### 平成28年度(2016年度)日本留学試験

## 数学(80分)

【コース1(基本, Basic)・コース2(上級, Advanced)】

※ どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。

#### I 試験全体に関する注意

- 1. 係員の許可なしに、部屋の外に出ることはできません。
- 2. この問題冊子を持ち帰ることはできません。

#### Ⅱ 問題冊子に関する注意

- 1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見ないでください。
- 2. 試験開始の合図があったら、下の欄に、受験番号と名前を、受験票と同じように記入してください。
- 3. 3 3 + 3 + 4 = 13 + 4 =
- 4. 足りないページがあったら、手をあげて知らせてください。
- 5. メモや計算などを書く場合は、問題冊子に書いてください。

#### Ⅲ 解答方法に関する注意

- 1. 解答は、解答用紙に鉛筆(HB)で記入してください。
- 2. 問題文中のA, B, C, … には、それぞれー(マイナスの符号)、または、0から 9 までの数が一つずつ入ります。あてはまるものを選び、解答用紙 (マークシート)の対応する解答欄にマークしてください。
- 3. 同一の問題文中に **A** , **BC** などが繰り返し現れる場合, 2度目以降 は, **A** , **BC** のように表しています。

#### 解答に関する記入上の注意

- (1) 根号( $\sqrt{\phantom{a}}$ )の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。 (例: $\sqrt{32}$  のときは、 $2\sqrt{8}$  ではなく  $4\sqrt{2}$  と答えます。)
- (2) 分数を答えるときは、符号は分子につけ、既約分数(reduced fraction) にして答えてください。

(例: $\frac{2}{6}$ は $\frac{1}{3}$ ,  $-\frac{2}{\sqrt{6}}$ は $\frac{-2\sqrt{6}}{6}$ と分母を有理化してから約分し,  $\frac{-\sqrt{6}}{3}$ と答えます。)

- (3)  $A\sqrt{B}$  に  $-\sqrt{3}$  と答える場合は、下のようにマークしてください。
- (4)  $\boxed{\textbf{DE}} x$  に -x と答える場合は、 $\boxed{\textbf{D}}$ を一、 $\boxed{\textbf{E}}$ を1とし、下のようにマークしてください。

#### 【解答用紙】

4 / 14 //4 47												
Α	•	0	1	2	3	4	(5)	6	0	8	9	
В	Э	0	1	2	•	4	5	6	7	8	9	
С	Э	0	1	2	3	•	(5)	6	7	8	9	
D	•	0	1	2	3	4	(5)	6	0	8	9	
E	Θ	0	•	0	3	4	(5)	6	7	8	9	

4. 解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※ 試験開始の合図があったら、必ず受験番号と名前を記入してください。

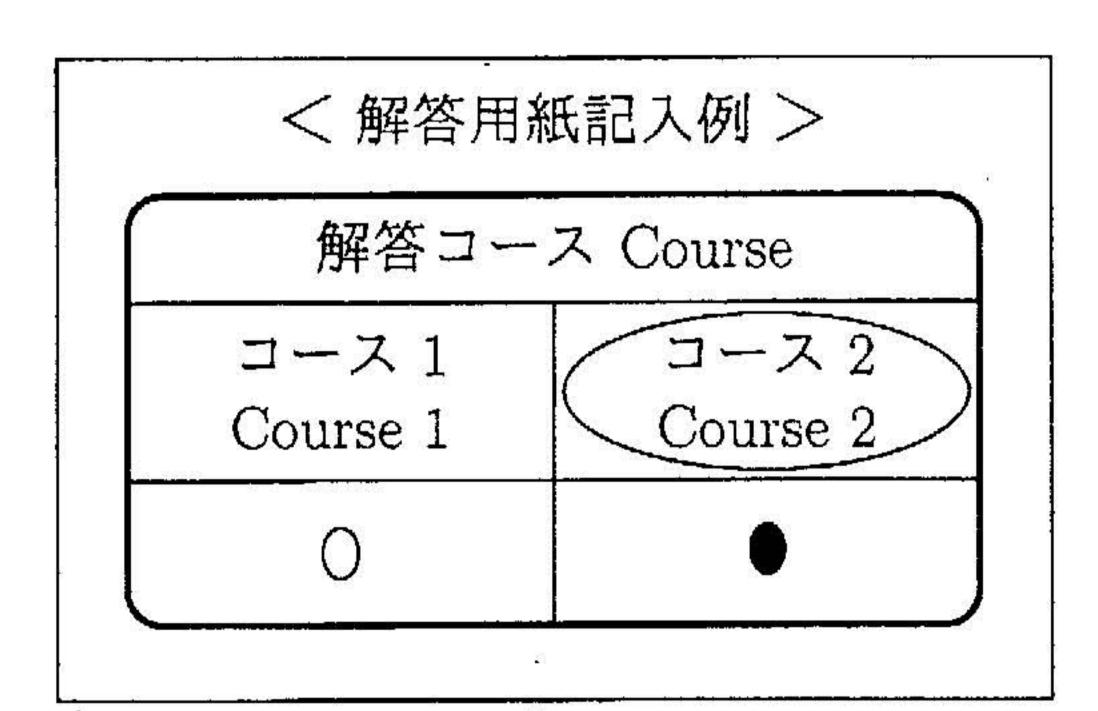
受験番号	*	*		
名 前			,	

# 数学 コース 2

(上級コース)

## 「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」が ありますので、どちらかのコースを <u>一つだけ</u> 選んで解答してください。「コース2」を解答 する場合は、右のように、解答用紙の「解答 コース」の「コース2」を 〇 で囲み、その下 のマーク欄をマークしてください。



選択したコースを正しくマークしないと、採点されません。

I

$$y = -\frac{1}{8}x^2 + ax + b \qquad \dots \dots \qquad \textcircled{1}$$

を考える。関数 ① のグラフの頂点の座標を (p,q) とすると

$$p = \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} a$$
,  $q = \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} a^2 + b$ 

である。

(1) 点 (p,q) が直線 x+y=1 の上を動くとき, a,b は

$$b = \begin{bmatrix} \mathbf{CD} \end{bmatrix} a^2 - \begin{bmatrix} \mathbf{E} \end{bmatrix} a + \begin{bmatrix} \mathbf{F} \end{bmatrix}$$

を満たす。

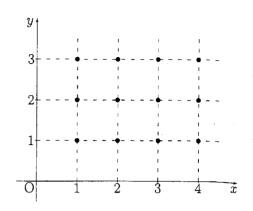
このとき、
$$8a+b$$
 は  $a=$  G. で最大値 H をとる。

(2) 関数 ① のグラフがx軸に接するとき,a+bの値の範囲は

$$a+b \le \frac{\boxed{\mathbf{J}}}{\boxed{\mathbf{J}}}$$

である。

問2 座標平面上に、右の図のように 12 個の点が並んでいる。これらの点から 3 個の点を選び、それらを頂点とする三角形を作る。このとき、三角形が全部で何個できるかを調べよう。



まず、12個の点から3個の点を選び出す場合の数は KLM 通りである。

次に、12 個の点のうち、3 個以上が一直線上に並ぶ場合の数を数えよう。 このような直線のうち

- (i) 4 点を通る直線は **N** 本ある。
- (ii) 3 点を通る直線は **O** 本ある。

したがって,同一直線上にあり,三角形の頂点とならない3点の組み合わせは,(i)の場合は PQ 通りあり,(ii)の場合は R 通りある。

以上より、求める三角形は STU 個である。

特に、点(1,1) を A、点(4,1) を B とするとき、線分 AB 上に 2 つの頂点をもつ三角形は  $\boxed{VW}$  個である。

 $oxed{I}$  の問題はこれで終わりです。 $oxed{I}$  の解答欄  $oxed{X}$   $\sim$   $oxed{Z}$  はマークしないでください。

問 1 三角形 ABC は

$$AB = 2$$
,  $BC = 3$ ,  $CA = 4$ 

を満たしている。

(1)  $\angle ABC = \theta$  とおくと、ベクトル  $\overrightarrow{AB}$  とベクトル  $\overrightarrow{BC}$  の内積  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$  は

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \boxed{\mathbf{AB}} \cos \theta$$

である。また、余弦定理より  $\cos\theta$  の値を求めて

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \boxed{\begin{array}{c} \mathbf{C} \\ \boxed{\mathbf{D}} \end{array}}$$
 ..... ①

を得る。

(2) 辺 BC を n 等分する点を B から近い順に  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $\cdots$ ,  $P_{n-1}$  とおき,  $B=P_0$ ,  $C=P_n$  とおく。このとき,  $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\overrightarrow{AP_{k-1}}\cdot\overrightarrow{AP_k}$  を求めよう。

まず、 $\overrightarrow{\mathrm{AP}_{k-1}}$  と  $\overrightarrow{\mathrm{AP}_k}$  の内積を ① を用いて計算すると

$$\overrightarrow{AP_{k-1}} \cdot \overrightarrow{AP_k} = \boxed{\mathbf{E}} + \frac{\mathbf{F} k - \mathbf{G}}{2n} + \frac{\mathbf{H} (k^2 - k)}{n^2}$$

である。

したがって

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{AP_{k-1}} \cdot \overrightarrow{AP_k} = \boxed{\mathbf{IJ}}$$

となる。

注) 内積: inner product, 余弦定理: the law of cosines

問2 複素数 z が条件

$$z\bar{z} - (1-2i)z - (1+2i)\bar{z} \le 15$$
 ......

を満たすとする。

- (1) 複素数平面上で不等式 ① が表す図形は、中心  $\mathbf{L}$  +  $\mathbf{M}$  i, 半径  $\mathbf{N}$   $\sqrt{\mathbf{O}}$  の円の内部および円周である。
- (2) 直線  $(1-i)z-(1+i)\bar{z}=2i$  上にあり、不等式 ① を満たすすべての複素数 z の中で、 |z| が最大であるものを  $z_1$ , |z| が最小であるものを  $z_2$  と表すと

$$z_1 = \sqrt{\frac{PQ}{PQ}} + \frac{R}{R} + \left(\sqrt{\frac{ST}{ST}} + \frac{U}{U}\right)i,$$
  $z_2 = -\frac{V}{W} + \frac{X}{Y}i$ 

である。

注) 複素数: complex number, 複素数平面: complex number plane

 $oxed{II}$  の問題はこれで終わりです。 $oxed{II}$  の解答欄  $oxed{Z}$  はマークしないでください。

			-
-	_	_	
_	_	_	

次の 4 つの条件を満たす実数 x, y, t, u を考える。

$$y \ge |x|$$
 .....

$$x + y = t$$
 ......

$$x^2 + y^2 = 12$$
 ..... ③

$$x^3 + y^3 = u \qquad \dots \qquad \textcircled{4}$$

このとき、t および u がとる値の範囲を求めよう。

①,③ より,点 (x,y) は原点を中心とする半径 A  $\sqrt{B}$  の四分円の弧の上にあり,弧の両端の点の座標は

$$\left(\sqrt{\mathbf{C}},\sqrt{\mathbf{D}}\right),\quad \left(-\sqrt{\mathbf{C}},\sqrt{\mathbf{D}}\right)$$

である。このことと ② より, t がとる値の範囲は

$$\mathsf{E} \subseteq t \subseteq \mathsf{F} \sqrt{\mathsf{G}}$$
 ...... 5

である。

(2) 次に②,③より

$$xy = \frac{\boxed{\mathsf{H}}}{\boxed{\mathsf{I}}} \left(t^2 - \boxed{\mathsf{JK}}\right)$$

を得る。さらに、④ を用いて

$$u = \frac{\Box}{\boxed{\mathbf{M}}} \left( \boxed{\boxed{\mathbf{NO}}} t - t^3 \right)$$

を得る。

したがって

$$\frac{du}{dt} = \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{Q}} \left( \mathbf{RS} - t^2 \right)$$

であるから、⑤ の範囲において u がとる値の範囲は

$$T \leq u \leq UV \sqrt{W}$$

である。

注) 四分円: quadrant, 弧: arc

··· - 計算欄 (memo) -

III の問題はこれで終わりです。III の解答欄 X  $\sim$  Z はマークしないでください。



a > 1とする。2つの不等式

$$0 \le x \le \frac{\pi}{6} \,, \quad 0 \le y \le a \cos 3x$$

で表される領域を直線 y=1 で 2 つの部分に分ける。そのうち、 $y \ge 1$  の部分の面積を S、 $y \le 1$  の部分の面積を T とおく。このとき、T-S を最大にする a の値と,T-S の最大値を求めよう。

等式  $a\cos 3x=1$  を満たす  $x\left(0 \le x \le \frac{\pi}{6}\right)$  の値を t とおく。このとき

$$S = \frac{\sin 3t}{\mathbf{A} \cos 3t} - t$$

$$S + T = \frac{1}{\mathbf{B} \cos 3t}$$

である。したがって、f(t) = T - S とおくと

$$f'(t) = \frac{\left(\begin{array}{c} \mathbf{C} - \mathbf{D} \sin 3t \\ \end{array}\right) \sin 3t}{\cos \mathbf{E} 3t}$$

であるから,T-S は  $t=\frac{\pi}{\mathbf{FG}}$  のとき最大となる。すなわち, $a=\frac{\mathbf{H}\sqrt{\mathbf{I}}}{\mathbf{J}}$  のとき,T-S は最大値  $\frac{\pi}{\mathbf{K}}$  をとる。

注) 領域: region

[IV] の問題はこれで終わりです。[IV] の解答欄 [L] ~ [V] はマークしないでください。 コース 2 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の[V] はマークしないでください。 解答用紙の解答コース欄に「コース 2」が正しくマークしてあるか,もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。

田田   A   A   A   B   CDEF   -241   G   1   H   3   3   1   1   1   1   1   1   1   1	コース 1 Course 1					
日本	ı	<b>男 Q</b> .		正解 A.		
問1   CDEF   -241   G			Α			
同日   日日   日日   日日   日日   日日   日日   日日			В	2		
日本   日本   日本   日本   日本   日本   日本   日本		問1	CDEF	-241		
I KLM 220			G	1		
I KLM 220 N 3 S O 8 S B O 8 S B D 2 P D D D S S T U 200 V W 48 A B D D S 4 3 D D E 7 9 S T D D E 7 9 S T D S T			Н	3		
問2 PQ 12 R 8 STU 200 VW 48 ABCD 5432 EFGH 3524 問1 I 3 J 4 KL 12 M 7 II NO 13 P 1 ST 71 UVW 915 XY 96 ABCD 2144 E 3 III F 5 G 2 H 5 AB 30 C 6 M IV DE 79	in the state of th		IJ	18		
問2 PQ 12 R 8 8 STU 200 VW 48 ABCD 5432 EFGH 3524 III NO 13 P 1 UVW 915 XY 96 ABCD 2144 E 3 III F 5 G 2 H 5 AB 30 C 6 M DE 79	I		KLM	220		
問2   PQ   12   R   8   8   STU   200   VW   48   ABCD   5432   EFGH   3524   BTG   TTG   TTG			N	3		
R 8 STU 200 VW 48 ABCD 5432 EFGH 3524 問1 日 3 J 4 KL 12 M 7 II NO 13 P 1 P 1 ST 71 UVW 915 XY 96 ABCD 2144 E 3 III F 5 G 2 H 5 AB 30 C 6 IV DE 79			0			
STU 200   VW 48		問 2	PQ	12		
VW 48   ABCD 5432   EFGH 3524   BTGH 3			R	8		
B ABCD 5432 EFGH 3524 問 I I 3 J 4 KL 12 M 7 I NO 13 P 1 NO 13 P 1 Q 2 R 1 ST 71 UVW 915 XY 96 ABCD 2144 E 3 III F 5 G 2 H 5 AB 30 C 6 IV DE 79			STU	200		
問 I S S S S S S S S S S S S S S S S S S	difference of the second		VW	48		
問 1 日 3 日 4 日 1 日 1 日 1 日 1 日 1 日 1 日 1 日 1 日 1			ABCD	5432		
J 4   KL 12   M 7   T   NO 13   P 1   T   NO 13   P 1   T   T   T   T   T   T   T   T   T			EFGH	3524		
KL 12   M 7   NO 13   P 1   P 1   Q 2   2   R 1   ST 71   UVW 915   XY 96   ABCD 2144   E 3   F 5   G 2   H 5   M 5		問1		3		
II			in the state of	4		
II NO 13 P 1 Q 2 R 1 ST 71 UVW 915 XY 96 ABCD 2144 E 3 III F 5 G 2 H 5 AB 30 C 6 IV DE 79			KL.	12		
問2 P 1 Q 2 R 1 ST 71 VVW 915 XY 96 ABCD 2144 E 3 F 5 G 2 H 5 AB 30 C 6 M DE 79			М	7		
問2 Q 2 R 1 ST 71 UVW 915 XY 96 ABCD 2144 E 3 F 5 G 2 H 5 MB 30 C 6 N DE 79	I		NO	13		
Fi 2		s eve	P	1		
B 1 ST 71 UVW 915 XY 96 ABCD 2144 E 3 F 5 G 2 H 5 AB 30 C 6 N DE 79		関の	Q	2		
UVW 915 XY 96 ABCD 2144 E 3 F 5 G 2 H 5 AB 30 C 6 N DE 79		JPJ Z	R	1		
XY 96  ABCD 2144  E 3  F 5  G 2  H 5  AB 30  C 6  N DE 79			ST	71		
XY 96 ABCD 2144 E 3 Ⅲ F 5 G 2 H 5 AB 30 C 6 N DE 79			UVW	915		
ABCD 2144 E 3 III F 5 G 2 H 5 AB 30 C 6 N DE 79			XY	96		
E 3 F 5 G 2 H 5 AB 30 C 6 W DE 79		.4.		2144		
C 6 DE 79			E	3		
C 6 DE 79	Ш		in the Fa	5		
C 6 DE 79				2		
C 6 DE 79			Н	5		
C 6 DE 79			AB	30		
			С	6		
ECH 420	V	* \$   12	DE	79		
FGH 429			FGH	429		
IJKL 8023			IJKL	8023		

コース 2 Course 2					
F	<b>写 Q</b> .	解答番号 row	正解 A.		
		Α	4		
		В.	2		
	問 1	CDEF	-241		
	100	G	1		
			3		
	166	IJ	18		
Ι		KLM	220		
		N	3		
		0	8		
\$1.50°	問 2	PQ	12		
		R	8		
maile (3)		STU	200		
A CONTRACT		VW	48		
Jan B		AB	-6		
	問 1	CD	32		
	10]	EFGH	4639		
\$19 a. 24.		IJK	172		
I		LM	12		
		NO	25		
	問 2	PQR	101		
		STU	102		
		VWXY	1212		
	1	AB	23		
		CD	66		
		E	0		
ijoroni. Japani		FG	26		
Ш		HIJK	1212		
		LMNO	1236		
:		PQRS	3212		
			0		
		UVW	243		
		Α	3		
		В	3		
πσ		CDE	122		
V		FG	18		
3	* .	HIJ	233		
	+ , + +,# -	K	9		