

# Tarea 3

## Seminario de Geometría B

### Grupos Kleinianos: Geometría y Visualización

Renato Leriche Vázquez y José Daniel Blancas Camarena

Semestre 2023 - 2

#### Teoría

[ Antes de los ejercicios, un paréntesis. Recuerden que:

- La proyección estereográfica (desde el polo norte  $(0, 0, 1)$ ) es  $\Pi : S^2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  dada por

$$\Pi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{1 - x_3} + \frac{x_2}{1 - x_3}i$$

y  $\Pi(0, 0, 1) = \infty$ . Además,

$$\Pi^{-1}(z) = \frac{1}{|z|^2 + 1}(z + \bar{z}, i\bar{z} - iz, |z|^2 - 1)$$

y  $\Pi^{-1}(\infty) = (0, 0, 1)$ .

- Una transformación de Möbius  $T : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  está dada por  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  donde  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  son tales que  $ad - bc \neq 0$ . Además, si  $c = 0$  entonces  $T(\infty) = \infty$ , y si  $c \neq 0$  entonces  $T(\infty) = a/c$  y  $T(-d/c) = \infty$ .
- Una inversión por un círculo  $C$  (con centro en  $z_0 \in \mathbb{C}$  y radio  $r_0$ ) es  $I_C : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  dada por

$$I_C(z) = z_0 + \frac{r_0^2}{\overline{z - z_0}}$$

(nótese que el “denominador” es  $\overline{z - z_0}$ , es decir, el conjugado de  $z - z_0$ ). ]

Demuestra que

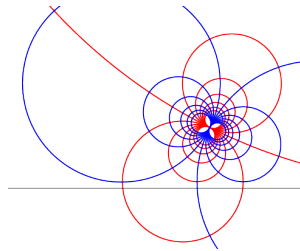
1. [2 pts].  $\Pi \circ Rot_{\pi, X} \circ \Pi^{-1}(z) = \frac{1}{z}$ , es decir, la transformación de Möbius  $z \mapsto \frac{1}{z}$  consiste en proyectar el plano complejo extendido  $\hat{\mathbb{C}}$  a la esfera  $S^2$ , rotar la esfera  $\pi$  radianes en torno al eje  $X$  y luego proyectar de  $S^2$  a  $\hat{\mathbb{C}}$ .

2. **[3 pts]**. La composición de dos inversiones por círculos en  $\hat{\mathbb{C}}$  distintas es una transformación de Möbius. Ayuda: no es necesario hacer las cuentas, pero si gustan hacerlas también está bien.
3. **[3 pts]**. Si  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  es una transformación de Möbius con  $c \neq 0$ ,  $L$  es una recta que pasa por  $z_0 \in \mathbb{C}$  y el polo de  $T$  es tal que  $-\frac{d}{c} \notin L$ , entonces:
  - a)  $T(L)$  es un círculo en  $\mathbb{C}$  e  $I_{T(L)} = T \circ \text{Ref}_L \circ T^{-1}$ .
  - b)  $T(L)$  tiene centro  $z_1 = T(\text{Ref}_L(-\frac{d}{c}))$  y radio  $r_1 = |z_1 - T(z_0)|$ .
4. **[2 pts]**. En la red de Steiner de una transformación de Möbius loxodrómica, las espirales intersecan a los círculos de Apolonio en exactamente un punto y en un ángulo constante para toda la red. Ayuda: Recuerda que el vector tangente a una curva parametrizada diferenciable  $\alpha(t)$  es  $\alpha'(t)$ .

## Programación

Crea un programa para dibujar lo que se indica.

1. **[1 pt]**. Las órbitas de conjuntos de puntos  $A, B \subset \mathbb{C}$  distintos (por ejemplo, una “retícula cuadrada” y el “Dr. Stickler”), bajo la transformación de Cayley  $K(z) = \frac{z-i}{z+i}$  (que es una transformación de Möbius).
2. **[3 pts]**. Las imágenes de conjuntos de puntos  $A, B \in \mathbb{C}$  distintos (por ejemplo, una “retícula cuadrada” y el “Dr. Stickler”) bajo tres inversiones en un círculo  $I_C : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  distintas. Primero crea una **struct** que represente inversiones, con sus correspondientes constructores y método objeto función para evaluación de puntos (números complejos).  
**[1 pt extra]**. Implementa la *function* para componer dos inversiones, cuyo resultado es una transformación de Möbius.
3. **[3 pts]**. Las imágenes, bajo una transformación de Möbius  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  tal que  $c \neq 0$ , de varias rectas paralelas que no contengan el polo de  $T$ . Primero implementa el método para objeto función con los cálculos del ejercicio 3. de teoría. (En la implementación completa faltaría el caso con polo finito de  $T$  en la recta  $L$ , pero no es necesario que realicen los cálculos para esto ni la implementación del caso.)
4. **[3 pts]**. La red de Steiner de una transformación de Möbius parabólica cuyo punto fijo es finito, indicando con diferentes colores las dos familias ortogonales de círculos.



Ejemplo: