平成26年度（2014年度）日本留学試験　**問題冊子**

数学（８０分）

【コース１(基本, Basic)・コース２(上級, Advanced)】

※　どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。

I　試験全体に関する注意

1．係員の許可なしに，部屋の外に出ることはできません。

2．この問題冊子を持ち帰ることはできません。

II　問題冊子に関する注意

1．試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見ないでください。

2．試験開始の合図があったら，下の欄に，受験番号と名前を，受験票と同じように記入してください。

3．コース１は１～13ページ，コース２は15～27ページにあります。

4．足りないページがあったら，手をあげて知らせてください。

5．メモや計算などを書く場合は，問題冊子に書いてください。

III　解答方法に関する注意

1．解答は，解答用紙に鉛筆(HB)で記入してください。

2．問題文中のA，B，C，…には，それぞれ－(マイナスの符号)，または，０から９までの数が一つずつ入ります。あてはまるものを選び，解答用紙(マークシート)の対応する解答欄にマークしてください。

3．同一の問題文中に $\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{BC}}$ などが繰り返し現れる場合，２度目以降は，$\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{BC}}$ のように表しています。

解答に関する記入上の注意

(1)　根号（$\sqrt{\ }$）の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。
（例：$\sqrt{32}$ のときは，$2\sqrt{8}$ ではなく $4\sqrt{2}$ と答えます。）

(2)　分数を答えるときは，符号は分子につけ，既約分数(reduced fraction)にして答えてください。
（例：$\frac{2}{6}$ は $\frac{1}{3}$，$-\frac{2}{\sqrt{6}}$ は $\frac{-2\sqrt{6}}{6}$ と分母を有理化してから約分し，$\frac{-\sqrt{6}}{3}$ と答えます。）

(3)　$\dfrac{\boxed{\text{A}}\sqrt{\boxed{\text{B}}}}{\boxed{\text{C}}}$ に $\dfrac{-\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は，下のようにマークしてください。

(4)　$\boxed{\text{DE}}\,x$ に $-x$ と答える場合は，Dを－，Eを１とし，下のようにマークしてください。

【解答用紙】

A	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
B	⊖	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
C	⊖	⓪	①	②	③	●	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
D	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
E	⊖	⓪	●	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

4．解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※　試験開始の合図があったら，必ず受験番号と名前を記入してください。

受験番号			＊					＊							
名　　前															

数学 コース 2
(上級コース)

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

< 解答用紙記入例 >

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

I

問 1　2 次関数 $y = ax^2 + bx + \dfrac{3}{a}$ は，次の 2 つの条件 (i), (ii) を満たすとする。

(i)　$x = 3$ のとき，y は最大値をとる。

(ii)　$x = 1$ のとき，y の値は 2 である。

このとき，a, b の値を求めよう。

条件 (i), (ii) を用いて，a, b の関係式

$$\begin{cases} b = \boxed{\textsf{AB}}\,a \\ \boxed{\textsf{C}} = a + b + \dfrac{\boxed{\textsf{D}}}{a} \end{cases}$$

を得る。

上の 2 式より，方程式

$$\boxed{\textsf{E}}\,a^2 + \boxed{\textsf{F}}\,a - \boxed{\textsf{G}} = 0$$

を得る。よって

$$a = \boxed{\textsf{HI}}, \quad b = \boxed{\textsf{J}}$$

である。このとき，この関数の最大値は $\boxed{\textsf{K}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　2 つの整式

$$P = 2x^2 - x + 2, \quad Q = x^2 - 2x + 1$$

に対して

$$E = P^2 - 4Q^2 - 3P + 6Q$$

を考える。

(1)　E の右辺を因数分解して

$$E = (P - \boxed{\text{L}}\,Q)(P + \boxed{\text{M}}\,Q - \boxed{\text{N}})$$

を得る。

(2)　E を x の式で表すと

$$E = \boxed{\text{O}}\,x(x - \boxed{\text{P}})(\boxed{\text{Q}}\,x - \boxed{\text{R}})$$

となる。

(3)　$x = -\dfrac{1-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ のとき，E の値は $\boxed{\text{S}} + \boxed{\text{T}}\sqrt{\boxed{\text{U}}}$ である。

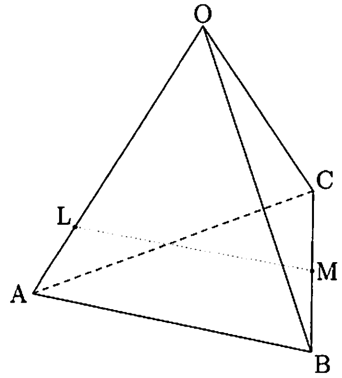
注）因数分解する：factorize

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{I}}$ の解答欄 $\boxed{\text{V}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

II

1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC において，線分 OA を 3 : 1 に内分する点を L，線分 BC の中点を M，線分 LM を $t : (1-t)$ に内分する点を P とする。ただし，$0 < t < 1$ とする。



(1) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$，$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表すと

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\boxed{\mathsf{A}}}{\boxed{\mathsf{B}}}\left(\boxed{\mathsf{C}} - t\right)\vec{a} + \frac{\boxed{\mathsf{D}}}{\boxed{\mathsf{E}}}t\left(\vec{b} + \vec{c}\right)$$

である。さらに，$\vec{a}\cdot\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \boxed{\mathsf{F}}$，$\left|\vec{b} + \vec{c}\right|^2 = \boxed{\mathsf{G}}$ であるから

$$\left|\overrightarrow{OP}\right| = \frac{1}{\boxed{\mathsf{H}}}\sqrt{\boxed{\mathsf{I}}\,t^2 - \boxed{\mathsf{J}}\,t + \boxed{\mathsf{K}}}$$

となる。ただし，$\vec{a}\cdot\left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ は $\vec{a}$ と $\left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ の内積である。

(2) $\left|\overrightarrow{OP}\right|$ が最小となるときの t の値を求めると

$$t = \frac{\boxed{\mathsf{L}}}{\boxed{\mathsf{M}}}$$

であり，その $\left|\overrightarrow{OP}\right|$ の最小値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\mathsf{N}}}}{\boxed{\mathsf{O}}}$ である。

(3) (2) のとき，$\cos\angle AOP = \dfrac{\boxed{\mathsf{P}}\sqrt{\boxed{\mathsf{Q}}}}{\boxed{\mathsf{R}}}$ である。

注） 正四面体 : regular tetrahedron，内分する : divide internally，内積 : inner product

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\text{S}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

III

$a>0$ とする。次の x に関する 2 つの方程式を $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ の範囲で考える。

$$\sin 2x + a\cos x = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

$$\cos 2x + a\sin x = -2 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

例えば，$a=\sqrt{2}$ のとき，① を満たす x は

$$x = \frac{\boxed{\text{AB}}}{\boxed{\text{C}}}\pi$$

である。この x に対して，② の左辺の値は $\boxed{\text{DE}}$ となり，② の等式が成り立たない。したがって，$a=\sqrt{2}$ のとき，①, ② は共通解をもたない。

そこで，①, ② が共通解をもつような a の値と，そのときの共通解 x を求めよう。

まず，① より

$$\sin x = \frac{\boxed{\text{FG}}}{\boxed{\text{H}}}a, \qquad \cos 2x = \boxed{\text{I}} - \frac{a^2}{\boxed{\text{J}}}$$

となる。これらを ② に代入して

$$a^2 = \boxed{\text{K}}$$

を得る。したがって，$a=\sqrt{\boxed{\text{K}}}$ であり，共通解は

$$x = \frac{\boxed{\text{LM}}}{\boxed{\text{N}}}\pi$$

である。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\text{O}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

IV

問 1　$a>0$ とする。2 つの曲線

$$C_1:\ y=e^{6x}$$
$$C_2:\ y=ax^2$$

を考える。C_1 と C_2 の両方に接する直線が 2 本引けるような a の条件を求めよう。

C_1 上の点 (t,e^{6t}) における C_1 の接線の方程式は

$$y=\boxed{\text{A}}\,e^{6t}x-e^{6t}\left(\boxed{\text{B}}\,t-\boxed{\text{C}}\right)$$

である。この接線がさらに C_2 に接するのは，2 次方程式

$$ax^2=\boxed{\text{A}}\,e^{6t}x-e^{6t}\left(\boxed{\text{B}}\,t-\boxed{\text{C}}\right)$$

が重解をもつときである。したがって，a,t に対して

$$\boxed{\text{D}}\,e^{12t}-ae^{6t}\left(\boxed{\text{E}}\,t-\boxed{\text{F}}\right)=0$$

が成り立つ。この式より

$$a=\frac{\boxed{\text{D}}\,e^{6t}}{\boxed{\text{E}}\,t-\boxed{\text{F}}}$$

を得る。この右辺を $f(t)$ とおくと，2 つの曲線 C_1 と C_2 の両方に接する直線が 2 本引けるための条件は，直線 $s=a$ が $s=f(t)$ のグラフと 2 点で交わることである。

ここで，$f(t)$ の導関数は

$$f'(t)=\frac{108e^{6t}\left(\boxed{\text{G}}\,t-\boxed{\text{H}}\right)}{\left(\boxed{\text{E}}\,t-\boxed{\text{F}}\right)^2}$$

である。

よって，求める a の条件は

$$a>\boxed{\text{I}}\,e^{\boxed{\text{J}}}$$

である。ただし，必要であれば $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{e^t}{t}=\infty$ を用いてよい。

注）導関数：derivative

- 計算欄 (memo) -

問 2　次の問題文の $\boxed{\text{K}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ には，下の ⓪ ～ ⑨ の中から適するものを選びなさい。

a, t を正の実数とする。x の 2 次関数

$$y = \frac{1}{t^2}(x - at^2)^2$$

のグラフと x 軸，y 軸によって囲まれる部分を D とする。D を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V_1，また，D を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V_2 とする。このとき，ある a の値に対して，t の値によらず $V_1 = V_2$ となることを示そう。

まず，V_1 を求めると

$$V_1 = \pi \int_{\boxed{\text{K}}}^{\boxed{\text{L}}} \frac{1}{t^{\boxed{\text{M}}}}(x - at^2)^{\boxed{\text{N}}}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{\boxed{\text{O}}} a^{\boxed{\text{P}}} t^{\boxed{\text{Q}}}$$

となる。一方，V_2 を求めると

$$V_2 = \pi \int_{\boxed{\text{K}}}^{\boxed{\text{R}}} \left(\boxed{\text{S}} - \boxed{\text{T}}\sqrt{y}\right)^{\boxed{\text{U}}} dy$$

$$= \frac{\pi}{\boxed{\text{V}}} a^{\boxed{\text{W}}} t^{\boxed{\text{X}}}$$

となる。

よって，$a = \dfrac{\boxed{\text{Y}}}{\boxed{\text{Z}}}$ のとき，t の値によらず，$V_1 = V_2$ となる。

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4
⑤ 5	⑥ 6	⑦ t	⑧ at^2	⑨ a^2t^2

〈数　学〉Mathematics

コース1 Course 1			
問 Q.		解答番号 row	正解 A.
Ⅰ	問1	AB	−6
		CD	23
		EFG	523
		HI	−1
		J	6
		K	6
	問2	LMN	223
		OPQR	3141
		STU	365
Ⅱ	問1	AB	20
		CD	12
		EFGHI	14334
		JK	34
		L	3
		M	6
	問2	NOP	177
		QR	17
		ST	28
		UV	27
		WX	72
		YZ	24
Ⅲ		A	1
		BC	−2
		D	0
		EF	12
		GHI	−18
		J	0
Ⅳ		AB	14
		CDE	154
		FGHIJK	161515
		LM	16
		NOPQR	16155

コース2 Course 2			
問 Q.		解答番号 row	正解 A.
Ⅰ	問1	AB	−6
		CD	23
		EFG	523
		HI	−1
		J	6
		K	6
	問2	LMN	223
		OPQR	3141
		STU	365
Ⅱ		ABCDE	34112
		F	1
		G	3
		HIJK	4969
		LM	13
		NO	22
		PQR	223
Ⅲ		ABC	−14
		DE	−1
		FGH	−12
		IJ	12
		K	3
		LMN	−13
Ⅳ	問1	ABC	661
		DEF	961
		GH	31
		IJ	92
	問2	KLMN	0844
		OPQ	556
		RSTU	9872
		VWX	646
		YZ	56