\boxed{N}\sqrt{\boxed{O}}$  の円の内部および円周である。

(2) 直線  $(1-i)z - (1+i)\bar{z} = 2i$  上にあり、不等式 ① を満たすすべての複素数  $z$  の中で、 $|z|$  が最大であるものを  $z_1$ 、 $|z|$  が最小であるものを  $z_2$  と表すと

$$z_1 = \sqrt{\boxed{PQ}} + \boxed{R} + \left( \sqrt{\boxed{ST}} + \boxed{U} \right) i,$$

$$z_2 = -\frac{\boxed{V}}{\boxed{W}} + \frac{\boxed{X}}{\boxed{Y}} i$$

である。

注) 複素数: complex number, 複素数平面: complex number plane

- 計算欄 (memo) -

Ⅱ の問題はこれで終わります。Ⅱ の解答欄 **Z** はマークしないでください。

III

次の4つの条件を満たす実数  $x, y, t, u$  を考える。

$$y \geq |x| \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$x + y = t \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$x^2 + y^2 = 12 \quad \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

$$x^3 + y^3 = u \quad \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

このとき、 $t$  および  $u$  がとる値の範囲を求めよう。

- (1) ①, ③ より、点  $(x, y)$  は原点を中心とする半径  $\boxed{A} \sqrt{\boxed{B}}$  の四分円の弧の上にあり、弧の両端の点の座標は

$$\left( \sqrt{\boxed{C}}, \sqrt{\boxed{D}} \right), \left( -\sqrt{\boxed{C}}, \sqrt{\boxed{D}} \right)$$

である。このことと ② より、 $t$  がとる値の範囲は

$$\boxed{E} \leq t \leq \boxed{F} \sqrt{\boxed{G}} \quad \dots\dots\dots \textcircled{5}$$

である。

- (2) 次に ②, ③ より

$$xy = \frac{\boxed{H}}{\boxed{I}} (t^2 - \boxed{JK})$$

を得る。さらに、④ を用いて

$$u = \frac{\boxed{L}}{\boxed{M}} (\boxed{NO} t - t^3)$$

を得る。

したがって

$$\frac{du}{dt} = \frac{\boxed{P}}{\boxed{Q}} (\boxed{RS} - t^2)$$

であるから、⑤ の範囲において  $u$  がとる値の範囲は

$$\boxed{T} \leq u \leq \boxed{UV} \sqrt{\boxed{W}}$$

である。

注) 四分円 : quadrant, 弧 : arc

- 計算欄 (memo) -

III の問題はこれで終わります。III の解答欄 X ~ Z はマークしないでください。

IV

$a > 1$  とする。2つの不等式

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}, \quad 0 \leq y \leq a \cos 3x$$

で表される領域を直線  $y = 1$  で2つの部分に分ける。そのうち、 $y \geq 1$  の部分の面積を  $S$ 、 $y \leq 1$  の部分の面積を  $T$  とおく。このとき、 $T - S$  を最大にする  $a$  の値と、 $T - S$  の最大値を求めよう。

等式  $a \cos 3x = 1$  を満たす  $x$  ( $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ ) の値を  $t$  とおく。このとき

$$S = \frac{\sin 3t}{\boxed{\text{A}} \cos 3t} - t$$

$$S + T = \frac{1}{\boxed{\text{B}} \cos 3t}$$

である。したがって、 $f(t) = T - S$  とおくと

$$f'(t) = \frac{(\boxed{\text{C}} - \boxed{\text{D}} \sin 3t) \sin 3t}{\cos \boxed{\text{E}} 3t}$$

であるから、 $T - S$  は  $t = \frac{\pi}{\boxed{\text{FG}}}$  のとき最大となる。すなわち、 $a = \frac{\boxed{\text{H}} \sqrt{\boxed{\text{I}}}}{\boxed{\text{J}}}$

のとき、 $T - S$  は最大値  $\frac{\pi}{\boxed{\text{K}}}$  をとる。

- 計算欄 (memo) -

Ⅳの問題はこれで終わりです。Ⅳの解答欄 **L** ～ **Z** はマークしないでください。

コース2の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の **V** はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース2」が正しくマークしてあるか、  
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。

〈数 学〉 Mathematics

コース 1 Course 1			
問 Q.		解答番号 row	正解 A.
I	問 1	A	4
		B	2
		CDEF	-241
		G	1
		H	3
		IJ	18
	問 2	KLM	220
		N	3
		O	8
		PQ	12
		R	8
		STU	200
		VW	48
II	問 1	ABCD	5432
		EFGH	3524
		I	3
		J	4
		KL	12
	問 2	M	7
		NO	13
		P	1
		Q	2
		R	1
		ST	71
		UVW	915
III		XY	96
		ABCD	2144
		E	3
		F	5
		G	2
		H	5
IV		AB	30
		C	6
		DE	79
		FGH	429
		IJKL	8023

コース 2 Course 2			
問 Q.		解答番号 row	正解 A.
I	問 1	A	4
		B	2
		CDEF	-241
		G	1
		H	3
		IJ	18
	問 2	KLM	220
		N	3
		O	8
		PQ	12
		R	8
		STU	200
		VW	48
II	問 1	AB	-6
		CD	32
		EFGH	4639
		IJK	172
		LM	12
	問 2	NO	25
		PQR	101
		STU	102
		VWXY	1212
III		AB	23
		CD	66
		E	0
		FG	26
		HIJK	1212
		LMNO	1236
		PQRS	3212
		T	0
		UVW	243
IV		A	3
		B	3
		CDE	122
		FG	18
		HIJ	233
		K	9