平成27年度

日本留学試験（第１回）

試験問題

The Examination

平成27年度（2015年度）日本留学試験　**問題冊子**

数　学（８０分）

【コース１(基本, Basic)・コース２(上級, Advanced)】

※　**どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。**

I　試験全体に関する注意

1．係員の許可なしに，部屋の外に出ることはできません。

2．この問題冊子を持ち帰ることはできません。

II　問題冊子に関する注意

1．試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見ないでください。

2．試験開始の合図があったら，下の欄に，受験番号と名前を，受験票と同じように記入してください。

3．コース１は１～13ページ，コース２は15～27ページにあります。

4．足りないページがあったら，手をあげて知らせてください。

5．メモや計算などを書く場合は，問題冊子に書いてください。

III　解答方法に関する注意

1．解答は，解答用紙に鉛筆(HB)で記入してください。

2．問題文中のA，B，C,…には，それぞれ－(マイナスの符号)，または，０から９までの数が一つずつ入ります。あてはまるものを選び，解答用紙(マークシート)の対応する解答欄にマークしてください。

3．同一の問題文中に $\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{BC}}$ などが繰り返し現れる場合，２度目以降は，$\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{BC}}$ のように表しています。

解答に関する記入上の注意

(1)　根号（$\sqrt{\ }$）の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。
(例：$\sqrt{32}$ のときは，$2\sqrt{8}$ ではなく $4\sqrt{2}$ と答えます。)

(2)　分数を答えるときは，符号は分子につけ，既約分数(reduced fraction)にして答えてください。
(例：$\frac{2}{6}$ は $\frac{1}{3}$，$-\frac{2}{\sqrt{6}}$ は $\frac{-2\sqrt{6}}{6}$ と分母を有理化してから約分し，$\frac{-\sqrt{6}}{3}$ と答えます。)

(3)　$\dfrac{\boxed{\text{A}}\sqrt{\boxed{\text{B}}}}{\boxed{\text{C}}}$ に $\dfrac{-\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は，下のようにマークしてください。

(4)　$\boxed{\text{DE}}\,x$ に $-x$ と答える場合は，Dを－，Eを１とし，下のようにマークしてください。

【解答用紙】

A	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
B	⊖	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
C	⊖	⓪	①	②	③	●	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
D	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
E	⊖	⓪	●	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

4．解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※　試験開始の合図があったら，必ず受験番号と名前を記入してください。

受験番号			＊					＊								
名　　前																

数学 コース 2
（上級コース）

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

＜解答用紙記入例＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

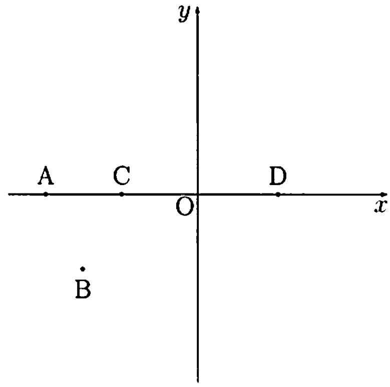
選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

I

問 1　2 つの放物線

ℓ :　$y = ax^2 + 2bx + c$

m :　$y = (a+1)x^2 + 2(b+2)x + c + 3$



を考える。点 A, B, C, D が右図のような位置関係にあるとする。このとき，この 2 つの放物線のうち，一方は，3 点 A, B, C を通り，もう一方は，3 点 B, C, D を通るとする。

(1)　3 点 A, B, C を通る放物線は $\boxed{\text{A}}$ である。ただし，$\boxed{\text{A}}$ には，次の ⓪ か ① のどちらか適するものを選びなさい。

⓪　放物線 ℓ　　　①　放物線 m

(2)　2 つの放物線 ℓ, m は，どちらも 2 点 B, C を通るので，点 B, C の x座標は，2 次方程式

$$x^2 + \boxed{\text{B}}x + \boxed{\text{C}} = 0$$

の解である。よって，点 B の x座標は $\boxed{\text{DE}}$，点 C の x座標は $\boxed{\text{FG}}$ である。

(3)　特に，AB = BC，CO = OD のとき，a, b, c の値を求めよう。

2 点 C, D は y軸に関して対称であるから，$b = \boxed{\text{H}}$ である。また，AB = BC より，直線 $x = \boxed{\text{IJ}}$ が $\boxed{\text{A}}$ の軸である。したがって，$a = -\dfrac{\boxed{\text{K}}}{\boxed{\text{L}}}$ である。よって，$c = \dfrac{\boxed{\text{M}}}{\boxed{\text{N}}}$ である。

注）対称：symmetry

\- 計算欄 (memo) -

問 2　2 つの袋 A, B がある。A の袋には白球が 4 個，赤球が 1 個入っており，B の袋には白球が 2 個，赤球が 3 個入っている。はじめに A の袋から同時に 2 個の球を取り出し，続いて，B の袋から同時に 2 個の球を取り出す。

(1)　A から 2 個の白球を取り出し，B からは白球と赤球をそれぞれ 1 個ずつ取り出す確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{O}}}{\boxed{\mathsf{PQ}}}$ である。

(2)　取り出した 4 個の球の中に，3 個の白球と 1 個の赤球が入っている確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{R}}}{\boxed{\mathsf{S}}}$ である。

(3)　取り出した 4 個の球がすべて同じ色である確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{T}}}{\boxed{\mathsf{UV}}}$ である。

(4)　取り出した 4 個の球の中に含まれる白球が 2 個以下である確率は $\dfrac{\boxed{\mathsf{WX}}}{\boxed{\mathsf{YZ}}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\mathrm{I}}$ の問題はこれで終わりです。

II

問 1　2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は 60° であり，$|\vec{a}| = 1$，$|\vec{b}| = 2$ とする。また，実数 x に対して，$\vec{u} = x\vec{a} + \vec{b}$，$\vec{v} = x\vec{a} - \vec{b}$ とする。$x > 1$ のとき，$\vec{u}$ と $\vec{v}$ のなす角が 30° となるような x の値を求めよう。以下，$\vec{u} \cdot \vec{v}$ は $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の内積を表し，$\vec{a} \cdot \vec{b}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を表す。

まず，ベクトル $\vec{u}$ と $\vec{v}$ のなす角は 30° であるから

$$\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right)^2 = \frac{\boxed{\mathsf{A}}}{\boxed{\mathsf{B}}} |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2$$

を得る。$\vec{a} \cdot \vec{b} = \boxed{\mathsf{C}}$ であることに注意して，この式を x で表すと

$$x^4 - \boxed{\mathsf{DE}}\,x^2 + \boxed{\mathsf{FG}} = 0$$

となる。これを変形して

$$\left(x^2 - \boxed{\mathsf{H}}\right)^2 = \left(\boxed{\mathsf{I}}\,x\right)^2$$

を得る。

したがって，$x > 1$ に注意して，これを解くと

$$x = \boxed{\mathsf{J}} + \sqrt{\boxed{\mathsf{KL}}}$$

となる。

注） 内積：inner product

- 計算欄 (memo) -

問 2　複素数平面上で，z^3 が実数となるような複素数 z を考える。

(1)　上の条件を満たす複素数 $z=x+iy$ が描く図形を C とする。その複素数 z の偏角は

$$\arg z = \frac{\pi}{\boxed{\mathsf{M}}}k \quad (k\text{ は整数})$$

を満たすので，図形 C は x, y の方程式

$$y=\boxed{\mathsf{N}},\quad y=\sqrt{\boxed{\mathsf{O}}}\,x,\quad y=-\sqrt{\boxed{\mathsf{P}}}\,x$$

で表される 3 直線である。

(2)　C 上に $|z-1-i|=r$ を満たす複素数 z がただ 1 個だけ存在するとする。このとき，r の値は

$$r=\frac{\sqrt{\boxed{\mathsf{Q}}}-\boxed{\mathsf{R}}}{\boxed{\mathsf{S}}}$$

となる。また，そのときの z の値は

$$z=\frac{\boxed{\mathsf{T}}+\sqrt{\boxed{\mathsf{U}}}}{\boxed{\mathsf{V}}}\left(1+\sqrt{\boxed{\mathsf{W}}}\,i\right)$$

である。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\text{X}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

III

3 次関数
$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{t+2}{2}x^2 + 2tx + \frac{2}{3}$$
の区間 $x \leqq 4$ における最大値が 6 より大きくなるような実数 t の値の範囲を求めよう。

まず，$f(x)$ の導関数は
$$f'(x) = (x - \boxed{\mathsf{A}})(x - t)$$
であるから，t の値の範囲を次のように分けて考える。

(i) $t > \boxed{\mathsf{A}}$ のとき，$f(x)$ は $x = \boxed{\mathsf{A}}$ で極大，$x = t$ で極小となる。
また，$f(4) = \boxed{\mathsf{B}}$ であるから，$f(\boxed{\mathsf{A}}) > 6$ となる t の値の範囲を求めればよい。

(ii) $t = \boxed{\mathsf{A}}$ のとき，区間 $x \leqq 4$ における $f(x)$ の最大値は $f(\boxed{\mathsf{C}}) = \boxed{\mathsf{D}}$ となり，条件は満たされない。

(iii) $t < \boxed{\mathsf{A}}$ のとき，$f(x)$ は $x = t$ で極大，$x = \boxed{\mathsf{A}}$ で極小となる。
また，$f(4) = \boxed{\mathsf{B}}$ であるから，$f(t) > 6$ となる t の値の範囲を求めればよい。

ここで
$$f(t) - 6 = -\frac{1}{6}\left(t + \boxed{\mathsf{E}}\right)\left(t - \boxed{\mathsf{F}}\right)^2$$
であることに注意する。

以上より，求める t の値の範囲は
$$t > \frac{\boxed{\mathsf{GH}}}{\boxed{\mathsf{I}}} \quad \text{または} \quad t < \boxed{\mathsf{JK}}$$
である。

注） 導関数：derivative

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\text{L}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

IV

関数

$$f(x) = \frac{\sin x}{3 - 2\cos x} \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

を考える。

(1) $f(x)$ の導関数は

$$f'(x) = \frac{\boxed{\text{A}}\cos x - \boxed{\text{B}}}{\left(\boxed{\text{C}} - \boxed{\text{D}}\cos x\right)^2}$$

である。したがって，関数 $f(x)$ が極値をとる x の値を α とおくと

$$\cos\alpha = \frac{\boxed{\text{E}}}{\boxed{\text{F}}}$$

である。

(2) 関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸によって囲まれる部分は直線 $x = \alpha$ によって 2 つの部分に分けられる。その左側の部分の面積を S_1 とおくと

$$S_1 = \int_{\frac{\boxed{\text{G}}}{\boxed{\text{H}}}}^{\boxed{\text{I}}} \frac{dt}{\boxed{\text{J}} - \boxed{\text{K}}\,t} = \frac{\boxed{\text{L}}}{\boxed{\text{M}}} \log \frac{\boxed{\text{N}}}{\boxed{\text{O}}}$$

である。

また，右側の部分の面積を S_2 とおくと

$$S_2 = \frac{\boxed{\text{P}}}{2} \log \boxed{\text{Q}}$$

である。

注） 導関数：derivative

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\text{R}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 2」が正しくマークしてあるか，
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。