平成25年度

日本留学試験（第２回）

試 験 問 題

数学 コース 2

（上級コース）

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを一つだけ選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

＜ 解答用紙記入例 ＞

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。

I

問 1　2 次関数

$$y = -x^2 - ax + 3 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

について考える。

(1)　$a > 0$ であって，関数 ① の最大値が 7 であるならば，$a =$ $\boxed{\text{A}}$ である。このとき，この関数のグラフの軸の方程式は $x =$ $\boxed{\text{BC}}$ であり，また，このグラフと x 軸との交点の x 座標は $\boxed{\text{DE}} \pm \sqrt{\boxed{\text{F}}}$ である。

(2)　関数 ① のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動して得られる曲線が $(-3, -5)$ を通るならば，$a =$ $\boxed{\text{G}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　設問 (1) の $\boxed{\text{H}}$，$\boxed{\text{I}}$ と設問 (2) の $\boxed{\text{J}}$，$\boxed{\text{K}}$ には，下の ⓪ ～ ③ の中から適するものを選びなさい。

また，設問 (3) の $\boxed{\text{L}}$ ～ $\boxed{\text{R}}$ には適する数を入れなさい。

実数 x, y について次の条件 p, q, r を考える。

p：　x, y が等式 $(x+y)^2 = a(x^2+y^2) + bxy$ を満たしている。
ただし，a, b は実数で定数とする。

q：　$x = 0$ かつ $y = 0$ である。

r：　$x = 0$ または $y = 0$ である。

(1)　条件 p において，$a = b = 1$ とする。このとき，p は q であるための $\boxed{\text{H}}$。
また，p は r であるための $\boxed{\text{I}}$。

(2)　条件 p において，$a = b = 2$ とする。このとき，p は q であるための $\boxed{\text{J}}$。
また，p は r であるための $\boxed{\text{K}}$。

(3)　条件 p において，$a = 2$ とすると，p の式は

$$\left(x + \frac{b - \boxed{\text{L}}}{\boxed{\text{M}}}\,y\right)^2 + \left(\boxed{\text{N}} - \frac{\left(b - \boxed{\text{O}}\right)^2}{\boxed{\text{P}}}\right)y^2 = 0$$

と変形できる。したがって，p が q であるための必要十分条件となるのは，b が

$$\boxed{\text{Q}} < b < \boxed{\text{R}}$$

を満たすときに限る。

⓪　必要十分条件である

①　必要条件であるが，十分条件ではない

②　十分条件であるが，必要条件ではない

③　必要条件でも十分条件でもない

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\mathrm{I}}$ の問題はこれで終わりです。 $\boxed{\mathrm{I}}$ の解答欄 $\boxed{\ \mathsf{S}\ }$ ～ $\boxed{\ \mathsf{Z}\ }$ はマークしないでください。

II

数列 $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ は等差数列で

$$a_2 = 2, \quad a_6 = 3a_3$$

を満たしている。このとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{r^{a_n}}$ を考える。ただし，r は正の実数である。

(1)　数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とおくと

$$a = \boxed{\mathsf{AB}}, \quad d = \boxed{\mathsf{C}}$$

である。

(2)　級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{r^{a_n}}$ は，初項が $\boxed{\mathsf{D}}\, r^{\boxed{\mathsf{E}}}$，公比が $\dfrac{\boxed{\mathsf{F}}}{r^{\boxed{\mathsf{G}}}}$ の無限等比級数である。

したがって，この級数は

$$r > 3^{\frac{\boxed{\mathsf{H}}}{\boxed{\mathsf{I}}}}$$

のとき収束し，その和 S は

$$S = \frac{\boxed{\mathsf{J}}\, r^{\boxed{\mathsf{K}}}}{r^{\boxed{\mathsf{L}}} - \boxed{\mathsf{M}}}$$

である。

(3)　和 S が最小となるのは

$$r = \boxed{\mathsf{N}}^{\frac{\boxed{\mathsf{O}}}{2}}$$

のときである。

注）等差数列 : arithmetic progression，級数 : series，公差 : common difference，
公比 : common ratio，無限等比級数 : infinite geometric series

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\mathrm{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\mathrm{II}}$ の解答欄 $\boxed{\mathbf{P}}$ ～ $\boxed{\mathbf{Z}}$ はマークしないでください。

III

$-\frac{\pi}{3} \leqq x \leqq \frac{\pi}{3}$ の範囲において，関数

$$f(x)=\sin 2x-3(\sin x+\cos x)$$

を考える。

(1) $t=\sin x+\cos x$ とおく。t のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{A}}-\sqrt{\boxed{\text{B}}}}{\boxed{\text{C}}} \leqq t \leqq \sqrt{\boxed{\text{D}}}$$

である。

(2) $f(x)$ は，最小値 $\boxed{\text{E}}-\boxed{\text{F}}\sqrt{\boxed{\text{G}}}$ を $x=\frac{\boxed{\text{H}}}{\boxed{\text{I}}}\pi$ でとる。

\- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{III}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{III}}$ の解答欄 $\boxed{\text{J}}$ ～ $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

IV

問 1　文中の $\boxed{\text{A}}$ ～ $\boxed{\text{I}}$ には，下の ⓪ ～ ⑨ の中から適するものを選びなさい。

関数 $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ の性質を用いて，a^{a+1} と $(a+1)^a$ の大小関係を調べよう。
ただし，$a > 0$ とする。

(1)　$f(x)$ の導関数を求めると

$$f'(x) = \frac{\boxed{\text{A}} - \log x}{x^{\boxed{\text{B}}}}$$

であるから，$f(x)$ が単調増加である x の変域は $\boxed{\text{C}} < x \leqq \boxed{\text{D}}$ であり，
単調減少である x の変域は $\boxed{\text{E}} \leqq x$ である。

(2)　$p = a^{a+1}$，$q = (a+1)^a$ とおくと

$$\log p - \log q = \left(a^{\boxed{\text{F}}} + a\right)\left\{f(a) - f\left(a + \boxed{\text{G}}\right)\right\}$$

である。よって

$0 < a < \dfrac{3}{2}$　ならば，$p \boxed{\text{H}} q$　であり

$3 < a$　ならば，$p \boxed{\text{I}} q$　である

ことが分かる。

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3
④ e	⑤ $e+1$	⑥ $\dfrac{1}{e}$	
⑦ $>$	⑧ $=$	⑨ $<$	

注）導関数：derivative

- 計算欄 (memo) -

問 2　$0 < a < 1$ とする。曲線 $y = xe^{2x}$ および x 軸と直線 $x = a - 1$ で囲まれる部分の面積と，曲線 $y = xe^{2x}$ および x 軸と直線 $x = a$ で囲まれる部分の面積の和を $S(a)$ とする。このとき，$S(a)$ を最小とする a の値を求めよう。

xe^{2x} の不定積分は

$$\frac{\boxed{\text{J}}}{\boxed{\text{K}}}\left(\boxed{\text{L}}\,x - 1\right)e^{2x} + C \qquad \left(C \text{ は積分定数}\right)$$

である。

xe^{2x} の値は，$x < 0$ のとき $xe^{2x} < 0$ であり，$x \geqq 0$ のとき $xe^{2x} \geqq 0$ である。したがって，$S(a)$ の値は

$$S(a) = \frac{\boxed{\text{M}}}{\boxed{\text{N}}}\left\{\boxed{\text{O}} + \left(\boxed{\text{P}}\,a - \boxed{\text{Q}}\right)e^{2(a-1)} + \left(\boxed{\text{R}}\,a - 1\right)e^{2a}\right\}$$

である。また

$$S'(a) = \left(a - \boxed{\text{S}}\right)e^{2(a-1)} + ae^{2a}$$

であるから，$S(a)$ を最小とする a の値は $a = \dfrac{\boxed{\text{T}}}{e^2 + \boxed{\text{U}}}$ である。これは $0 < a < 1$ を満たしている。

注）積分定数：constant of integration

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\textbf{V}}$ ～ $\boxed{\textbf{Z}}$ はマークしないでください。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 2」が正しくマークしてあるか，
もう一度確かめてください。

この問題冊子を持ち帰ることはできません。