平成25年度

日本留学試験（第１回）

試験問題

数学 コース 2
(上級コース)

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

< 解答用紙記入例 >

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

I

問 1　x の2次関数 $y=ax^2+bx+c$ が，次の条件【＊】を満たしているとする。

【＊】　$x=-1$ における値は $y=-8$ であり，$x=3$ における値は $y=16$ である。
さらに，区間 $-1 \leqq x \leqq 3$ において，x の値が増加すると共に y の値も増加する。

このとき，a, b, c に関する条件を求めよう。

条件【＊】より，b, c は a を用いて

$$b = \boxed{\mathsf{AB}}\,a + \boxed{\mathsf{C}} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

$$c = \boxed{\mathsf{DE}}\,a - \boxed{\mathsf{F}} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

と表される。よって，この 2 次関数のグラフの軸の方程式は

$$x = \boxed{\mathsf{G}} - \frac{\boxed{\mathsf{H}}}{a}$$

である。

したがって，求める条件は，a, b, c が関係式 ①, ② を満たし，さらに a が

$$0 < a \leqq \frac{\boxed{\mathsf{I}}}{\boxed{\mathsf{J}}} \quad \text{または} \quad \frac{\boxed{\mathsf{KL}}}{\boxed{\mathsf{M}}} \leqq a < 0$$

を満たすことである。

- 計算欄 (memo) -

問 2　a, b, c, d は $a < b < c < d$ を満たす実数とし，実数の部分集合

$$A = \{x \mid a \leqq x \leqq c\}, \quad B = \{x \mid b \leqq x \leqq d\}$$

が

$$A \cap B = \{x \mid x^2 - 4x + 3 \leqq 0\}$$

を満たしているとする。

次の (1), (2) の各場合について答えなさい。

(1)　A と B の和集合を

$$A \cup B = \{x \mid x^2 - 5x - 24 \leqq 0\}$$

とする。このときの a, b, c, d の値は

$$a = \boxed{\text{NO}}, \quad b = \boxed{\text{P}}, \quad c = \boxed{\text{Q}}, \quad d = \boxed{\text{R}}$$

である。

(2)　A と B の補集合 $\overline{B}$ の共通部分を

$$A \cap \overline{B} = \{x \mid x^2 + 5x - 6 \leqq 0 \text{ かつ } x \neq 1\}$$

とし，A の補集合 $\overline{A}$ と B の共通部分を

$$\overline{A} \cap B = \{x \mid x^2 - 9x + 18 \leqq 0 \text{ かつ } x \neq 3\}$$

とする。このときの a, b, c, d の値は

$$a = \boxed{\text{ST}}, \quad b = \boxed{\text{U}}, \quad c = \boxed{\text{V}}, \quad d = \boxed{\text{W}}$$

である。

注）部分集合：subset，補集合：complement

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{I}}$ の解答欄 $\boxed{\text{X}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

II

O を中心とする半径 1 の球面 S 上に 3 点 A, B, C を

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=0$$

となるようにとる。ここで，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ は $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の内積を表す。他も同様である。

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\boxed{\mathbf{A}}$，$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\boxed{\mathbf{B}}}$，$\cos\angle BAC=\dfrac{\boxed{\mathbf{C}}}{\boxed{\mathbf{D}}}$ であり，

三角形 ABC の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\mathbf{E}}}}{\boxed{\mathbf{F}}}$ である。

(2) 三角形 ABC の重心を G とし，半直線 OG と S との交点を P とする。

$\overrightarrow{OG}=\dfrac{\boxed{\mathbf{G}}}{\boxed{\mathbf{H}}}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$ であるから

$$\left|\overrightarrow{OG}\right|=\frac{\sqrt{\boxed{\mathbf{I}}}}{\boxed{\mathbf{J}}},\quad \left|\overrightarrow{PG}\right|=\frac{\boxed{\mathbf{K}}-\sqrt{\boxed{\mathbf{L}}}}{\boxed{\mathbf{M}}},$$

$$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{PG}=\boxed{\mathbf{N}}$$

となる。したがって，四面体 PABC の体積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\mathbf{O}}}-\boxed{\mathbf{P}}}{\boxed{\mathbf{Q}}}$ である。

注） 内積 : inner product，重心 : center of gravity，半直線 : ray (half line)，四面体 : tetrahedron

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{R}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

III

実数 x, y が

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1,\quad x \geqq 0,\quad y \geqq 0$$

を満たすとき

$$P=x^2+xy+y^2$$

の最大値を求めよう。

条件を満たす x, y において，$x=\sqrt{2}\cos\theta$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$y=\boxed{\text{A}}\sin\theta$$

となる。よって P は

$$P=\sqrt{\boxed{\text{B}}}\sin 2\theta-\cos 2\theta+\boxed{\text{C}}$$

$$=\sqrt{\boxed{\text{D}}}\sin(2\theta-\alpha)+\boxed{\text{E}}$$

と表され

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{\boxed{\text{F}}}}{\boxed{\text{G}}},\quad \cos\alpha=\frac{\sqrt{\boxed{\text{H}}}}{\boxed{\text{I}}}\qquad \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$$

である。したがって，P の最大値は $\sqrt{\boxed{\text{J}}}+\boxed{\text{K}}$ である。

また，P の値が最大になるときの θ を θ_0 とおくと

$$2\theta_0=\alpha+\frac{\pi}{\boxed{\text{L}}}$$

であるから

$$\sin 2\theta_0=\frac{\sqrt{\boxed{\text{M}}}}{\boxed{\text{N}}},\quad \cos 2\theta_0=-\frac{\sqrt{\boxed{\text{O}}}}{\boxed{\text{P}}}$$

である。

\- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{Q}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

IV

問 1　数列 $\{S_n\}$ を

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

と定めるとき，次の 2 つの極限:

$$\lim_{n\to\infty} S_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_{2n} - S_n}{\sqrt{n}}$$

を求めよう。

(1)　次の問題文中の $\boxed{\mathsf{A}}$ ～ $\boxed{\mathsf{I}}$ には，下の ⓪ ～ ⑨ の中から適するものを選びなさい。

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ を求めよう。関数 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ について考えると

$$y' = -\frac{\boxed{\mathsf{A}}}{2\sqrt{x^{\boxed{\mathsf{B}}}}}$$

より，この関数 y は $\boxed{\mathsf{C}}$ である。

そこで，区間 $k \leqq x \leqq k+1$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ で考えると

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \ \boxed{\mathsf{D}} \ \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$$

が成り立つ。

この式の両辺を $k=1$ から $k=n$ まで辺ごとに加えると

$$S_n \ \boxed{\mathsf{E}} \ \int_{\boxed{\mathsf{F}}}^{\boxed{\mathsf{G}}} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \boxed{\mathsf{H}} \left(\sqrt{\boxed{\mathsf{G}}} - 1\right)$$

が得られ

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \boxed{\mathsf{I}}$$

となる。

⓪	∞	①	1	②	2	③	3
④	n	⑤	$n+1$	⑥	$<$	⑦	$>$
⑧	単調増加	⑨	単調減少				

(問 1 は次ページに続く)

(2)　次の問題文中の $\boxed{\text{J}}$ ～ $\boxed{\text{P}}$ には，下の ⓪ ～ ⑨ の中から適するものを選びなさい。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_{2n}-S_n}{\sqrt{n}}$ について考えると

$$S_{2n}-S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\boxed{\text{J}}}}$$

であるから，区分求積法より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{2n}-S_n}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\boxed{\text{K}}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\boxed{\text{L}}+\frac{k}{n}}}$$

$$=\int_{\boxed{\text{M}}}^{\boxed{\text{N}}}\frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx$$

$$=\boxed{\text{O}}\left(\sqrt{\boxed{\text{P}}}-1\right)$$

となる。

⓪ 0	① 1	② 2	③ $n-1$	④ n
⑤ $n+1$	⑥ $n-k$	⑦ $n+k$	⑧ $n+k-1$	⑨ $n+k+1$

注）区分求積法 : quadrature (mensuration) by parts

問 2　次の問題文中の $\boxed{\text{Q}}$, $\boxed{\text{S}}$, $\boxed{\text{V}}$ には，下の ⓪ ～ ⑦ の中から適する式を選びなさい。また，それ以外の $\boxed{}$ には，適する数を入れなさい。

微分可能な関数 $f(x)$ が次の等式を満たしている。

$$\int_0^x f(t)dt = (1+e^{-x})f(x) + 2x - 4\log 2 \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

このとき，$f(x)$ を定め，極限値 $\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよう。

① の両辺を x で微分し変形すると

$$(1+e^{-x})\left(\boxed{\text{Q}}\right) = \boxed{\text{R}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

を得る。次に，$f(x) = e^x g(x)$ とおくと，② より

$$g'(x) = \frac{\boxed{\text{S}}}{1+e^{-x}}$$

となる。よって

$$g(x) = \boxed{\text{T}}\log(1+e^{-x}) + C$$

を得る。ここで C は積分定数である。

また，$g(0) = f(0)$ より，$C = \boxed{\text{U}}$ である。したがって，$g(x)$ が求まり

$$f(x) = \boxed{\text{V}}\log(1+e^{-x})$$

と定まる。

最後に，$e^{-x} = t$ とおくと

$$f(x) = \boxed{\text{W}}\log(1+t)^{\frac{1}{t}}$$

となる。よって

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{t\to\boxed{\text{X}}} \boxed{\text{W}}\log(1+t)^{\frac{1}{t}} = \boxed{\text{Y}}$$

と求まる。

⓪ $f'(x) - f(x)$	① $f(x) - f'(x)$	② $f'(x) - 2f(x)$
③ $f(x) - 2f'(x)$	④ $2e^x$	⑤ $-2e^x$
⑥ $2e^{-x}$	⑦ $-2e^{-x}$	

注）微分可能な：differentiable，積分定数：integral constant

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 2」が正しくマークしてあるか，もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。