2019年度

日本留学試験（第１回）

試験問題

The Examination

2019年度　日本留学試験

数　学（８０分）

【コース１(基本, Basic)・コース２(上級, Advanced)】

※　どちらかのコースを<u>一つだけ</u>選んで解答してください。

Ⅰ　試験全体に関する注意

1．係員の許可なしに，部屋の外に出ることはできません。
2．この問題冊子を持ち帰ることはできません。

Ⅱ　問題冊子に関する注意

1．試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見ないでください。
2．試験開始の合図があったら，下の欄に，受験番号と名前を，受験票と同じように記入してください。
3．コース１は１～13ページ，コース２は15～27ページにあります。
4．足りないページがあったら，手をあげて知らせてください。
5．メモや計算などを書く場合は，問題冊子に書いてください。

Ⅲ　解答方法に関する注意

1．解答は，解答用紙に鉛筆(ＨＢ)で記入してください。
2．問題文中のA，B，C，…には，それぞれ－(マイナスの符号)，または，０から９までの数が一つずつ入ります。適するものを選び，解答用紙(マークシート)の対応する解答欄にマークしてください。
3．同一の問題文中に $\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{BC}}$ などが繰り返し現れる場合，２度目以降は，$\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{BC}}$ のように表しています。

解答に関する記入上の注意

(1)　根号（$\sqrt{\ }$）の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。
（例：$\sqrt{32}$ のときは，$2\sqrt{8}$ ではなく $4\sqrt{2}$ と答えます。）

(2)　分数を答えるときは，符号は分子につけ，既約分数(reduced fraction)にして答えてください。
（例：$\dfrac{2}{6}$ は $\dfrac{1}{3}$，$-\dfrac{2}{\sqrt{6}}$ は $\dfrac{-2\sqrt{6}}{6}$ と分母を有理化してから約分し，$\dfrac{-\sqrt{6}}{3}$ と答えます。）

(3)　$\dfrac{\boxed{\text{A}}\sqrt{\boxed{\text{B}}}}{\boxed{\text{C}}}$ に $\dfrac{-\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は，下のようにマークしてください。

(4)　$\boxed{\text{DE}}\,x$ に $-x$ と答える場合は，Dを－，Eを１とし，下のようにマークしてください。

【解答用紙】

A	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
B	⊖	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
C	⊖	⓪	①	②	③	●	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
D	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
E	⊖	⓪	●	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

4．解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※　試験開始の合図があったら，必ず受験番号と名前を記入してください。

受験番号			＊					＊						
名　　前														

数学 コース 2
（上級コース）

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

＜ 解答用紙記入例 ＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

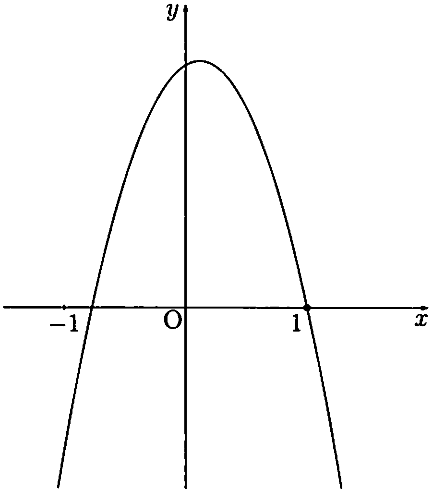
I

問 1　次の文中の $\boxed{\text{A}}$ ～ $\boxed{\text{K}}$ には，下の選択肢 ⓪ ～ ⑨ の中から適するものを選びなさい。

(1)　グラフが右図のようになる 2 次関数

$$y = ax^2 + bx + c$$

を考える。



このとき，a, b, c は次の式を満たす。

(i)　a $\boxed{\text{A}}$ 0,　b $\boxed{\text{B}}$ 0,　c $\boxed{\text{C}}$ 0

(ii)　$a+b+c$ $\boxed{\text{D}}$ 0

(iii)　$a-b+c$ $\boxed{\text{E}}$ 0

(iv)　$4a+2b+c$ $\boxed{\text{F}}$ 0

(v)　b^2-4ac $\boxed{\text{G}}$ 0

(2)　a, b, c が (1) の (i), (ii) を満たすとき，$a^2-8b-8c$ の値が最小となるような場合を考えよう。

このとき，$a = \boxed{\text{H}}$ であり，$y = ax^2 + bx + c$ を b を用いて表すと

$$y = \boxed{\text{H}}\,x^2 + bx - b + \boxed{\text{I}}$$

となる。また，b の値の範囲は $\boxed{\text{J}} < b < \boxed{\text{K}}$ である。

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4
⑤ −2	⑥ −4	⑦ >	⑧ =	⑨ <

- 計算欄 (memo) -

問 2　次のようなサイコロ X を投げる試行について考える。サイコロ X は，1 から 5 までの目が出る確率はすべて同じであるが，6 の目が出る確率は他の目の出る確率の 2 倍である。

(1)　サイコロ X を投げるとき，1 から 5 までの目が出る確率をそれぞれ p とすると，6 の目が出る確率は $\boxed{\text{L}}\,p$ である。全事象の確率は $\boxed{\text{M}}$ であるから，$p = \dfrac{\boxed{\text{N}}}{\boxed{\text{O}}}$ である。

(2)　いま，サイコロ X を 2 回続けて投げる。「2 回とも 1 から 5 までのいずれかの目が出る」という事象を A,「少なくとも 1 回は 6 の目が出る」という事象を B とする。このとき，事象 A の起こる確率 $P(A)$ と事象 B の起こる確率 $P(B)$ は

$$P(A) = \frac{\boxed{\text{PQ}}}{\boxed{\text{RS}}}, \quad P(B) = \frac{\boxed{\text{TU}}}{\boxed{\text{VW}}}$$

である。したがって，$\boxed{\text{X}}$ である。ただし，$\boxed{\text{X}}$ には，下の選択肢 ⓪ ～ ④ の中から適するものを選びなさい。

⓪　$P(A)$ の方が $P(B)$ より低く，その差は $\dfrac{1}{36}$ 以上

①　$P(A)$ の方が $P(B)$ より低く，その差は $\dfrac{1}{36}$ 未満

②　$P(A)$ と $P(B)$ は同じ

③　$P(A)$ の方が $P(B)$ より高く，その差は $\dfrac{1}{36}$ 以上

④　$P(A)$ の方が $P(B)$ より高く，その差は $\dfrac{1}{36}$ 未満

(問 2 は次ページに続く)

注）サイコロ：dice

(3)　次に，サイコロ X を 3 回続けて投げる。「3 回とも 1 から 5 までのいずれかの目が出る」という事象を C,「少なくとも 1 回は 6 の目が出る」という事象を D とするとき，確率 $P(C)$ と確率 $P(D)$ を比べると $\boxed{\text{Y}}$ である。ただし，$\boxed{\text{Y}}$ には，下の選択肢 ⓪ ～ ④ の中から適するものを選びなさい。

⓪　$P(C)$ の方が $P(D)$ より低く，$P(D)$ は $P(C)$ の 2 倍以上

①　$P(C)$ の方が $P(D)$ より低く，$P(D)$ は $P(C)$ の 2 倍未満

②　$P(C)$ と $P(D)$ は同じ

③　$P(C)$ の方が $P(D)$ より高く，$P(C)$ は $P(D)$ の 2 倍以上

④　$P(C)$ の方が $P(D)$ より高く，$P(C)$ は $P(D)$ の 2 倍未満

$\boxed{\text{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{I}}$ の解答欄 $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

II

問 1　次の文中の $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{D}}$, $\boxed{\text{E}}$, $\boxed{\text{G}}$ には，下の選択肢 ⓪ ～ ⑨ の中から適するものを選び，他の $\boxed{}$ には適する数を入れなさい。

点 O を中心とする半径 2 の球があり，その球面上に 4 つの頂点を持つ四面体 ABCD を考える。この四面体 ABCD において，$AB = BC = CA = 2$ であり，辺 BD は球の直径であるとする。また，$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$，$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。

(1)　線分 DA, BC の中点をそれぞれ M, N とすると

$$\overrightarrow{DA} = \boxed{\text{A}}, \quad \overrightarrow{MN} = \frac{\boxed{\text{B}}}{\boxed{\text{C}}} + \boxed{\text{D}}$$

である。

(2)　線分 MN の中点を P とし，三角形 BCD の重心を G とすると

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\boxed{\text{E}}}{\boxed{\text{F}}}, \quad \overrightarrow{OG} = \frac{\boxed{\text{G}}}{\boxed{\text{H}}}, \quad |\overrightarrow{PG}| = \frac{\sqrt{\boxed{\text{I}}}}{\boxed{\text{J}}}$$

である。

また，$\overrightarrow{AG} = \dfrac{\boxed{\text{K}}}{\boxed{\text{L}}}\overrightarrow{AP}$ であるから，3 点 A, P, G は一直線上にあることがわかる。

⓪ $\vec{a}$　① $\vec{b}$　② $\vec{c}$　③ $\vec{a} - \vec{b}$　④ $\vec{b} - \vec{c}$

⑤ $\vec{c} - \vec{a}$　⑥ $\vec{a} + \vec{b}$　⑦ $\vec{b} + \vec{c}$　⑧ $\vec{c} + \vec{a}$　⑨ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

注）重心：center of gravity

- 計算欄 (memo) -

問 2　複素数平面上の異なる 3 点 A, B, C を表す複素数をそれぞれ α, β, γ とする。α, β, γ が

$$(\gamma-\alpha)^2+(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)+(\beta-\alpha)^2=0 \quad \cdots\cdots\cdots \text{①}$$

$$|\beta-2\alpha+\gamma|=3 \quad \cdots\cdots\cdots \text{②}$$

を満たすとき，三角形 ABC の面積を求めよう。

まず，① より

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{-\boxed{\text{M}}\pm\sqrt{\boxed{\text{N}}}\,i}{\boxed{\text{O}}}$$

であるから

$$\left|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=\boxed{\text{P}},\quad \arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\pm\frac{\boxed{\text{Q}}}{\boxed{\text{R}}}\pi$$

である。ただし，$-\pi<\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}<\pi$ とする。また

$$\beta-2\alpha+\gamma=(\beta-\alpha)\cdot\frac{\boxed{\text{S}}\pm\sqrt{\boxed{\text{T}}}\,i}{\boxed{\text{U}}}$$

であるから，② より

$$|\beta-\alpha|=\boxed{\text{V}}$$

となる。

したがって，三角形 ABC の面積は $\dfrac{\boxed{\text{W}}\sqrt{\boxed{\text{X}}}}{\boxed{\text{Y}}}$ である。

注）複素数平面：complex plane，複素数：complex number

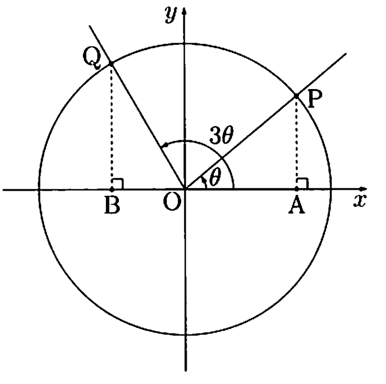
\- 計算欄 (memo) -

II の問題はこれで終わりです。II の解答欄 Z はマークしないでください。

III

座標平面上に，原点 O を中心とする半径 1 の円 C を考える。x 軸の正の部分から角 θ だけ回転した動径と C の交点を P とおき，x 軸の正の部分から角 3θ だけ回転した動径と C の交点を Q とおく。ただし，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ とする。

また，点 P を通り x 軸に垂直な直線と x 軸との交点を A，点 Q を通り x 軸に垂直な直線と x 軸との交点を B とおく。さらに，線分 AB の長さを ℓ とおく。



(1)　$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，$\ell = \dfrac{\boxed{\text{A}}}{\boxed{\text{B}}}$ である。

(2)　ℓ の最大値を求めよう。$\cos\theta = t$ とおき，ℓ を t を用いて表すと

$$\ell = \left|\boxed{\text{C}}\,t^{\boxed{\text{D}}} - \boxed{\text{E}}\,t\right|$$

である。また，$g(t) = \boxed{\text{C}}\,t^{\boxed{\text{D}}} - \boxed{\text{E}}\,t$ とおくと

$$g'(t) = \boxed{\text{F}}\left(\boxed{\text{G}}\,t^{\boxed{\text{H}}} - 1\right)$$

である。したがって

$$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{\boxed{\text{I}}}}{\boxed{\text{J}}}$$

のとき ℓ は最大になり，その値は $\dfrac{\boxed{\text{K}}\sqrt{\boxed{\text{L}}}}{\boxed{\text{M}}}$ である。

（III は次ページに続く）

(3)　次の文中の $\boxed{\text{N}}$ ～ $\boxed{\text{S}}$ には，下の選択肢 ⓪ ～ ⑨ の中から適するものを選びなさい。

ℓ が最大になるような点 P と Q は 2 組あり，それらの座標は

$$\mathrm{P}\left(\frac{\sqrt{\boxed{\text{I}}}}{\boxed{\text{J}}},\ \boxed{\text{N}}\right),\quad \mathrm{Q}\left(\boxed{\text{O}},\ \boxed{\text{P}}\right)$$

と

$$\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{\boxed{\text{I}}}}{\boxed{\text{J}}},\ \boxed{\text{Q}}\right),\quad \mathrm{Q}\left(\boxed{\text{R}},\ \boxed{\text{S}}\right)$$

である。

⓪ $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　① $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　② $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$　③ $-\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$

④ $\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$　⑤ $-\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$　⑥ $\dfrac{\sqrt{6}}{9}$　⑦ $-\dfrac{\sqrt{6}}{9}$

⑧ $\dfrac{2\sqrt{6}}{9}$　⑨ $-\dfrac{2\sqrt{6}}{9}$

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\text{T}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

IV

次の各問いに答えなさい。ただし，log は自然対数とする。

(1)　$f(x) = x - 1 - \log x$ とする。このとき，$f(x)$ の最小値を求めよう。$f'(x)$ を求めると

$$f'(x) = \boxed{\mathrm{A}} - \frac{\boxed{\mathrm{B}}}{x}$$

となる。また，$f(x)$ の増減を調べると，$x = \boxed{\mathrm{C}}$ において最小値 $\boxed{\mathrm{D}}$ をとる。
これより，不等式 $x - 1 \geqq \log x$ が成り立つ。

(2)　次の文中の $\boxed{\mathrm{G}}$ には，下の選択肢 ⓪ ～ ③ の中から適するものを選び，他の $\boxed{}$ には適する数を入れなさい。

k は正の実数とし，n は正の整数とする。3 直線 $y = \dfrac{x}{k} - 1$，$x = n$，$x = n+1$ と曲線 $y = \log \dfrac{x}{k}$ で囲まれた図形の面積を S とおく。このとき，S を k, n の式で表そう。

(1) の結果を用いて S を求めると

$$S = \left[\frac{x^{\boxed{\mathrm{E}}}}{\boxed{\mathrm{F}}\,k} - x - \boxed{\mathrm{G}} + x \log k \right]_n^{n+1}$$

$$= \frac{\boxed{\mathrm{H}}\,n+1}{\boxed{\mathrm{I}}\,k} + \log k - (n + \boxed{\mathrm{J}}) \log(n + \boxed{\mathrm{K}}) + n \log n$$

となる。

⓪ $x(\log x + 1)$　　① $x(\log x - 1)$　　② $\dfrac{\log x + 1}{x}$　　③ $\dfrac{\log x - 1}{x}$

（IV は次ページに続く）

注）自然対数：natural logarithm

(3)　n を固定し，k を $k>0$ の範囲で動かしたとき，(2) の S の最小値を a_n とする。このとき，a_n および $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよう。

S を k で微分すると

$$\frac{dS}{dk} = \frac{\boxed{\mathsf{L}}\,k-(\boxed{\mathsf{M}}\,n+1)}{\boxed{\mathsf{N}}\,k^2}$$

である。よって，S は $k=n+\dfrac{\boxed{\mathsf{O}}}{\boxed{\mathsf{P}}}$ で最小となるから，

$$a_n = \boxed{\mathsf{Q}} - \log\left\{\left(\boxed{\mathsf{R}}+\frac{\boxed{\mathsf{S}}}{n}\right)^n \cdot \frac{\boxed{\mathsf{T}}\,n+\boxed{\mathsf{U}}}{\boxed{\mathsf{V}}\,n+1}\right\}$$

となる。したがって

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \boxed{\mathsf{W}}$$

である。

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\mathsf{X}}$ ～ $\boxed{\mathsf{Z}}$ はマークしないでください。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 2」が正しくマークしてあるか，
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。