2021年度

日本留学試験（第１回）

試験問題

The Examination

2021年度　日本留学試験

数　学（８０分）

【コース１(基本, Basic)・コース２(上級, Advanced)】

※　どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。

I　試験全体に関する注意

1．係員の許可なしに，部屋の外に出ることはできません。

2．この問題冊子を持ち帰ることはできません。

II　問題冊子に関する注意

1．試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見ないでください。

2．試験開始の合図があったら，下の欄に，受験番号と名前を，受験票と同じように記入してください。

3．コース１は１～13ページ，コース２は15～27ページにあります。

4．足りないページがあったら，手をあげて知らせてください。

5．メモや計算などを書く場合は，問題冊子に書いてください。

III　解答方法に関する注意

1．解答は，解答用紙に鉛筆(ＨＢ)で記入してください。

2．問題文中の**A**，**B**，**C**,…には，それぞれ－(マイナスの符号)，または，０から９までの数が一つずつ入ります。適するものを選び，解答用紙(マークシート)の対応する解答欄にマークしてください。

3．同一の問題文中に $\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{BC}}$ などが繰り返し現れる場合，２度目以降は，$\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{BC}}$ のように表しています。

解答に関する記入上の注意

(1)　根号（$\sqrt{\ }$）の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。
（例：$\sqrt{32}$ のときは，$2\sqrt{8}$ ではなく $4\sqrt{2}$ と答えます。）

(2)　分数を答えるときは，符号は分子につけ，既約分数(reduced fraction)にして答えてください。

（例：$\dfrac{2}{6}$ は $\dfrac{1}{3}$，$-\dfrac{2}{\sqrt{6}}$ は $\dfrac{-2\sqrt{6}}{6}$ と分母を有理化してから約分し，$\dfrac{-\sqrt{6}}{3}$ と答えます。）

(3)　$\dfrac{\boxed{\text{A}}\sqrt{\boxed{\text{B}}}}{\boxed{\text{C}}}$ に $\dfrac{-\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は，下のようにマークしてください。

(4)　$\boxed{\text{DE}}\,x$ に $-x$ と答える場合は，**D**を－，**E**を１とし，下のようにマークしてください。

【解答用紙】

A	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
B	⊖	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
C	⊖	⓪	①	②	③	●	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
D	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
E	⊖	⓪	●	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

4．解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※　試験開始の合図があったら，必ず受験番号と名前を記入してください。

受験番号			*				*						
名　　前													

数学 コース 2
（上級コース）

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

＜ 解答用紙記入例 ＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

I

問 1　2 つの 2 次関数

$$f(x) = -2x^2,\quad g(x) = x^2 + ax + b$$

を考える。関数 $g(x)$ は次の 2 つの条件を満たしている。

(i)　$g(x)$ の値は $x = 3$ で最小になる。

(ii)　$g(4) = f(4)$

(1)　条件 (i) より $a = -\boxed{\mathbf{A}}$ である。さらに，条件 (ii) より $b = -\boxed{\mathbf{BC}}$ を得る。したがって，関数 $g(x)$ の最小値は $-\boxed{\mathbf{DE}}$ である。

(2)　$f(x) = g(x)$ を満たす x で 4 と異なるものを求めよう。x は

$$x^2 - \boxed{\mathbf{F}}\,x - \boxed{\mathbf{G}} = 0$$

を満たすから，$x = -\boxed{\mathbf{H}}$ である。

(3)　$-\boxed{\mathrm{H}} \leqq x \leqq 4$ において，$f(x) - g(x)$ の値は $x = \boxed{\mathbf{I}}$ のとき最大になり，その値は $\boxed{\mathbf{JK}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　A と B の 2 人はともに 3 枚のカードが入っている袋をもっている。袋の中の 3 枚のカードには，それぞれ 1，2，3 の数字が 1 つずつ書かれている。2 人が同時に自分の袋から 1 枚のカードを取り出し，書かれている数の大きさで勝負を競う。同じ数が書かれたカードを取り出したときは引き分けとし，カードの数が異なるときは大きい数のカードを取り出した方を勝ちとする。

(1)　1 回の勝負で引き分けになる確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{L}}}{\boxed{\mathsf{M}}}$ である。

(2)　以下，この勝負を 4 回実行するとき，次の確率を求めよう。ただし，取り出したカードは毎回元の袋に戻すこととする。

(i)　A が 3 勝以上する確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{N}}}{\boxed{\mathsf{O}}}$ である。

(ii)　A が 1 勝 1 敗 2 引き分けになる確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{P}}}{\boxed{\mathsf{QR}}}$ である。

(iii)　A の勝つ回数と B の勝つ回数が同じになる確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{ST}}}{\boxed{\mathsf{UV}}}$ である。したがって，A の勝つ回数が B の勝つ回数より多くなる確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{WX}}}{\boxed{\mathsf{UV}}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{I}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{Y}}$, $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

II

問 1　次の文中の $\boxed{\mathbf{C}}$，$\boxed{\mathbf{D}}$，$\boxed{\mathbf{E}}$，$\boxed{\mathbf{F}}$，$\boxed{\mathbf{G}}$ には，下の選択肢 ⓪ ～ ⑨ の中から適するものを選び，その他の $\boxed{}$ には適する数を入れなさい。

1 辺の長さが 1 である正四面体 OABC を考える。x は $0 < x < 1$ を満たす数とし，辺 AB を $x : (1-x)$ に内分する点を P，辺 BC を $x : (1-x)$ に内分する点を Q とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおく。このとき，$\cos\angle\mathrm{POQ}$ の値の範囲を求めよう。

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = \frac{\boxed{\mathbf{A}}}{\boxed{\mathbf{B}}}$$

を満たす。

次に，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boxed{\mathbf{C}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \boxed{\mathbf{D}}$ と表せるから

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right| = \sqrt{\boxed{\mathbf{E}}}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \boxed{\mathbf{F}}$$

となる。よって

$$\cos\angle\mathrm{POQ} = \frac{1}{\boxed{\mathbf{G}}} - \frac{\boxed{\mathbf{H}}}{\boxed{\mathbf{I}}}$$

である。

したがって，これより，求める値の範囲は

$$\frac{\boxed{\mathbf{J}}}{\boxed{\mathbf{K}}} < \cos\angle\mathrm{POQ} \leqq \frac{\boxed{\mathbf{L}}}{\boxed{\mathbf{M}}}$$

である。

⓪ $(1-x)\vec{a} + x\vec{b}$　① $x\vec{a} + (1-x)\vec{b}$　② $(1-x)\vec{b} + x\vec{c}$

③ $x\vec{b} + (1-x)\vec{c}$　④ $x^2 + x + 1$　⑤ $x^2 - x + 1$

⑥ $x^2 - x - 1$　⑦ $\frac{1}{2}\left(-x^2 + x + 1\right)$　⑧ $\frac{1}{2}\left(-x^2 - x + 1\right)$

⑨ $\frac{1}{2}\left(-x^2 + x - 1\right)$

注） 正四面体：regular tetrahedron，内分する：divide internally

\- 計算欄 (memo) -

問 2　複素数平面上の 3 点 $A(\alpha)$，$B(\beta)$，$C(\gamma)$ を頂点とする三角形 ABC において

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=1-i$$

であるとする。以下，偏角 θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(1)　複素数 $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ を極形式で表すと

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\sqrt{\boxed{\mathsf{N}}}\left(\cos\frac{\boxed{\mathsf{O}}}{\boxed{\mathsf{P}}}\pi+i\sin\frac{\boxed{\mathsf{O}}}{\boxed{\mathsf{P}}}\pi\right)$$

である。よって，点 C は，点 B を点 A を中心として $\dfrac{\boxed{\mathsf{Q}}}{\boxed{\mathsf{R}}}\pi$ だけ回転し，さらに点 A からの距離を $\sqrt{\boxed{\mathsf{S}}}$ 倍した点である。これより，複素数 $w=\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}$ の絶対値と偏角は

$$|w|=\boxed{\mathsf{T}},\quad \arg w=\frac{\boxed{\mathsf{U}}}{\boxed{\mathsf{V}}}\pi$$

である。

(2)　$\alpha+\beta+\gamma=0$ とすると

$$|\alpha|:|\beta|:|\gamma|=\sqrt{\boxed{\mathsf{W}}}:\sqrt{\boxed{\mathsf{X}}}:\sqrt{\boxed{\mathsf{Y}}}$$

である。

注）複素数平面：complex plane，偏角：argument，極形式：polar form

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

III

関数

$$f(x) = 8^x + 8^{-x} - 3\left(4^{1+x} + 4^{1-x} - 2^{4+x} - 2^{4-x}\right) - 24$$

の最小値と，最小値をとるときの x の値を求めよう。

$2^x + 2^{-x} = t$ とおくと

$$4^x + 4^{-x} = t^2 - \boxed{\mathbf{A}}, \qquad 8^x + 8^{-x} = t^3 - \boxed{\mathbf{B}}\,t$$

であるから

$$f(x) = t^3 - \boxed{\mathbf{CD}}\,t^2 + \boxed{\mathbf{EF}}\,t$$

と表せる。この右辺の t の関数を $g(t)$ とおくと，その導関数は

$$g'(t) = \boxed{\mathbf{G}}\left(t - \boxed{\mathbf{H}}\right)\left(t - \boxed{\mathbf{I}}\right)$$

である。ただし，$\boxed{\mathrm{H}} < \boxed{\mathrm{I}}$ とする。

ここで，$2^x + 2^{-x} = t$ であるから t のとる値の範囲は

$$t \geqq \boxed{\mathbf{J}}$$

である。

$t = \boxed{\mathrm{J}}$ のとき $g\left(\boxed{\mathrm{J}}\right) = \boxed{\mathbf{KL}}$ であり，$t > \boxed{\mathrm{J}}$ のとき $g(t)$ は

$t = \boxed{\mathbf{M}}$ で，極大値 $\boxed{\mathbf{NO}}$

$t = \boxed{\mathbf{P}}$ で，極小値 $\boxed{\mathbf{QR}}$

をとる。

したがって，$f(x)$ の最小値は $\boxed{\mathbf{ST}}$ であり，そのときの x の値は

$$x = \boxed{\mathbf{U}}, \qquad \log_2\left(\boxed{\mathbf{V}} \pm \sqrt{\boxed{\mathbf{WX}}}\right) - \boxed{\mathbf{Y}}$$

である。

注） 導関数：derivative

\- 計算欄 (memo) -

III の問題はこれで終わりです。III の解答欄 Z はマークしないでください。

IV

k は正の実数とする。2 曲線

$$C_1 : y = \sin^2 x, \qquad C_2 : y = k\cos 2x \qquad \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

を考える。2 曲線 C_1，C_2 と y 軸で囲まれる部分の面積を S_1 とし，2 曲線 C_1，C_2 と直線 $x = \dfrac{\pi}{2}$ で囲まれる部分の面積を S_2 とする。このとき，$S_2 - S_1$ の値は k の値に関係なく一定であることを示そう。

等式 $\sin^2 x = k\cos 2x$ を満たす x を α とおくと

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{k}{\boxed{\textsf{A}}\,k + \boxed{\textsf{B}}}}, \qquad \cos\alpha = \sqrt{\frac{k + \boxed{\textsf{C}}}{\boxed{\textsf{D}}\,k + \boxed{\textsf{E}}}}$$

である。

次に S_1，S_2 を求めると

$$S_1 = \frac{\boxed{\textsf{F}}}{\boxed{\textsf{G}}}\int_0^{\alpha}\left\{\left(\boxed{\textsf{H}}\,k + \boxed{\textsf{I}}\right)\cos\boxed{\textsf{J}}\,x - 1\right\}dx$$

$$= \frac{\boxed{\textsf{K}}}{\boxed{\textsf{L}}}\left\{\sqrt{k\left(k + \boxed{\textsf{M}}\right)} - \alpha\right\},$$

$$S_2 = \frac{\boxed{\textsf{N}}}{\boxed{\textsf{O}}}\left\{\sqrt{k\left(k + \boxed{\textsf{P}}\right)} - \alpha\right\} + \frac{\pi}{\boxed{\textsf{Q}}}$$

である。したがって

$$S_2 - S_1 = \frac{\pi}{\boxed{\textsf{R}}}$$

となり，$S_2 - S_1$ の値は k の値に関係なく一定である。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 **S** 〜 **Z** はマークしないでください。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 2」が正しくマークしてあるか，

もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。