

# 数学（80分）

【コース1（基本, Basic）・コース2（上級, Advanced）】

※ どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。

## I 試験全体に関する注意

1. 係員の許可なしに、部屋の外に出ることはできません。
2. この問題冊子を持ち帰ることはできません。

## II 問題冊子に関する注意

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見ないでください。
2. 試験開始の合図があったら、下の欄に、受験番号と名前を、受験票と同じように記入してください。
3. コース1は1～13ページ、コース2は15～27ページにあります。
4. 足りないページがあったら、手をあげて知らせてください。
5. メモや計算などを書く場合は、問題冊子に書いてください。

## III 解答方法に関する注意

1. 解答は、解答用紙に鉛筆(HB)で記入してください。
2. 問題文中のA, B, C, …には、それぞれ－(マイナスの符号)、または、0から9までの数が一つずつ入ります。あてはまるものを選び、解答用紙(マークシート)の対応する解答欄にマークしてください。
3. 同一の問題文中に **A**, **BC** などが繰り返し現れる場合、2度目以降は、**A**, **BC** のように表しています。

### 解答に関する記入上の注意

- (1) 根号( $\sqrt{\quad}$ )の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。  
(例： $\sqrt{32}$ のときは、 $2\sqrt{8}$ ではなく $4\sqrt{2}$ と答えます。)
- (2) 分数を答えるときは、符号は分子につけ、既約分数(reduced fraction)にして答えてください。

(例： $\frac{2}{6}$ は $\frac{1}{3}$ ， $-\frac{2}{\sqrt{6}}$ は $-\frac{2\sqrt{6}}{6}$ と分母を有理化してから約分し， $\frac{-\sqrt{6}}{3}$ と答えます。)

- (3)  $\frac{\text{A}\sqrt{\text{B}}}{\text{C}}$  に  $\frac{-\sqrt{3}}{4}$  と答える場合は、下のようにマークしてください。

- (4) **DE**  $x$  に  $-x$  と答える場合は、Dを－，Eを1とし、下のようにマークしてください。

### 【解答用紙】

A	●	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B	○	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9
C	○	0	1	2	3	●	5	6	7	8	9
D	●	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
E	○	0	●	2	3	4	5	6	7	8	9

4. 解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※ 試験開始の合図があったら、必ず受験番号と名前を記入してください。

受験番号			*				*					
名前												

# 数学 コース 2

(上級コース)

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので、どちらかのコースを 一つだけ 選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は、右のように、解答用紙の「解答コース」の「コース2」を○で囲み、その下のマーク欄をマークしてください。

< 解答用紙記入例 >

解答コース Course	
コース 1 Course 1	<div>コース 2 Course 2</div>
○	●

選択したコースを正しくマークしないと、採点されません。

I

問 1 2 次関数

$$y = -x^2 - ax + 3 \quad \cdots \cdots \cdots \text{①}$$

について考える。

- (1)  $a > 0$  であって、関数 ① の最大値が 7 であるならば、 $a =$  **A** である。このとき、この関数のグラフの軸の方程式は  $x =$  **BC** であり、また、このグラフと  $x$  軸との交点の  $x$  座標は **DE**  $\pm \sqrt{\text{F}}$  である。
- (2) 関数 ① のグラフを  $x$  軸方向に 2,  $y$  軸方向に  $-3$  だけ平行移動して得られる曲線が  $(-3, -5)$  を通るならば、 $a =$  **G** である。

- 計算欄 (memo) -

問 2 設問 (1) の H , I と設問 (2) の J , K には, 下の ① ~ ③ の中から適するものを選びなさい。

また, 設問 (3) の L ~ R には適する数を入れなさい。

実数  $x, y$  について次の条件  $p, q, r$  を考える。

$p$ :  $x, y$  が等式  $(x+y)^2 = a(x^2+y^2) + bxy$  を満たしている。  
ただし,  $a, b$  は実数で定数とする。

$q$ :  $x=0$  かつ  $y=0$  である。

$r$ :  $x=0$  または  $y=0$  である。

(1) 条件  $p$  において,  $a=b=1$  とする。このとき,  $p$  は  $q$  であるための H。

また,  $p$  は  $r$  であるための I。

(2) 条件  $p$  において,  $a=b=2$  とする。このとき,  $p$  は  $q$  であるための J。

また,  $p$  は  $r$  であるための K。

(3) 条件  $p$  において,  $a=2$  とすると,  $p$  の式は

$$\left(x + \frac{b - \text{L}}{\text{M}}y\right)^2 + \left(\text{N} - \frac{(b - \text{O})^2}{\text{P}}\right)y^2 = 0$$

と変形できる。したがって,  $p$  が  $q$  であるための必要十分条件となるのは,  $b$  が

$$\text{Q} < b < \text{R}$$

を満たすときに限る。

- ① 必要十分条件である
- ② 必要条件であるが, 十分条件ではない
- ③ 十分条件であるが, 必要条件ではない
- ④ 必要条件でも十分条件でもない

- 計算欄 (memo) -

**I** の問題はこれで終わります。**I** の解答欄 **S** ～ **Z** はマークしないでください。

II

数列  $\{a_n\} (n = 1, 2, 3, \dots)$  は等差数列で

$$a_2 = 2, \quad a_6 = 3a_3$$

を満たしている。このとき、級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{r^{a_n}}$  を考える。ただし、 $r$  は正の実数である。

(1) 数列  $\{a_n\}$  の初項を  $a$ 、公差を  $d$  とおくと

$$a = \boxed{\text{AB}}, \quad d = \boxed{\text{C}}$$

である。

(2) 級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{r^{a_n}}$  は、初項が  $\boxed{\text{D}} r^{\boxed{\text{E}}}$ 、公比が  $\frac{\boxed{\text{F}}}{r^{\boxed{\text{G}}}}$  の無限等比級数である。

したがって、この級数は

$$r > 3^{\frac{\boxed{\text{H}}}{\boxed{\text{I}}}}$$

のとき収束し、その和  $S$  は

$$S = \frac{\boxed{\text{J}} r^{\boxed{\text{K}}}}{r^{\boxed{\text{L}}} - \boxed{\text{M}}}$$

である。

(3) 和  $S$  が最小となるのは

$$r = \boxed{\text{N}}^{\frac{\boxed{\text{O}}}{2}}$$

のときである。

---

注) 等差数列 : arithmetic progression, 級数 : series, 公差 : common difference,  
公比 : common ratio, 無限等比級数 : infinite geometric series

- 計算欄 (memo) -

Ⅱ の問題はこれで終わります。Ⅱ の解答欄 **P** ～ **Z** はマークしないでください。



III

$-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$  の範囲において、関数

$$f(x) = \sin 2x - 3(\sin x + \cos x)$$

を考える。

(1)  $t = \sin x + \cos x$  とおく。  $t$  のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{A} - \sqrt{\boxed{B}}}{\boxed{C}} \leq t \leq \sqrt{\boxed{D}}$$

である。

(2)  $f(x)$  は、最小値  $\boxed{E} - \boxed{F}\sqrt{\boxed{G}}$  を  $x = \frac{\boxed{H}}{\boxed{I}}\pi$  でとる。

- 計算欄 (memo) -

III の問題はこれで終わります。III の解答欄 J ～ Z はマークしないでください。

IV

問 1 文中の **A** ~ **I** には、下の ① ~ ⑨ の中から適するものを選びなさい。

関数  $f(x) = \frac{\log x}{x}$  の性質を用いて、 $a^{a+1}$  と  $(a+1)^a$  の大小関係を調べよう。

ただし、 $a > 0$  とする。

(1)  $f(x)$  の導関数を求めると

$$f'(x) = \frac{\mathbf{A} - \log x}{x^{\mathbf{B}}}$$

であるから、 $f(x)$  が単調増加である  $x$  の変域は  $\mathbf{C} < x \leq \mathbf{D}$  であり、  
単調減少である  $x$  の変域は  $\mathbf{E} \leq x$  である。

(2)  $p = a^{a+1}$ ,  $q = (a+1)^a$  とおくと

$$\log p - \log q = (a^{\mathbf{F}} + a) \{f(a) - f(a + \mathbf{G})\}$$

である。よって

$$0 < a < \frac{3}{2} \quad \text{ならば, } p \mathbf{H} q \text{ であり}$$

$$3 < a \quad \text{ならば, } p \mathbf{I} q \text{ である}$$

ことが分かる。

- |       |         |                 |     |
|-------|---------|-----------------|-----|
| ① 0   | ② 1     | ③ 2             | ④ 3 |
| ⑤ $e$ | ⑥ $e+1$ | ⑦ $\frac{1}{e}$ |     |
| ⑧ $>$ | ⑨ $=$   | ⑩ $<$           |     |

- 計算欄 (memo) -

問 2  $0 < a < 1$  とする。曲線  $y = xe^{2x}$  および  $x$  軸と直線  $x = a - 1$  で囲まれる部分の面積と、  
 曲線  $y = xe^{2x}$  および  $x$  軸と直線  $x = a$  で囲まれる部分の面積の和を  $S(a)$  とする。このとき、  
 $S(a)$  を最小とする  $a$  の値を求めよう。

$xe^{2x}$  の不定積分は

$$\frac{\boxed{\text{J}}}{\boxed{\text{K}}} (\boxed{\text{L}} x - 1) e^{2x} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

である。

$xe^{2x}$  の値は、 $x < 0$  のとき  $xe^{2x} < 0$  であり、 $x \geq 0$  のとき  $xe^{2x} \geq 0$  である。したがって、  
 $S(a)$  の値は

$$S(a) = \frac{\boxed{\text{M}}}{\boxed{\text{N}}} \left\{ \boxed{\text{O}} + (\boxed{\text{P}} a - \boxed{\text{Q}}) e^{2(a-1)} + (\boxed{\text{R}} a - 1) e^{2a} \right\}$$

である。また

$$S'(a) = (a - \boxed{\text{S}}) e^{2(a-1)} + a e^{2a}$$

であるから、 $S(a)$  を最小とする  $a$  の値は  $a = \frac{\boxed{\text{T}}}{e^2 + \boxed{\text{U}}}$  である。これは  $0 < a < 1$  を  
 満たしている。

- 計算欄 (memo) -

Ⅳ の問題はこれで終わります。Ⅳ の解答欄 Ⅴ ～ Ⅱ はマークしないでください。  
 コース 2 の問題はこれですべて終わります。解答用紙の Ⅴ はマークしないでください。  
 解答用紙の解答コース欄に「コース 2」が正しくマークしてあるか、  
 もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。

〈数 学〉

コース 1			
問		解答欄	正解
I	問1	A	4
		BC	−2
		DEF	−27
		G	4
	問2	H	1
		I	0
		J	0
		K	2
		LMNOP	22124
		QR	04
II	問1	A	8
		BCD	112
		EF	29
		GHI	389
	問2	J	1
		KL	13
		M	6
		N	7
		OP	36
		Q	4
R	5		
ST	64		
III		ABCD	2421
		EF	−7
		G	3
		HIJ	−15
		K	3
IV		ABCD	1574
		E	6
		FG	49
		HIJK	2536
		LMNOP	25748
		QR	56

コース 2			
問		解答欄	正解
I	問1	A	4
		BC	−2
		DEF	−27
		G	4
	問2	H	1
		I	0
		J	0
		K	2
LMNOP		22124	
	QR	04	
II		AB	−2
		C	4
		DE	32
		FG	34
		HI	14
		JKLM	3643
		NO	31
III		ABC	132
		D	2
		EFG	132
		HI	14
IV	問1	AB	12
		CD	04
		E	4
		FG	21
		H	9
		I	7
	問2	JKL	142
		MNOPQR	142232
		S	1
TU		11	