平成26年度

日本留学試験（第１回）

試験問題

The Examination

数学 コース 2
(上級コース)

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

< 解答用紙記入例 >

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

I

問 1　2 次関数 $y = ax^2 + bx + \dfrac{3}{a}$ は，次の 2 つの条件 (i), (ii) を満たすとする。

(i)　$x = 3$ のとき，y は最大値をとる。

(ii)　$x = 1$ のとき，y の値は 2 である。

このとき，a, b の値を求めよう。

条件 (i), (ii) を用いて，a, b の関係式

$$\begin{cases} b = \boxed{\mathsf{AB}}\,a \\ \boxed{\mathsf{C}} = a + b + \dfrac{\boxed{\mathsf{D}}}{a} \end{cases}$$

を得る。

上の 2 式より，方程式

$$\boxed{\mathsf{E}}\,a^2 + \boxed{\mathsf{F}}\,a - \boxed{\mathsf{G}} = 0$$

を得る。よって

$$a = \boxed{\mathsf{HI}}, \quad b = \boxed{\mathsf{J}}$$

である。このとき，この関数の最大値は $\boxed{\mathsf{K}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　2 つの整式

$$P = 2x^2 - x + 2, \quad Q = x^2 - 2x + 1$$

に対して

$$E = P^2 - 4Q^2 - 3P + 6Q$$

を考える。

(1)　E の右辺を因数分解して

$$E = (P - \boxed{\mathsf{L}}\,Q)(P + \boxed{\mathsf{M}}\,Q - \boxed{\mathsf{N}})$$

を得る。

(2)　E を x の式で表すと

$$E = \boxed{\mathsf{O}}\,x(x - \boxed{\mathsf{P}})(\boxed{\mathsf{Q}}\,x - \boxed{\mathsf{R}})$$

となる。

(3)　$x = -\dfrac{1-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ のとき，E の値は $\boxed{\mathsf{S}} + \boxed{\mathsf{T}}\sqrt{\boxed{\mathsf{U}}}$ である。

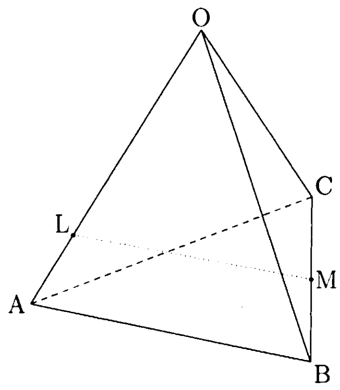
注） 因数分解する：factorize

\- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\mathrm{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\mathrm{I}}$ の解答欄 $\boxed{\mathbf{V}}$ ～ $\boxed{\mathbf{Z}}$ はマークしないでください。

II

1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC において，線分 OA を 3 : 1 に内分する点を L，線分 BC の中点を M，線分 LM を $t : (1-t)$ に内分する点を P とする。ただし，$0 < t < 1$ とする。



(1)　$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$，$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表すと

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\boxed{\mathbf{A}}}{\boxed{\mathbf{B}}}(\boxed{\mathbf{C}} - t)\vec{a} + \frac{\boxed{\mathbf{D}}}{\boxed{\mathbf{E}}}t(\vec{b} + \vec{c})$$

である。さらに，$\vec{a}\cdot(\vec{b} + \vec{c}) = \boxed{\mathbf{F}}$，$|\vec{b} + \vec{c}|^2 = \boxed{\mathbf{G}}$ であるから

$$|\overrightarrow{OP}| = \frac{1}{\boxed{\mathbf{H}}}\sqrt{\boxed{\mathbf{I}}t^2 - \boxed{\mathbf{J}}t + \boxed{\mathbf{K}}}$$

となる。ただし，$\vec{a}\cdot(\vec{b} + \vec{c})$ は $\vec{a}$ と $(\vec{b} + \vec{c})$ の内積である。

(2)　$|\overrightarrow{OP}|$ が最小となるときの t の値を求めると

$$t = \frac{\boxed{\mathbf{L}}}{\boxed{\mathbf{M}}}$$

であり，その $|\overrightarrow{OP}|$ の最小値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\mathbf{N}}}}{\boxed{\mathbf{O}}}$ である。

(3)　(2) のとき，$\cos\angle AOP = \dfrac{\boxed{\mathbf{P}}\sqrt{\boxed{\mathbf{Q}}}}{\boxed{\mathbf{R}}}$ である。

注）正四面体 : regular tetrahedron，内分する : divide internally，内積 : inner product

\- 計算欄 (memo) -

II の問題はこれで終わりです。II の解答欄 **S** ～ **Z** はマークしないでください。

III

$a>0$ とする。次の x に関する 2 つの方程式を $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ の範囲で考える。

$$\sin 2x + a\cos x = 0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

$$\cos 2x + a\sin x = -2 \quad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

例えば，$a=\sqrt{2}$ のとき，① を満たす x は

$$x = \frac{\boxed{\text{AB}}}{\boxed{\text{C}}}\pi$$

である。この x に対して，② の左辺の値は $\boxed{\text{DE}}$ となり，② の等式が成り立たない。

したがって，$a=\sqrt{2}$ のとき，①, ② は共通解をもたない。

そこで，①, ② が共通解をもつような a の値と，そのときの共通解 x を求めよう。

まず，① より

$$\sin x = \frac{\boxed{\text{FG}}}{\boxed{\text{H}}}a, \quad \cos 2x = \boxed{\text{I}} - \frac{a^2}{\boxed{\text{J}}}$$

となる。これらを ② に代入して

$$a^2 = \boxed{\text{K}}$$

を得る。したがって，$a=\sqrt{\boxed{\text{K}}}$ であり，共通解は

$$x = \frac{\boxed{\text{LM}}}{\boxed{\text{N}}}\pi$$

である。

- 計算欄 (memo) -

III	の問題はこれで終わりです。	III	の解答欄	O	～ Z	はマークしないでください。

IV

問 1　$a>0$ とする。2 つの曲線

$$C_1:\ y=e^{6x}$$
$$C_2:\ y=ax^2$$

を考える。C_1 と C_2 の両方に接する直線が 2 本引けるような a の条件を求めよう。

C_1 上の点 (t, e^{6t}) における C_1 の接線の方程式は

$$y=\boxed{\mathsf{A}}\,e^{6t}x-e^{6t}\left(\boxed{\mathsf{B}}\,t-\boxed{\mathsf{C}}\right)$$

である。この接線がさらに C_2 に接するのは，2 次方程式

$$ax^2=\boxed{\mathsf{A}}\,e^{6t}x-e^{6t}\left(\boxed{\mathsf{B}}\,t-\boxed{\mathsf{C}}\right)$$

が重解をもつときである。したがって，a, t に対して

$$\boxed{\mathsf{D}}\,e^{12t}-ae^{6t}\left(\boxed{\mathsf{E}}\,t-\boxed{\mathsf{F}}\right)=0$$

が成り立つ。この式より

$$a=\frac{\boxed{\mathsf{D}}\,e^{6t}}{\boxed{\mathsf{E}}\,t-\boxed{\mathsf{F}}}$$

を得る。この右辺を $f(t)$ とおくと，2 つの曲線 C_1 と C_2 の両方に接する直線が 2 本引けるための条件は，直線 $s=a$ が $s=f(t)$ のグラフと 2 点で交わることである。

ここで，$f(t)$ の導関数は

$$f'(t)=\frac{108e^{6t}\left(\boxed{\mathsf{G}}\,t-\boxed{\mathsf{H}}\right)}{\left(\boxed{\mathsf{E}}\,t-\boxed{\mathsf{F}}\right)^2}$$

である。

よって，求める a の条件は

$$a>\boxed{\mathsf{I}}\,e^{\boxed{\mathsf{J}}}$$

である。ただし，必要であれば $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{e^t}{t}=\infty$ を用いてよい。

注）導関数：derivative

- 計算欄 (memo) -

問 2　次の問題文の $\boxed{\text{K}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ には，下の ⓪ ～ ⑨ の中から適するものを選びなさい。

a, t を正の実数とする。x の 2 次関数

$$y = \frac{1}{t^2}\left(x - at^2\right)^2$$

のグラフと x 軸，y 軸によって囲まれる部分を D とする。D を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V_1，また，D を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V_2 とする。このとき，ある a の値に対して，t の値によらず $V_1 = V_2$ となることを示そう。

まず，V_1 を求めると

$$V_1 = \pi\int_{\boxed{\text{K}}}^{\boxed{\text{L}}} \frac{1}{t^{\boxed{\text{M}}}}\left(x - at^2\right)^{\boxed{\text{N}}} dx$$

$$= \frac{\pi}{\boxed{\text{O}}}\, a^{\boxed{\text{P}}}\, t^{\boxed{\text{Q}}}$$

となる。一方，V_2 を求めると

$$V_2 = \pi\int_{\boxed{\text{K}}}^{\boxed{\text{R}}} \left(\boxed{\text{S}} - \boxed{\text{T}}\sqrt{y}\right)^{\boxed{\text{U}}} dy$$

$$= \frac{\pi}{\boxed{\text{V}}}\, a^{\boxed{\text{W}}}\, t^{\boxed{\text{X}}}$$

となる。

よって，$a = \dfrac{\boxed{\text{Y}}}{\boxed{\text{Z}}}$ のとき，t の値によらず，$V_1 = V_2$ となる。

⓪　0	①　1	②　2	③　3	④　4
⑤　5	⑥　6	⑦　t	⑧　at^2	⑨　a^2t^2

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 2」が正しくマークしてあるか，
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。