# 平成19年度

# 日本留学試験（第2回）

# 試験問題

# 数学 コース 2

## (上級コース)

**「解答コース」記入方法**

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の左上にある「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

< 解答用紙記入例 >

| 解答コース Course | |
|---|---|
| コース 1<br>Course 1 | コース 2<br>Course 2 |
| ○ | ● |

# I

問 1　$x$ 軸に接する放物線を $C$ とする。$C$ をグラフとする 2 次関数は $a$, $p$ を定数として

$$y = a(x-p)^2$$

と表される。

(1)　$C$ が点 $(1, 2)$ を通るとき，$a$, $p$ は

$$\boxed{\text{A}} = a(\boxed{\text{B}} - p)^2 \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を満たす。

(2)　さらに，$C$ を $x$ 軸方向に右へ 3 だけ平行移動すると，そのグラフは点 $(2, 8)$ を通る。このとき，$a$, $p$ は

$$\boxed{\text{C}} = a(\boxed{\text{D}} + p)^2 \quad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

を満たす。

(3)　① と ② より，$a$ を消去すると

$$(\boxed{\text{D}} + p)^2 = \boxed{\text{E}}(\boxed{\text{B}} - p)^2$$

である。よって，$p > 1$ を満たす $p$ を求めると

$$p = \boxed{\text{F}}$$

であり

$$a = \frac{\boxed{\text{G}}}{\boxed{\text{H}}}$$

となる。

問 2　$a, b, k$ を実数とする。次の不等式を考える。

$$a^2+b^2 \leqq 21k-3k^2 \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

(1)　$a=b=0$ のとき，① が成り立つような $k$ の値の範囲は

$$\boxed{\text{I}} \leqq k \leqq \boxed{\text{J}}$$

である。

(2)　$k>0$ とする。$a=b=0$ であることが，① が成り立つための必要十分条件となるのは $k=$ $\boxed{\text{K}}$ のときである。

(3)　$a=b=0$ であることが，① が成り立つための十分条件であって必要条件ではないような整数 $k$ の最大値は $\boxed{\text{L}}$ である。

$\boxed{\text{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{I}}$ の解答欄 $\boxed{\text{M}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ には何も書かないでください。

# II

**問 1**　$n$ は整数で，$1<n$ とする。$n^3$ を 42 で割ったときの余りが $n$ であるような，$n$ の最大値，および，最小値を求めよう。

$n^3$ を 42 で割ったときの商を $q$ とすると

$$n^3 = \boxed{\mathrm{AB}}\,q + n \qquad (1 < n < \boxed{\mathrm{AB}}) \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

である。等式 ① は

$$(n - \boxed{\mathrm{C}})\,n\,(n + \boxed{\mathrm{D}}) = \boxed{\mathrm{AB}}\,q \qquad (1 < n < \boxed{\mathrm{AB}}) \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

と変形できる。

$n-\boxed{\mathrm{C}}$，$n$，$n+\boxed{\mathrm{D}}$ の中には，つねに，2 の倍数と $\boxed{\mathrm{E}}$ の倍数が含まれており，等式 ② の形から，さらに $n-\boxed{\mathrm{C}}$，$n$，$n+\boxed{\mathrm{D}}$ の中には，$\boxed{\mathrm{F}}$ の倍数が含まれている。

このような $n$ を調べると，$n$ の最大値は $\boxed{\mathrm{GH}}$ であり，最小値は $\boxed{\mathrm{I}}$ である。

注）余り：remainder，商：quotient

**問 2**　$\{a_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ は，初項 $a_1 = x$，公差 $-1$ の等差数列とする。このとき，すべての自然数 $k$ に対して

$$a_{2k-1} - a_{2k+1} = \boxed{\text{J}}$$
$$a_{2k}{}^2 = (x+1)^2 - \boxed{\text{K}}\,k(x+1) + \boxed{\text{L}}\,k^2$$

となる。

(1)　$T_n = \sum_{k=1}^{n} (a_{2k-1} - a_{2k+1})a_{2k}{}^2$ とおくと

$$\frac{T_n}{2n} = (x+1)^2 - \boxed{\text{M}}\,(n + \boxed{\text{N}})(x+1) + \frac{\boxed{\text{O}}}{\boxed{\text{P}}}(n + \boxed{\text{Q}})(\boxed{\text{R}}\,n + 1)$$

である。

(2)　(1) において $T_8 < 352$ であれば，$\boxed{\text{S}} < x < \boxed{\text{T}}$ であり，特に $x$ が整数であれば，$a_8 = \boxed{\text{U}}$ である。

注）公差：common difference，等差数列：arithmetic progression

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\mathrm{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\mathrm{II}}$ の解答欄 $\boxed{\mathsf{V}}$ ～ $\boxed{\mathsf{Z}}$ には何も書かないでください。

# III

問 1　$0° \leqq \alpha \leqq 120°$, $0° \leqq \beta \leqq 120°$ とする。座標平面上に，3 点

$$\mathrm{O}(0,0),\quad \mathrm{A}(2\sqrt{3}, -2\sqrt{6}),\quad \mathrm{B}(2\sqrt{6}, 2\sqrt{3})$$

があり，点 P は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cos\alpha + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\sin\beta$$

を満たしている。

(1)　$\cos\alpha$, $\sin\beta$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{\mathsf{AB}}}{\boxed{\mathsf{C}}} \leqq \cos\alpha \leqq \boxed{\mathsf{D}},\qquad \boxed{\mathsf{E}} \leqq \sin\beta \leqq \boxed{\mathsf{F}}$$

である。

(2)　$\boxed{\mathsf{G}}$ には，下の ⓪ ～ ③ のうちから最も適するものを 1 つ選びなさい。

点 P の存在する範囲は $\boxed{\mathsf{G}}$ の内部および周である。

⓪ 正方形　① 長方形　② ひし形　③ 平行四辺形

また，その図形の面積は $\boxed{\mathsf{HI}}$ である。

(3)　$\alpha=\beta$ とする。$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = \boxed{\mathsf{JK}}$ であるから，点 P の存在する範囲は半径 $\boxed{\mathsf{L}}$ の円の弧で，その弧の長さは $\boxed{\mathsf{M}}\,\pi$ である。

注）ひし形：rhombus，弧：arc

- 計算欄 (memo) -

**問 2**　$x$, $y$ が不等式

$$2\log_3(x-y) \leqq \log_3 x + \log_3 y \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を満たしている。

このとき，対数の真数の条件より

$$\boxed{\text{N}} < \frac{y}{x} < \boxed{\text{O}}$$

である。

ここで ① を変形すると

$$x^2 - \boxed{\text{P}}\,xy + y^2 \leqq \boxed{\text{Q}}$$

が得られるから，$\dfrac{y}{x}$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{R}} - \sqrt{\boxed{\text{S}}}}{\boxed{\text{T}}} \leqq \frac{y}{x} < \boxed{\text{U}}$$

である。

注）対数の真数の条件：the condition on the domain of a logarithm

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\text{V}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ には何も書かないでください。

## IV

**問 1**　$f(x) = \log \dfrac{1}{x}$　$(x > 0)$　とする。ただし，log は自然対数である。

(1)　$f'(x) = \dfrac{\boxed{\text{AB}}}{x}$,

$$\int x f(x)\,dx = \frac{\boxed{\text{C}}}{\boxed{\text{D}}} x^2 f(x) + \frac{\boxed{\text{E}}}{\boxed{\text{F}}} x^2 + C \qquad (C\ \text{は積分定数})$$

(2)　$t$ は $0 < t < \dfrac{1}{2}$ を満たす数とする。$xy$ 平面において，曲線 $y = xf(x)$ と直線 $x = t$，直線 $x = 2t$ および $x$ 軸によって囲まれた部分の面積を $S(t)$ とするとき，$S(t)$ を $t$，$f(t)$，$f(2t)$ を用いて表すと

$$S(t) = \left( \boxed{\text{G}}\, f(2t) - \frac{\boxed{\text{H}}}{\boxed{\text{I}}} f(t) + \frac{\boxed{\text{J}}}{\boxed{\text{K}}} \right) t^{\boxed{\text{L}}}$$

となる。

注）自然対数：natural logarithm，積分定数：constant of integration

問 2　$f(x) = e^{2x} - 4e^{x} - 6x + a$　とする。ただし，$e$ は自然対数の底で，log は自然対数である。

(1)　$f'(x) = \boxed{\text{M}}\,e^{2x} - \boxed{\text{N}}\,e^{x} - \boxed{\text{O}}$ であるから，$f(x)$ は $x = \log \boxed{\text{P}}$ で最小になる。

(2)　$f(x) = 0$ を満たす $x$ が区間 $0 < x < \log 4$ の中に 2 個存在するための必要十分条件は

$$\boxed{\text{Q}}\log\boxed{\text{R}} < a < \boxed{\text{S}} + 6\log\boxed{\text{T}} \qquad \cdots\cdots\cdots \text{①}$$

である。

(3)　$a$ が不等式 ① を満たすとする。このとき，$f(x) = 0$ を満たす 2 つの解を $\alpha, \beta$ $(\alpha < \beta)$ とおくと，つねに

$$\alpha < \log\boxed{\text{U}} < \beta$$

が成り立つ。

注）　自然対数の底：the base of the natural logarithm ,　自然対数：natural logarithm

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\text{V}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ には何も書かないでください。

**コース 2 の問題はこれですべて終わりです。**

解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ の欄には何も書かないでください。

**この問題冊子を持ち帰ることはできません。**