平成30年度

日本留学試験（第１回）

試験問題

The Examination

平成30年度（2018年度）日本留学試験

数学（80分）

【コース1（基本, Basic）・コース2（上級, Advanced）】

※　どちらかのコースを<u>一つだけ</u>選んで解答してください。

Ⅰ　**試験全体に関する注意**

1．係員の許可なしに，部屋の外に出ることはできません。

2．この問題冊子を持ち帰ることはできません。

Ⅱ　**問題冊子に関する注意**

1．試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見ないでください。

2．試験開始の合図があったら，下の欄に，受験番号と名前を，受験票と同じように記入してください。

3．コース1は1～13ページ，コース2は15～27ページにあります。

4．足りないページがあったら，手をあげて知らせてください。

5．メモや計算などを書く場合は，問題冊子に書いてください。

Ⅲ　**解答方法に関する注意**

1．解答は，解答用紙に鉛筆（HB）で記入してください。

2．問題文中のA，B，C，…には，それぞれ－（マイナスの符号），または，0から9までの数が一つずつ入ります。あてはまるものを選び，解答用紙（マークシート）の対応する解答欄にマークしてください。

3．同一の問題文中に $\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{BC}}$ などが繰り返し現れる場合，2度目以降は，$\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{BC}}$ のように表しています。

解答に関する記入上の注意

(1)　根号（$\sqrt{\ }$）の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。
（例：$\sqrt{32}$ のときは，$2\sqrt{8}$ ではなく $4\sqrt{2}$ と答えます。）

(2)　分数を答えるときは，符号は分子につけ，既約分数(reduced fraction)にして答えてください。
（例：$\dfrac{2}{6}$ は $\dfrac{1}{3}$，$-\dfrac{2}{\sqrt{6}}$ は $\dfrac{-2\sqrt{6}}{6}$ と分母を有理化してから約分し，$\dfrac{-\sqrt{6}}{3}$ と答えます。）

(3)　$\dfrac{\boxed{\text{A}}\sqrt{\boxed{\text{B}}}}{\boxed{\text{C}}}$ に $\dfrac{-\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は，下のようにマークしてください。

(4)　$\boxed{\text{DE}}\,x$ に $-x$ と答える場合は，Dを－，Eを1とし，下のようにマークしてください。

【解答用紙】

A	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
B	⊖	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
C	⊖	⓪	①	②	③	●	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
D	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
E	⊖	⓪	●	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

4．解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※　試験開始の合図があったら，必ず受験番号と名前を記入してください。

受験番号			*					*						
名　　前														

数学 コース 2
（上級コース）

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

＜ 解答用紙記入例 ＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

I

問 1　a を実数とし，2 次関数

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - (2a-1)x + a$$

について考える。

(1)　$y = f(x)$ のグラフの頂点の座標は

$$\left(\boxed{\mathsf{A}}\,a - \boxed{\mathsf{B}},\ -\boxed{\mathsf{C}}\,a^2 + \boxed{\mathsf{D}}\,a - \boxed{\mathsf{E}}\right)$$

である。

(2)　$y = f(x)$ のグラフと x 軸が異なる 2 点 A, B で交わるような a の値の範囲は

$$a < \frac{\boxed{\mathsf{F}}}{\boxed{\mathsf{G}}},\quad \boxed{\mathsf{H}} < a$$

である。

(3)　(2) の 2 点 A, B で，それらの x 座標がともに 0 以上 6 以下となる a の値の範囲は

$$\boxed{\mathsf{I}} < a \leqq \frac{\boxed{\mathsf{JK}}}{\boxed{\mathsf{LM}}}$$

である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　大きさの異なる 4 枚のカードがある。これらのカードに赤，黒，青，黄の色を塗る。ただし，どのカードにも 1 つの色のみを使い，また同じ色のカードが 2 枚以上あってもよいものとする。

(1)　全部で $\boxed{\mathrm{NOP}}$ 通りの塗り方がある。

(2)　全部の色を使う塗り方は $\boxed{\mathrm{QR}}$ 通りある。

(3)　2 枚は赤で，1 枚が黒，1 枚が青となるような塗り方は $\boxed{\mathrm{ST}}$ 通りある。

(4)　3 つの色を使う塗り方は $\boxed{\mathrm{UVW}}$ 通りある。

(5)　2 つの色を使う塗り方は $\boxed{\mathrm{XY}}$ 通りある。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{I}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{I}}$ の解答欄 $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

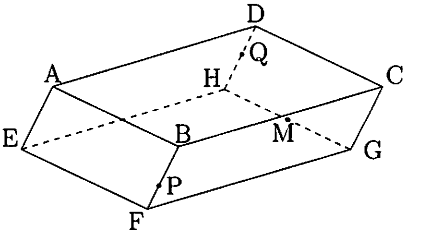
II

問 1　右図の平行六面体は

$AB = 2,\quad AD = 3,\quad AE = 1$

$\angle BAD = 60°,\quad \angle BAE = 90°,\quad \angle DAE = 120°$

を満たしている。辺 GH の中点を M とする。また，辺 BF, DH 上にそれぞれ点 P, Q をとる。このとき，4 点 A, P, M, Q は同一平面上にあるとする。そのような P, Q の中で線分 PQ の長さが最大になるものを求めよう。



(1)　$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$，$\overrightarrow{AD} = \vec{b}$，$\overrightarrow{AE} = \vec{c}$ とおくと，これらのベクトルの内積について

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \boxed{\mathsf{A}},\quad \vec{b}\cdot\vec{c} = -\frac{\boxed{\mathsf{B}}}{\boxed{\mathsf{C}}},\quad \vec{c}\cdot\vec{a} = \boxed{\mathsf{D}}$$

が成り立つ。

(2)　s, t を $0 \leqq s \leqq 1, 0 \leqq t \leqq 1$ とし，$BP : PF = s : (1-s)$，$DQ : QH = t : (1-t)$ とおく。4 点 A, P, M, Q が同一平面上にあるから

$$\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AP} + \beta\overrightarrow{AQ}$$

が成り立つような実数 α, β が存在する。したがって，s, t は

$$s = \boxed{\mathsf{E}}\left(\boxed{\mathsf{F}} - t\right)$$

を満たす。このとき，$|\overrightarrow{PQ}|$ は t を用いて

$$|\overrightarrow{PQ}|^2 = \boxed{\mathsf{G}}\,t^2 - \boxed{\mathsf{HI}}\,t + \boxed{\mathsf{JK}}$$

と表される。

よって，線分 PQ の長さが最大になるのは $\boxed{\mathsf{L}}$ のときである。ただし，$\boxed{\mathsf{L}}$ には，下の選択肢 ⓪ ～ ⑤ の中から適するものを選びなさい。

⓪ $s = 0,\quad t = 1$　① $s = 0,\quad t = \frac{1}{2}$　② $s = \frac{1}{2},\quad t = \frac{3}{4}$

③ $s = \frac{2}{3},\quad t = \frac{2}{3}$　④ $s = 1,\quad t = \frac{1}{2}$　⑤ $s = 1,\quad t = \frac{2}{3}$

注）内積：inner product

- 計算欄 (memo) -

問 2　$x>0$, $y>0$ を満たす x, y に対して，$\dfrac{y}{x}$，x，$\dfrac{8}{y}$ の中で最も小さい値を m とおく。

また，$m=\dfrac{y}{x}$ となるような点 (x, y) の集合を A，$m=\dfrac{8}{y}$ となるような点 (x, y) の集合を B とする。

(1)　次の文中の $\boxed{\mathsf{M}}$ ～ $\boxed{\mathsf{S}}$ には，下の選択肢 ⓪ ～ ⑦ の中から適するものを選びなさい。

A, B を求めると次のようになる。

$$A=\left\{(x, y)\ \middle|\ \boxed{\mathsf{M}} \leqq \boxed{\mathsf{N}},\quad \boxed{\mathsf{O}} \leqq 8\boxed{\mathsf{P}}\right\}$$
$$B=\left\{(x, y)\ \middle|\ 8\boxed{\mathsf{Q}} \leqq \boxed{\mathsf{R}},\quad 8 \leqq \boxed{\mathsf{S}}\right\}$$

⓪ x　① y　② $x+y$　③ $x-y$

④ x^2　⑤ xy　⑥ y^2　⑦ x^2+y^2

(2)　次の文中の $\boxed{\mathsf{T}}$，$\boxed{\mathsf{U}}$ には，右ページの選択肢 ⓪ ～ ⑧ の中から適するものを選びなさい。

xy 平面上に A, B を図示すると，A は $\boxed{\mathsf{T}}$，B は $\boxed{\mathsf{U}}$ の灰色部分である。ただし，座標軸は灰色部分に含まれない。

(3)　点 $\mathrm{P}(x, y)$ が $A \cup B$ を動くとき，m の最大値を求めよう。

$\mathrm{P}(x, y) \in A$ のとき，$y=mx$ であるから，原点 O と P を通る直線の傾きを最大にする点 P を見つければよい。

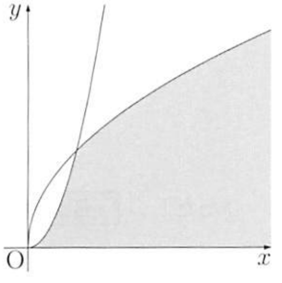
また，$\mathrm{P}(x, y) \in B$ のとき，$m=\dfrac{8}{y}$ であるから，P の y 座標が最小になる点 P を見つければよい。

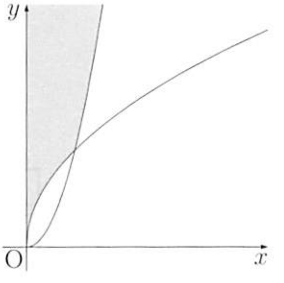
以上より，m は $(x, y)=\left(\boxed{\mathsf{V}}, \boxed{\mathsf{W}}\right)$ のとき，最大値 $\boxed{\mathsf{X}}$ をとる。

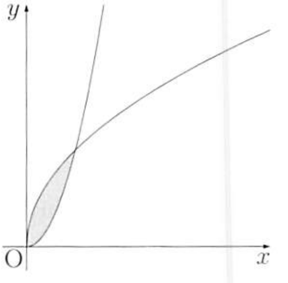
（問 2 は次ページに続く）

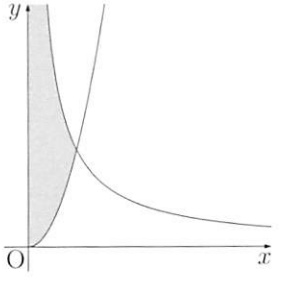
注）灰色部分：shaded portion

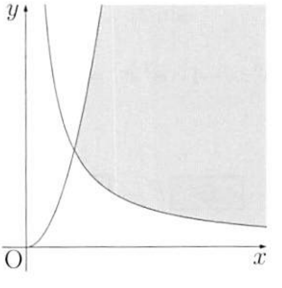
［(2)の選択肢］

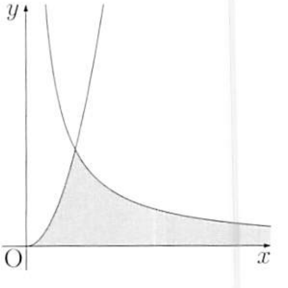
⓪


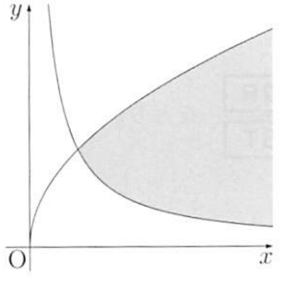
①


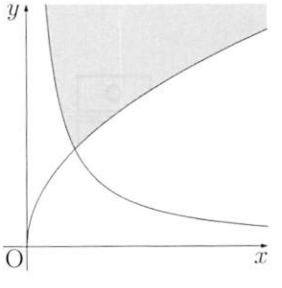
②


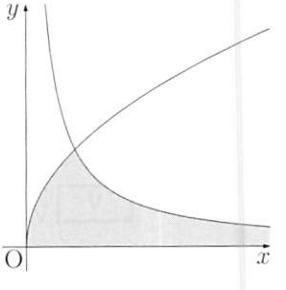
③


④


⑤


⑥


⑦


⑧


II の問題はこれで終わりです。II の解答欄 **Y** ， **Z** はマークしないでください。

III

$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，関数

$$f(x) = 4\sin^3 x + 4\cos^3 x - 8\sin 2x - 7$$

の最大値，最小値を求めよう。

$t = \sin x + \cos x$ とおく。

$$\sin x + \cos x = \sqrt{\boxed{\text{A}}}\sin\left(x + \frac{\boxed{\text{B}}}{\boxed{\text{C}}}\pi\right) \quad (\text{ただし，} \boxed{\text{B}} < \boxed{\text{C}})$$

であるから，t のとる値の範囲は $-\boxed{\text{D}} \leqq t \leqq \sqrt{\boxed{\text{E}}}$ である。また

$$\sin 2x = t^2 - \boxed{\text{F}}$$
$$4\sin^3 x + 4\cos^3 x = -\boxed{\text{G}}t^3 + \boxed{\text{H}}t$$

であるから

$$f(x) = -\boxed{\text{G}}t^3 - \boxed{\text{I}}t^2 + \boxed{\text{H}}t + \boxed{\text{J}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

である。① の右辺を $g(t)$ とおき，t で微分すると

$$g'(t) = -\boxed{\text{K}}\left(\boxed{\text{L}}t - \boxed{\text{M}}\right)\left(t + \boxed{\text{N}}\right)$$

である。

したがって，$g(t)$ $\left(= f(x)\right)$ は，$t = \dfrac{\boxed{\text{O}}}{\boxed{\text{P}}}$ で最大値 $\dfrac{\boxed{\text{QR}}}{\boxed{\text{ST}}}$ をとり，$t = \sqrt{\boxed{\text{U}}}$ で最小値 $\boxed{\text{V}}\sqrt{\boxed{\text{W}}} - \boxed{\text{XY}}$ をとる。

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\ \mathsf{Z}\ }$ はマークしないでください。

$\boxed{\text{IV}}$

$a_n = \displaystyle\int_0^1 x^{2n}\sqrt{1-x^2}\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$ とおくとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$ を求めよう。

(1)　まず，a_0, a_1 を求めてみよう。半径 1 の円の面積は π であるから

$$a_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{\boxed{\text{A}}}$$

である。a_1 は部分積分法により

$$\begin{aligned} a_1 &= \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx \\ &= -\frac{\boxed{\text{B}}}{\boxed{\text{C}}}\left[x(1-x^2)^{\frac{\boxed{\text{D}}}{\boxed{\text{E}}}}\right]_0^1 + \frac{\boxed{\text{F}}}{\boxed{\text{G}}}\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{\boxed{\text{H}}}{\boxed{\text{I}}}}\,dx \\ &= \frac{\boxed{\text{J}}}{\boxed{\text{K}}}\left\{\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx - \int_0^1 x^{\boxed{\text{L}}}\sqrt{1-x^2}\,dx\right\} \end{aligned}$$

となる。よって，$a_1 = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{MN}}}$ である。

（$\boxed{\text{IV}}$は次ページに続く）

注） 部分積分法：the partial integral method

(2)　次の文中の $\boxed{\text{O}}$ ～ $\boxed{\text{U}}$ には，下の選択肢 ⓪ ～ ⑨ の中から適するものを選びなさい。

a_1 を求めたのと同様にして，a_n は部分積分法により

$$a_n = \frac{\boxed{\text{O}}}{\boxed{\text{P}}}\left\{\int_0^1 x^{\boxed{\text{Q}}}\sqrt{1-x^2}\,dx - \int_0^1 x^{\boxed{\text{R}}}\sqrt{1-x^2}\,dx\right\} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

となる。よって

$$\left(\boxed{\text{S}}\right)a_n = \left(\boxed{\text{T}}\right)a_{n-1}$$

となる。したがって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}} = \boxed{\text{U}}$$

を得る。

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4
⑤ $2n-2$	⑥ $2n-1$	⑦ $2n$	⑧ $2n+1$	⑨ $2n+2$

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\text{V}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

コース２の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース２」が正しくマークしてあるか，もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。