Tarea 3

Seminario de Geometría B

Grupos Kleinianos: Geometría y Visualización

Renato Leriche Vázquez y José Daniel Blancas Camarena

Semestre 2023 - 2

Teoría

[Antes de los ejercicios, un paréntesis. Recuerden que:

- La proyección estereográfica (desde el polo norte $(0,0,1)$) es $\Pi : S^2 \to \hat{\mathbb{C}}$ dada por
$$\Pi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{1-x_3} + \frac{x_2}{1-x_3} i$$
y $\Pi(0,0,1) = \infty$. Además,
$$\Pi^{-1}(z) = \frac{1}{|z|^2+1}(z+\overline{z},\ i\overline{z}-iz,\ |z|^2-1)$$
y $\Pi^{-1}(\infty) = (0,0,1)$.
- Una transformación de Möbius $T : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ está dada por $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ son tales que $ad - bc \neq 0$. Además, si $c = 0$ entonces $T(\infty) = \infty$, y si $c \neq 0$ entonces $T(\infty) = a/c$ y $T(-d/c) = \infty$.
- Una inversión por un círculo C (con centro en $z_0 \in \mathbb{C}$ y radio r_0) es $I_C : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ dada por
$$I_C(z) = z_0 + \frac{r_0^2}{\overline{z-z_0}}$$
(nótese que el "denominador" es $\overline{z-z_0}$, es decir, el conjugado de $z - z_0$). **]**

<u>Demuestra</u> que

1. **[2 pts]**. $\Pi \circ Rot_{\pi,X} \circ \Pi^{-1}(z) = \frac{1}{z}$, es decir, la transformación de Möbius $z \mapsto \frac{1}{z}$ consiste en proyectar el plano complejo extendido $\hat{\mathbb{C}}$ a la esfera S^2, rotar la esfera π radianes en torno al eje X y luego proyectar de S^2 a $\hat{\mathbb{C}}$.

2. **[3 pts]**. La composición de dos inversiones por círculos en $\hat{\mathbb{C}}$ distintas es una transformación de Möbius. Ayuda: no es necesario hacer las las cuentas, pero si gustan hacerlas también está bien.

3. **[3 pts]**. Si $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ es una transformación de Möbius con $c \neq 0$, L es una recta que pasa por $z_0 \in \mathbb{C}$ y el polo de T es tal que $-\frac{d}{c} \notin L$, entonces:

   a) $T(L)$ es un círculo en $\mathbb{C}$ e $I_{T(L)} = T \circ Ref_L \circ T^{-1}$.

   b) $T(L)$ tiene centro $z_1 = T(Ref_L(-\frac{d}{c}))$ y radio $r_1 = |z_1 - T(z_0)|$.

4. **[2 pts]**. En la red de Steiner de una transformación de Möbius loxodrómica, las espirales intersecan a los círculos de Apolonio en exactamente un punto y en un ángulo constante para toda la red. Ayuda: Recuerda que el vector tangente a una curva parametrizada diferenciable $\alpha(t)$ es $\alpha'(t)$.

Programación

Crea un programa para dibujar lo que se indica.

1. **[1 pt]**. Las órbitas de conjuntos de puntos $A, B \subset \mathbb{C}$ distintos (por ejemplo, una "retícula cuadrada" y el "Dr. Stickler"), bajo la transformación de Cayley $K(z) = \frac{z-i}{z+i}$ (que es una transformación de Möbius).

2. **[3 pts]**. Las imágenes de conjuntos de puntos $A, B \in \mathbb{C}$ distintos (por ejemplo, una "retícula cuadrada" y el "Dr. Stickler") bajo tres inversiones en un círculo $I_C : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ distintas. Primero crea una `struct` que represente inversiones, con sus correspondientes constructores y método objeto función para evaluación de puntos (números complejos).
   [1 pt extra]. Implementa la *function* para componer dos inversiones, cuyo resultado es una transformación de Möbius.

3. **[3 pts]**. Las imágenes, bajo una transformación de Möbius $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ tal que $c \neq 0$, de varias rectas paralelas que no contengan el polo de T. Primero implementa el método para objeto función con los cálculos del ejercicio 3. de teoría. (En la implementación completa faltaría el caso con polo finito de T en la recta L, pero no es necesario que realicen los cálculos para esto ni la implementación del caso.)

4. **[3 pts]**. La red de Steiner de una transformación de Möbius parabólica cuyo punto fijo es finito, indicando con diferentes colores las dos familias ortogonales de círculos.

   Ejemplo: