平成24年度

日本留学試験（第１回）

試験問題

数学 コース 2
(上級コース)

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

< 解答用紙記入例 >

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

I

問 1　a, b を定数とし，$a > 0$ とする。2 次関数

$$y = 4x^2 + 2ax + b$$

のグラフを x 軸方向に a，y 軸方向に $1 - 7a$ だけ平行移動する。平行移動したグラフが点 $(0, 4)$ を通るとき

$$b = \boxed{\mathsf{AB}}\,a^2 + \boxed{\mathsf{C}}\,a + \boxed{\mathsf{D}}$$

であり，そのグラフを表す 2 次関数は

$$y = \boxed{\mathsf{E}}\,x^2 - \boxed{\mathsf{F}}\,ax + \boxed{\mathsf{G}} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

である。

2 次関数 ① のグラフが x 軸に接するとき，$a = \dfrac{\boxed{\mathsf{H}}}{\boxed{\mathsf{I}}}$ であり，そのときの接点の x 座標は $x = \boxed{\mathsf{J}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　　多項式

$$P = x^2 + 2(a-1)x - 8a - 8$$

を考える。

(1)　a を有理数とする。$x = 1 - \sqrt{2}$ に対して，P の値が有理数になるのは $a = \boxed{\text{K}}$ のときであり，そのときの P の値は $P = \boxed{\text{LM}}$ である。

(2)　x, a を正の整数とする。P の値が素数になるような x, a をみつけよう。

P を因数分解して

$$P = (x - \boxed{\text{N}})(x + \boxed{\text{O}}a + \boxed{\text{P}})$$

を得る。したがって，$x = \boxed{\text{Q}}$ である。

さらに，P の値が素数になるような a の中で最小のものは $a = \boxed{\text{R}}$ であり，そのときの P の値は $P = \boxed{\text{ST}}$ である。

注）有理数：rational number，因数分解する：factorize

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{I}}$ の解答欄 $\boxed{\text{U}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

II

初項から第 n 項までの和が

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 + 3n$$

である数列 $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を考える。

(1)　$a_n = \boxed{\mathsf{A}}\, n + \boxed{\mathsf{B}}$ である。

(2)　$b_n = n^2 - 5n - 6$ である数列 $\{b_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ に対して，$b_n < 0$ となる項は全部で $\boxed{\mathsf{C}}$ 個あり，それらの項の和は $-\boxed{\mathsf{DE}}$ である。

(3)　(1)，(2) の a_n，b_n に対して

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2 b_k}{a_k} = \frac{1}{\boxed{\mathsf{F}}}\, n\left(n + \boxed{\mathsf{G}}\right)\left(n^2 - \boxed{\mathsf{H}}\, n - \boxed{\mathsf{I}}\right)$$

である。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\mathrm{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\mathrm{II}}$ の解答欄 $\boxed{\ \mathsf{J}\ }$ ～ $\boxed{\ \mathsf{Z}\ }$ はマークしないでください。

III

a, b, c を正の実数とする。座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(a, 0)$, $\mathrm{B}(3, b)$, $\mathrm{C}(0, c)$ を頂点とする三角形 ABC を考える。その三角形 ABC の外接円は原点 $\mathrm{O}(0, 0)$ を通り，$\angle \mathrm{BAC} = 60°$ とする。

(1)　$\angle \mathrm{AOB} = \boxed{\mathrm{AB}}°$ であるから，$b = \sqrt{\boxed{\mathrm{C}}}$ である。

(2)　外接円を表す方程式は

$$\left(x - \frac{a}{\boxed{\mathrm{D}}}\right)^2 + \left(y - \frac{c}{\boxed{\mathrm{E}}}\right)^2 = \frac{a^2 + c^2}{\boxed{\mathrm{F}}}$$

であり，c は a を用いて $c = \sqrt{\boxed{\mathrm{G}}}\left(\boxed{\mathrm{H}} - a\right)$ と表される。

(3)　線分 OB と線分 AC の交点を D とし，$\angle \mathrm{OAC} = \alpha$，$\angle \mathrm{ADB} = \beta$ とおく。

$a = 2\sqrt{3}$ のとき

$$\tan\alpha = \boxed{\mathrm{I}} - \sqrt{\boxed{\mathrm{J}}},\quad \tan\beta = \boxed{\mathrm{K}}$$

である。

注）外接円：circumscribed circle

\- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\text{L}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

IV

問 1　a を正の実数とするとき，関数

$$f(x)=x^2-5+4a\log(2x+a+8) \qquad \left(-\frac{a}{2}-4<x<-2\right)$$

の極値について調べよう。

(1)　関数 $f(x)$ を x について微分して

$$f'(x)=\frac{\boxed{\text{A}}(\boxed{\text{B}}x+a)(x+\boxed{\text{C}})}{\boxed{\text{D}}x+a+\boxed{\text{E}}}$$

を得る。

(2)　条件 $a>0$ と関数 $f(x)$ の定義域が $-\dfrac{a}{2}-4<x<-2$ であることを考慮すると，$f(x)$ が極大値，極小値の両方をとるのは

$$\boxed{\text{F}}<a<\boxed{\text{G}} \quad \text{または} \quad \boxed{\text{G}}<a$$

のときである。そのとき，$f(x)$ の極大値と極小値の和は

$$\frac{a^2}{\boxed{\text{H}}}+\boxed{\text{I}}+\boxed{\text{J}}a\log\boxed{\text{K}}a$$

である。

注）定義域：domain

- 計算欄 (memo) -

問 2　正の整数 n と実数 a に対して，関数

$$f_n(a)=\int_0^{\pi}(\cos x+a\sin 2nx)^2\,dx$$

を考える。

(1)　関数 $f_n(a)$ を

$$f_n(a)=\int_0^{\pi}\left\{\frac{1+\cos\boxed{\mathsf{L}}x}{2}+a^2\,\frac{1-\cos\boxed{\mathsf{M}}nx}{2}+a\Big(\sin(2n+1)x+\sin(2n-1)x\Big)\right\}dx$$

と変形して，この右辺の定積分を計算すると

$$f_n(a)=\frac{\pi}{\boxed{\mathsf{N}}}a^2+\frac{\boxed{\mathsf{O}}n}{\boxed{\mathsf{P}}n^2-\boxed{\mathsf{Q}}}a+\frac{\pi}{\boxed{\mathsf{R}}}$$

を得る。

(2)　$f_n(a)$ を最小にする a の値を a_n とし，$S_N=\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n}$ とおく。

このとき

$$S_N=-\frac{\boxed{\mathsf{S}}}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{2n-\boxed{\mathsf{T}}}-\frac{1}{2n+\boxed{\mathsf{U}}}\right)$$

$$=-\frac{\boxed{\mathsf{S}}}{\pi}\left(\boxed{\mathsf{V}}-\frac{1}{\boxed{\mathsf{W}}N+\boxed{\mathsf{X}}}\right)$$

である。よって

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{N\to\infty}S_N=-\frac{\boxed{\mathsf{Y}}}{\pi}$$

を得る。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\text{ Z }}$ はマークしないでください。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 2」が正しくマークしてあるか,
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。