

数 学（80分）

【コース1（基本, Basic）・コース2（上級, Advanced）】

※ どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。

I 試験全体に関する注意

1. 係員の許可なしに、部屋の外に出ることはできません。
2. この問題冊子を持ち帰ることはできません。

II 問題冊子に関する注意

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見ないでください。
2. 試験開始の合図があったら、下の欄に、受験番号と名前を、受験票と同じように記入してください。
3. コース1は1～13ページ、コース2は15～27ページにあります。
4. 足りないページがあったら、手をあげて知らせてください。
5. メモや計算などを書く場合は、問題冊子に書いてください。

III 解答方法に関する注意

1. 解答は、解答用紙に鉛筆(HB)で記入してください。
2. 問題文中のA, B, C, …には、それぞれ－(マイナスの符号), または, 0から9までの数が入ります。あてはまるものを選び、解答用紙(マークシート)の対応する解答欄にマークしてください。
3. 同一の問題文中に **A**, **BC** などが繰り返し現れる場合、2度目以降は、**A**, **BC** のように表しています。

解答に関する記入上の注意

- (1) 根号($\sqrt{\quad}$)の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。
(例: $\sqrt{32}$ のときは、 $2\sqrt{8}$ ではなく $4\sqrt{2}$ と答えます。)
- (2) 分数を答えるときは、符号は分子につけ、既約分数(reduced fraction)にして答えてください。

(例: $\frac{2}{6}$ は $\frac{1}{3}$, $-\frac{2}{\sqrt{6}}$ は $-\frac{2\sqrt{6}}{6}$ と分母を有理化してから約分し、 $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ と答えます。)

- (3) $\frac{\text{A}\sqrt{\text{B}}}{\text{C}}$ に $\frac{-\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は、下のようにマークしてください。

- (4) **DE** x に $-x$ と答える場合は、Dを－, Eを1とし、下のようにマークしてください。

【解答用紙】

A	●	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B	○	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9
C	○	0	1	2	3	●	5	6	7	8	9
D	●	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
E	○	0	●	2	3	4	5	6	7	8	9

4. 解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※ 試験開始の合図があったら、必ず受験番号と名前を記入してください。

受験番号			*				*					
名前												

数学 コース 2 (上級コース)

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので、どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は、右のように、解答用紙の「解答コース」の「コース2」を○で囲み、その下のマーク欄をマークしてください。

< 解答用紙記入例 >

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

選択したコースを正しくマークしないと、採点されません。

I

問 1 a, b は実数であり, $a > 0$ とする。2 つの 2 次関数

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 5, \quad g(x) = x^2 + ax + b$$

を考える。

関数 $g(x)$ が次の 2 つの条件を満たすとき, a, b の値を求めよう。

- (i) $g(x)$ の最小値は $f(x)$ の最小値より 8 だけ小さい
- (ii) $f(x) = g(x)$ を満たす x がただ 1 つ存在する

$f(x)$ の最小値は A であるから, 条件 (i) より, 等式

$$b = \frac{a^2}{\text{B}} - \text{C}$$

を得る。

よって, $f(x) = g(x)$ を満たす x を求める方程式は

$$x^2 - (a + \text{D})x - \frac{a^2}{\text{E}} + \text{FG} = 0$$

である。

したがって, 条件 (ii) と $a > 0$ より

$$a = \text{H}, \quad b = \text{IJ}$$

を得る。このとき, $f(x) = g(x)$ を満たす x は K である。

- 計算欄 (memo) -

問 2 集合 $A = \{4m \mid m \text{ は自然数}\}$, $B = \{6m \mid m \text{ は自然数}\}$ を考える。

(1) 次の ～ には, 下の ① ～ ③ の中から適するものを選びなさい。

n は自然数とする。

(i) $n \in A$ であることは, n が 2 で割り切れるための 。

(ii) $n \in B$ であることは, n が 24 で割り切れるための 。

(iii) $n \in A \cup B$ であることは, n が 3 で割り切れるための 。

(iv) $n \in A \cap B$ であることは, n が 12 で割り切れるための 。

① 必要十分条件である

② 必要条件であるが, 十分条件ではない

③ 十分条件であるが, 必要条件ではない

④ 必要条件でも十分条件でもない

(2) $C = \{m \mid m \text{ は } 1 \leq m \leq 100 \text{ を満たす自然数}\}$ とする。

$(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap C$ の要素の個数は であり, $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$ の要素の個数は である。ただし, \overline{A} , \overline{B} はそれぞれ, 全体集合を自然数の全体としたときの A , B の補集合を表す。

注) 全体集合 : universal set, 補集合 : complement

- 計算欄 (memo) -

I の問題はこれで終わります。**I** の解答欄 **T** ～ **Z** はマークしないでください。

II

点 O を中心とし、半径 1 の円の周を S とする。

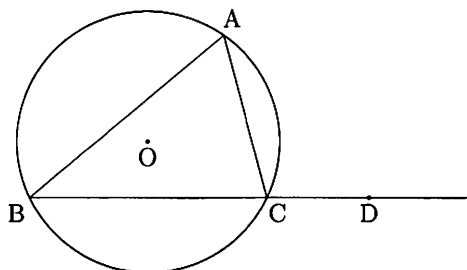
三角形 ABC は、すべての頂点が S 上にあり、
 $AB : AC = 3 : 2$ を満たすとする。図のように
 辺 BC の延長線上に点 D をとり

$$BC : CD = 2 : k$$

とおく。また

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{OC} = \vec{c}$$

とする。このとき、次の問いに答えなさい。



- (1) \overrightarrow{OD} を \vec{b} , \vec{c} , k を用いて表すと

$$\overrightarrow{OD} = \left(\frac{k}{\boxed{A}} + \boxed{B} \right) \vec{c} - \frac{k}{\boxed{C}} \vec{b}$$

である。

- (2) 等式

$$|\vec{b} - \vec{a}| = \frac{\boxed{D}}{\boxed{E}} |\vec{c} - \vec{a}|$$

が成り立つので、内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を内積 $\vec{a} \cdot \vec{c}$ を用いて表すと

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\boxed{F}}{\boxed{G}} \vec{a} \cdot \vec{c} - \frac{\boxed{H}}{\boxed{I}}$$

である。

- (3) 点 A における S の接線が点 D を通るとき

$$k = \frac{\boxed{J}}{\boxed{K}}$$

である。

注) 内積 : inner product

- 計算欄 (memo) -

Ⅱ の問題はこれで終わります。Ⅱ の解答欄 L ～ Z はマークしないでください。

III

$p > 1, q > 1$ とする。方程式

$$e^{2x} - ae^x + b = 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

において、 $t = e^x$ とおくと、 t に関する 2 次方程式

$$t^2 - at + b = 0$$

は解 $\log_q p$ と $\log_p q$ をもつとする。

このとき、 a の最小値とそのときの方程式 $\textcircled{1}$ の解を求めよう。

(1) まず

$$b = \frac{\boxed{\text{A}}}{\boxed{\text{B}}}$$

であり

$$a = \frac{\boxed{\text{C}}}{\boxed{\text{D}}} \log_q p + \frac{\boxed{\text{E}}}{\boxed{\text{F}}} \log_p q$$

である。

(2) p, q が $p > 1, q > 1$ を満たしながら動くとき、 $\log_p q > \boxed{\text{G}}$ である。

したがって、 a は最小値 $\frac{\sqrt{\boxed{\text{H}}}}{\boxed{\text{I}}}$ を $\log_p q = \frac{\sqrt{\boxed{\text{J}}}}{\boxed{\text{K}}}$ のときにとる。

そのときの方程式 $\textcircled{1}$ の解は

$$x = -\frac{\boxed{\text{L}}}{\boxed{\text{M}}} \log_e \boxed{\text{N}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

III の問題はこれで終わります。III の解答欄 O ～ Z はマークしないでください。

IV

問 1 a, t は共に正の実数とする。関数 $y = ax^3$ のグラフ C の点 $P(t, at^3)$ における接線 ℓ が C と再び交わる点を Q とする。さらに、点 P を通って x 軸に平行な直線 p と点 Q を通って y 軸に平行な直線 q が交わる点を R とする。

いま、曲線 C と直線 p , 直線 q によって囲まれる部分の面積を S_1 , 曲線 C と接線 ℓ によって囲まれる部分の面積を S_2 で表すとき、 $\frac{S_1}{S_2}$ の値を求めよう。

まず、接線 ℓ の方程式は

$$y = \boxed{\text{A}} at^{\boxed{\text{B}}} x - \boxed{\text{C}} at^{\boxed{\text{D}}}$$

であるから、点 Q の x 座標は $-\boxed{\text{E}} t$ である。

したがって、 S_1 を求めると

$$S_1 = \frac{\boxed{\text{FG}}}{\boxed{\text{H}}} at^{\boxed{\text{I}}}$$

となる。また、 S_2 は三角形 PQR の面積から S_1 を引いたものであるから

$$S_2 = \frac{\boxed{\text{JK}}}{\boxed{\text{L}}} at^{\boxed{\text{M}}}$$

である。

よって、 $\frac{S_1}{S_2}$ の値は a, t の値に関係なく、常に

$$\frac{S_1}{S_2} = \boxed{\text{N}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

問 2 x の関数

$$f_n(x) = \sin^n x \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

について次の問いに答えなさい。

- (1) 次の等式が成り立つ場合を考える。ただし、 a, b, c は実数である。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - x^2 - (b - x^2)^2}{f_n(x)} = c$$

- (i) $a = b$ □ である。

- (ii) $n = 2$ のとき、 $c = 6$ ならば $b = \frac{\text{P}}{\text{Q}}$ である。

- (iii) $n = 4$ のとき、 $b = \frac{\text{R}}{\text{S}}$ 、 $c = -\text{T}$ である。

(問 2 は次ページに続く)

(2) この $f_n(x)$ を用いて、定積分

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) \sin 2x \, dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を考える。

積分の計算をすると

$$I_n = \frac{\boxed{\text{U}}}{n + \boxed{\text{V}}}$$

である。したがって

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (I_{n-1} + I_n + I_{n+1} + \dots + I_{2n-2}) &= \int_0^{\boxed{\text{W}}} \frac{\boxed{\text{X}}}{\boxed{\text{Y}} + x} \, dx \\ &= \log \boxed{\text{Z}} \end{aligned}$$

である。

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 2」が正しくマークしてあるか、
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。

〈数 学〉 Mathematics

コース 1 Course 1		
問 Q.	解答番号 row	正解 A.
I	問 1	A 3
		BC 45
		DEFG 4410
		H 2
		IJ -4
	問 2	K 3
		L 2
		M 1
		N 3
		O 0
II	問 1	PQ 92
		RS 67
	問 2	ABC 720
		DEF 120
		GHI 360
		J 6
		KL 24
		MNO 288
	問 2	PQR 247
		STU 115
III		V 4
		W 1
		X 7
		YZ 52
IV	問 1	A 4
		B 0
		C 2
		D 4
	問 2	ABC 843
		DE 88
		FG 90
		HI 22
		JK 45
		LM 30
		NO 13
		PQRS 2314
		TUV 223

コース 2 Course 2			
問 Q.		解答番号 row	正解 A.
I	問 1	A	3
		BC	45
		DEFG	4410
		H	2
		IJ	−4
	問 2	K	3
		L	2
		M	1
		N	3
		O	0
II		PQ	92
		RS	67
		ABC	212
		DE	32
III		FGHI	9454
		JK	85
		AB	16
		CDEF	1213
		G	0
		HI	63
IV	問 1	JK	62
		LMN	126
		ABCD	3223
		E	2
		FGHI	2744
	問 2	JKLM	2744
		N	1
		O	2
		PQ	72
		RS	12
		T	1
		UV	22
		WXY	121
		Z	4