平成30年度

日本留学試験（第２回）

試 験 問 題

The Examination

平成30年度（2018年度）日本留学試験

数　学（８０分）

【コース１(基本, Basic)・コース２(上級, Advanced)】

※　どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。

Ⅰ　**試験全体に関する注意**

1．係員の許可なしに，部屋の外に出ることはできません。

2．この問題冊子を持ち帰ることはできません。

Ⅱ　**問題冊子に関する注意**

1．試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見ないでください。

2．試験開始の合図があったら，下の欄に，受験番号と名前を，受験票と同じように記入してください。

3．コース１は１～14ページ，コース２は15～27ページにあります。

4．足りないページがあったら，手をあげて知らせてください。

5．メモや計算などを書く場合は，問題冊子に書いてください。

Ⅲ　**解答方法に関する注意**

1．解答は，解答用紙に鉛筆(ＨＢ)で記入してください。

2．問題文中の**A**，**B**，**C**,…には，それぞれ－(マイナスの符号)，または，０から９までの数が一つずつ入ります。あてはまるものを選び，解答用紙(マークシート)の対応する解答欄にマークしてください。

3．同一の問題文中に $\boxed{\mathsf{A}}$ ，$\boxed{\mathsf{BC}}$ などが繰り返し現れる場合，２度目以降は，$\boxed{\mathsf{A}}$ ，$\boxed{\mathsf{BC}}$ のように表しています。

解答に関する記入上の注意

(1)　根号（$\sqrt{\ }$）の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。
(例：$\sqrt{32}$ のときは，$2\sqrt{8}$ ではなく $4\sqrt{2}$ と答えます。)

(2)　分数を答えるときは，符号は分子につけ，既約分数(reduced fraction)にして答えてください。
(例：$\dfrac{2}{6}$ は $\dfrac{1}{3}$，$-\dfrac{2}{\sqrt{6}}$ は $\dfrac{-2\sqrt{6}}{6}$ と分母を有理化してから約分し，$\dfrac{-\sqrt{6}}{3}$ と答えます。)

(3)　$\dfrac{\boxed{\mathsf{A}}\sqrt{\boxed{\mathsf{B}}}}{\boxed{\mathsf{C}}}$ に $\dfrac{-\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は，下のようにマークしてください。

(4)　$\boxed{\mathsf{DE}}\,x$ に $-x$ と答える場合は，**D**を－，**E**を１とし，下のようにマークしてください。

【解答用紙】

A	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
B	⊖	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
C	⊖	⓪	①	②	③	●	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
D	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
E	⊖	⓪	●	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

4．解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※　試験開始の合図があったら，必ず受験番号と名前を記入してください。

受験番号			＊					＊						
名　　前														

数学 コース 2
（上級コース）

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

＜ 解答用紙記入例 ＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

I

問 1　2 次関数

$$f(x) = x^2 - 2(a+1)x + 2a^2$$

の $0 \leqq x \leqq 2$ における最大値 M と最小値 m について考える。ただし，a は $0 \leqq a \leqq 3$ を満たす定数とする。

(1)　$y = f(x)$ のグラフの頂点の座標は

$$\left(a + \boxed{\mathsf{A}},\ a^2 - \boxed{\mathsf{B}}\,a - \boxed{\mathsf{C}}\right)$$

である。

(2)　次の文中の $\boxed{\mathsf{D}}$ ～ $\boxed{\mathsf{H}}$ には，下の選択肢 ⓪ ～ ⑨ の中から適するものを選びなさい。

最大値 M，最小値 m を軸の位置に応じて求めると

$0 \leqq a < \boxed{\mathsf{D}}$ のとき

$$M = \boxed{\mathsf{E}}, \quad m = \boxed{\mathsf{F}}$$

$\boxed{\mathsf{D}} \leqq a \leqq 3$ のとき

$$M = \boxed{\mathsf{G}}, \quad m = \boxed{\mathsf{H}}$$

である。

⓪　0	①　1	②　2	③　3
④　$a^2 - 2a$	⑤　$a^2 - 2a - 1$	⑥　$2a^2$	
⑦　$2a^2 - 2a - 1$	⑧　$2a^2 - 4a$	⑨　$2a^2 - 6a + 3$	

(3)　m が最大となるのは $a = \boxed{\mathsf{I}}$ のときであり，このときの m の値は $\boxed{\mathsf{J}}$ である。また，m が最小となるのは $a = \boxed{\mathsf{K}}$ のときであり，このときの m の値は $\boxed{\mathsf{LM}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　1 個のさいころを 3 回投げて，1 回目，2 回目，3 回目に出る目の数をそれぞれ a, b, c とする。この a, b, c を用いて，2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ を考える。

(1)　$b = 4$ かつ 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつ確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{N}}}{\boxed{\mathsf{OPQ}}}$ である。

(2)　$f(10) > 453$ となる確率を求めよう。

$f(10) > 453$ となる (a, b, c) の場合の数を求めると，次のようになる。

$a = 4$ かつ $b = 5$ のとき，$\boxed{\mathsf{R}}$ 通り

$a = 4$ かつ $b = 6$ のとき，$\boxed{\mathsf{S}}$ 通り

$a = 5$ のとき，$\boxed{\mathsf{TU}}$ 通り

$a = 6$ のとき，$\boxed{\mathsf{VW}}$ 通り

よって，求める確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{X}}}{\boxed{\mathsf{Y}}}$ である。

注）さいころ：dice

- 計算欄 (memo) -

| I | の問題はこれで終わりです。 | I | の解答欄 | Z | はマークしないでください。 |

II

問 1　数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = \frac{2}{9}, \quad a_n = \frac{(n+1)(2n-3)}{3n(2n+1)}a_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

で与えられている。このとき，一般項 a_n と無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和を求めよう。

(1)　次の文中の $\boxed{\text{A}}$ ～ $\boxed{\text{E}}$ には，下の選択肢 ⓪ ～ ⑨ の中から適するものを選びなさい。

まず，$b_n = \dfrac{n+1}{3^n a_n}$ とおき，$\dfrac{b_n}{b_{n-1}}$ を n の式で表すと

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{\boxed{\text{A}}}{\boxed{\text{B}}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{\boxed{\text{C}}}{\boxed{\text{D}}}$$

となる。この式より

$$a_n = \frac{n+1}{3^n(\boxed{\text{E}})(2n+1)}$$

である。

⓪ $n-1$　① n　② $n+1$　③ $2n-1$　④ $2n+1$

⑤ $2n-3$　⑥ $2n+3$　⑦ $3n-1$　⑧ $3n$　⑨ $3n+1$

(2)　次に，$c_n = \dfrac{1}{3^n(2n+1)}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ とおく。このとき，$a_n = Ac_{n-1} + Bc_n$ とおくと，$A = \dfrac{\boxed{\text{F}}}{\boxed{\text{G}}}$，$B = \dfrac{\boxed{\text{HI}}}{\boxed{\text{J}}}$ である。この式を用いて，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めると

$$S_n = \frac{\boxed{\text{K}}}{\boxed{\text{L}}}(\boxed{\text{M}} - c_n)$$

となる。したがって

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\boxed{\text{N}}}{\boxed{\text{O}}}$$

を得る。

- 計算欄 (memo) -

問 2　x 軸上の点 $(5,0)$ を中心とする半径 4 の円 C を考える。

(1)　円 C 上に点 $\mathrm{P}(p,q)$ をとると

$$p^2 - \boxed{\mathbf{PQ}}\,p + q^2 + \boxed{\mathbf{R}} = 0$$

が成り立つ。また，点 $\mathrm{P}(p,q)$ における円 C の接線の方程式は

$$(p - \boxed{\mathbf{S}})x + qy = \boxed{\mathbf{T}}\,p - \boxed{\mathbf{U}}$$

である。

(2)　$a \geqq 0$ とし，y 軸上の点 $\mathrm{A}(0,a)$ から円 C に接線を引き，その接点を $\mathrm{P}(p,q)$ とおく。

線分 AP の長さが最小となるのは，$a = \boxed{\mathbf{V}}$ のときであり，その長さは $\boxed{\mathbf{W}}$ である。

また，点 A から円 C に引いた 2 本の接線が直交するのは，線分 AP の長さが $\boxed{\mathbf{X}}$ のときであり，このときの a の値は $a = \sqrt{\boxed{\mathbf{Y}}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\mathrm{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\mathrm{II}}$ の解答欄 $\boxed{\ \mathsf{Z}\ }$ はマークしないでください。

III

x の関数

$$f(x) = x^3 - 3ax^2 - 3(2a+1)x + a + 2$$

について，次の問いに答えなさい。

(1)　次の文中の $\boxed{\textsf{G}}$ ～ $\boxed{\textsf{K}}$ には，下の選択肢 ⓪ ～ ⑤ の中から適するものを選びなさい。また，他の $\boxed{}$ には，適する数を入れなさい。

$f(x)$ の導関数は

$$f'(x) = \boxed{\textsf{A}}\left(x - \boxed{\textsf{B}}\,a - \boxed{\textsf{C}}\right)\left(x + \boxed{\textsf{D}}\right)$$

であるから

(i)　$a > \boxed{\textsf{EF}}$ のとき，$f(x)$ は $x = -\boxed{\textsf{D}}$ で $\boxed{\textsf{G}}$ となり，

$x = \boxed{\textsf{B}}\,a + \boxed{\textsf{C}}$ で $\boxed{\textsf{H}}$ となる。

(ii)　$a = \boxed{\textsf{EF}}$ のとき，$f(x)$ はつねに $\boxed{\textsf{I}}$ となる。

(iii)　$a < \boxed{\textsf{EF}}$ のとき，$f(x)$ は $x = -\boxed{\textsf{D}}$ で $\boxed{\textsf{J}}$ となり，

$x = \boxed{\textsf{B}}\,a + \boxed{\textsf{C}}$ で $\boxed{\textsf{K}}$ となる。

⓪　極大　　①　極小　　②　増加　　③　減少

④　最大　　⑤　最小

（III は次ページに続く）

注）　導関数：derivative

(2)　$-1 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最小値 m を a を用いて表そう。

(i)　$a \geqq$ $\boxed{\text{L}}$ のとき，$m =$ $\boxed{\text{MN}}\,a$ である。

(ii)　$\boxed{\text{OP}} \leqq a <$ $\boxed{\text{L}}$ のとき，$m =$ $\boxed{\text{QR}}\left(a^3 + \boxed{\text{S}}\,a^2 + \boxed{\text{T}}\,a\right)$ である。

(iii)　$a <$ $\boxed{\text{OP}}$ のとき，$m =$ $\boxed{\text{U}}\,a + \boxed{\text{V}}$ である。

(3)　(2) の m の値が最も大きくなるのは $a = \dfrac{-\boxed{\text{W}} + \sqrt{\boxed{\text{X}}}}{\boxed{\text{Y}}}$ のときである。

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

IV

2つの関数

$$y = x \log ax \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

$$y = 2x - 3 \quad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

を考える。ただし，$a > 0$ とする。また，log は自然対数を表す。

(1)　① のグラフが ② のグラフに接するような a を求めよう。

点 $(t, t \log at)$ における ① のグラフの接線の方程式は $\boxed{\text{A}}$ である。ただし，$\boxed{\text{A}}$ には，次の選択肢 ⓪ ～ ③ の中から適するものを選びなさい。

⓪ $y = (\log at + 1)x - t$　　① $y = (\log at + a)x - t$

② $y = (a \log t + 1)x + t$　　③ $y = (a \log t + a)x + t$

したがって，① のグラフが ② のグラフに接するのは $a = \dfrac{e}{\boxed{\text{B}}}$ のときで，その接点の座標は $(\boxed{\text{C}}, \boxed{\text{D}})$ である。

(2)　$a = \dfrac{e}{\boxed{\text{B}}}$ のとき，関数 ① は $x = \boxed{\text{E}}\,e^{-\boxed{\text{F}}}$ で最小値 $-\boxed{\text{G}}\,e^{-\boxed{\text{H}}}$ をとる。

（IV は次ページに続く）

注） 自然対数：natural logarithm

(3)　$a = \dfrac{e}{\boxed{\text{B}}}$ のとき，① のグラフと ② のグラフおよび x 軸で囲まれる部分の面積 S を求めよう。

次の不定積分を求めると

$$\int x \log ax \, dx = \boxed{\text{I}} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

である。ただし，$\boxed{\text{I}}$ には，次の選択肢 ⓪ ～ ③ の中から適するものを選びなさい。

⓪ $\dfrac{1}{2}x^2 \log ax - \dfrac{1}{2}x^2$　　① $2x^2 \log ax - 2x^2$

② $\dfrac{1}{2}x^2 \log ax - \dfrac{1}{4}x^2$　　③ $2x^2 \log ax - 4x^2$

したがって

$$S = \frac{\boxed{\text{J}}}{\boxed{\text{K}}} e^{-\boxed{\text{L}}}$$

である。

注）不定積分：indefinite integral

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\text{M}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 2」が正しくマークしてあるか，
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。