平成29年度

日本留学試験（第１回）

試験問題

The Examination

平成29年度（2017年度）日本留学試験

数　学（８０分）

【コース１(基本, Basic)・コース２(上級, Advanced)】

※　どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。

Ⅰ　試験全体に関する注意

1．係員の許可なしに，部屋の外に出ることはできません。

2．この問題冊子を持ち帰ることはできません。

Ⅱ　問題冊子に関する注意

1．試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見ないでください。

2．試験開始の合図があったら，下の欄に，受験番号と名前を，受験票と同じように記入してください。

3．コース１は１～13ページ，コース２は15～27ページにあります。

4．足りないページがあったら，手をあげて知らせてください。

5．メモや計算などを書く場合は，問題冊子に書いてください。

Ⅲ　解答方法に関する注意

1．解答は，解答用紙に鉛筆(ＨＢ)で記入してください。

2．問題文中のA，B，C，…には，それぞれ－(マイナスの符号)，または，０から９までの数が一つずつ入ります。あてはまるものを選び，解答用紙(マークシート)の対応する解答欄にマークしてください。

3．同一の問題文中に $\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{BC}}$ などが繰り返し現れる場合，２度目以降は，$\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{BC}}$ のように表しています。

解答に関する記入上の注意

(1)　根号（$\sqrt{\ }$）の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。
（例：$\sqrt{32}$ のときは，$2\sqrt{8}$ ではなく $4\sqrt{2}$ と答えます。）

(2)　分数を答えるときは，符号は分子につけ，既約分数(reduced fraction)にして答えてください。
（例：$\frac{2}{6}$ は $\frac{1}{3}$，$-\frac{2}{\sqrt{6}}$ は $\frac{-2\sqrt{6}}{6}$ と分母を有理化してから約分し，$\frac{-\sqrt{6}}{3}$ と答えます。）

(3)　$\dfrac{\boxed{\text{A}}\sqrt{\boxed{\text{B}}}}{\boxed{\text{C}}}$ に $\dfrac{-\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は，下のようにマークしてください。

(4)　$\boxed{\text{DE}}\,x$ に $-x$ と答える場合は，Dを－，Eを１とし，下のようにマークしてください。

【解答用紙】

A	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
B	⊖	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
C	⊖	⓪	①	②	③	●	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
D	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
E	⊖	⓪	●	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

4．解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※　試験開始の合図があったら，必ず受験番号と名前を記入してください。

受験番号			*					*						
名　　前														

数学 コース 2
(上級コース)

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

< 解答用紙記入例 >

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

I

問 1　2 次関数

$$y = 3x^2 - 6$$

を考える。

(1)　$y = 3x^2 - 6$ のグラフを平行移動して，2 点 $(1, 5)$，$(4, 14)$ を通るようにする。このとき，このグラフを表す 2 次関数は

$$y = \boxed{\text{A}}x^2 - \boxed{\text{BC}}x + \boxed{\text{DE}} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

である。このグラフは，$y = 3x^2 - 6$ のグラフを x 軸方向に $\boxed{\text{F}}$，y 軸方向に $\boxed{\text{G}}$ 平行移動したものである。

(2)　直線 $y = c$ に関して $y = 3x^2 - 6$ のグラフと対称なグラフを表す 2 次関数は

$$y = -\boxed{\text{H}}x^2 + \boxed{\text{I}}c + \boxed{\text{J}} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

である。

2 次関数 ① と ② のグラフが共有点を 1 つだけもつとき，$c = \boxed{\text{K}}$ であり，共有点の座標は $(\boxed{\text{L}}, \boxed{\text{M}})$ である。

注）対称な：symmetric

- 計算欄 (memo) -

問 2　白いカードが 4 枚，赤いカードが 3 枚，黒いカードが 3 枚あり，これら 10 枚のカードにはすべて異なる数字が記されている。

(1)　10 枚のカードから 2 枚のカードを選び，それらを 2 つの箱 A, B に 1 枚ずつ入れる。この入れ方は全部で $\boxed{\mathrm{NO}}$ 通りある。

(2)　10 枚のカードから 2 枚のカードを選ぶ。2 枚とも同じ色となるような選び方は $\boxed{\mathrm{PQ}}$ 通りあり，2 枚の色が異なるような選び方は $\boxed{\mathrm{RS}}$ 通りある。

次に，この 10 枚のカードを 1 つの箱に入れ，その中からカードを 1 枚ずつ 2 度取り出す。ただし，最初に取り出したカードは箱に戻さないものとする。

(3)　取り出した 2 枚のカードが同じ色である確率は $\dfrac{\boxed{\mathrm{T}}}{\boxed{\mathrm{UV}}}$ である。

(4)　最初に取り出したカードの色が白か赤であり，2 度目に取り出したカードの色が赤か黒である確率は $\dfrac{\boxed{\mathrm{WX}}}{\boxed{\mathrm{YZ}}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

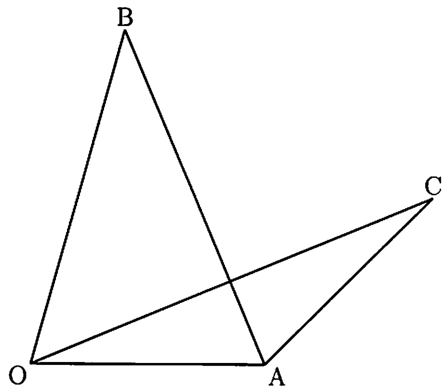
$\boxed{\mathrm{I}}$ の問題はこれで終わりです。

II

問 1　右図のように，1 辺 OA を共有する三角形 OAB と三角形 OAC が，次の 2 つの条件を満たしているとする。

(i)　$\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

(ii)　三角形 OAC の重心 G は線分 AB 上にある



このとき，x の値を求め，$\overrightarrow{OG}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表そう。

線分 OC と線分 AB の交点を D とおくと

$$\overrightarrow{OD} = \frac{x}{\boxed{\mathbf{A}}}\overrightarrow{OA} + \frac{\boxed{\mathbf{B}}}{\boxed{\mathbf{C}}}\overrightarrow{OB}$$

となる。また，D は線分 AB 上にあるので，$x = \dfrac{\boxed{\mathbf{D}}}{\boxed{\mathbf{E}}}$ を得る。

したがって

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\boxed{\mathbf{F}}}{\boxed{\mathbf{G}}}\overrightarrow{OA} + \frac{\boxed{\mathbf{H}}}{\boxed{\mathbf{I}}}\overrightarrow{OB}$$

である。

特に，OA = 1，OB = 2，∠AOB = 60° のとき，OG $= \dfrac{\sqrt{\boxed{\mathbf{JK}}}}{\boxed{\mathbf{L}}}$ となる。

注）重心：center of gravity

- 計算欄 (memo) -

問 2　z は $|z|=2$ を満たす複素数とする。原点を O とする複素数平面上で $1+z$, $1-\frac{1}{2}z$ を表す点をそれぞれ A, B とおく。

まず，複素数 z は

$$z = \boxed{\mathrm{M}}\,(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (-\pi \leqq \theta < \pi)$$

と表すことができる。

(1)　z が実数でないとき，三角形 OAB の面積 S は $S = \boxed{\mathrm{N}}$ である。ただし，$\boxed{\mathrm{N}}$ には次の選択肢 ⓪ ～ ⑧ の中から適するものを選びなさい。

したがって，$\theta = \pm\dfrac{\boxed{\mathrm{O}}}{\boxed{\mathrm{P}}}\pi$ のとき S は最大になる。

⓪ $\frac{1}{2}\left|\sin\left(\theta+\frac{1}{3}\pi\right)\right|$　① $\frac{1}{2}|\sin\theta|$　② $\frac{1}{2}\left|\sin\left(\theta-\frac{1}{3}\pi\right)\right|$

③ $\left|\sin\left(\theta+\frac{1}{3}\pi\right)\right|$　④ $|\sin\theta|$　⑤ $\left|\sin\left(\theta-\frac{1}{3}\pi\right)\right|$

⑥ $\frac{3}{2}\left|\sin\left(\theta+\frac{1}{3}\pi\right)\right|$　⑦ $\frac{3}{2}|\sin\theta|$　⑧ $\frac{3}{2}\left|\sin\left(\theta-\frac{1}{3}\pi\right)\right|$

(2)　三角形 OAB が OA = OB である二等辺三角形となるとき

$$|1+z| = \left|1-\frac{1}{2}z\right| = \sqrt{\boxed{\mathrm{Q}}}$$

である。また，$-\pi \leqq \arg(1+z) < \pi$, $-\pi \leqq \arg\left(1-\frac{1}{2}z\right) < \pi$ とすると

$$\arg(1+z) = \pm\frac{\boxed{\mathrm{R}}}{\boxed{\mathrm{S}}}\pi, \quad \arg\left(1-\frac{1}{2}z\right) = \mp\frac{\boxed{\mathrm{T}}}{\boxed{\mathrm{U}}}\pi \quad \text{(複号同順)}$$

である。

注） 複素数：complex number，複素数平面：complex plane

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\ \mathsf{V}\ }$ ～ $\boxed{\ \mathsf{Z}\ }$ はマークしないでください。

III

関数 $y = \dfrac{2^{x^2}}{5^{3x}}$ $(x \geqq 0)$ を考える。

(1) y が最小になる x を求めよう。

y を微分して

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2^{x^2}}{5^{3x}}\left(2x\log_e \boxed{\text{A}} - \boxed{\text{B}}\log_e \boxed{\text{C}}\right)$$

を得る。

したがって，y が最小になる x の値を常用対数を用いて表すと

$$x = \frac{\boxed{\text{D}}\left(1-\log_{10}\boxed{\text{E}}\right)}{\boxed{\text{F}}\log_{10}\boxed{\text{G}}}$$

である。

(2) $\dfrac{2^{x^2}}{5^{3x}} > 1000$ となるような最小の正の整数 x を求めよう。

不等式 $y > 1000$ より

$$x^{\boxed{\text{H}}}\log_{10}\boxed{\text{I}} - \boxed{\text{J}}\,x\log_{10}\boxed{\text{K}} - \boxed{\text{L}} > 0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を得る。$\log_{10} 2 = 0.301\cdots$ の近似値として 0.3 を用いて，不等式 ① を解くと

$$x > \frac{\boxed{\text{M}} + \sqrt{\boxed{\text{NO}}}}{\boxed{\text{P}}}$$

を得る。

したがって，$y > 1000$ が成り立つような最小の正の整数 x は $\boxed{\text{Q}}$ である。

注） 常用対数：common logarithm，近似値：approximate value

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\ \mathbf{R}\ }$ ～ $\boxed{\ \mathbf{Z}\ }$ はマークしないでください。

IV

区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ で関数 $f(x) = x\sin^2 x$ を考える。曲線 $y = f(x)$ の接線で原点を通るものを ℓ とする。ただし，ℓ は x 軸ではないとする。このとき，曲線 $y = f(x)$ と接線 ℓ で囲まれる部分の面積 S を求めよう。

(1)　次の文中の $\boxed{\text{A}}$ ～ $\boxed{\text{D}}$ には，下の選択肢 ⓪ ～ ⑨ の中から適するものを選びなさい。

曲線 $y = f(x)$ と接線 ℓ の接点を $(t, f(t))$ とおくと，ℓ は原点を通るので，等式 $\boxed{\text{A}}$ が成り立つ。さらに

$$f'(t) = \boxed{\text{B}} + 2t\boxed{\text{C}}$$

であるから，接点の x 座標は $t = \boxed{\text{D}}$ である。

⓪ $f(t) = tf'(t)$　　① $f'(t) = tf(t)$

② $\sin t$　③ $\sin^2 t$　④ $\cos^2 t$　⑤ $\sin t\cos t$

⑥ $\dfrac{\pi}{2}$　⑦ $\dfrac{\pi}{3}$　⑧ $\dfrac{\pi}{4}$　⑨ $\dfrac{\pi}{6}$

（IV は次ページに続く）

(2)　次の文中の $\boxed{\ \mathsf{E}\ }$ ～ $\boxed{\ \mathsf{G}\ }$ には，下の選択肢 ⓪ ～ ⑨ の中から適するものを選びなさい。

関数 $f(x)$ の不定積分は

$$\int f(x)\,dx = \boxed{\ \mathsf{E}\ }\left(2x^2 - 2x\boxed{\ \mathsf{F}\ } - \boxed{\ \mathsf{G}\ }\right) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

である。

⓪ $\frac{1}{8}$　① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ 2　④ 4　⑤ 8

⑥ $\sin x$　⑦ $\cos x$　⑧ $\sin 2x$　⑨ $\cos 2x$

(3)　曲線 $y = f(x)$ と接線 ℓ で囲まれる部分の面積 S は

$$S = \frac{\boxed{\ \mathsf{H}\ }}{\boxed{\ \mathsf{IJ}\ }}\pi^{\boxed{\mathsf{K}}} - \frac{\boxed{\ \mathsf{L}\ }}{\boxed{\ \mathsf{M}\ }}$$

である。

注） 不定積分：antiderivative，積分定数：constant of integration

[IV] の問題はこれで終わりです。[IV] の解答欄 $\boxed{\ \mathsf{N}\ }$ ～ $\boxed{\ \mathsf{Z}\ }$ はマークしないでください。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の [V] はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 2」が正しくマークしてあるか，
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。