平成17年度

日本留学試験（第2回）

試 験 問 題

数学 コース 2

(上級コース)

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース 1」と「コース 2」がありますので，どちらか一方のコースを選んで解答してください。「コース 2」を選ぶ場合は，右のように，解答用紙の左上にある「解答コース」の「コース 2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。選択したコースが正しくマークされていないと，採点されません。

< 解答用紙記入例 >

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

I

問 1　m を正の整数とする。放物線 $y = x^2 + 48$ と直線 $y = m^2$ の交点の x 座標が整数となる場合を考える。そのうち，x 座標が正の整数となる交点を P とする。

交点 P の x 座標は，方程式 $x^2 + 48 = m^2$ を満たすから $m^2 - x^2 = 48$ が成り立つ。

まず，$m^2 - x^2 = 48$ を満たす $m + x$ と $m - x$ の組合せを，$m + x$ の値の大きい順に並べると

$$(m+x, m-x) = \left(\boxed{\text{AB}}, \boxed{\text{C}}\right),\quad \left(\boxed{\text{DE}}, \boxed{\text{F}}\right),\quad \left(\boxed{\text{GH}}, \boxed{\text{I}}\right),$$

$$\left(\boxed{\text{JK}}, \boxed{\text{L}}\right),\quad \left(\boxed{\text{M}}, \boxed{\text{N}}\right)$$

となる。したがって，m が整数となるものは，m を大きい値から順に並べると

$$m = \boxed{\text{OP}},\quad \boxed{\text{Q}},\quad \boxed{\text{R}}$$

である。

問 2　次の文中の $\boxed{\mathrm{S}}$ ～ $\boxed{\mathrm{W}}$ について，最も適するものを下の ⓪ ～ ③ のうちから一つずつ選べ。 ただし a, b は実数とする。

(1)　$a \geqq 2$ かつ $b \geqq 2$ は $a+b \geqq 4$ かつ $ab \geqq 4$ であるための $\boxed{\mathrm{S}}$ 。

(2)　$a^2 = b^2$ は $a+b=0$ であるための $\boxed{\mathrm{T}}$ 。

(3)　$|a|+|b|=0$ は $a^2+b^2=0$ であるための $\boxed{\mathrm{U}}$ 。

(4)　$a^2 \geqq 1$ は $a \geqq 0$ であるための $\boxed{\mathrm{V}}$ 。

(5)　$a^3 = b^3$ は $|a|=|b|$ であるための $\boxed{\mathrm{W}}$ 。

⓪ 必要十分条件である
① 必要条件であるが，十分条件ではない
② 十分条件であるが，必要条件ではない
③ 必要条件でも十分条件でもない

$\boxed{\mathrm{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\mathrm{I}}$ の解答欄 $\boxed{\mathrm{X}}$ ～ $\boxed{\mathrm{Z}}$ は空欄にしてください。

II

問 1

(1) $\left(\frac{x}{2}+1\right)\left(\frac{x}{2}+2\right)\left(\frac{x}{2}+3\right)\left(\frac{x}{2}+4\right)$ を展開すると

$$\frac{1}{16}x^4+\frac{\boxed{\mathrm{A}}}{\boxed{\mathrm{B}}}x^3+\frac{\boxed{\mathrm{C\,D}}}{\boxed{\mathrm{E}}}x^2+25x+24$$

である。

(2) $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$, $y=\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$ とすると，$xy=\boxed{\mathrm{F}}\sqrt{\boxed{\mathrm{G}}}$ である。

また，$\dfrac{x}{y}$ の値は

$$\frac{x}{y}=1+\frac{\boxed{\mathrm{H}}\sqrt{6}}{\boxed{\mathrm{I}}}+\frac{\sqrt{10}}{\boxed{\mathrm{J}}}+\frac{\sqrt{15}}{\boxed{\mathrm{K}}}$$

である。

注） 展開する：expand

問 2　a，k は実数とする。x，y に関する方程式が

$$x^2 + ky^2 + ax + 2aky + 3ak = 4$$

である曲線を C とする。

(1)　$k = \boxed{\text{L}}$ のとき，C は

中心が $\left(\dfrac{\boxed{\text{MN}}}{\boxed{\text{O}}} a,\ \boxed{\text{PQ}} a \right)$，　半径が $\sqrt{\dfrac{\boxed{\text{R}}}{\boxed{\text{S}}} a^2 - \boxed{\text{T}} a + 4}$

の円である。また，この中心は a の値が変わると，直線 $y = \boxed{\text{U}} x$ 上を動く。

(2)　$a = 0$ とする。

C が楕円で，その焦点の一つが $(1, 0)$ であれば，$k = \dfrac{\boxed{\text{V}}}{\boxed{\text{W}}}$ である。

C が双曲線で，その焦点の一つが $(\sqrt{6}, 0)$ であれば，$k = \boxed{\text{XY}}$ である。

注）楕円：ellipse，双曲線：hyperbora，焦点：focus

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\text{Z}}$ は空欄にしてください。

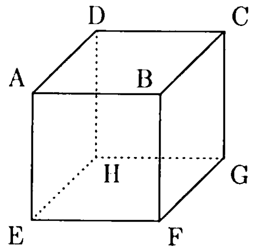
$\boxed{\text{III}}$

問 1　$-\dfrac{\pi}{6} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ のとき

$$f(x) = \log_4(1 + \sin x) + \log_2 \sqrt{1 - \sin x}$$

は $x = \dfrac{\boxed{\text{A}}}{\boxed{\text{B}}}\pi$ で最小値 $\dfrac{\boxed{\text{C D}}}{\boxed{\text{E}}}$ をとり，$x = \boxed{\text{F}}$ で最大値 $\boxed{\text{G}}$ をとる。

問２　一辺の長さが１の立方体 ABCD-EFGH の辺 CD，EF 上にそれぞれ点 M，N を



$$\mathrm{CM} : \mathrm{MD} = 1 : 1, \qquad \mathrm{EN} : \mathrm{NF} = 3 : 1$$

となるようにとる。また，線分 MN 上に点 P をとり

$$\mathrm{MP} = t\mathrm{MN}$$

とおく。さらに $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \vec{c}$ とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AN}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{\boxed{\mathrm{H}}}{\boxed{\mathrm{I}}}\vec{a} + \vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AN}} = \frac{\boxed{\mathrm{J}}}{\boxed{\mathrm{K}}}\vec{a} + \vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{t + \boxed{\mathrm{L}}}{\boxed{\mathrm{M}}}\vec{a} + (1-t)\vec{b} + t\vec{c}$$

である。

（問２は次ページに続く。）

注）立方体：cube

(2)　AP⊥MN となるのは

$$t = \frac{\boxed{\mathsf{NO}}}{\boxed{\mathsf{PQ}}}$$

のときである。

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\ \mathsf{R}\ }$ ～ $\boxed{\ \mathsf{Z}\ }$ は空欄にしてください。

IV

問 1　a は定数で，$a \neq 0$ とする。x の関数

$$f(x) = a(2e^{3x} + 3e^{-2x}) + a^2$$

を考える。ただし，e は自然対数の底とする。

(1)　$\dfrac{f'(0)}{a} = \boxed{\mathsf{A}}$，　$\dfrac{f''(0)}{a} = \boxed{\mathsf{B\,C}}$ である。

(2)　$f(x)$ が最小値をもち，その値が 36 ならば，$a = \boxed{\mathsf{D}}$ である。

このとき

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{\boxed{\mathsf{E}}}{\boxed{\mathsf{F}}}e^3 - \boxed{\mathsf{G}}e^{-2} + \frac{\boxed{\mathsf{H\,I}}}{\boxed{\mathsf{J}}}$$

である。

注）自然対数の底：the base of the natural logarithm

問 2　等式 $f(x) = \sin x + 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \sin x - \frac{\boxed{\mathrm{K}}}{\boxed{\mathrm{L}}}$$

である。よって

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \boxed{\mathrm{M}} - \frac{\boxed{\mathrm{N}}}{\boxed{\mathrm{O}}}\pi$$

である。

IV の問題はこれで終わりです。IV の解答欄 P ～ Z は空欄にしてください。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。

解答用紙には V がありますが，V の問題はありませんので，空欄にしてください。

この問題用紙を持ち帰ることはできません。