問題冊子

平成23年度（2011年度）日本留学試験

数　学（８０分）

【コース１(基本, Basic)・コース２(上級, Advanced)】

※　どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。

I　試験全体に関する注意

1．係員の許可なしに，部屋の外に出ることはできません。
2．この問題冊子を持ち帰ることはできません。

II　問題冊子に関する注意

1．試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見ないでください。
2．試験開始の合図があったら，下の欄に，受験番号と名前を，受験票と同じように記入してください。
3．コース１は１～13ページ，コース２は15～27ページにあります。
4．足りないページがあったら，手をあげて知らせてください。
5．問題冊子には，メモや計算などを書いてもいいです。

III　解答方法に関する注意

1．解答は，解答用紙に鉛筆(HB)で記入してください。
2．問題文中のＡ，Ｂ，Ｃ,…には，それぞれ－(マイナスの符号)，または，0から9までの数が一つずつ入ります。あてはまるものを選び，解答用紙(マークシート)の対応する解答欄にマークしてください。

解答に関する記入上の注意

(1)　根号（$\sqrt{\ }$）の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。
(例：$\sqrt{12}$ のときは，$2\sqrt{3}$ と答えます。)

(2)　分数を答えるときは，符号は分子につけ，既約分数(reduced fraction)にして答えてください。
(例：$\frac{2}{6}$ は $\frac{1}{3}$，$-\frac{2}{\sqrt{6}}$ は $\frac{-2\sqrt{6}}{6}$ と分母を有理化してから約分し，$\frac{-\sqrt{6}}{3}$ と答えます。)

(3)　$\frac{\boxed{A}\sqrt{\boxed{B}}}{\boxed{C}}$ に $\frac{-\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は，以下のようにマークしてください。

(4)　$\boxed{DE}\,x$ に $-x$ と答える場合は，Ｄを－，Ｅを１とし，以下のようにマークしてください。

【解答用紙】

A	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
B	⊖	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
C	⊖	⓪	①	②	③	●	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
D	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
E	⊖	⓪	●	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

3．解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※　試験開始の合図があったら，必ず受験番号と名前を記入してください。

受験番号			＊					＊						
名　　前														

数学 コース 2
(上級コース)

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

< 解答用紙記入例 >

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

<u>選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。</u>

I

問 1　2 つの実数 a, b が

$$a^3 = \frac{1}{\sqrt{5}-2}, \quad b^3 = 2-\sqrt{5}$$

を満たすとき，$a+b$ の値を求めよう。

$a+b=x$ とおくと

$$x^3 = (a+b)^3 = a^3 + b^3 + \boxed{\mathsf{A}}\,ab(a+b)$$

となる。また，$ab = \boxed{\mathsf{BC}}$ であるから，この x は

$$x^3 + \boxed{\mathsf{D}}\,x - \boxed{\mathsf{E}} = 0$$

を満たすことが分かる。この方程式の左辺は

$$\begin{aligned} x^3 + \boxed{\mathsf{D}}\,x - \boxed{\mathsf{E}} &= \left(x^3 - \boxed{\mathsf{F}}\right) + \boxed{\mathsf{D}}\left(x - \boxed{\mathsf{F}}\right) \\ &= \left(x - \boxed{\mathsf{F}}\right)\left(x^2 + x + \boxed{\mathsf{G}}\right) \end{aligned}$$

と因数分解できる。ここで

$$x^2 + x + \boxed{\mathsf{G}} = \left(x + \frac{\boxed{\mathsf{H}}}{\boxed{\mathsf{I}}}\right)^2 + \frac{\boxed{\mathsf{JK}}}{\boxed{\mathsf{L}}} > 0$$

であるから，$x = a + b = \boxed{\mathsf{M}}$ を得る。

注）因数分解する：factorize

- 計算欄 (memo) -

問 2　2 つの関数 $y = x^2 + ax + a$ と $y = x + 1$ を考える。

(1)　2 つの関数のグラフの共有点の個数は，下記のように a と数 $\boxed{\text{Q}}$，$\boxed{\text{R}}$ との関係によって定まる。次の文中の $\boxed{\text{N}}$ ～ $\boxed{\text{P}}$ には，下の ⓪ ～ ② から適するものを選びなさい。

(i)　2 つの関数のグラフが異なる 2 点で交わるための条件は $\boxed{\text{N}}$ である。

(ii)　2 つの関数のグラフが 1 点で接するための条件は $\boxed{\text{O}}$ である。

(iii)　$y = x^2 + ax + a$ のグラフがつねに $y = x + 1$ のグラフの上方にあるための条件は $\boxed{\text{P}}$ である。

⓪　$\boxed{\text{Q}} < a < \boxed{\text{R}}$

①　$a = \boxed{\text{Q}}$　または　$a = \boxed{\text{R}}$

②　$a < \boxed{\text{Q}}$　または　$\boxed{\text{R}} < a$

(2)　a の値が条件 $\boxed{\text{P}}$ を満たすとき，2 つの関数の値の差 $g(x) = x^2 + ax + a - (x + 1)$ の最小値 m を考えよう。このとき，m は

$$m = -\frac{\boxed{\text{S}}}{\boxed{\text{T}}}(a^2 - \boxed{\text{U}}\,a + \boxed{\text{V}})$$

と表される。この m が最大となるのは $a = \boxed{\text{W}}$ のときであり，その値は $m = \boxed{\text{X}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\mathrm{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\mathrm{I}}$ の解答欄 $\boxed{\ \mathsf{Y}\ }$，$\boxed{\ \mathsf{Z}\ }$ はマークしないでください。

II

O を原点とする座標平面上に 4 点

$$A(1, 0), \quad B(0, 1), \quad C(3, 0), \quad D(0, 2)$$

をとり，線分 AB, CD 上に，それぞれ点 P, Q を

$$AP : PB = CQ : QD = k : 2$$

となるようにとる。このとき，線分 PQ の長さの最小値を求めよう。

(1)　まず，$\overrightarrow{PQ} = (x, y)$ とおき，$x + 2y$ の値を求めよう。

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\boxed{\mathsf{A}}\,\overrightarrow{OA} + k\,\overrightarrow{OB}}{k + \boxed{\mathsf{B}}}, \quad \overrightarrow{OQ} = \frac{\boxed{\mathsf{C}}\,\overrightarrow{OC} + k\,\overrightarrow{OD}}{k + \boxed{\mathsf{D}}}$$

であるから

$$(x, y) = \frac{1}{k + \boxed{\mathsf{E}}}\left(\boxed{\mathsf{F}}, k\right)$$

を得る。よって，$x + 2y = \boxed{\mathsf{G}}$ である。

(2)　PQ^2 を y を用いて表すと

$$PQ^2 = \boxed{\mathsf{H}}\,y^2 - \boxed{\mathsf{I}}\,y + \boxed{\mathsf{J}}$$

となる。よって，PQ が最小となるのは $y = \dfrac{\boxed{\mathsf{K}}}{\boxed{\mathsf{L}}}$ のときであり，その値は

$PQ = \dfrac{\boxed{\mathsf{M}}\sqrt{\boxed{\mathsf{N}}}}{\boxed{\mathsf{O}}}$ である。このときの k の値は $k = \boxed{\mathsf{P}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

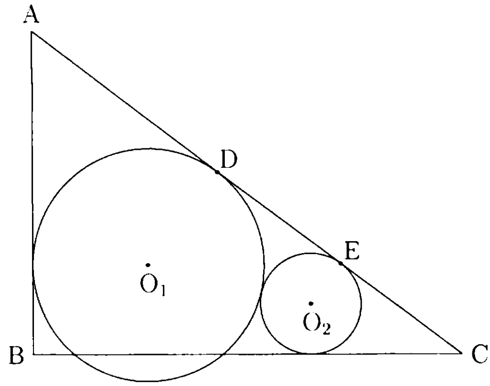
$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\text{Q}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

III

右図のように

$AB = 9,\quad BC = 12,\quad \angle ABC = 90^\circ$

を満たす三角形 ABC と，半径 $2r$ の円 O_1 と半径 r の円 O_2 がある。円 O_1 と円 O_2 は互いに外接し，円 O_1 は 2 辺 AB, AC と接し，円 O_2 は 2 辺 CA, CB に接している。このとき，r の値を求めよう。



まず，2 円 O_1, O_2 と辺 AC の接点をそれぞれ D, E とし，$\angle O_1AC = \alpha$ とする。

このとき，$\tan 2\alpha = \dfrac{\boxed{\mathsf{A}}}{\boxed{\mathsf{B}}}$ となるから，2 倍角の公式より，$\tan\alpha = \dfrac{\boxed{\mathsf{C}}}{\boxed{\mathsf{D}}}$

を得る。よって，$AD = \boxed{\mathsf{E}}\,r$ である。

次に，$\angle O_2CA = \beta$ とすると，$\alpha + \beta = \boxed{\mathsf{FG}}^\circ$ であるから，加法定理より，

$\tan\beta = \dfrac{\boxed{\mathsf{H}}}{\boxed{\mathsf{I}}}$ を得る。よって，$CE = \boxed{\mathsf{J}}\,r$ である。

さらに，$AC = \boxed{\mathsf{KL}}$，$DE = \boxed{\mathsf{M}}\sqrt{\boxed{\mathsf{N}}}\,r$ である。以上より

$$r = \frac{\boxed{\mathsf{OP}}\left(\boxed{\mathsf{Q}} - \boxed{\mathsf{R}}\sqrt{\boxed{\mathsf{S}}}\right)}{41}$$

を得る。

注）外接する：be circumscribed，
2 倍角の公式：the double-angle formula，加法定理：the addition theorem

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\text{T}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

IV

問 1　$f(x) = 4\sqrt{3}e^{-x}\cos x + 6e^{-x}$ とする。

(1)　$0 \leqq x < 2\pi$ の範囲で，$f(x) = 0$ となる x の値を a, b $(a < b)$ とすると

$$a = \frac{\boxed{\text{A}}}{\boxed{\text{B}}}\pi, \qquad b = \frac{\boxed{\text{C}}}{\boxed{\text{D}}}\pi$$

である。

(2)　$\dfrac{d}{dx}\left(pe^{-x}\cos x + qe^{-x}\sin x\right) = e^{-x}\cos x$ を満たす定数 p, q の値はそれぞれ

$$p = \frac{\boxed{\text{EF}}}{\boxed{\text{G}}}, \qquad q = \frac{\boxed{\text{H}}}{\boxed{\text{I}}}$$

である。

(3)　(1) で求めた a, b の値に対して，$e^{-a} = A$，$e^{-b} = B$ とおいて，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ の値を計算すると

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left(\boxed{\text{J}} - \sqrt{\boxed{\text{K}}}\right)A - \left(\boxed{\text{L}} + \sqrt{\boxed{\text{M}}}\right)B$$

となる。

- 計算欄 (memo) -

問 2　定積分 $S = \int_0^a x\sqrt{\frac{1}{3}x+2}\,dx$ を考える。次の問いに答えなさい。

ただし，$\boxed{\text{S}}$，$\boxed{\text{T}}$ には下の ⓪ ～ ⑨ の中から適する式を選びなさい。

(1)　$t = \sqrt{\frac{1}{3}x+2}$ とおくと

$$\int x\sqrt{\frac{1}{3}x+2}\,dx = \boxed{\text{NO}}\int\left(t^{\boxed{\text{P}}} - \boxed{\text{Q}}\,t^{\boxed{\text{R}}}\right)dt$$
$$= \boxed{\text{S}} + C$$

となる。ただし，C は積分定数である。

(2)　(1) の結果を用いて

$$S = \boxed{\text{T}}$$

を得る。したがって

$$\lim_{a\to\infty}\frac{S}{a^{\frac{\boxed{\text{U}}}{\boxed{\text{V}}}}} = \frac{\boxed{\text{W}}\sqrt{\boxed{\text{X}}}}{\boxed{\text{YZ}}}$$

である。

⓪ $\frac{6}{5}t^5(3t^2-10)$

① $\frac{6}{5}t^3(3t^2-10)$

② $\frac{12}{5}t^5(3t^2-5)$

③ $\frac{12}{5}t^3(3t^2-5)$

④ $\frac{6}{5}t^3(3t^2-5)$

⑤ $\frac{6}{5}\left\{\left(\sqrt{\frac{1}{3}a+2}\right)^5(a-4)+8\sqrt{2}\right\}$

⑥ $\frac{12}{5}\left\{\left(\sqrt{\frac{1}{3}a+2}\right)^3(a-2)+4\sqrt{2}\right\}$

⑦ $\frac{12}{5}\left\{\left(\sqrt{\frac{1}{3}a+2}\right)^5(a-2)+4\sqrt{2}\right\}$

⑧ $\frac{6}{5}\left\{\left(\sqrt{\frac{1}{3}a+2}\right)^3(a-4)+8\sqrt{2}\right\}$

⑨ $\frac{6}{5}\left\{\left(\sqrt{\frac{1}{3}a+2}\right)^3(a-2)+8\sqrt{2}\right\}$

注）積分定数：integral constant

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。

コース２の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 2」が正しくマークしてあるか，もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。

〈数　学〉

コース1			
問		解答欄	正解
I	問1	A	3
		BC	−1
		DE	34
		F	1
		G	4
		HIJKL	12154
		M	1
	問2	N	2
		O	1
		P	0
		QR	15
		STUV	1465
		W	3
		X	1
II	問1	AB	64
		CDE	360
		FGH	120
		IJK	671
	問2	LMN	212
		OPQ	−47
		RS	−1
		TUV	−31
		W	1
		X	2
		Y	8
III		AB	−2
		C	3
		D	8
		EFGH	9272
		IJK	988
		LM	28
IV		AB	52
		CDEF	1210
		GHI	410
		JKLMNO	103100
		PQRS	1623
		TUVW	3483
		X	5
		Y	4

コース2			
問		解答欄	正解
I	問1	A	3
		BC	−1
		DE	34
		F	1
		G	4
		HIJKL	12154
		M	1
	問2	N	2
		O	1
		P	0
		QR	15
		STUV	1465
		W	3
		X	1
II		AB	22
		CD	22
		EF	24
		G	2
		HIJ	584
		KL	45
		MNO	255
		P	8
III		AB	43
		CD	12
		E	4
		FG	45
		HI	13
		J	3
		KL	15
		MN	22
		OPQRS	15722
IV	問1	AB	56
		CD	76
		EFG	−12
		HI	12
		JK	33
		LM	33
	問2	NOPQR	18422
		S	1
		T	8
		UV	52
		WXYZ	2315