平成23年度

日本留学試験（第２回）

試験問題

数学 コース 2
（上級コース）

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを<u>一つだけ</u>選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

＜ 解答用紙記入例 ＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

<u>選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。</u>

I

問 1　2 つの実数 a, b が

$$a^3 = \frac{1}{\sqrt{5}-2}, \quad b^3 = 2-\sqrt{5}$$

を満たすとき，$a+b$ の値を求めよう。

$a+b=x$ とおくと

$$x^3 = (a+b)^3 = a^3 + b^3 + \boxed{\mathsf{A}}\,ab(a+b)$$

となる。また，$ab = \boxed{\mathsf{BC}}$ であるから，この x は

$$x^3 + \boxed{\mathsf{D}}\,x - \boxed{\mathsf{E}} = 0$$

を満たすことが分かる。この方程式の左辺は

$$\begin{aligned} x^3 + \boxed{\mathsf{D}}\,x - \boxed{\mathsf{E}} &= \left(x^3 - \boxed{\mathsf{F}}\right) + \boxed{\mathsf{D}}\left(x - \boxed{\mathsf{F}}\right) \\ &= \left(x - \boxed{\mathsf{F}}\right)\left(x^2 + x + \boxed{\mathsf{G}}\right) \end{aligned}$$

と因数分解できる。ここで

$$x^2 + x + \boxed{\mathsf{G}} = \left(x + \frac{\boxed{\mathsf{H}}}{\boxed{\mathsf{I}}}\right)^2 + \frac{\boxed{\mathsf{JK}}}{\boxed{\mathsf{L}}} > 0$$

であるから，$x = a+b = \boxed{\mathsf{M}}$ を得る。

注）因数分解する：factorize

- 計算欄 (memo) -

問 2　2 つの関数 $y = x^2 + ax + a$ と $y = x + 1$ を考える。

(1)　2 つの関数のグラフの共有点の個数は，下記のように a と数 $\boxed{\text{Q}}$，$\boxed{\text{R}}$ との関係によって定まる。次の文中の $\boxed{\text{N}}$ ～ $\boxed{\text{P}}$ には，下の ⓪ ～ ② から適するものを選びなさい。

(i)　2 つの関数のグラフが異なる 2 点で交わるための条件は $\boxed{\text{N}}$ である。

(ii)　2 つの関数のグラフが 1 点で接するための条件は $\boxed{\text{O}}$ である。

(iii)　$y = x^2 + ax + a$ のグラフがつねに $y = x + 1$ のグラフの上方にあるための条件は $\boxed{\text{P}}$ である。

⓪　$\boxed{\text{Q}} < a < \boxed{\text{R}}$

①　$a = \boxed{\text{Q}}$ または $a = \boxed{\text{R}}$

②　$a < \boxed{\text{Q}}$ または $\boxed{\text{R}} < a$

(2)　a の値が条件 $\boxed{\text{P}}$ を満たすとき，2 つの関数の値の差 $g(x) = x^2 + ax + a - (x + 1)$ の最小値 m を考えよう。このとき，m は

$$m = -\frac{\boxed{\text{S}}}{\boxed{\text{T}}}(a^2 - \boxed{\text{U}}\,a + \boxed{\text{V}})$$

と表される。この m が最大となるのは $a = \boxed{\text{W}}$ のときであり，その値は $m = \boxed{\text{X}}$ である。

\- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{I}}$ の解答欄 $\boxed{\text{Y}}$, $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

II

O を原点とする座標平面上に 4 点

$$A(1, 0),\quad B(0, 1),\quad C(3, 0),\quad D(0, 2)$$

をとり，線分 AB, CD 上に，それぞれ点 P, Q を

$$AP : PB = CQ : QD = k : 2$$

となるようにとる。このとき，線分 PQ の長さの最小値を求めよう。

(1)　まず，$\overrightarrow{PQ} = (x, y)$ とおき，$x + 2y$ の値を求めよう。

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\boxed{\mathsf{A}}\,\overrightarrow{OA} + k\,\overrightarrow{OB}}{k + \boxed{\mathsf{B}}},\quad \overrightarrow{OQ} = \frac{\boxed{\mathsf{C}}\,\overrightarrow{OC} + k\,\overrightarrow{OD}}{k + \boxed{\mathsf{D}}}$$

であるから

$$(x, y) = \frac{1}{k + \boxed{\mathsf{E}}}\left(\boxed{\mathsf{F}}, k\right)$$

を得る。よって，$x + 2y = \boxed{\mathsf{G}}$ である。

(2)　PQ^2 を y を用いて表すと

$$PQ^2 = \boxed{\mathsf{H}}\,y^2 - \boxed{\mathsf{I}}\,y + \boxed{\mathsf{J}}$$

となる。よって，PQ が最小となるのは $y = \dfrac{\boxed{\mathsf{K}}}{\boxed{\mathsf{L}}}$ のときであり，その値は

$PQ = \dfrac{\boxed{\mathsf{M}}\sqrt{\boxed{\mathsf{N}}}}{\boxed{\mathsf{O}}}$ である。このときの k の値は $k = \boxed{\mathsf{P}}$ である。

\- 計算欄 (memo) -

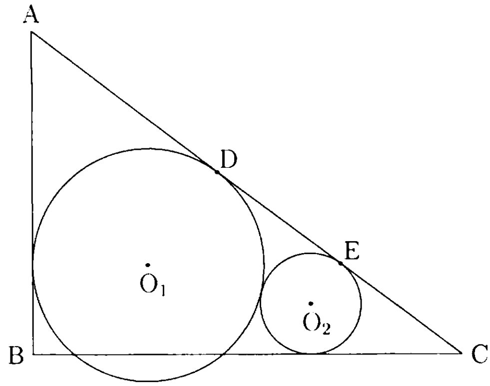
$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\text{Q}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

III

右図のように

$AB=9,\quad BC=12,\quad \angle ABC=90^\circ$

を満たす三角形 ABC と，半径 $2r$ の円 O_1 と半径 r の円 O_2 がある。円 O_1 と円 O_2 は互いに外接し，円 O_1 は 2 辺 AB, AC と接し，円 O_2 は 2 辺 CA, CB に接している。このとき，r の値を求めよう。



まず，2 円 O_1, O_2 と辺 AC の接点をそれぞれ D, E とし，$\angle O_1AC=\alpha$ とする。このとき，$\tan 2\alpha=\dfrac{\boxed{\text{A}}}{\boxed{\text{B}}}$ となるから，2 倍角の公式より，$\tan\alpha=\dfrac{\boxed{\text{C}}}{\boxed{\text{D}}}$ を得る。よって，$AD=\boxed{\text{E}}\,r$ である。

次に，$\angle O_2CA=\beta$ とすると，$\alpha+\beta=\boxed{\text{FG}}^\circ$ であるから，加法定理より，$\tan\beta=\dfrac{\boxed{\text{H}}}{\boxed{\text{I}}}$ を得る。よって，$CE=\boxed{\text{J}}\,r$ である。

さらに，$AC=\boxed{\text{KL}}$，$DE=\boxed{\text{M}}\sqrt{\boxed{\text{N}}}\,r$ である。以上より

$$r=\frac{\boxed{\text{OP}}\left(\boxed{\text{Q}}-\boxed{\text{R}}\sqrt{\boxed{\text{S}}}\right)}{41}$$

を得る。

注）外接する：be circumscribed，
2 倍角の公式：the double-angle formula，加法定理：the addition theorem

\- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\ \text{T}\ }$ ～ $\boxed{\ \text{Z}\ }$ はマークしないでください。

IV

問 1　$f(x) = 4\sqrt{3}e^{-x}\cos x + 6e^{-x}$ とする。

(1)　$0 \leqq x < 2\pi$ の範囲で，$f(x) = 0$ となる x の値を a, b $(a < b)$ とすると

$$a = \frac{\boxed{\text{A}}}{\boxed{\text{B}}}\pi, \qquad b = \frac{\boxed{\text{C}}}{\boxed{\text{D}}}\pi$$

である。

(2)　$\dfrac{d}{dx}\left(pe^{-x}\cos x + qe^{-x}\sin x\right) = e^{-x}\cos x$ を満たす定数 p, q の値はそれぞれ

$$p = \frac{\boxed{\text{EF}}}{\boxed{\text{G}}}, \qquad q = \frac{\boxed{\text{H}}}{\boxed{\text{I}}}$$

である。

(3)　(1) で求めた a, b の値に対して，$e^{-a} = A$，$e^{-b} = B$ とおいて，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ の値を計算すると

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left(\boxed{\text{J}} - \sqrt{\boxed{\text{K}}}\right)A - \left(\boxed{\text{L}} + \sqrt{\boxed{\text{M}}}\right)B$$

となる。

- 計算欄 (memo) -

問 2　定積分 $S=\int_0^a x\sqrt{\frac{1}{3}x+2}\,dx$ を考える。次の問いに答えなさい。

ただし，$\boxed{\text{S}}$，$\boxed{\text{T}}$ には下の ⓪ ～ ⑨ の中から適する式を選びなさい。

(1)　$t=\sqrt{\frac{1}{3}x+2}$ とおくと

$$\int x\sqrt{\frac{1}{3}x+2}\,dx = \boxed{\text{NO}}\int\left(t^{\boxed{\text{P}}}-\boxed{\text{Q}}\,t^{\boxed{\text{R}}}\right)dt$$
$$= \boxed{\text{S}}+C$$

となる。ただし，C は積分定数である。

(2)　(1) の結果を用いて

$$S=\boxed{\text{T}}$$

を得る。したがって

$$\lim_{a\to\infty}\frac{S}{a^{\frac{\boxed{\text{U}}}{\boxed{\text{V}}}}}=\frac{\boxed{\text{W}}\sqrt{\boxed{\text{X}}}}{\boxed{\text{YZ}}}$$

である。

⓪ $\frac{6}{5}t^5(3t^2-10)$

① $\frac{6}{5}t^3(3t^2-10)$

② $\frac{12}{5}t^5(3t^2-5)$

③ $\frac{12}{5}t^3(3t^2-5)$

④ $\frac{6}{5}t^3(3t^2-5)$

⑤ $\frac{6}{5}\left\{\left(\sqrt{\frac{1}{3}a+2}\right)^5(a-4)+8\sqrt{2}\right\}$

⑥ $\frac{12}{5}\left\{\left(\sqrt{\frac{1}{3}a+2}\right)^3(a-2)+4\sqrt{2}\right\}$

⑦ $\frac{12}{5}\left\{\left(\sqrt{\frac{1}{3}a+2}\right)^5(a-2)+4\sqrt{2}\right\}$

⑧ $\frac{6}{5}\left\{\left(\sqrt{\frac{1}{3}a+2}\right)^3(a-4)+8\sqrt{2}\right\}$

⑨ $\frac{6}{5}\left\{\left(\sqrt{\frac{1}{3}a+2}\right)^3(a-2)+8\sqrt{2}\right\}$

注）積分定数：integral constant

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 2」が正しくマークしてあるか，
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。