平成28年度

日本留学試験（第１回）

試験問題

The Examination

平成28年度（2016年度）日本留学試験

数学（８０分）

【コース１(基本, Basic)・コース２(上級, Advanced)】

※　どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。

Ⅰ　**試験全体に関する注意**

1．係員の許可なしに，部屋の外に出ることはできません。

2．この問題冊子を持ち帰ることはできません。

Ⅱ　**問題冊子に関する注意**

1．試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見ないでください。

2．試験開始の合図があったら，下の欄に，受験番号と名前を，受験票と同じように記入してください。

3．コース１は１～13ページ，コース２は15～27ページにあります。

4．足りないページがあったら，手をあげて知らせてください。

5．メモや計算などを書く場合は，問題冊子に書いてください。

Ⅲ　**解答方法に関する注意**

1．解答は，解答用紙に鉛筆(ＨＢ)で記入してください。

2．問題文中のＡ，Ｂ，Ｃ，…には，それぞれ－(マイナスの符号)，または，０から９までの数が一つずつ入ります。あてはまるものを選び，解答用紙(マークシート)の対応する解答欄にマークしてください。

3．同一の問題文中に $\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{BC}}$ などが繰り返し現れる場合，２度目以降は，$\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{BC}}$ のように表しています。

解答に関する記入上の注意

(1)　根号（$\sqrt{\ }$）の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。
（例：$\sqrt{32}$ のときは，$2\sqrt{8}$ ではなく $4\sqrt{2}$ と答えます。）

(2)　分数を答えるときは，符号は分子につけ，既約分数(reduced fraction)にして答えてください。
（例：$\dfrac{2}{6}$ は $\dfrac{1}{3}$，$-\dfrac{2}{\sqrt{6}}$ は $\dfrac{-2\sqrt{6}}{6}$ と分母を有理化してから約分し，$\dfrac{-\sqrt{6}}{3}$ と答えます。）

(3)　$\dfrac{\boxed{\text{A}}\sqrt{\boxed{\text{B}}}}{\boxed{\text{C}}}$ に $\dfrac{-\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は，下のようにマークしてください。

(4)　$\boxed{\text{DE}}\,x$ に $-x$ と答える場合は，Ｄを－，Ｅを１とし，下のようにマークしてください。

【解答用紙】

A	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
B	⊖	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
C	⊖	⓪	①	②	③	●	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
D	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
E	⊖	⓪	●	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

4．解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※　試験開始の合図があったら，必ず受験番号と名前を記入してください。

受験番号			＊					＊						
名　前														

数学 コース 2
（上級コース）

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

＜解答用紙記入例＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

I

問 1　x の 2 次関数

$$y = -\frac{1}{8}x^2 + ax + b \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を考える。関数 ① のグラフの頂点の座標を (p, q) とすると

$$p = \boxed{\ \mathsf{A}\ }a, \quad q = \boxed{\ \mathsf{B}\ }a^2 + b$$

である。

(1)　点 (p, q) が直線 $x + y = 1$ の上を動くとき，a, b は

$$b = \boxed{\mathsf{CD}}a^2 - \boxed{\ \mathsf{E}\ }a + \boxed{\ \mathsf{F}\ }$$

を満たす。

このとき，$8a + b$ は $a = \boxed{\ \mathsf{G}\ }$ で最大値 $\boxed{\ \mathsf{H}\ }$ をとる。

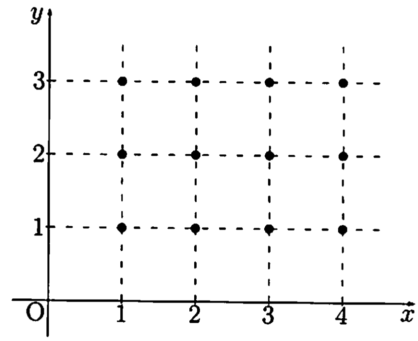
(2)　関数 ① のグラフが x 軸に接するとき，$a + b$ の値の範囲は

$$a + b \leqq \frac{\boxed{\ \mathsf{I}\ }}{\boxed{\ \mathsf{J}\ }}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　座標平面上に，右の図のように 12 個の点が並んでいる。これらの点から 3 個の点を選び，それらを頂点とする三角形を作る。このとき，三角形が全部で何個できるかを調べよう。



まず，12 個の点から 3 個の点を選び出す場合の数は $\boxed{\text{KLM}}$ 通りである。

次に，12 個の点のうち，3 個以上が一直線上に並ぶ場合の数を数えよう。

このような直線のうち

(i)　4 点を通る直線は $\boxed{\text{N}}$ 本ある。

(ii)　3 点を通る直線は $\boxed{\text{O}}$ 本ある。

したがって，同一直線上にあり，三角形の頂点とならない 3 点の組み合わせは，(i) の場合は $\boxed{\text{PQ}}$ 通りあり，(ii) の場合は $\boxed{\text{R}}$ 通りある。

以上より，求める三角形は $\boxed{\text{STU}}$ 個である。

特に，点 $(1, 1)$ を A，点 $(4, 1)$ を B とするとき，線分 AB 上に 2 つの頂点をもつ三角形は $\boxed{\text{VW}}$ 個である。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{I}}$ の解答欄 $\boxed{\text{X}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

II

問 1　三角形 ABC は

$$AB=2,\quad BC=3,\quad CA=4$$

を満たしている。

(1)　$\angle ABC=\theta$ とおくと，ベクトル $\overrightarrow{AB}$ とベクトル $\overrightarrow{BC}$ の内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ は

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\boxed{\mathbf{AB}}\cos\theta$$

である。また，余弦定理より $\cos\theta$ の値を求めて

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{\boxed{\mathbf{C}}}{\boxed{\mathbf{D}}}\qquad\cdots\cdots\cdots\quad ①$$

を得る。

(2)　辺 BC を n 等分する点を B から近い順に $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$ とおき，$B=P_0$, $C=P_n$ とおく。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{AP_{k-1}}\cdot\overrightarrow{AP_k}$ を求めよう。

まず，$\overrightarrow{AP_{k-1}}$ と $\overrightarrow{AP_k}$ の内積を ① を用いて計算すると

$$\overrightarrow{AP_{k-1}}\cdot\overrightarrow{AP_k}=\boxed{\mathbf{E}}+\frac{\boxed{\mathbf{F}}k-\boxed{\mathbf{G}}}{2n}+\frac{\boxed{\mathbf{H}}(k^2-k)}{n^2}$$

である。

したがって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{AP_{k-1}}\cdot\overrightarrow{AP_k}=\frac{\boxed{\mathbf{IJ}}}{\boxed{\mathbf{K}}}$$

となる。

注）内積：inner product，余弦定理：the law of cosines

- 計算欄 (memo) -

問 2　複素数 z が条件

$$z\bar{z} - (1-2i)z - (1+2i)\bar{z} \leqq 15 \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を満たすとする。

(1)　複素数平面上で不等式 ① が表す図形は，中心 $\boxed{\mathsf{L}} + \boxed{\mathsf{M}}\,i$，半径 $\boxed{\mathsf{N}}\sqrt{\boxed{\mathsf{O}}}$ の円の内部および円周である。

(2)　直線 $(1-i)z - (1+i)\bar{z} = 2i$ 上にあり，不等式 ① を満たすすべての複素数 z の中で，$|z|$ が最大であるものを z_1，$|z|$ が最小であるものを z_2 と表すと

$$z_1 = \sqrt{\boxed{\mathsf{PQ}}} + \boxed{\mathsf{R}} + \left(\sqrt{\boxed{\mathsf{ST}}} + \boxed{\mathsf{U}}\right)i,$$

$$z_2 = -\frac{\boxed{\mathsf{V}}}{\boxed{\mathsf{W}}} + \frac{\boxed{\mathsf{X}}}{\boxed{\mathsf{Y}}}\,i$$

である。

注）　複素数：complex number，複素数平面：complex number plane

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\mathrm{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\mathrm{II}}$ の解答欄 $\boxed{\ \mathsf{Z}\ }$ はマークしないでください。

III

次の 4 つの条件を満たす実数 x, y, t, u を考える。

$$y \geqq |x| \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

$$x + y = t \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

$$x^2 + y^2 = 12 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ③$$

$$x^3 + y^3 = u \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ④$$

このとき，t および u がとる値の範囲を求めよう。

(1) ①, ③ より，点 (x, y) は原点を中心とする半径 $\boxed{\mathsf{A}}\sqrt{\boxed{\mathsf{B}}}$ の四分円の弧の上にあり，弧の両端の点の座標は

$$\left(\sqrt{\boxed{\mathsf{C}}}, \sqrt{\boxed{\mathsf{D}}}\right), \quad \left(-\sqrt{\boxed{\mathsf{C}}}, \sqrt{\boxed{\mathsf{D}}}\right)$$

である。このことと ② より，t がとる値の範囲は

$$\boxed{\mathsf{E}} \leqq t \leqq \boxed{\mathsf{F}}\sqrt{\boxed{\mathsf{G}}} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ⑤$$

である。

(2) 次に ②, ③ より

$$xy = \frac{\boxed{\mathsf{H}}}{\boxed{\mathsf{I}}}\left(t^2 - \boxed{\mathsf{JK}}\right)$$

を得る。さらに，④ を用いて

$$u = \frac{\boxed{\mathsf{L}}}{\boxed{\mathsf{M}}}\left(\boxed{\mathsf{NO}}\,t - t^3\right)$$

を得る。

したがって

$$\frac{du}{dt} = \frac{\boxed{\mathsf{P}}}{\boxed{\mathsf{Q}}}\left(\boxed{\mathsf{RS}} - t^2\right)$$

であるから，⑤ の範囲において u がとる値の範囲は

$$\boxed{\mathsf{T}} \leqq u \leqq \boxed{\mathsf{UV}}\sqrt{\boxed{\mathsf{W}}}$$

である。

注） 四分円：quadrant，弧：arc

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\ \mathsf{X}\ }$ 〜 $\boxed{\ \mathsf{Z}\ }$ はマークしないでください。

IV

$a > 1$ とする。2つの不等式

$$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{6}, \quad 0 \leqq y \leqq a\cos 3x$$

で表される領域を直線 $y = 1$ で2つの部分に分ける。そのうち，$y \geqq 1$ の部分の面積を S，$y \leqq 1$ の部分の面積を T とおく。このとき，$T - S$ を最大にする a の値と，$T - S$ の最大値を求めよう。

等式 $a\cos 3x = 1$ を満たす x $\left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{6}\right)$ の値を t とおく。このとき

$$S = \frac{\sin 3t}{\boxed{\mathsf{A}}\cos 3t} - t$$

$$S + T = \frac{1}{\boxed{\mathsf{B}}\cos 3t}$$

である。したがって，$f(t) = T - S$ とおくと

$$f'(t) = \frac{\left(\boxed{\mathsf{C}} - \boxed{\mathsf{D}}\sin 3t\right)\sin 3t}{\cos^{\boxed{\mathsf{E}}} 3t}$$

であるから，$T - S$ は $t = \dfrac{\pi}{\boxed{\mathsf{FG}}}$ のとき最大となる。すなわち，$a = \dfrac{\boxed{\mathsf{H}}\sqrt{\boxed{\mathsf{I}}}}{\boxed{\mathsf{J}}}$ のとき，$T - S$ は最大値 $\dfrac{\pi}{\boxed{\mathsf{K}}}$ をとる。

注） 領域：region

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\text{L}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 2」が正しくマークしてあるか，
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。