Tarea 2

Seminario de Geometría B

Grupos Kleinianos: Geometría y Visualización

Renato Leriche Vázquez y José Daniel Blancas Camarena

Semestre 2023 - 2

Teoría

[Antes de los ejercicios, un paréntesis. Recuerden que:

- Una *traslación* $T_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $v \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, está dada por
$$T_v(p) = p + v.$$

- Una *rotación* alrededor de un punto $q \in \mathbb{R}^2$, $R_{\theta,q} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, está dada por $R_{\theta,q}(p) = R_\theta(p-q) + q$, donde
$$R_\theta(p) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot p.$$

- Una *reflexión* por una recta L, $Ref_L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, está dada por $Ref_L(p) = Ref_\theta(p-q) + q$, donde q es un punto en la recta L y
$$Ref_\theta(p) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \cdot p$$
es la reflexión por la recta que pasa por el origen con ángulo θ respecto al eje X y que es paralela a L (es decir, el ángulo entre el eje X y L también es θ).

- $E(2) = \left\{ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \mid ||p-q|| = ||f(p) - f(q)|| \right\}$ es el *Grupo de Isometrías Euclidianas* o *de Transformaciones Rígidas* en $\mathbb{R}^2$.

- Un punto $O \in \mathbb{R}^2$ es *n-centro de un mosaico* si la rotación $R_{\theta,O}$ con $\theta = \frac{2\pi}{n}$, deja invariante al mosaico. **]**

1. **[3 pts]**. Demuestra que toda traslación y toda rotación alrededor de un punto es composición de dos reflexiones por rectas distintas. Con lo anterior, demuestra que todo elemento de $E(2)$ es composición de a lo más tres reflexiones. Ayuda: Usar el teorema de caracterización de transformaciones rígidas y no es necesario hacer las cuentas con las matrices (pero si gustan hacerlas también está bien).

2. **[3 pts]**. Sea

$$ConfAff(2) = \left\{T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \mid T(p) = \alpha f(p),\, \alpha \in \mathbb{R} - \{0\}\,,\, f \in E(2)\right\}$$

Demuestra que es un grupo cuya operación es la composición de funciones (este es el *Grupo de Transformaciones Afines Conformes* en $\mathbb{R}^2$). Ayuda: Usar el teorema de caracterización de transformaciones rígidas.

3. **[2 pts]**. Sean G un grupo de simetrías de mosaico, O_1 y O_2 n-centros distintos del mosaico (pero claro, con la misma n) y T_u, $T_v \in G$ las traslaciones de norma mínima que dejan invariante el mosaico. Demuestra que

$$\text{mín}\{||u||,\, ||v||\} \leq 2||O_1 - O_2||.$$

Sugerencia: Calcular la composición de las rotaciones R_{θ,O_1} y $R^{-1}_{\theta,O_2} \in G$, y aplicarla a O_2.

4. **[2 pts]**. Encuentra las regiones fundamentales y sus correspondientes orbifolios cociente de

   a) Un grupo de simetrías de friso $\langle T_v,\, Rot_\pi \rangle$.

   b) Un grupo de simetrías de mosaico **p4**.

   Justifica tus afirmaciones (no es necesario demostrar).

Programación

Crea un programa para dibujar lo que se indica.

1. **[2 pts]**. Frisos.

   a) Un $\mathcal{F}_3$, invariante bajo el grupo $\langle T_v,\, Ref_X \rangle$.

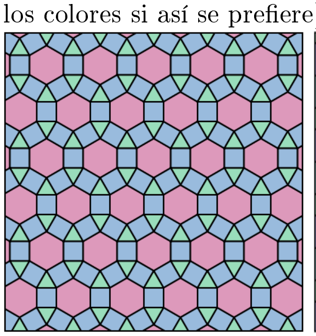
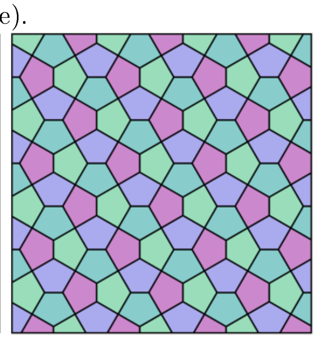
   b) Un $\mathcal{F}_7$, invariante bajo el grupo $\langle Ref_Y,\, Rot_{\pi,v} \rangle$. Ayuda: Nótese que $(Ref_Y \circ Rot_{\pi,v})^2 = T_{-4v}$.

2. **[2 pts]**. Una teselación basada en triángulos equiláteros.

   a) Invariante bajo el grupo de simetrías de mosaico **p6m** (el que tiene 6-centros, 3-centros y reflexiones por rectas que pasan por todos los centros).

   b) "Adornando" los triángulos, invariante bajo el el grupo de simetrías de mosaico **p31m** (el que tiene sólo 3-centros y reflexiones por rectas que pasan ciertos centros).

3. **[3 pts]**. Las teselaciones casi regulares en las imágenes (se pueden ignorar los colores si así se prefiere).

4. **[1 pt]**. La indicación de la región fundamental correspondiente al grupo de simetrías de la teselación pitagórica de cuadrados.

5. **[2 pts]**. Dos teselaciones regulares en el plano invariantes bajo **2 grupos distintos**, a partir de imágenes.
   Sugerencia: usar algunas de las obras de Escher en
   https://mcescher.com/gallery/symmetry. Algunos ejemplos: