数学 コース 2
（上級コース）

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

＜解答用紙記入例＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

I

問 1　$a \neq 0$ とし，2 次関数

$$y = ax^2 + bx + c \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を考える。この関数のグラフ C は，直線 $y = 1$ と 2 点で交わり，その 2 点間の距離は 4，さらに，直線 $y = 3$ と 2 点で交わり，その 2 点間の距離は 6 であるとする。

(1)　C の頂点の座標を (p, q) とおく。このとき，C と直線 $y = 1$ との交点のひとつをとり，その x 座標を α とおくと

$$|\alpha - p| = \boxed{\text{A}}$$

であるから，2 次関数 ① を a，p，q を使って表した式に交点の座標 $(\alpha, 1)$ を代入すれば，等式

$$\boxed{\text{B}}\, a + q = \boxed{\text{C}}$$

が成り立つことがわかる。C と直線 $y = 3$ との交点に対しても同様にして，等式

$$\boxed{\text{D}}\, a + q = \boxed{\text{E}}$$

が成り立つ。したがって，これら 2 式より

$$a = \frac{\boxed{\text{F}}}{\boxed{\text{G}}}, \qquad q = -\frac{\boxed{\text{H}}}{\boxed{\text{I}}}$$

を得る。

(2)　さらに，C が点 $\left(2, -\dfrac{1}{5}\right)$ を通り，C の頂点の x 座標 p が 2 より小さいとすると

$$b = -\frac{\boxed{\text{J}}}{\boxed{\text{K}}}, \qquad c = -\frac{\boxed{\text{L}}}{\boxed{\text{M}}}$$

である。

問 2　2 つの整数 m と n が「つながっている」とは

n が $m-1$, m, $m+1$ のどれかであること

と定義する。1 つのサイコロを投げる操作を繰り返す試行を行う。まず 1 回目を投げる。2 回目以降の操作では，直前の操作で出た目とつながっている目が出たならば次の操作に進むが，つながっていない目が出たならばそこで試行は終了とする。

(1)　2 回目の操作を終えた時点で，試行が終了していない確率は $\dfrac{\boxed{\text{N}}}{\boxed{\text{O}}}$ である。

(2)　2 回目の操作で，試行が終了する確率は $\dfrac{\boxed{\text{P}}}{\boxed{\text{Q}}}$ である。

以下の文中の $\boxed{\text{R}}$, $\boxed{\text{S}}$, $\boxed{\text{T}}$ には，下の選択肢 ⓪ ～ ⑨ の中から適するものを選びなさい。

(3)　3 回目の操作を終えた時点で，試行が終了していない確率は $\boxed{\text{R}}$ である。

(4)　3 回以下の操作で，試行が終了する確率は $\boxed{\text{S}}$ である。

(5)　3 回目の操作で，試行が終了する確率は $\boxed{\text{T}}$ である。

⓪ $\dfrac{12}{27}$	① $\dfrac{16}{27}$	② $\dfrac{11}{54}$	③ $\dfrac{13}{54}$	④ $\dfrac{19}{54}$
⑤ $\dfrac{37}{54}$	⑥ $\dfrac{41}{54}$	⑦ $\dfrac{43}{54}$	⑧ $\dfrac{49}{108}$	⑨ $\dfrac{71}{108}$

II

問 1　第 n 項が

$$a_n = 4n^2 + 5n - 6$$

で与えられる数列 a_1，a_2，…，a_n，… を考える。

次の (1) の文中の $\boxed{\mathbf{D}}$，$\boxed{\mathbf{E}}$，$\boxed{\mathbf{H}}$，$\boxed{\mathbf{I}}$ には，(1) の問いの下の選択肢 ⓪ ～ ⑨ の中から適するものを選びなさい。また，その他の $\boxed{}$ には，適する数を入れなさい。

(1)　a_n が 5 の倍数となるような n を求めよう。また，そのときの a_n を求めよう。

a_n は

$$a_n = \left(n + \boxed{\mathbf{A}}\right)\left(\boxed{\mathbf{B}}\,n - \boxed{\mathbf{C}}\right)$$

と因数分解できる。したがって，a_n が 5 の倍数ならば，$n + \boxed{\mathrm{A}}$ と $\boxed{\mathrm{B}}\,n - \boxed{\mathrm{C}}$ のいずれかは 5 の倍数である。

(i)　$n + \boxed{\mathrm{A}}$ が 5 の倍数のとき，n は整数 k を用いて

$$n = \boxed{\mathbf{D}}$$

と表される。このとき，a_n は k を用いて

$$a_n = \boxed{\mathbf{E}}$$

と表される。

(問 1 は次ページに続く)

(ii)　$\boxed{\text{B}}\,n-\boxed{\text{C}}$ が 5 の倍数のとき，整数 j を用いて

$$\boxed{\text{B}}\,n-\boxed{\text{C}}=\boxed{\textbf{F}}\,j$$

と表すと，この式は

$$n+\boxed{\textbf{G}}=\boxed{\text{F}}(n-j)$$

と変形できる。したがって，n は整数 k を用いて

$$n=\boxed{\textbf{H}}$$

と表される。このとき，a_n は k を用いて

$$a_n=\boxed{\textbf{I}}$$

と表される。

⓪ $5k-1$　① $5k-2$　② $5k-3$　③ $5k-4$
④ $5(20k^2-9k)$　⑤ $5(20k^2-11k)$　⑥ $5(20k^2-13k)$
⑦ $5(20k^2-17k+3)$　⑧ $5(20k^2-18k+3)$　⑨ $5(20k^2-19k+3)$

次の (2) の文中の $\boxed{\textbf{L}}$，$\boxed{\textbf{M}}$ には，(2) の問いの下の選択肢 ⓪ ～ ⑦ の中から適するものを選びなさい。また，その他の $\boxed{}$ には，適する数を入れなさい。

(2)　最初の 20 項 a_1，a_2，…，a_{20} の中で 5 の倍数である項の個数は $\boxed{\textbf{J}}$ である。また，それらの和 S は

$$S=\sum_{k=1}^{\boxed{\textbf{K}}}\boxed{\textbf{L}}=\boxed{\textbf{M}}$$

である。

⓪ 4506　① 4605　② 4560　③ 4650
④ $5(40k^2-28k+3)$　⑤ $5(40k^2-33k+2)$
⑥ $5(40k^2-30k+3)$　⑦ $5(40k^2-36k+4)$

問 2　α, β を

$$|\alpha| = \sqrt{10}, \quad 4(1+3i)\alpha - (7+i)\beta = 0$$

を満たす複素数とし，複素数平面で 0, α, β を表す点をそれぞれ O, A, B とする。

(1)　$|\beta| = \boxed{\mathsf{N}}\sqrt{\boxed{\mathsf{O}}}$ である。

(2)　$\dfrac{\beta}{\alpha}$ の偏角を θ とすると，

$$\sin\theta = \frac{\boxed{\mathsf{P}}\sqrt{\boxed{\mathsf{Q}}}}{\boxed{\mathsf{R}}}$$

である。

(3)　三角形 OAB の面積は $\boxed{\mathsf{S}}$ である。

(4)　直線 OB に関して A と対称な点を C とする。C は原点 O を中心として A を $\boxed{\mathsf{T}}\,\theta$ だけ回転して得られる点であるから，C を表す複素数を γ とすると

$$\gamma = \frac{-\boxed{\mathsf{U}} + \boxed{\mathsf{V}}\,i}{\boxed{\mathsf{W}}}\alpha$$

である。

(5)　$\angle\mathrm{OBA} = \varphi \quad (0 < \varphi < \pi)$ とおくと

$$\sin\varphi = \frac{\boxed{\mathsf{X}}\sqrt{\boxed{\mathsf{YZ}}}}{\boxed{\mathsf{YZ}}}$$

である。

III

a，b は正の定数とし，x の関数

$$y=\left(\log_4 a^3\right)\cdot(\log_4 x)\cdot(\log_4 ax)+\left(\log_4 b^3\right)\cdot\left(\log_4 \frac{x}{b}\right)\cdot(\log_4 x)+(\log_4 x)^3$$

について考える。この関数が $x=\dfrac{1}{2}$ で極値 m_1 をとり，$x=8$ で極値 m_2 をとるとき，a，b，$|m_1-m_2|$ の値をそれぞれ求めよう。

次の文中の $\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{D}}$，$\boxed{\text{E}}$，$\boxed{\text{L}}$，$\boxed{\text{O}}$ には，下の選択肢 ⓪ ～ ⑨ の中から適するものを選びなさい。また，その他の $\boxed{}$ には，適する数を入れなさい。

$\log_4 a=p$，$\log_4 b=q$，$\log_4 x=t$ とおくと，y は t を用いて

$$y=t^3+\boxed{\text{A}}t^2+\boxed{\text{B}}t$$

と表される。この右辺を $g(t)$ とおくと

$$\frac{dy}{dt}=g'(t)=\boxed{\text{C}}\left\{t^2+\boxed{\text{D}}t+\boxed{\text{E}}\right\}$$

である。仮定より，$y=g(t)$ は $t=-\dfrac{\boxed{\text{F}}}{\boxed{\text{G}}}$，$t=\dfrac{\boxed{\text{H}}}{\boxed{\text{I}}}$ で極値をとるので

$$\frac{\boxed{\text{J}}}{\boxed{\text{K}}}-\boxed{\text{L}}+\boxed{\text{E}}=0,$$

$$\frac{\boxed{\text{M}}}{\boxed{\text{N}}}+\boxed{\text{O}}+\boxed{\text{E}}=0$$

が成り立つ。これを解いて，$p=\dfrac{\boxed{\text{P}}}{\boxed{\text{Q}}}$，$q=\boxed{\text{RS}}$ が得られる。したがって

$$a=\boxed{\text{T}},\quad b=\frac{\boxed{\text{U}}}{\boxed{\text{V}}},\quad |m_1-m_2|=\boxed{\text{W}}$$

である。

⓪ $(p-q)$　① $2(p-q)$　② $3(p-q)$　③ (p^2-q^2)　④ $3(p^2-q^2)$

⑤ $(p+q)$　⑥ $2(p+q)$　⑦ $3(p+q)$　⑧ (p^2+q^2)　⑨ $3(p^2+q^2)$

IV

点 $(1, a)$ を通って，曲線 $y = \dfrac{x-2}{x^2}$ にちょうど 3 本の接線が引けるような a の値の範囲を求めよう。

曲線上の点 $\left(t,\ \dfrac{t-2}{t^2}\right)$ における接線の方程式は

$$y = -\frac{t - \boxed{\mathsf{A}}}{t^3}x + \frac{\boxed{\mathsf{B}}\,t - \boxed{\mathsf{C}}}{t^2}$$

である。この接線が点 $(1, a)$ を通るので

$$a = \frac{\boxed{\mathsf{D}}\,t^2 - \boxed{\mathsf{E}}\,t + \boxed{\mathsf{F}}}{t^3} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

である。

3 本の接線が引けるためには，この t に関する方程式 ① が異なる 3 つの実数解をもてばよい。そのために

$$f(t) = \frac{\boxed{\mathsf{D}}\,t^2 - \boxed{\mathsf{E}}\,t + \boxed{\mathsf{F}}}{t^3}$$

とおいて，$f(t)$ の増減等を調べる。

次の文中の $\boxed{\mathsf{J}}$，$\boxed{\mathsf{L}}$，$\boxed{\mathsf{N}}$，$\boxed{\mathsf{O}}$，$\boxed{\mathsf{P}}$，$\boxed{\mathsf{Q}}$，$\boxed{\mathsf{R}}$ には，右のページの選択肢 ⓪ ～ ⑤ の中から適するものを選びなさい。また，その他の $\boxed{\phantom{\mathsf{A}}}$ には，適する数を入れなさい。

$f(t)$ を微分すると

$$f'(t) = -\frac{2\left(t - \boxed{\mathsf{G}}\right)\left(t - \boxed{\mathsf{H}}\right)}{t^4} \qquad \left(\text{ただし，}\boxed{\mathsf{G}} < \boxed{\mathsf{H}}\right)$$

であるから，$f(t)$ は

$t < \boxed{\mathsf{I}}$ のとき，$\boxed{\mathsf{J}}$

$\boxed{\mathsf{I}} < t < \boxed{\mathsf{K}}$ のとき，$\boxed{\mathsf{L}}$

$\boxed{\mathsf{K}} < t < \boxed{\mathsf{M}}$ のとき，$\boxed{\mathsf{N}}$

$\boxed{\mathsf{M}} < t$ のとき，$\boxed{\mathsf{O}}$

となる。

（$\boxed{\text{IV}}$ は次ページに続く）

また

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to-\infty} f(t) = \boxed{\mathsf{P}}, \quad \lim_{t\to+0} f(t) = \boxed{\mathsf{Q}}, \quad \lim_{t\to-0} f(t) = \boxed{\mathsf{R}}$$

である。

したがって，3 本の接線が引けるような a の値の範囲は

$$-\boxed{\mathsf{S}} < a < \boxed{\mathsf{T}}, \quad \boxed{\mathsf{U}} < a < \frac{\boxed{\mathsf{VW}}}{\boxed{\mathsf{XYZ}}}$$

である。

⓪ 0　① 1　② 増加　③ 減少
④ ∞　⑤ $-\infty$

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。
コース 2 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。
解答用紙の解答コース欄に「コース 2」が正しくマークしてあるか，もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。