平成22年度

日本留学試験（第2回）

試験問題

数学 コース 2
（上級コース）

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース 1」と「コース 2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース 2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の左上にある「解答コース」の「コース 2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

< 解答用紙記入例 >

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

<u>選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。</u>

I

問 1　a を正の定数とし，x の 2 次関数

$$y = 2x^2 - 4(a+1)x + a^2 + 6a + 4$$

のグラフを F とする。

(1)　グラフ F の頂点の座標を a を用いて表すと

$$\left(a + \boxed{\text{A}},\ -a^2 + \boxed{\text{B}}\,a + \boxed{\text{C}}\right)$$

である。

(2)　グラフ F が x 軸と接するのは

$$a = \boxed{\text{D}} + \sqrt{\boxed{\text{E}}}$$

のときである。

(3)　(2) のグラフを x 軸方向に $-\sqrt{3}$，y 軸方向に 1 だけ平行移動して得られる放物線の方程式は

$$y = \boxed{\text{F}}\,x^2 - \boxed{\text{G}}\,x + \boxed{\text{H}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　a を実数とし

$$(x+2)|x-1| = |x+2|(x-1)+a$$

を満たす実数 x の集合を S で表す。

集合 S の要素の個数を調べるために，関数

$$f(x) = (x+2)|x-1| - |x+2|(x-1)$$

を考える。

この関数は

$x \leqq \boxed{\text{IJ}}$ のとき，$f(x) = \boxed{\text{K}}$

$\boxed{\text{IJ}} < x \leqq \boxed{\text{L}}$ のとき，$f(x) = -\boxed{\text{M}}x^2 - \boxed{\text{N}}x + \boxed{\text{O}}$

$\boxed{\text{L}} < x$ のとき，$f(x) = \boxed{\text{P}}$

である。

よって，S がただ 1 個の要素からなるような a の値は $a = \dfrac{\boxed{\text{Q}}}{\boxed{\text{R}}}$ で，S がちょうど 2 個の要素からなるような a の値の範囲は $\boxed{\text{S}} < a < \dfrac{\boxed{\text{T}}}{\boxed{\text{U}}}$ である。また，$a = \boxed{\text{V}}$ のとき，S の要素は無数にある。その他の a の値に対しては，S は空集合となる。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{I}}$ の解答欄 $\boxed{\text{W}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

II

xy 平面上の点 $(0, 1)$ を R とする。点 P は x 軸上の正の部分を動き，点 Q は直線 $y = 1$ 上を $\angle \mathrm{RPQ} = \dfrac{5}{6}\pi$ となるように動くとする。このとき，三角形 PQR の面積の最小値を求めよう。

(1)　$\angle \mathrm{PRQ} = \theta$ とおく。このとき

$$\mathrm{PR} = \boxed{\mathsf{A}}, \qquad \mathrm{PQ} = \boxed{\mathsf{B}}$$

である。ただし，$\boxed{\mathsf{A}}$，$\boxed{\mathsf{B}}$ には，下の ⓪ ～ ⑦ のうちから最も適するものを一つずつ選びなさい。

⓪ $\dfrac{1}{\sin\theta}$　① $\dfrac{1}{\cos\theta}$　② $\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$　③ $\dfrac{1}{\sin\theta + \cos\theta}$

④ $\dfrac{1}{\sin\theta + \sqrt{2}\cos\theta}$　⑤ $\dfrac{2}{\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta}$　⑥ $\dfrac{1}{\cos\theta + \sqrt{2}\sin\theta}$　⑦ $\dfrac{2}{\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta}$

(2)　三角形 PQR の面積を S とおくと，(1) より

$$S = \frac{1}{\boxed{\mathsf{C}}(\sin\theta\cos\theta - \sqrt{\boxed{\mathsf{D}}}\sin^2\theta)}$$

と表される。S の最小値を求めるには，上の式の分母が最大になる場合を考えればよい。

$$\boxed{\mathsf{C}}(\sin\theta\cos\theta - \sqrt{\boxed{\mathsf{D}}}\sin^2\theta) = \boxed{\mathsf{E}}\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{\boxed{\mathsf{F}}}\right) - \sqrt{\boxed{\mathsf{G}}}$$

であるから，$\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{\mathsf{HI}}}$ のとき S は最小となり，その最小値は $\boxed{\mathsf{J}} + \sqrt{\boxed{\mathsf{K}}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\mathrm{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\mathrm{II}}$ の解答欄 $\boxed{\mathrm{L}}$ ～ $\boxed{\mathrm{Z}}$ はマークしないでください。

III

座標空間内の 4 点

$$\mathrm{O}(0,0,0),\quad \mathrm{A}(0,0,2),\quad \mathrm{B}(2,1,0),\quad \mathrm{C}(0,2,0)$$

を頂点とする四面体 OABC を考える。三角形 ABC を底面としたとき，この四面体の高さをベクトルを用いて求めよう。

(1)　底面の三角形 ABC 内に点 P をとり，2 点 A, P を通る直線と線分 BC との交点を Q とする。このとき，BQ : QC $= s : (1-s)$ とおくと，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の成分は

$$\left(\boxed{\mathbf{A}} - \boxed{\mathbf{B}}\,s,\ \boxed{\mathbf{C}} + s,\ \boxed{\mathbf{D}}\right)$$

である。したがって，AP : PQ $= t : (1-t)$ とおくと，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の成分は

$$\left(\boxed{\mathbf{E}}\,t - \boxed{\mathbf{F}}\,st,\ t + st,\ \boxed{\mathbf{G}} - \boxed{\mathbf{H}}\,t\right)$$

である。

(2)　OP ⊥ AB ならば，s, t は

$$\boxed{\mathbf{I}}\,st - \boxed{\mathbf{J}}\,t + \boxed{\mathbf{K}} = 0$$

を満たす。また，OP ⊥ AC ならば，s, t は

$$st + \boxed{\mathbf{L}}\,t - \boxed{\mathbf{M}} = 0$$

を満たす。この 2 式より

$$s = \frac{\boxed{\mathbf{N}}}{\boxed{\mathbf{O}}},\qquad t = \frac{\boxed{\mathbf{P}}}{\boxed{\mathbf{Q}}}$$

を得る。

以上より，三角形 ABC を底面としたとき，この四面体の高さは $\dfrac{\boxed{\mathbf{R}}}{\boxed{\mathbf{S}}}$ である。

注）四面体：tetrahedron，底面：base

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\text{T}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

IV

問 1　x の関数 $f(x) = \dfrac{x^{3x}}{\sqrt{e^x}}$ $(x > 0)$ を考える。このとき次の問いに答えなさい。

ただし，$\boxed{\text{D}}$，$\boxed{\text{J}}$ には，下の ⓪ ～ ④ のうちから最も適するものを一つずつ選びなさい。

$y = f(x)$ とおくと，y の自然対数 $\log y$ は

$$\log y = \boxed{\text{A}}\,x\log x - \frac{\boxed{\text{B}}}{\boxed{\text{C}}}x \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

となる。① の両辺を x で微分すると

$$\boxed{\text{D}} = \boxed{\text{E}}\log x + \frac{\boxed{\text{F}}}{\boxed{\text{G}}}$$

である。よって，$x = e^{-\frac{\boxed{\text{H}}}{\boxed{\text{I}}}}$ で $y = f(x)$ は $\boxed{\text{J}}$ になることがわかる。

次に，① の両辺を 1 から e まで x について積分すると

$$\int_1^e \log y\,dx = \frac{e^{\boxed{\text{K}}}}{\boxed{\text{L}}} + \boxed{\text{M}}$$

である。

⓪ $y'y$　　① $\dfrac{y'}{y}$　　② $\dfrac{y}{y'}$　　③ 極大　　④ 極小

注）自然対数：natural logarithm

- 計算欄 (memo) -

問 2　関数 $f(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}}$ を考える。

(1)　$f'(x) = \dfrac{\boxed{\text{N}}(x - \boxed{\text{O}})}{\left(\sqrt{4x-x^2}\right)^3}$ であるから，$f(x)$ は $x = \boxed{\text{P}}$ で最小値 $\sqrt{\boxed{\text{Q}}}$ をとる。

(2)　曲線 $y = f(x)$ と 2 直線 $x = 1$，$x = 3$ および x 軸で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V = \pi\int_1^3 \left(-1 + \frac{\boxed{\text{R}}}{x} + \frac{\boxed{\text{S}}}{4-x}\right)dx$$

$$= \pi\left(\boxed{\text{TU}}\log\boxed{\text{V}} - \boxed{\text{W}}\right)$$

である。

- 計算欄 (memo) -

IV の問題はこれで終わりです。IV の解答欄 **X** ～ **Z** はマークしないでください。

コース2の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の V はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース2」が正しくマークしてあるか，もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。