2020年度　日本留学試験

数 学（８０分）

【コース１(基本, Basic)・コース２(上級, Advanced)】

※　どちらかのコースを<u>一つだけ</u>選んで解答してください。

I　試験全体に関する注意

1．係員の許可なしに，部屋の外に出ることはできません。

2．この問題冊子を持ち帰ることはできません。

II　問題冊子に関する注意

1．試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見ないでください。

2．試験開始の合図があったら，下の欄に，受験番号と名前を，受験票と同じように記入してください。

3．コース１は１～13ページ，コース２は15～27ページにあります。

4．足りないページがあったら，手をあげて知らせてください。

5．メモや計算などを書く場合は，問題冊子に書いてください。

III　解答方法に関する注意

1．解答は，解答用紙に鉛筆(ＨＢ)で記入してください。

2．問題文中の**A**，**B**，**C**,…には，それぞれ－(マイナスの符号)，または，０から９までの数が一つずつ入ります。適するものを選び，解答用紙(マークシート)の対応する解答欄にマークしてください。

3．同一の問題文中に $\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{BC}}$ などが繰り返し現れる場合，２度目以降は，$\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{BC}}$ のように表しています。

解答に関する記入上の注意

(1)　根号（$\sqrt{\ }$）の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。
　(例：$\sqrt{32}$ のときは，$2\sqrt{8}$ ではなく $4\sqrt{2}$ と答えます。)

(2)　分数を答えるときは，符号は分子につけ，既約分数(reduced fraction)にして答えてください。
　(例：$\frac{2}{6}$ は $\frac{1}{3}$，$-\frac{2}{\sqrt{6}}$ は $\frac{-2\sqrt{6}}{6}$ と分母を有理化してから約分し，$\frac{-\sqrt{6}}{3}$ と答えます。)

(3)　$\dfrac{\boxed{\text{A}}\sqrt{\boxed{\text{B}}}}{\boxed{\text{C}}}$ に $\dfrac{-\sqrt{3}}{4}$ と答える場合は，下のようにマークしてください。

(4)　$\boxed{\text{DE}}\,x$ に $-x$ と答える場合は，**D**を－，**E**を１とし，下のようにマークしてください。

【解答用紙】

A	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
B	⊖	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
C	⊖	⓪	①	②	③	●	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
D	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
E	⊖	⓪	●	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

4．解答用紙に書いてある注意事項も必ず読んでください。

※　試験開始の合図があったら，必ず受験番号と名前を記入してください。

受験番号			*					*						
名　　前														

数学 コース 2
（上級コース）

「解答コース」記入方法

解答コースには「コース1」と「コース2」がありますので，どちらかのコースを <u>一つだけ</u> 選んで解答してください。「コース2」を解答する場合は，右のように，解答用紙の「解答コース」の「コース2」を ○ で囲み，その下のマーク欄をマークしてください。

< 解答用紙記入例 >

解答コース Course	
コース 1 Course 1	コース 2 Course 2
○	●

<u>選択したコースを正しくマークしないと，採点されません。</u>

I

問 1　a は正の定数とする。2 次関数 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ のグラフを平行移動する。移動後の放物線と x 軸との交点が $(-2a,0)$, $(4a,0)$ であるとき，この放物線の方程式 $y=f(x)$ について考える。

(1)　$f(x)$ は

$$f(x)=\frac{\boxed{\text{A}}}{\boxed{\text{B}}}\left(x-\boxed{\text{C}}\,a\right)\left(x+\boxed{\text{D}}\,a\right)$$

と表せる。

(2)　$y=f(x)$ において，y の値が $10a^2$ 以下となる x の値の範囲は，不等式

$$x^2-\boxed{\text{E}}\,ax-\boxed{\text{FG}}\,a^2\leqq 0$$

を解いて，$-\boxed{\text{H}}\,a\leqq x\leqq\boxed{\text{I}}\,a$ である。

(3)　直線 $y=10a$ が $y=f(x)$ のグラフによって切り取られる線分の長さを 10 とする。$\boxed{\text{J}}\sqrt{\boxed{\text{K}}\,a^2+\boxed{\text{LM}}\,a}=10$ であるから，a の値は $\dfrac{\boxed{\text{N}}}{\boxed{\text{O}}}$ である。

- 計算欄 (memo) -

問 2　10 段の階段がある。1 段のぼり (1 回に階段を 1 段のぼること)，または 2 段のぼり (1 回に階段を 2 段のぼること) のいずれかで階段をのぼるとし，1 段のぼりも 2 段のぼりも必ず 1 回はあることとする。

10 段の階段をのぼるとき，次の 2 つの場合について考えよう。

(1)　2 段のぼりが連続してもよい場合

(i)　例えば，2 段のぼりが 3 回ならば，1 段のぼりは $\boxed{\mathbf{P}}$ 回であり，のぼり方は $\boxed{\mathbf{QR}}$ 通りある。

(ii)　2 段のぼりが連続してもよい場合の階段ののぼり方は全部で $\boxed{\mathbf{ST}}$ 通りある。

(2)　2 段のぼりが連続しない場合

(i)　例えば，2 段のぼりが 2 回ならば，1 段のぼりは $\boxed{\mathbf{U}}$ 回であり，のぼり方は $\boxed{\mathbf{VW}}$ 通りある。

(ii)　2 段のぼりが連続しない場合の階段ののぼり方は全部で $\boxed{\mathbf{XY}}$ 通りある。

- 計算欄 (memo) -

I の問題はこれで終わりです。 I の解答欄 $\boxed{\text{Z}}$ はマークしないでください。

II

問 1　初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n = \frac{n^2-17n}{4}$$

で表される数列 $\{a_n\}$ に対して，数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = a_n \cdot a_{n+5} \qquad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

と定める。

(1)　次の文中の $\boxed{\text{A}}$ ～ $\boxed{\text{C}}$ には，下の選択肢 ⓪ ～ ⑨ の中から適するものを選びなさい。

数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和 T_n を求めよう。

$a_n = \boxed{\text{A}}$ であるから，$b_n = \boxed{\text{B}}$ である。したがって

$$T_n = \boxed{\text{C}}$$

である。

⓪ $\dfrac{n-7}{2}$　① $\dfrac{n-9}{2}$　② $\dfrac{n-11}{2}$

③ $\dfrac{n^2-12n+27}{4}$　④ $\dfrac{n^2-13n+36}{4}$　⑤ $\dfrac{n^2-14n+45}{4}$

⑥ $\dfrac{n(n^2-17n+83)}{12}$　⑦ $\dfrac{n(n^2-17n+89)}{12}$　⑧ $\dfrac{n(n^2-18n+83)}{12}$

⑨ $\dfrac{n(n^2-18n+89)}{12}$

（問１は次ページに続く）

(2)　次に，T_n の最小値を求めよう。

$n \leqq$ $\boxed{\mathrm{D}}$ または $\boxed{\mathrm{EF}}$ $\leqq n$ のとき，$b_n > 0$ であり，また，$\boxed{\mathrm{G}}$ $\leqq n \leqq$ $\boxed{\mathrm{H}}$ のとき，$b_n < 0$ である。

したがって，$n =$ $\boxed{\mathrm{I}}$，$n =$ $\boxed{\mathrm{J}}$ および $n =$ $\boxed{\mathrm{K}}$ で，T_n は最小となり，その値は $\boxed{\mathrm{L}}$ である。ただし，$\boxed{\mathrm{I}}$ $<$ $\boxed{\mathrm{J}}$ $<$ $\boxed{\mathrm{K}}$ となるように答えなさい。

問 2　次の各問いに答えなさい。

(1)　複素数 $8+8\sqrt{3}i$ を極形式で表すと

$$\boxed{\text{MN}}\left(\cos\frac{\pi}{\boxed{\text{O}}}+i\sin\frac{\pi}{\boxed{\text{P}}}\right)$$

となる。

(2)　$z^4=8+8\sqrt{3}i$ を満たす複素数 z を $0 \leqq \arg z < 2\pi$ の範囲で考える。

$|z| = \boxed{\text{Q}}$ である。このような z は全部で 4 個あり，偏角の小さい順に z_1, z_2, z_3, z_4 とすると

$$\arg\frac{z_1z_2z_3}{z_4} = \frac{\pi}{\boxed{\text{R}}}$$

である。

(3)　$w^8-16w^4+256=0$ を満たす複素数 w を $0 \leqq \arg w < 2\pi$ の範囲で考える。

このような w は全部で 8 個あり，偏角の小さい順に $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8$ とする。これらのうち 4 個は (2) の z_1, z_2, z_3, z_4 のどれかと一致する。それは

$$w_{\boxed{\text{S}}} = z_1,\quad w_{\boxed{\text{T}}} = z_2,\quad w_{\boxed{\text{U}}} = z_3,\quad w_{\boxed{\text{V}}} = z_4$$

である。

また，$w_1w_8 = \boxed{\text{W}}$，$w_3w_4 = \boxed{\text{XY}}\,i$ である。

注）複素数：complex number，極形式：polar form，偏角：argument

- 計算欄 (memo) -

$\boxed{\text{II}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{II}}$ の解答欄 $\boxed{\mathsf{Z}}$ はマークしないでください。

III

関数 $f(x) = x^3 - 4x + 4$ について考える。

$y = f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{A}(-1, 7)$ における接線を ℓ とし，$y = f(x)$ のグラフに点 $\mathrm{B}(0, -12)$ から引いた接線を m とする。また，2 つの接線 ℓ と m の交点を C とおく。2 直線 ℓ, m のなす角を θ $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ とするとき，$\tan\theta$ の値を求めよう。

(1)　$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x) = \boxed{\mathsf{A}}\, x^{\boxed{\mathsf{B}}} - \boxed{\mathsf{C}}$$

である。したがって，接線 ℓ の傾きは $\boxed{\mathsf{DE}}$ であり，接線 ℓ の方程式は

$$y = \boxed{\mathsf{DE}}\, x + \boxed{\mathsf{F}}$$

である。

(2)　$y = f(x)$ のグラフと接線 m との接点の x 座標を a とする。このとき，接線 m の方程式は a を用いて

$$y = \left(\boxed{\mathsf{G}}\, a^{\boxed{\mathsf{H}}} - \boxed{\mathsf{I}}\right) x - \boxed{\mathsf{J}}\, a^{\boxed{\mathsf{K}}} + \boxed{\mathsf{L}}$$

と表せる。この直線が点 $\mathrm{B}(0, -12)$ を通るから，$a = \boxed{\mathsf{M}}$ で，接線 m の方程式は

$$y = \boxed{\mathsf{N}}\, x - \boxed{\mathsf{OP}}$$

となる。したがって，2 直線 ℓ と m の交点 C の座標は $\left(\boxed{\mathsf{Q}}, \boxed{\mathsf{R}}\right)$ である。

(3)　2 直線 ℓ, m と x 軸の正の向きとのなす角をそれぞれ α, β とすると

$$\tan\alpha = \boxed{\mathsf{ST}}, \quad \tan\beta = \boxed{\mathsf{U}}$$

であるから

$$\tan\theta = \frac{\boxed{\mathsf{V}}}{\boxed{\mathsf{W}}}$$

を得る。

注） 導関数：derivative

- 計算欄 (memo) -

III の問題はこれで終わりです。 III の解答欄 $\boxed{\textsf{X}}$ ～ $\boxed{\textsf{Z}}$ はマークしないでください。

IV

区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ において，関数

$$f(x) = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3}$$

を考える。このとき，$0 < x < \pi$ で $f(x) > 0$ を示して，さらに，曲線 $y = f(x)$ と x 軸とで囲まれた部分の面積 S を求めよう。

(1)　次の文中の $\boxed{\mathsf{K}}$，$\boxed{\mathsf{N}}$，$\boxed{\mathsf{Q}}$，$\boxed{\mathsf{R}}$ には，次の選択肢

⓪ 増加　　　① 減少

のどちらかから適するものを選び，他の $\boxed{}$ には適する数を入れなさい。

$f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = \left(\boxed{\mathsf{A}}\cos^2 x - \boxed{\mathsf{B}}\right)\left(\boxed{\mathsf{C}}\cos x + \boxed{\mathsf{D}}\right)$$

である。$f'(x) = 0$ となる x は $0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲に 3 個存在して，それらを小さい順に並べると

$$x = \frac{\pi}{\boxed{\mathsf{E}}},\quad \frac{\boxed{\mathsf{F}}}{\boxed{\mathsf{G}}}\pi,\quad \frac{\boxed{\mathsf{H}}}{\boxed{\mathsf{I}}}\pi$$

である。

次に，$f(x)$ の増減を調べると

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{\boxed{\mathsf{J}}}$ のとき，$\boxed{\mathsf{K}}$

$\dfrac{\pi}{\boxed{\mathsf{J}}} \leqq x \leqq \dfrac{\boxed{\mathsf{L}}}{\boxed{\mathsf{M}}}\pi$ のとき，$\boxed{\mathsf{N}}$

$\dfrac{\boxed{\mathsf{L}}}{\boxed{\mathsf{M}}}\pi \leqq x \leqq \dfrac{\boxed{\mathsf{O}}}{\boxed{\mathsf{P}}}\pi$ のとき，$\boxed{\mathsf{Q}}$

$\dfrac{\boxed{\mathsf{O}}}{\boxed{\mathsf{P}}}\pi \leqq x \leqq \pi$ のとき，$\boxed{\mathsf{R}}$

である。また

$$f(0) = 0,\quad f(\pi) = 0,\quad f\left(\frac{\boxed{\mathsf{L}}}{\boxed{\mathsf{M}}}\pi\right) = \frac{\sqrt{\boxed{\mathsf{S}}}}{\boxed{\mathsf{T}}} > 0$$

である。したがって，$0 < x < \pi$ のとき $f(x) > 0$ である。

（IV は次ページに続く）

(2)　曲線 $y = f(x)$ と x 軸とで囲まれた部分の面積 S は

$$S = \frac{\boxed{\mathsf{UV}}}{\boxed{\mathsf{W}}}$$

である。

$\boxed{\text{IV}}$ の問題はこれで終わりです。$\boxed{\text{IV}}$ の解答欄 $\boxed{\mathsf{X}}$ 〜 $\boxed{\mathsf{Z}}$ はマークしないでください。

コース 2 の問題はこれですべて終わりです。解答用紙の $\boxed{\text{V}}$ はマークしないでください。

解答用紙の解答コース欄に「コース 2」が正しくマークしてあるか，
もう一度確かめてください。