Álgebra Superior: Una perspectiva típica

Nicky García Fierros

10 de febrero de 2024

Índice

1. Introducción

1.1. ¿Teoría de tipos? ¿Y la teoría de conjuntos?

2. Parte I: Un poco de lógica

3. Introducción

3.1. Lógica como herramienta de razonamiento

Seguramente el o la lectora ya habrá escuchado sobre cómo las matemáticas son "correctas" o inclusive se ha usado un adjetivo más fuerte como "verdaderas" y quizás también el o la lectora habrá escuchado que todo problema en matemáticas tiene solución. Estas últimas afirmaciones son opiniones muy controversiales en tanto que existen resultados que ponen en duda su veracidad.

En teoría de conjuntos existen resultados y problemas que rompen lo que llamaríamos sentido común: uno de ellos es el famoso teorema de Banach-Tarski que, dicho en términos coloquiales, te permite duplicar una esfera a partir de otra; otro problema, que es un directo contraejemplo a las afirmaciones hechas al principio del párrafo, es la hipótesis del continuo.

Incluir un dibujo de la paradoja de Banach-Tarski

La hipótesis del continuo afirma que no existe un conjunto cuya cardinalidad está estrictamente entre los números enteros y los números reales (para fines del ejemplo basta pensar en cardinalidad como otra palabra para referirse a tamaño o cantidad de elementos). Está demostrado que esta última afirmación es independiente de los axiomas estándar de la teoría de conjuntos, y resulta que por motivos históricos muy razonables toda la matemática está fundamentada sobre esta axiomática estándar, por lo que en resumen, ¡existe un problema en matemáticas que no es resoluble!.

Más que asustar al lector o a la lectora sobre su camino en matemáticas, el autor espera que estos ejemplos sirvan de motivación para seguir estudiando matemáticas y también como motivación para que el o la lectora se anime a explorar a las teorías donde surgen tan interesantes resultados.

Una vez dicho lo anterior, es claro también que debe de existir cierto grado de verdad en las matemáticas. Después de todo, existen las computadoras, las cuales son máquinas que hacen operaciones matemáticas con el propósito de resolver problemas muy reales (o ver videos de gatos en internet); existen los cohetes espaciales los cuales pueden viajar al espacio gracias a los procesos matemáticos detrás de su diseño e implementación, y muchas otras cosas cuyo funcionamiento depende fuertemente de las matemáticas.

La forma en que razonamos en matemáticas está muy cercana a la forma en que se razonan en otras disciplinas como la medicina, el derecho, la ingeniería, la física, la economía, la sociología, la filosofía y demás; pues hay una presuposición de una aceptación de los principios básicos de la lógica, es decir, hay un cierto estándar de lo que es *racional*. En las disciplinas mencionadas anteriormente se espera que aquellos quienes la practican puedan diferenciar entre un argumento racional con base en principios básicos o evidencia, y especulación y afirmaciones que de ninguna forma se siguen de la evidencia o los principios básicos.

Toda forma de investigación y razonamiento adecuado depende de la lógica tanto para descubrir cosas nuevas como para percatarse de que se ha cometido un error y es necesario corregir algo.

Por ejemplo, supóngase que se tiene un amigo en quien se confía mucho y suponemos que de contarle algún secreto éste no se lo revelaría a nadie. En virtud de lo anterior, decidimos confiarle un secreto muy vergonzoso: el día de ayer mojamos la cama soñando que estábamos jugando en la orilla del mar. Sin embargo, a lo largo del día descubrimos que ¡dicho amigo ha contado el secreto a varios de nuestros conocidos y conocidas!. Obviamente estamos que morimos de vergüenza y, aprendiendo nuestra lección notamos que hemos cometido un error en nuestra creencia: es falso que podemos confiar secretos en nuestro (ex)amigo.

El autor cree que con el ejemplo anterior se hace evidente que la lógica no solo tiene aplicaciones centrales en las ciencias, sociales o no, sino que también en la vida diaria.

Surge de forma muy natural el cuestionarse ¿cómo es que exactamente una afirmación se sigue correctamente de otra?, o su contrapuesta: ¿exactamente cuándo ocurre que una proposición no se sigue de otra?; otra muy natural es

¿cuáles y por qué son las leyes de la lógica?. Estas preguntas son las que uno se hace cuando estudia lógica.

Curiosamente, al estudiar lógica uno hace uso de la misma lógica para estudiarla, pues se requiere tener una forma de razonar que nos permita llegar a cosas que consideramos verdaderas. Regresando a matemáticas, la lógica ha tenido un papel tan importante que se estudia a la lógica mediante técnicas propias de la matemática haciendo de la misma lógica una rama más de las matemáticas coloquialmente denominada como *lógica matemática*, la cual es una sub-rama de otra área de las matemáticas denominada *fundamentos de las matemáticas*, de la cual forman parte la teoría de conjuntos y la teoría homotópica de tipos.

En las matemáticas estándar, aquella que se suele enseñar en las facultades, se hace uso de un "sabor" muy particular de la lógica, denominada lógica de primer orden y de la cual hablaremos a lo largo de esta sección, desarrollándola poco a poco, pero no necesariamente de forma minuciosa como se haría en un curso de lógica matemática. El motivo detrás de desarrollarla paso por paso es que el entendimiento de la lógica es primordial para estudiar matemáticas y para hacer matemáticas.

3.2. ¿Apéndice?: Breve historia de la lógica

4. Lenguajes

4.1. Lenguaje y metalenguaje

Tanto al estudiar lógica como la teoría de tipos de Per-Martin Löf estaremos estudiando un lenguaje utilizando otro, en el caso tanto de la lógica como de la teoría de tipos la lengua española. Por consiguiente a lo largo de nuestros estudios estaremos pasando de un lenguaje a otro y es importante saber distinguir entre ambos: el lenguaje objeto; en el cual están escritos los objetos bajo estudio, el lenguaje que se busca describir; y el metalenguaje, el cual es el lenguaje utilizado para a dichos objetos.

Ejemplo 4.1. Consideremos las siguientes oraciones:

- Dylan come mucha fruta.
- Dylan es el sujeto y come mucha fruta el predicado.

En este ejemplo el lenguaje objeto y el metalenguaje son el mismo: la lengua española. En la primera oración se hace uso del sujeto, Dylan; mientras que en la segunda oración solo se menciona Dylan. Esta es la diferencia entre el lenguaje y el metalenguaje.

Ejemplo 4.2. Ahora reflexionemos sobre las siguientes oraciones.

- Tokio es la capital de Japón.
- Tokio es bisílaba.

- Por consiguiente, la capital de Japón es bisílaba.

Notemos que la afirmación hecha en la tercera oración es incorrecta, y el error proviene de no hacer distinción entre los niveles del lenguaje.

Juego 4.1. ¿Se te ocurre algún ejemplo distinto a los anteriores?

4.2. Un lenguaje común para hablar de colecciones

El concepto de colección

Antes de pasar a las definiciones acordemos un poco de notación. Entendemos por **colección** a lo que se podría entender intuitivamente por colección. Dada una colección de objetos C y x un objeto de dicha colección, denotamos el hecho de que x forma parte de la colección C por $x \in C$. Si y no forma parte de C entonces escribimos este hecho como $y \notin C$. Para describir a nuestras colecciones en consideración, escribimos explícitamente sus elementos delimitados por brackets curvilíneos. Por ejemplo:

- $\{1, 2, 3\}$ es la colección que sólo tiene a los números $1, 2$ y 3.
- $\{1, 2, 3\}$ también podría ser la colección que tiene a los símbolos $1, 2$ y 3.
- $\{\star, \triangle, \square\}$ es una colección que tiene por elementos a $\star$, $\triangle$, $\square$.
- Sean A, B, D colecciones. Entonces $\{A, B, D\}$ es una colección que tiene por elementos a las colecciones A, B y C.
- $\{x, \{x, \{x\}\}\}$ es la colección que tiene por elementos a x y a la colección $\{x, \{x\}\}$. Esta última es la colección que tiene por elementos a x y a la colección que tiene por único elemento a x.

  Intentemos darles nombres distintos a cada una de estas colecciones: escribimos A para referirnos a $\{x, \{x\}\}$, B para hacer denotar a $\{x\}$ y a x misma para autoreferirse. Entonces $\{x, \{x, \{x\}\}\}$ es la colección $\{x, A\}$, que es lo mismo que escribir $\{x, \{x, B\}\}$.
- $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots, n, n+1, \ldots\}$ es la colección de los números naturales.
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, (-n-1), (-n), \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$ es la colección de los números enteros.

También podemos referirnos a colecciones mediante propiedades que queremos tengan sus elementos. Si una colección está definida de esta forma, decimos que dicha colección está definida de forma **intencional** o por comprensión. Es **importante** remarcar que existe la posibilidad de que nuestra exigencia sobrepase nuestras capacidades para encontrar elementos de dicha colección. Las formas en las que especificaremos colecciones de forma intencional son las siguientes:

$$\{\ x \quad | \quad \textbf{condiciones sobre } x \quad \}$$

$$\{\ x \in A \quad | \quad \textbf{condiciones sobre } x \quad \}$$

Donde A es alguna otra colección. Esta forma de especificar colecciones se hará más clara con los siguientes ejemplos.

a) $\{x \mid x$ es un número entero y $0 < x < 4\}$ es otra forma de referirnos a la colección $\{1, 2, 3\}$. Otra forma equivalente de especificar a la colección del inciso anterior es escribiendo

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x < 4\}$$

b) $\varnothing = \{x \mid x$ no es igual a si mismo$\}$.

Acordando que todo objeto es igual a sí mismo, entonces la colección $\varnothing$ no tiene elemento alguno.

c) Si A y B son colecciones, $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$ es la colección de objetos que son elementos de A y B de forma simultánea.

Si pensamos un poco en qué elementos tendría $A \cap B$ al variar A y B, uno podría llegar a pensar en qué ocurre cuando A y B no tienen algún elemento en común y tras entretener el pensamiento unos momentos llegaría a la conclusión que en este caso no hay elementos en $A \cap B$.

d) Si A y B son colecciones, $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ó } x \in B\}$ es la colección de objetos que están en A o que están en B.

Es importante notar que puede ser el caso que ningún elemento de A forme parte de B o viceversa, pero aun así basta con que solo exista un elemento en A, o un elemento en B para que ya exista un solo elemento en $A \cup B$.

e) Si A es una colección arbitraria, entonces $A \cup \varnothing = A$, pues por el inciso anterior se tiene que

$$A \cup \varnothing = \{x \mid x \in A \text{ ó } x \in \varnothing\}$$

y del inciso *b*) observamos que $\varnothing$ no tiene elementos, por lo que siempre será falso que $x \in \varnothing$ (¡asegurese de entender bien este argumento!). Por lo tanto, podemos reescribir la condición dentro de las llaves como simplemente

$$A \cup \varnothing = \{x \mid x \in A\} = A$$

f) $\{x \mid x \in x\}$

Por último, un concepto útil sobre colecciones al que haremos referencia a lo largo del texto es el de **subcolección**. Dadas dos colecciones A y B, decimos que A es subcolección de B (o que A está contenido en B) si todos los elementos de A también son elementos de B, y abreviamos este hecho por $A \subseteq B$. Por ejemplo, $\{1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{N}$, pues todos los elementos de $\{1, 2, 3\}$ también se encuentran en $\mathbb{N}$.

Por otro lado, no es cierto que $\mathbb{N} \subseteq \{1, 2, 3\}$, pues en particular $5 \in \mathbb{N}$ pero no es cierto que $5 \in \{1, 2, 3\}$. Observe también que $\{1, \triangle, 3\}$ no está contenido en $\{1, 2, 3\}$ pues $\triangle$ no es elemento de $\{1, 2, 3\}$; de esto último que en general, si A no está contenido en B es porque existe al menos un elemento en A que no es elemento de B. Usualmente resumimos el hecho de que A no está contenido en B por $A \not\subseteq B$.

Juego 4.2. Sean A y B dos colecciones.

- ¿Qué significa, en términos de $\cap$, que $A \subseteq B$?
- ¿Qué significa, en términos de $\cap$, que $A \not\subseteq B$?

Definiciones constructivas/inductivas

Otra forma de definir colecciones es dando una regla de construcción explícita para cualquier posible caso. Como ejemplo vamos a construir una colección que capture la esencia de los números naturales, pero primero es conveniente que la persona leyendo este texto juegue un poco a las atrapadas con la esencia de los números naturales, pues esta idea es fundamental en nuestros posteriores estudios. El autor cree que, de entender muy bien esta esencia, será mucho más fácil apreciar la belleza de los conceptos que se desarrollaran en este texto.

Juego 4.3. Capturemos juntos la esencia de los números naturales; yo planteo preguntas útiles y usted las contesta. De nuevo, se invita a discutir lo que usted lector piense al respecto con otras personas; diversión garantizada. Tenga muy presente la colección de los números naturales,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, n+1, (n+1)+1, \dots\}$$

No se sienta obligado a escribir las reglas con el lenguaje de las colecciones. Lo importante es que usted entienda lo que escribe, y que le permita a otros entender lo que escribió. A continuación hay una lista enumerada de preguntas sugeridas para dar con la esencia. Quizás sean muchas las preguntas, pero siéntase usted libre de saltarse cualquier pregunta si lo cree pertinente. Lo más importante es que usted disfrute el juego.

1. ¿Qué tiene de especial el elemento 0?
2. ¿Qué número sigue de 0?
3. ¿Qué número sigue de 1?
4. ¿Qué número sigue de 2?
5. ¿Qué número sigue de n?
6. ¿Qué número sigue de n+1?
7. Si k es un número natural, ¿qué número sigue después de k?

8. ¿Existe algún número natural más grande que todos?

9. ¿Puede ser que de un número sigan dos números distintos, o que un número sea sucesor de dos números distintos?

10. Intuitivamente, ¿qué cantidad de números naturales hay? ¿Por qué?

Ahora, las preguntas tienen un orden por un motivo muy particular. Una sugerencia para dar las reglas explícitas que capturan la esencia de los números naturales es apoyarse en las conclusiones obtenidas de las preguntas para analizar el orden de la lista.

No se recomienda seguir leyendo hasta asegurarse de entender cuál es la esencia de los números naturales pues a continuación se dará la respuesta del autor.

Los números naturales comienzan en 0, del cual sigue el $0+1=1$, y luego continúa $(0+1)+(0+1)=(0+1)+1=1+1=2$. En general, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, le sucede un único $n+1$ y es cierto que $(n+1) \in \mathbb{N}$. Lo que distingue al elemento 0 son dos cosas que en realidad son la misma: Los números naturales comienzan a partir de 0; y no existe k número natural tal que $k+1=0$. En resumen:

Definición 4.1. La colección de los números naturales se define como a continuación:

1. Base: 0 es un número natural.

2. Paso inductivo: Si n es un número natural, entonces $n+1$ también es un número natural y es el único que le sucede a n o equivalentemente, n es el único predecesor de $n+1$ si n es distinto de 0.

3. Condición terminal: Ningún otro objeto es número natural.

Una forma de pensar este proceso es como una serie de dominós en una fila infinita, a la cual solo tienes acceso al primer elemento en un inicio.

Ya que uno entiende la esencia, podemos pensar en otras formas de expresar este proceso para definir otros objetos, colecciones o no. A este tipo de definiciones se les conoce como **definiciones inductivas**.

De requerir, la persona leyendo, cierta familiaridad con las ideas anteriores y su notación, se le invita a jugar con las ideas como indican los siguientes juegos:

Juego 4.4. Escriba con sus propias palabras qué entiende la persona leyendo esto por una colección. ¿Puede dar un dibujo?

Juego 4.5. Sean A, B colecciones. De forma intuitiva diga lo que se le pide:

a) Describa de forma intencional la colección de sus mascotas o seres queridos.

b) Describa la misma colección del anterior inciso, pero ahora listando a sus elementos de forma explícita.

Juego 4.6. Considere $R = \{x \mid x \in x\}$ y de una respuesta que le satisfaga a las siguientes preguntas.

a) ¿Qué clase de objeto es x en la definición de R?

b) ¿Podría ser que R misma sea uno de los objetos que describe lo que está después de la raya vertical en la definición de R?

c) ¿R tiene objetos?

De ser posible, comente y discuta este juego con alguna otra persona; será una experiencia entretenida.

Juego 4.7. Piense en algún criterio que deban satisfacer dos colecciones A y B arbitrarias para poder decir que ambas son iguales. Para esto, la recomendación es pensar primero en ejemplos lo más sencillos que se le pueda ocurrir. Algunas preguntas por las que se sugiere empezar son las siguientes:

- ¿las colecciones $A = \{1\}$ y $B = \{1\}$ son iguales? ¿por qué?
- ¿las colecciones $A = \{1\}$ y $B = \{2\}$ son iguales? ¿por qué?
- ¿las colecciones
$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 10 \text{ y } 1 < x\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 10 \text{ y } 1 < x\}$$
son iguales? ¿por qué?

Juego 4.8. Sea $S = \{\star\}$ una colección. ¿A qué es igual $S \cap \varnothing$? Recuerde que $\varnothing$ denota la colección sin elementos.

Juego 4.9. Sea A una colección arbitraria. ¿A qué es igual $A \cap \varnothing$?

Juego 4.10. Supongamos que es cierto que todo objeto es igual a si mismo. Considere las colecciones

- $\varnothing = \{x \mid x \neq x\}$
- $\emptyset = \{\quad\}$
- $S = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 0\}$

De acuerdo con el criterio de igualdad de colecciones que usted dió en un juego pasado, ¿Dichas colecciones son iguales?

Juego 4.11. De acuerdo con su criterio de igualdad para colecciones, ¿la colección $\varnothing$ es única? Es decir, si E es una colección sin elementos, entonces $E = \varnothing$? Escriba un argumento de su respuesta que le satisfaga.

Juego 4.12. Sean A, B colecciones de tal forma que hay algunos elementos de A que también son elementos de B. Considere la colección

$$\Gamma = \{x \mid x \in B \text{ pero } x \notin A\}.$$

- En términos que usted entienda, describa la colección Γ.
- ¿Puede dar un dibujo que ejemplifique esta colección?

Esta colección Γ suele llamarse **diferencia de colecciones** y se denota por $B \setminus A$ o $B - A$.

Ya con un lenguaje común acordado sobre la idea de una colección, procedemos con lo que verdaderamente nos interesa estudiar.

5. Lógica proposicional

5.1. Lógica proposicional

Para empezar, ¿qué es una proposición? En principio uno podría decir que una proposición es algo que se propone o que se debe considerar, pero para nosotros

Motivar mejor la definición de proposición

Definición 5.1. Una proposición es una oración que se puede someter a juicio y concluir su veracidad o falsedad.

Ejemplo 5.1. Ejemplos de proposiciones son las siguientes oraciones:

- Todos los seres humanos son mortales.
- Hoy está lloviendo.
- Los gatos y los perros forman parte del reino animalia.
- Los seres humanos forman parte del reino animalia.

Ejemplos de no proposiciones son las siguientes oraciones:

- ¿quieres pollo o res?
- ¡empieza a jugar ya!
- Esta oración es falsa.

Notemos que podemos formar nuevas proposiciones a partir de otras mediante conectivos como ”y”, ”o” y condicionales ”si...entonces...”, y la forma en que generamos estas nuevas proposiciones no depende de la veracidad de lo que se propone.

Ejemplo 5.2.

- Hoy está lloviendo y todos los seres humanos son mortales.
- Bryan es amigo de Jesús o Bryan es amigo de Daniel.
- Si hoy está lloviendo, entonces no hay Sol.

- Si los cerdos vuelan, entonces yo soy hijo de Terence Tao.
- Soy un ser humano y estoy hecho en parte de carne y hueso o No soy un ser humano y No estoy hecho de carne y hueso.
- Está lloviendo o no está lloviendo.
- Si el carro no es amarillo y rojo, entonces dicho carro no es amarillo o no es rojo.

También tenemos otra forma de generar nuevas proposiciones a partir de otras mediante la negación:

- Hoy no está lloviendo o no todos los seres humanos son mortales.
- Los cerdos vuelan y no soy hijo de Terence Tao.

Ahora, abstraemos un poco. Denotemos por letras mayúsculas a las proposiciones: $A, B, C, \ldots$. Una forma de escribir a las proposiciones en el ejemplo 5.2 es la siguiente:

Ejemplo 5.3.

- A y B.
- C o D.
- Si E entonces F.
- Si G entonces H.
- I y J o no I y no J.
- K o no K.
- Si no L y R entonces no L o no R.

La o el lector habrá notado que, aunque el uso de las letras en lugar de las oraciones facilita el estudio de la estructura de la proposición que involucra dichas letras, también es cierto que la **sintaxis**, la forma en que se escribe siguiendo ciertas reglas, puede prestarse a confusiones y ambigüedades, cosas que nos gustaría evitar para poder garantizar que estamos razonando de forma correcta sobre los objetos en cuestión. Una forma de solucionar este problema son los paréntesis, una herramienta sintáctica que nos indica el órden en el que tenemos que evaluar la verdad dentro de la misma proposición para poder decir algo sobre ella, de modo que, para evitar ambigüedades escribimos las proposiciones del ejemplo 5.2 como a continuación:

Ejemplo 5.4.

- A y B
- C o D
- Si E entonces F

- Si G entonces H
- (I y H) o ((no I) y (no J))
- Si ((no L) y R) entonces ((no L) o (no R))

Regresando a lo que habíamos observado sobre la formación de proposiciones, lo podemos resumir en las siguientes reglas:

- A es una proposición.
- Si B es otra proposición, entonces:
  - (B) es una proposición.
  - A y B es una proposición.
  - A o B es una proposición.
  - No A es una proposición.
  - Si A entonces B es una proposición.

Estas reglas capturan la esencia de la formación de nuevas proposiciones a partir de anteriores. Notemos que en ningún momento nos importó la veracidad para hablar sobre la forma general que tienen las proposiciones. ¿Será que esta misma forma nos hable algo sobre la verdad de la proposición? De nuevo, recordemos el ejemplo 5.2. Los últimos dos puntos son verdaderos, y en efecto esta veracidad está ligada a la forma que tienen:

Está lloviendo o no está lloviendo.	(P o (no P))
Si el carro no es amarillo y rojo, entonces dicho carro no es amarillo o no es rojo.	si (no (A y R)) entonces ((no A) o (no R))

Entonces sí ocurre que la verdad está ligada a la estructura general que tienen las proposiciones y, por lo tanto, el estudio de la sintaxis de la lógica proposicional cobra ahora una mayor relevancia en nuestro estudio, sin embargo en particular para la proposición

$$P \text{ y no } P$$

no es tan evidente que cualquier proposición con esa forma sea verdadera después de pensarlo de una forma más detenida. ¿Es cierto que en general las cosas son o no lo son? Demos un ejemplo:

Ejemplo 5.5. En el fútbol, en algunos contextos como la copa del mundo, no es cierto que si un equipo no gana entonces pierde, pues si no gana y no pierde entonces se dice que está en empate.

Algo semejante ocurrirá con la lógica. En muchos contextos, ocurre que no necesariamente las cosas son o no lo son.

Ya con un mejor entendimiento de la estructura del lenguaje de proposiciones, pongamos estas ideas en definiciones cuidadosas que nos permitan deducir hechos sobre las mismas proposiciones, y la forma en que haremos esto será con herramienta de lenguajes formales.

5.2. El lenguaje de la lógica proposicional

5.2.1. Un poco sobre los lenguajes formales

La lógica proposicional, la lógica de primer orden o de predicados, la teoría de los conjuntos, la teoría de tipos, los lenguajes de programación, etc. son ejemplos de lo que en matemáticas denominamos un lenguaje formal. A lo largo de la siguiente sección entendemos por símbolo a lo que intuitivamente se entienda por símbolo.

Definición 5.2. Un alfabeto es una colección de símbolos. Decimos que x es un símbolo en el alfabeto Σ si $x \in \Sigma$.

Definición 5.3. Dado un alfabeto, definimos una palabra, también llamada cadena o expresión, en el alfabeto como a continuación.

1. Base: cualquier símbolo del alfabeto por sí mismo es una palabra en dicho alfabeto.
2. Paso inductivo: si p y x son palabras en el alfabeto entonces px es una palabra en dicho alfabeto.
3. Condición terminal: ninguna otra cosa es una palabra en el alfabeto.

Ejemplo 5.6. Son símbolos:

- es un símbolo (sí, el espacio blanco). Este símbolo se suele conocer como el símbolo nulo o el símbolo cero por cómo se suele comportar con respecto a una operación que de momento no es relevante pero se llama *concatenación*. Este símbolo se encuentra escrito en la literatura como ε o λ ya que como se habrá percatado usted, es difícil de encontrar.
- 1 es un símbolo.
- $+$ es un símbolo.
- $\wedge$ es un símbolo.
- p_1 es un símbolo.
- (es un símbolo.
- aaa y $aaaa$ son símbolos en el alfabeto $\{aaa, aaaa\}$

Ejemplo 5.7. La colección $\Sigma = \{a, b, c\}$ es una colección de símbolos. Dado que a es un símbolo de Σ, entonces por el caso base de la definición 5.3 a es una palabra de Σ. Además, b y c también lo son por el mismo motivo. Por otro lado, al ser b y a palabras en Σ, entonces por el paso inductivo de la definición 5.3 ab es una palabra. Por el mismo motivo abc es una palabra en Σ.

Motivar la siguiente definición.

Definición 5.4. Un lenguaje formal (de primer orden) $\mathscr{L}$ (definido) sobre un alfabeto Σ es una colección de símbolos en Σ particionada en las siguientes subcolecciones:

1. Una colección de símbolos constantes Const.
2. Una colección con tantos elementos como números naturales de símbolos variables Var.
3. Una colección de símbolos relacionales de aridad finita Rel.
4. Una colección de símbolos funcionales de aridad finita Fun.
5. Una colección de símbolos lógicos $\{\vee, \wedge, \implies, \iff, \neg\}$.
6. Una colección de símbolos cuantificadores $\{\exists, \forall\}$ por ejemplo.
7. Una colección de paréntesis $\{(,)\}$.
8. Una colección con un sólo elemento, el símbolo igualdad $\{=\}$.

Analizar si incluir esta colección de símbolos lógicos

Analizar si incluir esta colección de símbolos cuantificadores

Definición 5.5. Si $\mathscr{L}$ es un lenguaje, un término de $\mathscr{L}$ es una cadena finita de símbolos de $\mathscr{L}$ tal que:

1. Base: Es una variable, o un símbolo constante.
2. Paso inductivo: Si $s_1, \ldots, s_n$ son términos de $\mathscr{L}$ con n algún número natural, y f es un símbolo funcional de aridad n, entonces

$$fs_1s_2s_3\ldots s_n$$

es un término de $\mathscr{L}$.

Cabe resaltar que las subcolecciones que conforman a un lenguaje formal no tienen por qué tener elementos, en tanto que sólo estamos pidiendo que sean colecciones.

Ejemplo 5.8. Sabemos que en los números naturales podemos hablar sobre qué tan grande es un número respecto a otro, y la forma en que decimos esto es con el símbolo $\leq$, es decir, este símbolo relaciona dos números naturales de acuerdo a cuál es mayor que el otro. Además, tenemos un símbolo constante 0, que satisface ser menor que cualquier número natural. También podríamos considerar otros símbolos constantes, como el 1, o el 1000 por ejemplo. Entonces, un lenguaje (formal) para hablar sobre el órden de los números naturales podría ser el siguiente:

- Var := $\{n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k, n_{k+1}, \ldots\}$
- Const := $\{0, 1, \ldots\}$
- Rel := $\{\leq\}$
- Fun := $\{\}$
- $\{(,)\}$
- $\{=\}$

Algunas expresiones de este lenguaje son:

- $20 \leq n_{100}$
- $\leq\leq 0\ 50 \leq$
- $0 = 10000000$
- $n_1)((((n_5 050 \leq) \leq)()$

5.2.2. El lenguaje de la lógica proposicional y su sintaxis

Ya armados con nuestra definición de lenguaje, podemos escribir de forma precisa lo que es el lenguaje de la lógica proposicional:

Definición 5.6. El lenguaje de la lógica proposicional consiste de:

1. Una colección de símbolos proposicionales $\{p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots\}$ con tantos elementos como números naturales.
2. Una colección de símbolos relacionales $\{\vee, \wedge, \neg, \supset\}$ a los que llamamos **conectivos lógicos**.
3. Una colección de paréntesis $\{(,)\}$.
4. Un símbolo igualdad $\{=\}$.

Ejemplo 5.9. Algunas expresiones del lenguaje de la lógica proposicional son las siguientes:

1. $p_{100} \wedge p_2$
2. $p_9 \supset p_{102}$
3. $\vee = \wedge = \neg \vee ()$
4. $===\supset\supset \vee\vee \supset p_1$
5. $\vee \wedge \vee \wedge \vee \wedge \vee\wedge$

En el anterior ejemplo, usted quizás habrá intentado pronunciar las expresiones de los incisos 3, 4 y 5; y se habrá dado cuenta entonces que dichas expresiones parecieran carecer de todo sentido; ¿qué significado podría tener $\vee \wedge \vee \wedge \vee \wedge \vee \wedge$ o como para qué quisiera considerar dicha expresión para hablar sobre proposiciones?

Así como en el Español la expresión

asdfghjkl aaaaaa

carece de sentido total, mientras que

¡Hola!, ¿cómo estás?

ya comunica algo y recibe el nombre especial de "oración", análogamente nosotros distinguiremos de expresiones de un lenguaje que no nos importan de aquellas que sí. En los lenguajes naturales como el Español, la gramática es la que se encarga de distinguir entre palabras que tienen sentido en el lenguaje de aquellas que no; en los lenguajes formales su análogo son las reglas de formación de fórmulas y, aquellas expresiones que sí nos interesan reciben el nombre de fórmulas (o fórmulas bien formadas).

De esta forma, precisamos aquellas expresiones que sí nos importan mediante la siguiente definición:

Definición 5.7. Una fórmula proposicional es tal que:

1. Base: Cada variable proposicional es una fórmula proposicional y decimos que es una fórmula atómica.
2. Paso inductivo: Si A y B son fórmulas proposicionales, entonces también son fórmulas proposicionales:
   a) $\neg A$, y se lee como **no** A o la **negación** de A.
   b) $(A \wedge B)$, y se lee como A **y** B o la **conjunción** de A con B.
   c) $(A \vee B)$, y se lee como A **o** B o la **disyunción** de A con B.
   d) $(A \supset B)$, y se lee como **si** A **entonces** B.
3. Condición terminal: Ninguna otra cosa es una fórmula.

Observación 1. Es importante aclarar que las letras A, B no son símbolos de nuestro lenguaje proposicional, pero forman parte de nuestro metalenguaje y funjen como metavariables, en el sentido de que A podría hacer referencia a cualquier variable p_i y B podría hacer referencia a cualquier variable p_j con i y j números naturales cualesquiera. Muchas veces, para indicar que usaremos una metavariable o variable según sea el caso para abreviar o referirnos a algún objeto hacemos uso del símbolo

$$:=$$

para indicar que lo que sea que está del lado izquierdo de dicho símbolo representará a lo que sea que está del lado derecho. Por ejemplo,

$$\varphi := p_0 \wedge p_1$$

indica que, cuando veamos el símbolo φ plasmado, deberemos pensar en $p_0 \wedge p_1$ en el contexto de discruso.

Además, esta definición involucra las observaciones que habíamos hecho en la sección 5.1. Por este motivo, muchas veces nos referiremos a las fórmulas proposicionales como proposiciones.

Pensar si reorganizo el contenido de esa sección para motivar aquellas donde se formaliza todo

De nuestra definición de fórmula proposicional podemos observar que una fórmula está compuesta de fórmulas.

Definición 5.8. Dada una fórmula proposicional A, sus subfórmulas son las siguientes:

1. Base: Si A es atómica, entonces A es una subfórmula de A.
2. Paso inductivo:
   a) Si A es una fórmula de la forma $\neg B$, entonces las subfórmulas de A son A misma y las subfórmulas de B.
   b) Si A es una fórmula de la forma $A \Box B$, con $\Box$ algún símbolo relacional $(\vee, \wedge, \supset)$, entonces las subfórmulas de A son A misma y las subfórmulas de B y C.
3. Condición terminal: Ninguna otra cosa es una subfórmula de A.

Notación. En tanto que las reglas de formación de fórmulas proposicionales pueden resultar en expresiones bastante complicadas de leer e interpretar, se alivianará la escritura siguiendo las siguientes reglas:

- Los paréntesis más exteriores pueden ser omitidos, de modo que si (A) es una fórmula, esta es equivalente a escribir solamente A.
- Permitimos el uso de otros símbolos como paréntesis. Entre los que usaremos con mayor frecuencia están los picoparéntesis $\langle\ \rangle$ y los paréntesis cuadrados $[\ ]$.

Veamos algunos ejemplos para asentar ideas.

Ejemplo 5.10. Sean p_1, p_2, p_3, p_4 variables proposicionales.

- p_1, p_2 son fórmulas proposicionales.
  - Como p_1 y p_2 son variables proposicionales, entonces p_1 y p_2 son fórmulas proposicionales por el caso base de la definición 5.7
- $((p_1 \wedge p_2) \vee p_1)$ es una fórmula proposicional.

i) En virtud de que p_1 y p_2 son variables proposicionales, entonces por el caso base de la definición 5.7 se tiene que p_1 y p_2 son ambas fórmulas proposicionales.

ii) Por el inciso b) del paso inductivo en la definición 5.7 tenemos que $(p_1 \wedge p_2)$ es una fórmula proposicional.

iii) En tanto que por el inciso ii) $(p_1 \wedge p_2)$ es una fórmula proposicional, y por el inciso i) p_1 es una fórmula proposicional entonces se sigue por el inciso b) del paso inductivo en la definición 5.7 que $((p_1 \wedge p_2) \vee p_1)$ es una fórmula proposicional.

- $((p_2 \supset p_3) \supset p_1)$ es una fórmula proposicional.

  i) p_2 y p_3 son fórmulas proposicionales por el caso base de la definición 5.7.

  ii) $(p_2 \supset p_3)$ es una fórmula proposicional porque a partir de i), el inciso b) del paso inductivo de la definición 5.7 nos dice que dicha cadena de símbolos es una fórmula proposicional.

  iii) p_1 es una fórmula proposicional por el caso base de la definición 5.7.

  iv) En virtud de los incisos ii) y iii), por el inciso b) del paso inductivo de la definición 5.7 se tiene que $((p_2 \supset p_3) \supset p_1)$ es una fórmula proposicional.

- $\neg((p_2 \supset p_3) \supset p_1)$ es una fórmula proposicional.

  i) En efecto, en virtud de que $((p_2 \supset p_3) \supset p_1)$ es una fórmula proposicional por el inciso anterior de este ejemplo, entonces por el inciso a) del paso inductivo de la definición 5.7 se tiene que $\neg((p_2 \supset p_3) \supset p_1)$ es una fórmula proposicional.

Ejemplo 5.11. Para las siguientes fórmulas, obtenemos sus subfórmulas:

- p_{100}

  - Por el caso base de la definición 5.8, p_{100} es una subfórmula de si misma y es su única por la condición terminal.

- $\varphi := \neg p_1$

  - $\neg p_1$ es subfórmula de φ por el caso base de la definición 5.8.
  - p_1 es subfórmula de φ por el paso inductivo de la definición 5.8.
  - Ninguna otra fórmula es subfórmula de φ por la condición terminal de la definición 5.8.

- $\psi := (\neg p_2 \vee p_2)$

  - ψ es subfórmula de ψ por el caso base de la definición 5.8.

- $\neg p_2$ y p_2 son subfórmulas de ψ por el paso inductivo de la definición 5.8.
- Ninguna otra fórmula es subfórmula de ψ por la condición terminal de la definición 5.8.

- $\alpha := ((p_1 \supset p_2) \vee p_6)$
  - α es una subfórmula de si misma.
  - p_6 y $(p_1 \supset p_2)$ son subfórmulas de α.
  - p_1 y p_2 son subfórmulas de α.
  - Ninguna otra fórmula es subfórmula de α por la condición terminal de la definición de subfórmula.

Juego 5.1. El grado de una fórmula proposicional φ es el número de conectivos lógicos que tiene dicha fórmula y denotamos este número por $\partial(\varphi)$. Por ejemplo:

- Si $\varphi := (p_1 \vee p_7)$, entonces $\partial(\varphi) = 1$.
- El grado de $\psi := \neg p_3$ es 1.
- Si $\omega := \neg((p_1 \supset (p_9 \vee p_7)) \wedge (p_1 \wedge (p_2 \supset p_1)))$ entonces $\partial(\omega) = 6$.

De acuerdo a lo anterior, ¿cuál es el grado de cualquier variable proposicional? ¿puede dar una definición inductiva del grado de una fórmula?

Juego 5.2. Retomando el lenguaje definido en el ejemplo 5.9:

- Modifique el lenguaje para incluir proposiciones sobre el órden de los números naturales, por ejemplo expresiones de la forma

  $$50 \leq 100 \quad (0 \leq n_6) \vee (n_6 = 7) \quad 6 \leq n_{20} \leq 77 \quad (0 \leq n_1 \leq 0) \supset n_1 = 0$$

- Partiendo del lenguaje que usted produjo en el inciso anterior, defina de forma análoga a la definición 5.7 fórmulas que tengan sentido para usted sobre el orden en los números naturales.

Juego 5.3. Defina un lenguaje que le permita escribir expresiones sobre colecciones de acuerdo a la sección 4.2 y de las fórmulas de dicho lenguaje.

5.2.3. Árboles y árboles con raíces

El proceso de construcción de fórmulas se puede pensar de forma distinta, en tanto que dicha construcción induce un árbol en donde los vértices corresponden a fórmulas, y las aristas a un paso en la construcción. Formalmente, un **árbol** es una pareja (V, A) llamada **gráfica** con V la colección de sus vértices y A la colección de sus aristas, tal que satisface dos propiedades:

- Es conexo, lo cual en el contexto de gráficas significa que para cualesquiera dos vértices en V existe una sucesión de aristas que conecta a dichos vértices;

- No tiene cíclos, lo cual significa que no existe una sucesión de aristas de tal forma que conecta a un vértice consigo mismo.

No entraremos en más detalle pues nos basta solamente una intuición de lo que es un árbol y un poco de nomenclatura, y qué mejor forma de generar dicha intuición e introducir nomenclatura que con ejemplos.

Ejemplo 5.12. Para nuestro primer ejemplo, sean

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{(1 \rightleftarrows 2), (2 \rightleftarrows 3), (3 \rightleftarrows 4), (4 \rightleftarrows 5), (5 \rightleftarrows 6)\}$$

colecciones. Si dibujamos a cada elemento de V como "puntos" con su etiqueta correspondiente, y para cada arista $a := (v \rightleftarrows w)$ en A para algunos v, w en V trazamos una línea que conecte a v con w, entonces tendremos un dibujo como el de la siguiente figura o semejante.

$$1 \text{ —— } 2 \text{ —— } 3 \text{ —— } 4 \text{ —— } 5$$

En principio los vértices asociados a una arista no tienen un órden, es decir, si $a := (v \rightleftarrows w)$ es una arista en la gráfica (V, A), entonces en principio se puede ir de v a w, o de w a v, y nuestro dibujo refleja esto. Obsérvese que podemos seguir un camino de cualquier vértice en V a otro, y tampoco pareciera haber un ciclo. Entonces podemos decir que la gráfica definida por la pareja $T := (V, A)$ es un árbol.

Definir noción primitiva de función

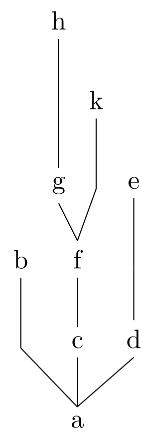
Observación 2. En la literatura, se suele modelar una arista mediante pares ordenados (a, b) o por dos funciones $\mathrm{src} : A \to V$ y $\mathrm{tgt} : A \to V$ que de una arista dada rescatan los vértices que dicha arista relaciona. (Más adelante tomaremos nuestro tiempo para comprender qué es una función. Por lo mientras basta con lo que intuitivamente se entienda.)

Ejemplo 5.13. Consideremos las colecciones

$$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, k\}$$

$$A = \{(a \rightleftarrows b), (a \rightleftarrows c), (a \rightleftarrows d), (d \rightleftarrows e), (c \rightleftarrows f), (f \rightleftarrows g), (g \rightleftarrows h), (f \rightleftarrows k)\}$$

De nuevo, siguiendo el proceso descrito en el ejemplo anterior podemos dibujar algo parecido a la siguiente representación visual de la gráfica $G = (V, A)$:



Se recomienda al lector o la lectora que se convenzca a si mismo o si misma y, de ser posible a otra persona, que G es un árbol.

De este ejemplo se puede distinguir a un vértice particular muy sugerente en el dibujo porque es aquel que se encuentra dibujado hasta el fondo: en el dibujo sería representado por b.

Las partes de un árbol

En este diagrama, y en general cuando dibujemos algún otro de esa forma o semejante diremos que el vértice tal que se encuentra hasta el fondo (o hasta arriba, o el más izquierdo o el más derecho) y del cual el dibujo sugiera que salen aristas diremos que es **la raíz del árbol**. A los vértices que están inmediatamente conectados por un vértice los llamamos los **hijos** de dicho vértice, como si nuestro árbol se tratara de un árbol genealógico. Por ejemplo, los hijos de a son los vértices b, c, k y d; mientras que los hijos de f son g y k.

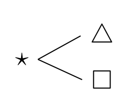
Otros vértices que podemos distinguir son h, k, e, y b los cuales comparten la característica de no tener hijos. A estos vértices se les suele denominar **hojas** del árbol o **vértices terminales**, mientras que los caminos que van de la raíz a una hoja reciben el nombre de **ramas**.

Ejemplo 5.14. Algunos posibles árboles y la localización de su raíz.

- En este dibujo, ξ representa una gráfica. No le queda de otra a ξ más que ser raíz.

$$\xi$$

- En este dibujo, $\star$ representaría la raíz. También pareciera como si las aristas salieran de la raíz.

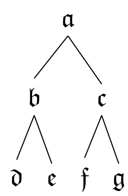


- Nótese que en este dibujo, α podría representar a la raíz, o se podría entender que γ es la raíz. En estos casos ambiguos diremos explícitamente quién es la raíz.

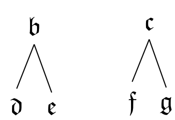
$$\gamma \text{ —— } \beta \text{ —— } \alpha$$

Cuando distinguimos un vértice particular de un árbol para llamarle *raíz*, le ponemos un apellido al árbol: decimos que es un **árbol enraizado** o equivalentemente un árbol con raíz. Cuando sea claro del contexto, lo llamaremos por su primer nombre, osease sólo nos referiremos a un árbol enraizado por árbol.

Una observación que podemos hacer a partir de la estructura general de un árbol es que podríamos caracterizar dicha estructura como lo hemos hecho con las fórmulas, las subfórmulas, y los números naturales. Consideremos un árbol sencillo como el de la siguiente figura:



Este árbol tiene por raíz a $\mathfrak{a}$ y sus hijos son $\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{c}$. Notemos que podemos separar el árbol anterior en árboles más pequeños:



El árbol izquierdo tiene por raíz a $\mathfrak{b}$, mientras que el árbol derecho tiene por raíz a $\mathfrak{c}$. Además, los vértices hoja también definen a árboles donde dichos vértices son las raíces.

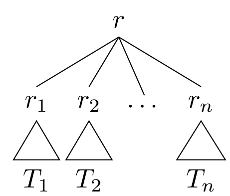
Juego 5.4. Con las observaciones hechas en los útlimos párrafos, ya es posible intentar dar una definición en el estilo de las definiciones 5.7, 5.3, 4.1. Defina de forma inductiva lo que es un árbol.

Una propuesta a la caracterización de un árbol se presenta en la siguiente definición:

Definición 5.9. Definimos un árbol con raíz de la siguiente forma:

Verificar que la siguiente definición está bien

- Base: Si v es un vértice, entonces v es un árbol.
- Paso inductivo: Si $T_1, \ldots, T_n$ son árboles, r_i es un vértice distinguido de T_i para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y r es un vértice que no forma parte de ningún T_i, entonces al unir cada r_i con r mediante una arista se tiene un árbol.



- Condición terminal: Ninguna otra cosa es un árbol.

5.2.4. Una perspectiva alternativa al proceso de formación de fórmulas proposicionales mediante árboles

Ya que estamos un poco más familiarizados con lo que es un árbol y cómo se ven, exploremos esta idea de que las construcciones de fórmulas inducen un árbol, donde los vértices son fórmulas, y las aristas representan un paso de construcción según nuestra definición de fórmula proposicional. Para esto, rescatemos nuestro ejemplo 5.10

Ejemplo 5.15. Sean p_1, p_2, p_3, p_4 variables proposicionales.

- p_1, p_2 son fórmulas proposicionales.
    - Como p_1 y p_2 son variables proposicionales, entonces p_1 y p_2 son fórmulas proposicionales por el caso base de la definición 5.7.

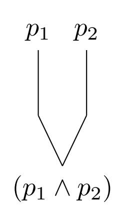
      $$p_1 \qquad\qquad\qquad p_2$$

      La o el lector habrá notado que no existe una arista entre p_1 y p_2, pues el hecho de que sean fórmulas y no estén relacionadas mediante un símbolo relacional implica que por si solas conforman un árbol.

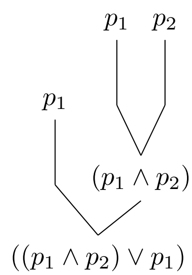
- $((p_1 \land p_2) \lor p_1)$ es una fórmula proposicional.
    i) En virtud de que p_1 y p_2 son variables proposicionales, entonces por el caso base de la definición 5.7 se tiene que p_1 y p_2 son ambas fórmulas proposicionales.

      $$p_1 \qquad\qquad\qquad p_2$$

    ii) Por el inciso b) del paso inductivo en la definición 5.7 tenemos que $(p_1 \land p_2)$ es una fórmula proposicional.



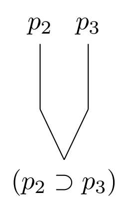
iii) En tanto que por el inciso ii) $(p_1 \wedge p_2)$ es una fórmula proposicional, y por el inciso i) p_1 es una fórmula proposicional entonces se sigue por el inciso b) del paso inductivo en la definición 5.7 que $((p_1 \wedge p_2) \vee p_1)$ es una fórmula proposicional.



- $((p_2 \supset p_3) \supset p_1)$ es una fórmula proposicional.

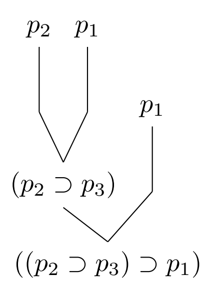
  i) p_2 y p_3 son fórmulas proposicionales por el caso base de la definición 5.7.

  ii) $(p_2 \supset p_3)$ es una fórmula proposicional porque a partir de i), el inciso b) del paso inductivo de la definición 5.7 nos dice que dicha cadena de símbolos es una fórmula proposicional.



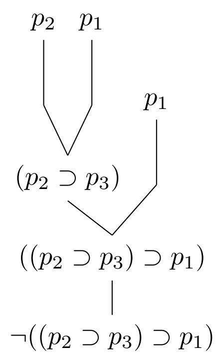
  iii) p_1 es una fórmula proposicional por el caso base de la definición 5.7.

  iv) En virtud de los incisos ii) y iii), por el inciso b) del paso inductivo de la definición 5.7 se tiene que $((p_2 \supset p_3) \supset p_1)$ es una fórmula proposicional.



- $\neg((p_2 \supset p_3) \supset p_1)$ es una fórmula proposicional.

i) En efecto, en virtud de que $((p_2 \supset p_3) \supset p_1)$ es una fórmula proposicional por el inciso anterior de este ejemplo, entonces por el inciso a) del paso inductivo de la definición 5.7 se tiene que $\neg((p_2 \supset p_3) \supset p_1)$ es una fórmula proposicional.



5.3. Una introducción a la semántica de la lógica proposicional

Proposiciones y verdad

Creo que repito muchas cosas en esta sección. Debo pulirla.

La lógica proposicional nos interesa por dos principales motivos: queremos conocer cuáles son las condiciones que debe satisfacer una fórmula para que podamos decir que esta es verdadera en cualquier contexto, y nos interesa también establecer cuándo es que una fórmula es consecuencia de otra fórmula o de una colección de estas. ¿Cómo es que podemos entonces hablar sobre verdad utilizando la lógica proposicional cuando hasta el momento sólo conocemos su sintaxis?, es decir, ¿cómo dotamos de significado a las fórmulas proposicionales?

Consideremos la oración:

Tengo solo cinco pesos en el bolsillo izquierdo del pantalón.

Claramente es una proposición, en tanto que podemos decidir si es verdadera o no. ¿Cómo exactamente decidimos si es verdad? fácil, verificando que en efecto uno lleva puesto un pantalón, este pantalón tiene bolsillos, uno porta monedas en el bolsillo izquierdo del pantalón, y dicha cantidad de monedas corresponde a cinco pesos al considerar en conjunto su valor monetario. Si todo lo anterior se verifica sin problemas, entonces es verdad y ya acabamos; en otro caso, decimos que es falso. Como no existe la posibilidad de que la oración sea verdadera y falsa al mismo tiempo, o que no se pueda hablar sobre su veracidad por su naturaleza, concluímos que en efecto es una proposición.

Lo fundamental en lo anterior fue el proceso de decisión sobre la veracidad de la proposición, no tanto si la oración era proposición o no. Obsérvese que para decidir si la proposición era verdadera o no, se requiere verificar antes la verdad sobre:

- Se viste un pantalón.
- El pantalón tiene bolsillos.
- Dentro del bolsillo izquierdo del pantalón hay monedas.
- La suma del valor de las monedas en el bolsillo izquierdo es de cinco pesos.

Así, si se satisfacen las condiciones anteriores, podemos concluir que la proposición es verdadera. Esto es en resumen (uno muy breve) y de forma intuitiva en lo que consiste la definición de verdad que se adopta en el estudio de la semántica de la lógica matemática (Si el lector está particularmente ansioso de ver cómo es que se lleva a cabo esto, se le invita a consultar []). De esta forma, podemos pensar que el conocer el significado de una proposición es conocer sus condiciones de verdad. En principio, si la oración se refiriera a alguien que no sea el o la lectora de este texto, no se tendría forma de verificar la verdad o falsedad de la oración anterior. Consideremos la siguiente proposición:

Agregar citación al libro de compacidad lógica de Amor

A las 12 horas del día 22 de diciembre del año 2022, se cayó un árbol en el Ajusco.

Es imposible saber si la proposición es verdadera o falsa a menos que uno haya estado en todo el Ajusco de forma simultánea y haya presenciado la caída de por lo menos un solo árbol; sin embargo, uno conoce cómo tendría que ser el mundo para que esto sea verdadero.

De lo anterior, podríamos pensar que entonces una teoría que estudia el significado de las proposiciones empareja proposiciones con sus condiciones de verdad. Este emparejamiento se podría lograr con un esquema de *verdad parcial* de la forma

La proposición "P" es verdadera si y solamente si P

donde en el lugar de la letra P va una proposición. Alfred Tarski, en su artículo *The Concept of Truth in Formalized Languages* propone este esquema [], el cual es fundamental en el estudio semántico de la lógica matemática. Lo anterior parecería ser trivial a simple vista, pero no hay que olvidar que nuestra capacidad humana nos permite comprobar la verdad de cosas que en principio no sabemos que lo sean, y de nuevo, la forma en que hacemos esto es verificando la veracidad de todas las partes que componen a lo que se desconoce.

Hacer énfasis en el uso del meta lenguaje

Agregar citación al paper de Tarski

Por último, una observación importante es que en virtud de la definición de proposición, una proposición está restringida a dos posibles valores: verdadero o falso. Los valores que puede tomar una fórmula proposicional los denotamos por valores de verdad (de una fórmula proposicional) y se suelen representar por los símbolos:

Verdadero	Falso
$\top$	$\bot$
V	F
1	0

La semántica de $\neg$

A raíz de que consideramos que las proposiciones solamente pueden tomar dos valores de verdad, tiene sentido pensar que la **negación** es tal que, si una proposición es verdadera entonces su negación es falsa y viceversa: si una proposición es falsa, su negación es verdadera. Es importante recordar que esto es consecuencia de que sólo consideramos dos valores de verdad, y que esto no ocurre en general como se discutió en la sección 5.1.

Podemos representar este comportamiento en lo que se conoce como **tabla de verdad**, la cual no es más que una tabla donde se acostumbra a poner en el renglón superior las proposiciones a considerar, y en los renglones subsecuentes los posibles valores de verdad que pueden tomar las proposiciones que se están considerando en función de las proposiciones que las componen, de modo que en este caso, si p_1 es una proposición y $\neg p_1$ su negación entonces, su tabla de verdad luce como a continuación:

p_1	$\neg p_1$
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

Usualmente es sencillo identificar cuando la negación de una proposición está siendo considerada, pues suelen estar acompañadas de la palabra **no** o se hace explícito que algo es falso o mediante antónimos se expresa la negación de algo.

Ejemplo 5.16. Ejemplos de proposiciones de la forma $\neg P$.

- No es cierto que hoy es lunes.
- No he cenado.
- Ningún número real es solución del polinomio $x^2 = -1$.

Juego 5.5. Sea p_1 una proposición; cualquiera que se le ocurra. ¿Será cierto que la negación de la negación de p_1 vuelve a tener el mismo valor de verdad que p_1 en todos los casos? Se recomienda hacer una tabla de verdad de la forma

p_1	$\neg p_1$	$\neg\neg p_1$
$\top$		
$\bot$		

Juego 5.6. La tabla de verdad no es la única forma de representar la semántica de la negación. Supongamos que los valores de verdad que toma una proposición

son el número 1 para verdadero, y 0 para falso. Si p_0 es una proposición, escriba de forma explícita una fórmula aritmética (donde se involucre al menos una operación aritmética como $+, -, \times, \div$) para calcular la negación de p_0, de modo que si $\varphi(x)$ es la fórmula, al sustituir adecuadamente a x en la fórmula φ por el valor de verdad de p_0 se obtenga el valor de verdad de $\neg p_0$. Dicho de otra forma, si p_0 es verdadera, entonces $\varphi(1) = 0$ y si p_0 es falsa, entonces $\varphi(0) = 1$.

La semántica del conector $\wedge$

Consideremos la proposición

(0) Jorge estudia matemáticas y disfruta su tiempo estudiándolas.

Nos interesa saber qué condiciones deben de cumplirse para que la proposición sea verdadera. Como se vió antes, basta entonces desmenuzar la proposición en proposiciones más sencillas y con ellas concluir las condiciones necesarias para que la proposición anterior sea verdadera. Las proposiciones que componen a nuestra proposición son las siguientes:

(1) Jorge estudia matemáticas.

(2) Jorge disfruta su tiempo estudiando matemáticas.

Si estas dos proposiciones son verdaderas, entonces podemos concluir que Jorge estudia matemáticas **y** disfruta su tiempo estudiándolas.

¿Qué podríamos decir si Jorge no disfruta su tiempo estudiando matemáticas?. Debería ser claro que en este caso no podríamos decir que Jorge estudia matemáticas y disfruta su tiempo estudiándolas es una proposición verdadera, porque en particular no es verdad que Jorge disfruta su tiempo estudiando matemáticas y por lo tanto no se satisfacen de forma simultánea las dos condiciones que deben cumplirse para que toda la proposición sea verdadera. Obsérvese que la conclusión es análoga si ahora suponemos que Jorge no estudia matemáticas, pero sí disfruta su tiempo estudiándolas.

Finalmente, con el mismo razonamiento que cuando suponíamos alguna de las proposiciones (1) y (2) falsas, podemos concluir que de ser ambas simultáneamente falsas se tendría que la proposición (0) es falsa.

Ahora, aprovechando nuestra herramienta sintáctica desarrollada antes, asignemos letras proposicionales a las proposiciones (0), (1), y (2): p_0, p_1 y p_2 respectivamente. En virtud de nuestra definición 5.7, la traducción es bastante directa:

$$p_0 := p_1 \wedge p_2$$

De acuerdo al análisis anterior, si $p_1 = \perp$, entonces $p_0 = \perp$; y análogamente si $p_2 = \perp$ se tendrá que $p_0 = \perp$. Además, si ocurre que $p_1 = \perp$ y $p_2 = \perp$, entonces $p_0 = \perp$. Representando entonces el comportamiento semántico de la conjunción mediante una **tabla de verdad** obtenemos:

p_1	p_2	$p_0 := p_1 \wedge p_2$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

Observe que, al asignar letras proposicionales a las proposiciones antes consideradas estamos realizando un proceso de abstracción en el que deja de ser relevante el significado exacto de las proposiciones originales y simplemente nos preocupamos por el valor de verdad que pudiera tener **cualquier** proposición p_0 que pueda separarse en dos proposiciones p_1 y p_2 de tal forma que $p_0 := p_1 \wedge p_2$.

Así, con la misma tabla podemos modelar la semántica de cualquier proposición de la forma

(0) proposición 1 **y** proposición 2.

como por ejemplo:

- Me gusta el refresco **y** me gustan los sabores dulces.
- Me comí un helado **y** Dylan se tropezó.
- $x = 10$ **y** $x^2 = 100$
- $z < 10$ **y** $z < 9$ **y** z es un número entero.

Juego 5.7. Intente realizar el mismo análisis hecho en esta sección para la proposición "Jorge estudia matemáticas y disfruta su tiempo estudiándolas.", pero ahora usted proponga alguna otra proposición. Verifique que se induce la misma tabla de verdad al realizar el análisis.

Juego 5.8. Ahora, proponga una proposición conformada por al menos más de dos proposiciones, todas unidas mediante la conjunción ($\wedge$) y analice su valor de verdad construyendo la tabla de verdad de la proposición propuesta.

Juego 5.9. La tabla de verdad no es la única forma de representar la semántica de la conjunción. Supongamos que los valores de verdad que toma una proposición son el número 1 para verdadero, y 0 para falso. Considerese una máquina, a la que llamaremos **mín**, tal que al introducirle dos números naturales esta regresa el número que es menor.

Verifique que el valor de verdad de $p_1 \wedge p_2$ puede calcularse de acuerdo con la fórmula

$$\min(p_1, p_2)$$

Juego 5.10. Supongamos que estamos en un universo en donde sólo hay dos números: 0 y 1; y la suma y el producto de dichos números se define de acuerdo a las siguientes tablas:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Con estas operaciones, ¿podría dar usted una fórmula para calcular la conjunción de una proposición, considerando que una proposición toma los valores 1 para verdadero y 0 para falso?.

La semántica del conector $\vee$

Ahora, consideremos la siguiente proposición:

(0) Es de mañana o es de noche.

Para decidir la verdad de la proposición, la separamos en proposiciones más sencillas:

(1) Es de mañana.

(2) Es de noche.

¿Qué tendría que pasar para que la proposición (0) sea verdadera? tendría que ocurrir que es de mañana, o que es de noche; es decir, ¡basta con que **alguna** de las proposiciones (1) **o** (2) sean verdaderas!.

Pensando ahora en el caso contrario, ¿qué tendría que pasar para que la proposición (0) sea falsa?. En virtud del párrafo anterior, tendría que ocurrir que no sean verdaderas las proposiciones (1) **y** (2) de forma **simultánea**.

Si p_0, p_1, p_2 son letras proposicionales que corresponden respectivamente a las proposiciones (0), (1) y (2), la tabla de verdad que modela la semántica de (0) es

p_1	p_2	$p_0 := p_1 \vee p_2$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

Nótese que, cuando pensamos en qué tendría que ocurrir para que la proposición (0) sea falsa, las proposiciones que componen a (0) tienen que ser falsas de forma simultánea. ¿Qué se podría decir entonces sobre la relación entre $\wedge$ y $\vee$? Esta parece yacer en la negación de una y otra, de forma que si p_8, p_9 son letras proposicionales y suponemos la proposición

$$p_8 \vee p_9$$

verdadera, entonces la proposición

$$(\neg p_8) \wedge (\neg p_9)$$

tendría que ser falsa.

Juego 5.11. Verifique que la negación de $p_8 \vee p_9$ es en efecto $(\neg p_8) \wedge (\neg p_9)$; esto es, verifique que cuando $p_8 \vee p_9$ es verdadera, $(\neg p_8) \wedge (\neg p_9)$ es falsa y viceversa. Se recomienda hacerlo mediante una tabla de verdad de la forma:

p_8	p_9	$p_8 \vee p_9$	$(\neg p_8) \wedge (\neg p_9)$
$\top$	$\top$		
$\top$	$\bot$		
$\bot$	$\top$		
$\bot$	$\bot$		

Juego 5.12. Así como la tabla de verdad no es la única forma de representar la semántica de la conjunción, tampoco lo es para la disyunción.

Supongamos que los valores de verdad que toma una proposición son el número 1 para verdadero, y 0 para falso. Considerese una máquina, a la que llamaremos **máx**, tal que al introducirle dos números naturales esta regresa el número que es mayor.

Verifique que el valor de verdad de $p_1 \vee p_2$ puede calcularse de acuerdo con la fórmula

$$\text{máx}(p_1, p_2)$$

Juego 5.13. Retomando la premisa del juego 5.10, con las operaciones definidas ¿podría dar usted una fórmula para calcular la disyunción de una proposición considerando que una proposición toma los valores 1 para verdadero y 0 para falso?.

La semántica del conector $\supset$

La semántica del conector de implicación; denotado por los símbolos $\supset$, $\rightarrow$ o también por $\Longrightarrow$; no resulta tan directo de un análisis parecido al que hemos realizado en los párrafos anteriores, en tanto que queremos que este conectivo codifique también el principio de explosión (*ex falso quodlibet*) que estipula que de premisas falsas se puede concluir cualquier cosa verdadera, aunque en el Español sí ocurre que existen frases donde se utiliza este sentido de la implicación

> Si los cerdos vuelan entonces yo puedo correr a la velocidad de la luz.

Sin embargo, si incluímos este principio en la semántica del conector $\supset$, mediante análisis semejantes a los hechos en secciones anteriores podemos dar con la tabla de verdad que codifica el comportamiento semántico de una proposición de la forma

Si P entonces Q.

La tabla de verdad que se obtiene de tal análisis es la siguiente:

p_1	p_2	$p_1 \supset p_2$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$

Juego 5.14. Proponga usted una proposición de la forma "Si P entonces Q", donde P y Q son proposiciones. Realice un análisis semejante a los hechos para la conjunción y disjunción para convencerse que la tabla de verdad para la implicación es la que se propuso.

Juego 5.15. Demuestre que si p_n, p_k con n y k números naturales cualesquiera son letras proposicionales, entonces existe una fórmula proposicional formada mediante la negación y la conjunción tal que tiene la misma tabla de verdad que $p_n \supset p_k$. (Demostrar esto útlimo significa que usted debe exhibir una fórmula formada mediante la negación y conjunción que tiene la misma tabla de verdad que $p_n \supset p_k$.)

Pista: El análisis del juego anterior debería darle una buena idea de cómo expresar la implicación $p_n \supset p_k$ en términos de la negación y la conjunción.

Juego 5.16. Como quizás el o la lectora ya se lo tenga esperado, la tabla de verdad no es la única forma de modelar la semántica de la implicación. De una forma explícita de calcular el valor de verdad de $p_1 \supset p_2$ suponiendo que los valores de verdad que puede tomar una proposición son 1 para verdadero y 0 para falso.

Pista: El juego anterior, y los juegos 5.6 y 5.9 deberían ser de gran ayuda.

La semántica de la doble implicación

La doble implicación; denotada usualmente por $\iff$, $\equiv$, o $\longleftrightarrow$; es un conectivo lógico que se introduce por conveniencia, en tanto que se define en términos de la conjunción y la implicación de la siguiente forma:

Si p_n, p_k son letras proposicionales con n y k números naturales cualesquiera, entonces escribimos

$$p_n \iff p_k$$

para abreviar la proposición

$$(p_n \supset p_k) \wedge (p_k \supset p_n).$$

Si la proposición $p_n \iff p_k$ es verdadera, entonces es porque que ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad. Esto se corrabora fácilmente mediante la tabla de verdad de la doble implicación. En virtud de lo anterior, obtenemos entonces una forma de decir que dos fórmulas proposicionales son equivalentes.

Definición 5.10. Sean p_n, p_k fórmulas proposicionales cualesquiera. Si ocurre que $p_n \iff p_k$ es verdadera, decimos que p_n y p_k son **fórmulas proposicionales equivalentes**; en otro caso decimos que no son equivalentes.

Juego 5.17. Verifique que la proposición

$$(p_n \supset p_k) \wedge (p_k \supset p_n)$$

es tal que es verdadera cuando p_n y p_k tienen ambas el mismo valor de verdad, y es falsa en otro caso.

Juego 5.18. Demuestre que las siguientes dos fórmulas proposicionales

$$(p_n \wedge (\neg p_k)) \vee ((\neg p_n) \wedge p_k)$$

$$\neg(p_n \iff p_k)$$

son equivalentes. (Demostrar lo anterior, de acuerdo con la definición 5.10 significa mostrar que ambas fórmulas proposicionales tienen la misma tabla de verdad.)

Los siguientes juegos son muy importantes para secciones subsecuentes, y tiene la misma importancia que la o el lector se familiarice con las siguientes equivalencias. Se recomienda fuertemente por lo menos echarle un vistazo y convencerse que en efecto son proposiciones equivalentes, pues no solo serán útiles para seguir este libro, sino que el lector o lectora utilizará estas equivalencias a lo largo de todo su proceso educativo en diversos contextos.

Juego 5.19. Sean p_n, p_k, p_r fórmulas proposicionales. Para cada inciso, mediante una tabla de verdad o representación semántica equivalente, demuestre que son equivalentes:

1. (El conectivo $\wedge$ es conmutativo)
   $p_n \wedge p_k \iff p_k \wedge p_n$
2. (El conectivo $\vee$ es conmutativo)
   $p_n \vee p_k \iff p_k \vee p_n$
3. (Ley de De Morgan para la conjunción)
   $\neg(p_n \wedge p_k) \iff \neg p_n \vee \neg p_k$
4. (Ley de De Morgan para la disyunción)
   $\neg(p_n \vee p_k) \iff \neg p_n \wedge \neg p_k$
5. (Asociatividad de la conjunción)
   $(p_n \wedge p_k) \wedge p_r \iff p_n \wedge (p_k \wedge p_r)$

6. (Asociatividad de la disyunción)

   $(p_n \vee p_k) \vee p_r \iff p_n \vee (p_k \vee p_r)$

7. (Distributividad de la conjunción sobre la disyunción)

   $p_n \wedge (p_k \vee p_r) \iff (p_n \vee p_k) \wedge (p_n \vee p_r)$

8. (Distributividad de la disyunción sobre la conjunción)

   $p_n \vee (p_k \wedge p_r) \iff (p_n \wedge p_k) \vee (p_n \wedge p_r)$

El motivo de ser de cada una de estas equivalencias puede ser fácilmente extraído si uno realiza la misma clase de análisis que utilizamos para dar con las tablas de verdad de la conjunción y disyunción. Es un buen ejercicio realizar este análisis para interiorizar mejor estas reglas y percatarse de lo comunes que son.

5.4. Cálculo de proposiciones

Así como se observó en la sección 5.1 que para las proposiciones muchas veces "la verdad" viene de la estructura de la proposición y no de su contenido. El objetivo del sistema axiomático es deducir otras proposiciones cuya veracidad solo depende de su estructura.

Definición 5.11. Decimos que una fórmula proposicional (o proposición) es tautológica (o que es una tautología) si es verdadera en virtud de su estructura. Esto es, es verdadera sin importar el valor de verdad de sus subfórmulas.

Entre las opciones para deducir tautologías están los sistemas axiomáticos del estilo Hilbert-Frege, y la deducción natural y cálculo de secuentes de Gentzen. Antes del sistema de deducción natural de Gentzen para el cálculo de predicados (y por lo tanto también para el cálculo de proposiciones); la cual discutiremos con detalle en secciones posteriores; personas como David Hilbert, Bertrand Russell, Alfred North Whitehead, Gottlob Frege, Ludwig Wittgenstein entre otros se dieron a la tarea de intentar formalizar la forma en que los seres humanos razonamos, cada uno de estos individuos con sus propios objetivos; [6] y su propuesta a muy grandes razgos consiste en el postulado de reglas lógicas, denominados **axiomas**, y una regla de inferencia que permite deducir nuevas "verdades" dentro del sistema a partir de los axiomas.

5.4.1. Sistema axiomático del estilo Hilbert-Frege y el Teorema de la deducción

De acuerdo con [4], la siguiente lista de esquemas de axiomas es gracias a Heyting, de quien Gentzen expresó dichos axiomas en forma de **esquemas axiomáticos** para evitar incluir una regla de sustitución. Lo que esto significa es que cada posible ejemplar del esquema es un axioma para el sistema.

Ejemplo 5.17. Si A es una metavariable y

$$A \vee A$$

es un esquema de axioma, entonces para cualquier letra proposicional, al sustituir dicha letra por A, la proposición resultante es un axioma.

Por ejemplo en particular, para p_1 se tiene que

$$p_1 \vee p_1$$

es un axioma, así como para p_{100} es cierto que

$$p_{100} \vee p_{100}$$

es un axioma.

Sin embargo,

$$p_1 \vee p_{100}$$

no es un axioma de acuerdo con lo anterior pues p_1 no es p_{100}.

Axiomas de la lógica proposicional

El sistema de axiomas que se presentará se divide en tres subsistemas: lógica mínima M_0, lógica intuicionista J_0, y lógica clásica K_0. La lógica mínima, la lógica intuicionista y la lógica clásica surgen de un periodo turbulento de las matemáticas en las que se carecía de algo a partir del cual todas las matemáticas estuvieran fundamentadas. La lógica clásica fue formulada por una escuela de pensamiento denominada *formalismo* [6], mientras que la lógica intuicionista surge de un rechazo al principio del tercer excluido (axioma PL12.) [1] [2] y la lógica mínima surge de querer evitar hablar sobre el *falsum*, denotado por $\perp$ y definido como $\neg A \iff A \supset \perp$ [3].

De la siguiente lista, los axiomas PL1. a PL10. conforman los axiomas de la lógica mínima, al agregar a esta lista el axioma PL11. (principio de explosión o *ex falso quodlibet*) se tiene la lógica intuicionista; y al agregar a la lógica intuicionista el axioma PL12 (la eliminación de la doble negación) el cual es equivalente al principio del tercer excluido, se tiene la lógica clásica. [4]

Lógica mínima

PL1. $A \supset (A \wedge A)$

PL2. $(A \wedge B) \supset (B \wedge A)$

PL3. $(A \supset B) \supset [(A \wedge C) \supset (B \wedge C)]$

PL4. $[(A \supset B) \wedge (B \supset C)] \supset (A \supset C)$

PL5. $B \supset (A \supset B)$

PL6. $(A \wedge (A \supset B)) \supset B$

PL7. $A \supset (A \vee B)$

PL8. $(A \vee B) \supset (B \vee A)$

PL9. $[(A \supset C) \wedge (B \supset C)] \supset [(A \vee B) \supset C]$

PL10. $[(A \supset B) \wedge (A \supset \neg B)] \supset \neg A$

Lógica intuicionista

PL11. $\neg A \supset (A \supset B)$

Lógica clásica

PL12. $\neg\neg A \supset A$

Juego 5.20. Verifique que los axiomas enunciados antes son tautologías mediante tablas de verdad o representación semántica equivalente.

En tanto que a partir de axiomas queremos deducir tautologías, necesitamos una regla de inferencia que permita hacer precisamente esto. Los sistemas axiomáticos tipo Hilbert vienen equipados con una sola regla de inferencia, denominada *modus ponens* (MP):

Modus Ponens

Dados A y $A \supset B$, entonces se infiere B.

Ejemplo 5.18. Algunos ejemplos de Modus Ponens en acción:

- Consideremos las siguientes proposiciones:
  - "Si estoy sonriendo entonces estoy feliz."
  - "Estoy sonriendo."

  Notemos que en este ejemplo particular tenemos dos proposiciones: la primera es de la forma $A \supset B$, y la segunda es una proposición sencilla pero involucrada como antecedente en la implicación. Así, por modus ponens, podemos inferir "Estoy feliz".

- Consideramos las proposiciones:
  - "Si estudio mucho sacaré 10 en el examen."
  - "Estudié mucho."

  Por modus ponens, podemos inferir entonces "sacaré 10 en el examen."

- Considerense las siguientes proposiciones
  - $x \cong \sum_{x:Q} \lambda x.S(x) \supset (\Omega \wedge \prod_{\pi:T_{\aleph_0}} (W \otimes V(\pi)))$

- $x \cong \sum_{x:Q} \lambda x.S(x)$

  Entonces por modus ponens, podemos concluir

  $$(\Omega \wedge \prod_{\pi:T_{\aleph_0}} (W \otimes V(\pi)))$$

  En principio, los símbolos no significan nada para nosotros. Son simplemente dibujos escritos en un papel; sin embargo al tener la estructura

  $$A, A \supset B$$

  podemos entonces mediante modus ponens inferir B como su conclusión. Este es el poder de la parte sintáctica de la lógica proposicional: en principio podemos prescindir de la semántica (el contenido de la proposición) para obtener conclusiones valiéndonos solamente de la sintaxis.

En los ejemplos anteriores hicimos una suposición implícita bastante importante de la cual muy quizás usted lector o lectora se haya percatado: supusimos que las proposiciones eran verdaderas por si mismas. **Modus ponens requiere que las proposiciones que ocupan los lugares de las metavariables A y B sean axiomas o tautologías inferidas anteriormente.** El motivo de esto es porque nos interesa inferir cosas verdaderas pues ¿de qué serviría un sistema deductivo que nos permite inferir cosas falsas?.

Definición 5.12. Sea S_0 cualquier sistema de axiomas entre M_0, J_0 o K_0. Una derivación en S_0 es una sucesión finita de fórmulas $A_1, \ldots, A_n$ cada una de las cuales es un axioma o se obtiene de fórmulas anteriores mediante modus ponens.

Definición 5.13. Sea S_0 cualquier sistema de axiomas entre M_0, J_0 o K_0. Decimos que B es un teorema de S_0 (o que es demostrable en S_0) si existe una derivación cuya última fórmula es B en S_0 y escribimos

$$\vdash_{S_0} B$$

Definición 5.14. Sea S_0 cualquier sistema de axiomas entre M_0, J_0 o K_0. Decimos que una fórmula C es derivable en S_0 desde una colección Γ de supuestos si existe una sucesión finita de fórmulas $A_1, \ldots, A_n$ tal que:

1. Para cada i desde 1 hasta n, A_i es un axioma de S_0 o una fórmula en Γ, o se obtiene mediante modus ponens de las fórmulas A_k, A_t con k, t mayores a 1 y menores a i (en símbolos $1 \leq k, t < i$), y además
2. $A_n = C$.

Y escribimos este hecho como

$$\Gamma \vdash_{S_0} C$$

Si la colección Γ no tiene elementos (en símbolos $\Gamma = \varnothing$), simplemente escribimos

$$\vdash_{S_0} C$$

Notación. Cuando sea irrelevante el sistema axiomático, escribimos el símbolo

$$\vdash$$

sin más.

El cálculo de derivaciones en sistemas de tipo Hilbert es algo complicado para un ser humano (pero sencillo para una computadora: vease). Si usted intenta derivar en M_0 que $p_1 \supset (p_2 \vee p_1)$, el cual no es un axioma, verá que es tremendamente difícil siquiera saber cómo empezar (en [4] se presenta esta derivación). El sistema de deducción natural de Gentzen es equivalente al sistema axiomatico que se presentó en esta sección y busca representar de manera formal cómo trabajan los matemáticos al momento de hacer demostraciones.

Agregar las sig. Referencias: https://twitter.com/mathsl https://www.mscroggs.co.u

En tanto que nuestra prioridad es el sistema de deducción natural, dejaremos por la paz a las derivaciones en sistemas tipo Hilbert (el o la lectora puede consultar [4], [2] para leer más al respecto), pero no sin antes demostrar un primer resultado para ejemplificar el uso de las definiciones anteriores con la intención de aclararlas un poco.

Proposición 5.1. Si $\Gamma \vdash B$ y $\Delta \vdash B \supset C$, entonces $\Gamma \cup \Delta \vdash C$.

Demostración. Recordemos primero que $\Gamma \cup \Delta$ es la colección de los objetos que están en Γ o están en Δ (como se vió en la sección de colecciones).

En la proposición nos piden demostar que, si ocurre que $\Gamma \vdash B$ y $\Delta \vdash B \sup C$ entonces ocurre que $\Gamma \cup \Delta \vdash C$. Esta estructura común, como vimos cuando revisamos la semántica del conector $\supset$, corresponde a demostrar una implicación. Como queremos probar una implicación, supongamos que ocurre

$$\Gamma \vdash B$$

y que

$$\Delta \vdash B \supset C.$$

Queremos demostrar que a partir de estas suposiciones sucede que

$$\Gamma \cup \Delta \vdash C.$$

Una pregunta sensata que podemos hacernos es

Pregunta clave 1

¿qué significa lo que queremos demostrar?

Para responder a la pregunta anterior, recordamos que por la definición anterior

$$\Gamma \cup \Delta \vdash C$$

significa que existe una sucesión de fórmulas $K_1, \ldots K_s$ en $\Gamma \cup \Delta$ tal que $K_s = C$ y además para toda $i \in \{1, \ldots, s\}$ se tiene que K_i es un axioma o consecuencia de aplicar modus ponens a dos fórmulas con índices menores. Así, por lo anterior podemos concluir que **para demostrar la proposición basta obtener de alguna forma una sucesión de fórmulas en $\Gamma \cup \Delta$ tal que la última fórmula de la sucesión es C.** Una pregunta inmediata que podría surgir es:

Pregunta clave 2

> ¿qué significa que la sucesión de fórmulas esté en $\Gamma \cup \Delta$?

cuya respuesta no es complicada. Recordando que $\Gamma \cup \Delta$ denota la colección formada por todos los objetos que están en Γ o en Δ, las fórmulas $K_1, \ldots K_s$ están en $\Gamma \cup \Delta$ si algunas de ellas forman parte de Γ o de Δ.

Ahora, ¿exactamente cómo podemos obtener la sucesión de fórmulas que queremos? Recordemos que queremos demostrar una implicación a partir de unos supuestos.

Pregunta clave 3

> ¿Qué información nos brindan nuestras suposiciones?

En virtud de la definición involucrada, podemos desmenuzar las hipótesis (otra palabra para referirnos a los supuestos) para obtener más información sobre nuestro problema. Por un lado,

$$\Gamma \vdash B$$

significa que existe una sucesión de fórmulas

$$B_1, \ldots, B_n$$

que son objetos de Γ, donde además $B_n = B$. Nuestra otra hipótesis nos dice que existe una sucesión de fórmulas

$$C_1, \ldots, C_m$$

en Δ donde C_m es la fórmula $B \supset C$. Así, es con esta información que buscamos construir una sucesión de fórmulas $K_1, \ldots K_s$ en $\Gamma \cup \Delta$ tal que $K_s = C$.

Una primera idea para construir la sucesión deseada es tomar todos los $B_1, \ldots, B_n$ y los $C_1, \ldots, C_m$ en una sola sucesión

$$B_1, B_2, \ldots, B_n, C_1, C_2, \ldots, C_m$$

Notemos que la última fórmula de dicha sucesión es C_m, pero C_m es igual a $B \supset C$, sin embargo, nosotros queremos que la última fórmula de la sucesión sea C, y claramente $B \supset C$ es distinta a C. ¿Cómo podemos entonces producir a C? En realidad, haciendo memoria recordamos que sólo hay una manera de producir C, suponiendo que C no está en Γ ni en Δ, y esa única forma de obtener C es utilizar modus ponens en $B \supset C$; pero para utilizar modus ponens en $B \supset C$ para obtener C requiere que tengamos a B. Entonces, ¿tenemos a B? ¡Y la respuesta es sí!, pues por hipótesis $B_n = B$. Así, a la sucesión anterior podemos agregar a $C_{m+1} = C$ en tanto que se infiere por Modus Ponens de B_n y C_m

$$B_1, B_2, \ldots, B_n, C_1, C_2, \ldots, C_m, C_{m+1}$$

De esta forma, como existe una sucesión de fórmulas en $\Gamma \cup \Delta$ tal que la última fórmula de la sucesión es C y cada una de las fórmulas en dicha sucesión es un axioma o se infiere de otras fórmulas anteriores mediante modus ponens, entonces podemos dar por terminada la demostración. Es decir, demostramos que si $\Gamma \vdash B$ y $\Delta \vdash B \supset C$, entonces $\Gamma \cup \Delta \vdash C$.

$\square$

Observe que a lo largo de la demostración anterior utilizamos Modus Ponens a nivel del metalenguaje (pues no empleamos la regla de *modus ponens* del cálculo proposicional, sino el que utilizamos cuando razonamos por *sentido común*) para llegar a la conclusión deseada. Esto último se hace más claro cuando escribimos la estructura general de la demostración:

a) *Por defnición* $\Gamma \vdash B$ implica la existencia de la sucesión $B_1, \ldots, B_n$ en Γ y $B_n = B$.

b) *Por defnición* $\Delta \vdash B$ implica la existencia de la sucesión $C_1, \ldots, C_n$ en Δ y $C_m = B \supset C$.

c) Los incisos *a)* **y** *b)* implican la existencia de la sucesión

$$B_1, \ldots, B_n, C_1, \ldots, C_m$$

en $\Gamma \cup \Delta$.

d) Por el inciso *c)* tenemos dados B y $B \supset C$. Modus ponens del cálculo proposicional y lo anterior implican que inferimos C.

e) Los incisos *c)* y *d)* implican que existe una sucesión

$$B_1, \ldots, B_n, C_1, \ldots, C_m, C$$

en $\Gamma \cup \Delta$ que testifica (hace evidente, es evidencia para) que $\Gamma \cup \Delta \vdash C$ es verdadero, como que quería demostrar.

También obsérvese que al inicio de la prueba supusimos los antecedentes de la proposición que deseabamos demostrar, pues dimos por hecho que $\Gamma \vdash B$ y $\Delta \vdash B \supset C$ ocurrían, y demostramos que de suponer esto último ocurría $\Gamma \cup \Delta \vdash C$, en otras palabras, por sentido común dimos por hecho que

> *Si de unos supuestos Γ y A se deriva B (en símbolos $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$), entonces de los supuestos Γ podemos derivar $A \supset B$.*

Esto último es un resultado importante de la lógica que lleva el nombre de **teorema de la deducción**. Es importante porque, como observamos, permite resolver un problema del lenguaje en el metalenguaje: para demostrar que $A \supset B$ es verdadero, es suficiente suponer que ocurre A y obtener una derivación para B a partir de esta suposición, exactamente lo que hicimos en la demostración de la proposición 5.1. Es de esta forma que, la manera en que solemos demostrar cosas en matemáticas está bien justificada.

Juego 5.21. Reescriba la demostración de la proposición 5.1 omitiendo los detalles que usted vea pertinentes.

Replantear cómo formular estos ejercicios para que no sea un salto grande el de demostrar

Juego 5.22. Demuestre que si Γ es una colección de fórmulas, y A es una fórmula cualesquiera en Γ, entonces $\Gamma \vdash A$.

Juego 5.23. Demuestre que si $\Gamma \vdash A$ y $\Gamma \subseteq \Delta$, entonces $\Delta \vdash A$.

Juego 5.24. Demuestre que si A es un axioma, entonces $\varnothing \vdash A$, donde $\varnothing$ es la colección que no tienen ningún elemento.

Juego 5.25. Demuestre que si $A \vdash B$, entonces $\vdash A \supset B$.

Juego 5.26. Demuestre el converso del teorema de la deducción, esto es, demuestre que:

$$\boxed{\textit{Si } \Gamma \vdash A \supset B, \textit{ entonces } \Gamma \cup \{A\} \vdash B}$$

De esta forma, el enunciado completo del teorema de la deducción es:

Teorema 5.1 (De la deducción)**.** $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ si y solamente si $\Gamma \vdash A \supset B$.

5.5. Derivaciones como árboles

Los árboles, además de ser útiles para representar de forma esquemática la construcción de fórmulas (vease la subsubsección 5.13 si requiere refrescar las definiciones), sirven también para representar derivaciones. Para representar a las derivaciones como árboles, emplearemos las siguientes reglas de construcción:

Reglas de construcción

- La ráiz del árbol será la fórmula a derivar y se coloca hasta abajo.
- Cada hoja del árbol es un axioma o una suposición.
- Si un vértice no es hoja, entonces es conclusión (por modus ponens) de los dos vértices arriba de este.
  - De esta forma, una aplicación de modus ponens conecta dos vértices del árbol a una sola fórmula. Es costumbre colocar una línea recta arriba del vértice conclusión y por debajo de los vértices de los cuales es conclusión.

Ejemplo 5.19. Representemos la derivación

$$A, A \supset (B \supset A), B \supset A$$

como un árbol de acuerdo con las reglas anteriores

$$\frac{A \qquad A \supset (B \supset A)}{B \supset A}$$

Ejemplo 5.20. Consideremos la siguiente derivación ((MP x, y) denota una aplicación a x y y de modus ponens):

Número	Supuestos		Conclusión	Justifiación
1.			$A \supset B$	(supuesto)
2.			$(A \supset B) \supset [C \supset ((A \supset B) \supset D)]$	(supuesto)
3.			C	(supuesto)
4.	(1), (2)	$\vdash$	$C \supset ((A \supset B) \supset D)$	(MP 1, 2)
5.	(1), (2), (3)	$\vdash$	$(A \supset B) \supset D$	(MP 3, 4)
6.	(1), (2), (3)	$\vdash$	D	(MP 1, 5)

Su representación en árbol es la siguiente:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{A \supset B \qquad (A \supset B) \supset [C \supset ((A \supset B) \supset D)]}{C \supset ((A \supset B) \supset D)} \qquad C}{(A \supset B) \supset D} \qquad A \supset B}{D}$$

Observe que $A \supset B$ aparece dos veces como hoja, y a pesar de esto la colección de hipótesis o supuestos se mantienen iguales.

En virtud de la estructura de un árbol, podemos dar una definición inductiva de lo que es una derivación. Exploremos un poco más esta observación.

La derivación más sencilla que se nos pudiera ocurrir es aquella con una sóla fórmula, como en el juego 5.24. En el caso del juego, usted lector o lectora corraboró que si A es un axioma, entonces A es una derivación de A desde la colección vacía de supuestos

$$\varnothing \vdash A$$

¿Ahora, qué ocurre si A no es un axioma? En este caso, por nuestras reglas de formación de una derivación como árbol tendría que ser que A es un supuesto, y en este caso si $\Gamma = \{A\}$, entonces tendríamos que A es una derivación desde Γ

$$\Gamma = \{A\} \vdash A$$

De este último análisis, podemos obtener entonces un caso base o en otras palabras lo mínimo y fundamental para decir que algo es una derivación.

Derivación: Caso Base

- Si A es un axioma, entonces A es una derivación de A desde $\Gamma = \varnothing$ una colección vacía de supuestos.
- Si A es un supuesto, entonces A es una derivación desde $\Gamma = \{A\}$.

Ahora, a partir de este caso base debemos construir las demás posibilidades para decir qué es una derivación. Consideremos ahora un ejemplo ligeramente más complicado: digamos que tenemos A un supuesto, y $A \supset B$ es un axioma; en este caso $\Gamma = \{A, A \supset B\}$ es nuestra colección de supuestos. Entonces la siguiente secuencia de fórmulas es una derivación de B.

$$A, A \supset B, B$$

Y su representación en árbol es la siguiente:

$$\frac{A \qquad A \supset B}{B}$$

Notemos que el caso base se sigue respetando. $A \supset B$ se deriva desde la colección de supuestos que no tiene ningún elemento, $\varnothing$, mientras que A se deriva de $\{A\}$.

Si damos nombres a los supuestos antes remarcados, $\Delta_1 = \{A\}$, y $\Delta_2 = \varnothing$, observamos que

$$\Delta_1 \vdash A$$

$$\Delta_2 = \varnothing \vdash A \supset B$$

y así entonces B se deduce de los supuestos $\Delta_1 \cup \Delta_2$.

$$\Delta_1 \cup \Delta_2 \vdash B$$

Más aún, ¡$\Delta_1 \cup \Delta_2$ y Γ tienen los mismos supuestos!.

Otra observación pertinente del anterior análisis es que, por la forma en que construímos la representación en árbol, ambas formas de escribir a la derivación son consistentes.

A partir de lo anterior, ya podemos vislumbrar cuál sería el paso inductivo de nuestra definición. Para terminar de aclararlo, contemplemos ahora el ejemplo 5.20.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \supset B \qquad (A \supset B) \supset [C \supset ((A \supset B) \supset D)]}{C \supset ((A \supset B) \supset D)} \qquad C}{(A \supset B) \supset D} \qquad A \supset B}{D}$$

En el nivel más superior, observamos que se respeta el caso base, pues ambas fórmulas son hipótesis. Partimos entonces de las colecciones de supuestos

$$\Delta_1 = \{A \supset B\}$$

$$\Delta_2 = \{(A \supset B) \supset [C \supset ((A \supset B) \supset D)]\}$$

Es a partir de estos dos supuestos que por modus ponens se deriva

$$C \supset ((A \supset B) \supset D)$$

al igual que como observamos en la derivación anterior. De este modo, dichas colecciones de supuestos son tales que

$$\Delta_1 \cup \Delta_2 \vdash C \supset ((A \supset B) \supset D)$$

Luego, en el segundo nivel, de arriba para abajo, tenemos a C sola. Obsérvese que C es un supuesto y no tiene niguna otra fórmula por arriba de este, lo cual es consistente con nuestro caso base, de modo que podemos considerar la colección de supuestos

$$\Delta_3 = \{C\}$$

Luego, de aplicar Modus Ponens a la derivación de $C \supset ((A \supset B) \supset D)$ y a Δ_3 obtenemos una derivación de $(A \supset B) \supset D$.

$$\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3 \vdash (A \supset B) \supset D$$

En el tercer nivel de arriba hacia abajo tenemos al supuesto $A \supset B$. Consideramos entonces una nueva colección de supuestos

$$\Delta_4 = \{A \supset B\}$$

Mediante una aplicación de modus ponens de la derivación de $(A \supset B) \supset D$ y Δ_4, obtenemos finalmente a D. Así entonces, D es una derivación desde $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3 \cup \Delta_4$.

Posteriormente, de aplicar Modus Ponens a las fórmulas en el segundo nivel obtenemos

$$(A \supset B) \supset D,$$

y a un lado de esta se encuentra $A \supset B$, la cual es una hipótesis. De nuevo, es consistente con lo que ya hemos observado antes y volvemos a tener otra colección de supuestos

$$\Delta_4 = \{C\}$$

Finalmente, de aplicar Modus Ponens sobre las fórmulas en el tercer nivel, de arriba hacia abajo, obtenemos D. De nuevo, es consistente con las observaciones ya hechas.

$$\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3 \cup \Delta_4 \vdash D$$

Con base en el análisis anterior podemos entonces proponer un paso inductivo apropiado para nuestra definición alternativa de derivación.

Derivación: Paso inductivo

- Sea D_1 una derivación de A desde los supuestos Δ_1

$$\left.\begin{array}{c}\Delta_1\\ \vdots\\ A\end{array}\right\}D_1$$

y sea D_2 una derivación de $A \supset B$ desde los supuestos Δ_2

$$\left.\begin{array}{c}\Delta_2\\ \vdots\\ A \supset B\end{array}\right\}D_2$$

Entonces

$$\dfrac{D_1\left\{\begin{array}{c}\Delta_1\\ \vdots\\ A\end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{c}\Delta_2\\ \vdots\\ A\supset B\end{array}\right\}D_2}{B}$$

es una derivación de B desde $\Delta_1 \cup \Delta_2$.

De esta forma, nuestra definición inductiva de derivación queda como a continuación:

Definición 5.15. Una derivación se caracteriza por la siguiente construcción [4].

1. Casos Base

   a) Si A es un axioma, entonces A es una derivación de A desde $\Delta = \varnothing$.

   b) Si A es un supuesto, entonces A es una derivación desde $\Delta = \{A\}$.

2. Paso inductivo: Sean D_1 una derivación de S desde los supuestos Δ_1, y D_2 una derivación de $S \supset Q$ desde Δ_2. Entonces

$$\dfrac{D_1\left\{\begin{array}{c}\Delta_1\\ \vdots\\ A\end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{c}\Delta_2\\ \vdots\\ A\supset B\end{array}\right\}D_2}{B}$$

   es una derivación de Q desde $\Delta_1 \cup \Delta_2$.

3. Paso terminal: Ningúna otra cosa es una derivación.

Este proceso de derivación será bastante útil para nosotros en secciones subsecuentes, pues es la base para el sistema de deducción natural de Gentzen, el cual codifica la forma en que se suelen escribir demostraciones en matemáticas. De dominar la deducción natural, realizar demostraciones bien justificadas y caer en cuenta de los errores que uno pudo haber cometido en una propuesta de demostración será más sencillo.

6. Lógica de predicados

6.1. Motivación

Quizás usted haya notado que el tipo de expresiones sobre las cuales podemos decidir verdad no se agotan en las proposiciones. Después de todo, en el Español como en otros lenguajes es posible hacer afirmaciones como

> *No existe un número real tal que es solución del polinomio* $x^2 + 1 = 0$.

Observe que en la afirmación anterior, el número real del que hablamos es uno arbitrario y variable. En otras palabras, el enunciado anterior está hablando sobre toda una colección pero desde fuera de esta: ocurre una abstracción sobre la colección de números reales:

> *Si y es un número real, entonces no es solución del polinomio $y^2 + 1 = 0$.*

Otra forma equivalente de expresar lo mismo que la afirmación anterior es

> *Para todo x número real, x no es solución del polinomio* $x^2 + 1 = 0$.

Ya hemos jugado con estas ideas en secciones anteriores, principalmente cuando introdujimos un lenguaje común para hablar sobre colecciones. Observe que esta especie de **cuantificación** es la que nos permite formar colecciones de forma intencional: Si $\mathbb{R}$ denota la colección de los números reales, entonces podemos formar la colección

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0\}$$

De ser cierta la afirmación anterior (spoiler: es verdadera y se suele demostrar en un curso de Álgebra Moderna II en la Facultad de Ciencias), entonces la colección anterior tiene los mismos elementos que la colección sin elementos. Sin embargo, dentro del lenguaje que especificamos para formar proposiciones no tenemos contemplados símbolos para denotar palabras como "existe" o "para todo" y por lo tanto, no tenemos lo básico para aspirar a responder la pregunta: *¿Existe algún* $z \in \mathbb{R}$ *tal que* $z^2 + 1 = 0$*?*.

Consideremos ahora el siguiente argumento:

Todos los hombres son mortales. *Sócrates es hombre.* *Luego, Sócrates es mortal.*

La única forma de traducir este argumento al lenguaje proposicional, es asignar una letra proposicional a cada oración, de modo que

$$\begin{aligned} p_1 &:= \text{Todos los hombres son mortales.} \\ p_2 &:= \text{Sócrates es hombre.} \\ p_3 &:= \text{Sócrates es mortal.} \end{aligned}$$

pero p_3 no es consecuencia tautológica de p_1 y p_2, sin embargo el argumento original es correcto. El problema subyacente se encuentra en que el lenguaje proposicional no cuenta con alguna forma de codificar la relación de los átomos que componen a la proposición, en otras palabras, no podemos *"ver hacia dentro de las proposiciones y rescatar la forma en que se relacionan sus componentes"*. Más aún, dentro de p_1 hay una **cuantificación** sobre todos los hombres.

6.2. El lenguaje de la lógica de predicados

En vista de que nuestro lenguaje de fórmulas proposicionales no es suficiente, introducimos otros elementos sintácticos que incrementen su capacidad expresiva tomando nota de las observaciones hechas hasta el momento. En tanto que ya conocemos de lenguajes formales (Definición 5.4), y estos ya cuentan con las herramientas que necesitamos, simplemente hacemos uso de esta definición.

Definición 6.1. El lenguaje de la lógica de predicados es un lenguaje formal tal que está particionada por las siguientes subcolecciones [4]:

- Const $= \{k_1, k_2, \ldots, k_n, k_{n+1}, \ldots\}$ una colección de constantes,
- Prop $= \{p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots\}$ una colección de símbolos proposicionales,
- Pred $= \{P_1^1, P_2^1, \ldots, P_1^s, P_2^2, P_3^2, \ldots\}$ una colección de símbolos de predicado de la forma P_k^n donde n denota el número de argumentos del predicado.

- $\text{Fun} = \{f_1^1, f_2^1, \dots, f_1^2, f_2^2, \dots\}$ una colección de símbolos funcionales de la forma f_k^n donde n denota el número de argumentos que toma la función.
- $\{\vee, \wedge, \supset, \iff, \neg\}$ colección de conectivos lógicos.
- $\{\exists, \forall\}$ una colección de símbolos cuantificadores.
- $\{(,)\}$,
- $\{=\}$,
- $\text{Var} = \{x_1, x_2, \dots\}$ una colección de variables.

Habrá notado usted que el lenguaje de la lógica de predicados y el lenguaje de la lógica proposicional difieren en cinco colecciones:

- Hay una colección de símbolos de predicados Pred,
- hay una colección de símbolos funcionales Fun,
- hay una colección de símbolos constantes Const,
- hay una colección de variables Var,
- y hay una colección de símbolos cuantificadores $\{\exists, \forall\}$.

Las colecciones de símbolos cuantificadores nos permiten, como sugieren su nombre, expresar cuantificaciones. Nos hablan sobre la cantidad de elementos que pudieran satisfacer una condición. El símbolo

$$\forall$$

se lee *para todo*, y el símbolo

$$\exists$$

se lee *existe*. Por ejemplo el predicado

$$\forall \varepsilon (\varepsilon \in \mathbb{R} \wedge \varepsilon > 0)\ \exists \delta (\delta \in \mathbb{R} \wedge \delta > 0)$$

se lee como

Para toda épsilon, tal que épsilon es un número real y épsilon es mayor a cero, existe una delta, tal que delta es un número real y delta es mayor a cero.

Los símbolos funcionales y de predicado, como su nombre también lo sugiere, nos permiten expresar relaciones entre las variables. Retomando el ejemplo de Sócrates, nuestro nuevo lenguaje nos permite definir los siguientes símbolos de predicado:

- En tanto que "Ser hombre" es una propiedad de un individuo, podemos codificarla como un símbolo de predicado P_1^1 de aridad 1. Esto significa que sólo acepta un argumento: $P_1^1(x_9)$ y $P_1^1(x_7)$ son correctas, mientras que $P_1^1(x_9, x_7)$ ni $P_1^1(x_7, x_9)$ lo son.

- De nuevo, ”ser mortal” es una propiedad de un individuo. Por lo tanto, podemos codificar esta propiedad mediante un símbolo de predicado P_2^1 de aridad 1.

Así, podemos traducir el argumento línea por línea como a continuación:

$$\underbrace{\forall x_1}_{\text{para toda } x_1} \quad (\quad \underbrace{P_1^1(x_1)}_{\text{si } x_1 \text{ es hombre}} \quad \supset \quad \underbrace{P_2^1(x_1)}_{x_1 \text{ es mortal.}} \quad)$$

Como la notación P_k^n suele ser bastante incómoda de utilizar para cuestiones fuera de la lógica matemática, se suele recurrir a otros símbolos que faciliten la lectura y sean sugerentes de lo que se quiere denotar. Veamos ejemplos cotidianos del uso de los cuantificadores.

Ejemplo 6.1. Por el momento no se preocupe por el significado de lo que se escribe. En su momento lo sabrá.

- Se dice que una función f es inyectiva si para cualesquiera dos elementos x, y en $\mathrm{Dom}(f)$ el dominio de f, si $f(x) = f(y)$ entonces $x = y$.

  $$\forall x, y \in \mathrm{Dom}(f)(f(x) = f(y) \supset x = y)$$

  Muchas veces se escribe algún símbolo de puntuación en lugar de los paréntesis que separan a la variable cuantificada del enunciado que involucra a dicha variable, de la siguiente forma:

  $$\forall x, y \in \mathrm{Dom}(f) : f(x) = f(y) \supset x = y$$

  Y ese símbolo separador se suele leer como *tal que*.

- Para cada número natural n existe un número natural m tal que $m > n$.

  $$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ (m > n)$$

- Decimos que $S \subseteq M$ (S es un subconjunto de M) si todo elemento de S es también un elemento de M.

  $$\forall x \in S\ (x \in M)$$

- Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Decimos que A es acotado superiormente si existe $\sigma \in \mathbb{R}$ tal que es mayor a todo elemento de A.

  $$\exists \sigma \in \mathbb{R}\ (\forall x \in A\ .\ x < \sigma)$$

  Aquí, el símbolo separador es un punto, pero también son los paréntesis. La elección de notación suele ser preferencia personal, pero la elección de notación debe ser una que permita facilidad de lectura y comprensión.

Juego 6.1. Ahora le toca a usted. Estos enunciados son algunos de los que usted encontrará en su proceso de formación educativa. Traduzca los enunciados al Español si el enunciado está escrito en símbolos, o en símbolos como en el ejemplo pasado si el enunciado está escrito en Español.

- $\exists e \in G \ (\forall x \in G \ (e \cdot x = x \wedge x \cdot e = x))$
- $\forall x \in G : \exists x^{-1} \in G \ (x \cdot x^{-1} = e \wedge x^{-1} = x)$
- $\forall x \in X \ (y \in x \implies y \in X)$
- $\forall z \ (a \in [z] \iff \exists w \in S : R(a, w) \wedge R(a, z))$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \ (|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon)$
- Sean m, n números enteros. Decimos que m divide a n, y lo denotamos por $m|n$, si existe un α número natural tal que $m \cdot \alpha = n$.
- Decimos que $\vec{0}$ es el neutro de V un espacio vectorial si para todo $x \in V$ vector se tiene que $x + \vec{0} = x$.
- Decimos que una operación $\star$ en A distribuye sobre otra operación $\triangle$ si para cualesquiera $a_1, a_2, a_3 \in A$ se tiene que $a_1 \star (a_2 \triangle a_3) = (a_1 \triangle a_2) \star (a_1 \triangle a_3)$.
- Decimos que una sucesión de números reales $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente si existe $L \in \mathbb{R}$ tal que para toda ε positiva existe un número natural M tal que para todo n número natural, si n es mayor que M entonces se satisface que $|n - L| < \varepsilon$.

Juego 6.2. Diga si tiene sentido para usted una expresión de la forma

$$\forall x(R(x, y))$$

Argumente su respuesta.

Juego 6.3. Diga si tiene sentido para usted una expresión de la forma

$$\forall x(R(x, y) \ \exists y(S(x, y)))$$

Argumente su respuesta.

6.3. Variables libres y variables ligadas

Quizás habrá notado usted que los cuantificadores en cierta forma restringen a las variables, y la condición que imponen en la variable sobre la cual cuantifican queda restringida de acuerdo con lo especificado dentro del paréntesis o el separador inmediato a la variable.

$$\underbrace{\forall x}_{\text{Variable de la que vamos a hablar}} \qquad \overbrace{(P(x))}^{\text{Restricción sobre la variable de la que hablamos.}}$$

Al colocar un cuantificador fuera de un predicado, estamos fijando un universo o lugar de discurso. Mientras estémos trabajando dentro de los paréntesis que le siguen a una expresión de la forma $\forall x$, estamos obligados a respetar las condiciones impuestas sobre dicha variable. Esta es la noción de **variable ligada.** En cambio, si dentro de los paréntesis hay una variable que no está involucrada en ningún cuantificador, entonces decimos que dicha variable es una **variable libre**.

Por ejemplo, en la expresión

$$\forall x(P(x,y) \wedge (\exists z(S(z,y)) \vee w))$$

x y z son variables ligadas, pues tanto x como z están siendo cuantificadas. Por otro lado, w y y son variables libres, pues no se encuentran atadas a cuantificador alguno.

Definiremos con precisión lo que significa que una variable esté ligada o sea libre en la siguiente subsubsección, pues primero necesitamos saber cuándo una expresión está "bien hecha" en este nuevo lenguaje.

Juego 6.4. Diga si usted piensa que y es libre o no y argumente por qué.

$$\exists x(R(x,y) \wedge \exists y(S(y)))$$

6.4. Sintaxis de la lógica de predicados

Regresando a nuestro estudio de los predicados, a pesar de que ya dimos una forma intuitiva de formar fórmulas que en principio son congruentes, no está demás esclarecer las reglas concretas del juego.

En este nuevo lenguaje, tenemos dos clases de expresiones: los términos y las fórmulas. Los términos son expresiones que tienen sentido por si mismas, y nos brinda una forma de construir expresiones válidas a partir de otras; los términos en este nuevo contexto servirán para hablar sobre objetos individuales. Las fórmulas en cambio son expresiones más complicadas que los términos en tanto que involucran a más elementos de nuestro lenguaje; además, éstas afirman o niegan algo sobre los objetos del universo de discurso.

Definición 6.2. Los términos del lenguaje de la lógica de predicados se definen como a continuación [2]:

1. Casos base:
    - Si t es una variable, entonces t es un término.
    - Si t es una constante, entonces t es un término.

2. Si $t_1, \ldots, t_n$ son términos, y f es un símbolo funcional que toma n argumentos (es de aridad n), entonces $f(t_1, \ldots, t_n)$ es un término.
3. Condición terminal: Ningún otro objeto es un término del lenguaje de la lógica de predicados.

Definición 6.3. Las fórmulas atómicas del lenguaje de la lógica de predicados se definen como a continuación:

1. Caso base: Si t_1 y t_2 son términos, entonces $t_1 = t_2$ es una fórmula atómica.
2. Paso inductivo: Si $t_1, t_2, \ldots, t_n$ son términos, y P es un predicado de aridad n (toma n argumentos), entonces $P(t_1, \ldots, t_n)$ es una fórmula atómica.
3. Condición terminal: Ningún otro objeto es una fórmula atómica del lenguaje de la lógica de predicados.

Definición 6.4. Las fórmulas (bien formadas) del lenguaje de la lógica de predicados se definen como a continuación:

1. Caso base: Si α es una fórmula atómica, entonces es una fórmula bien formada.
2. Pasos inductivos:
   a) Si φ es una fórmula bien formada, entonces $(\neg\varphi)$ es una fórmula bien formada.
   b) Si φ y ψ son fórmulas bien formadas, entonces también son fórmulas bien formadas:
      - $(\varphi \supset \psi)$
      - $(\varphi \vee \psi)$
      - $(\varphi \wedge \psi)$

   c) Si φ es una fórmula bien formada, y x es una variable, entonces $(\forall x\varphi)$ y $(\exists x\varphi)$ son fórmulas bien formadas.
3. Condición terminal: Ningún otro objeto es una fórmula bien formada del lenguaje de la lógica de predicados.

Notación. Utilizaremos las siguientes convenciones sobre el lenguaje de predicados:

- Se omitiran los paréntesis más exteriores.
- Se permite el uso de paréntesis cuadrados [] y corchetes {}
- Los cuantificadores son asociativos por la izquierda, de modo que

$$\forall x\alpha \supset \beta$$

es equivalente a

$$(\forall x \alpha) \supset \beta$$

y **no es equivalente a**

$$\forall x(\alpha \supset \beta)$$

Observación 3. Usualmente, cuando escribimos algo de la forma

$$\forall x \in X(S(x))$$

de acuerdo con las definiciones anteriores debería ser

$$(\forall x \ (x \in X \supset S(x)))$$

donde damos por hecho que S es una metavariable que denota un símbolo de predicado que toma un solo argumento, y x es una metavariable que denota un símbolo de variable x_k con k número natural arbitrario. Lo primero representa un abuso de notación, en tanto que los cuantificadores se aplican exclusivamente sobre variables, mientras que $x \in X$ denota una propiedad de aridad 2 que podría ser escrita como $\in (x, X)$

Pensar en ejemplos.

Pensar en ejercicios.

Ya que sabemos con precisión cómo son las expresiones válidas en nuestro nuevo lenguaje, podemos capturar mediante una definición lo que significa que una variable sea libre (o no).

Definición 6.5. Sean φ una fórmula y x una variable en el lenguaje de lógica de predicados.

1. Caso base: Si φ es una fórmula atómica, x es una variable libre de φ si y solamente si x es un símbolo que conforma a φ como expresión (definimos qué era expresión en la Definición 5.3).

2. Paso inductivo:

   Pensar si está bien definida.

   - Si ocurre que $\varphi = (\neg\psi)$ para alguna ψ fórmula y x es (una variable) libre en ψ, entonces x es libre en φ.
   - Si sucede que existen α y β fórmulas tales que ocurre alguno de los siguientes casos:
     - $\varphi = (\alpha \wedge \beta)$
     - $\varphi = (\alpha \vee \beta)$
     - $\varphi = (\alpha \supset \beta)$

     y x es libre en α o en β, entonces x es libre en φ.
   - Si ψ es una fórmula bien formada tal que $\varphi = (\exists x_0)\psi$ donde x es libre en ψ y x es distinta a x_0, entonces x es libre en φ.
   - Si ψ es una fórmula bien formada tal que $\varphi = (\forall x_0)\psi$ donde x es libre en ψ y x es distinta a x_0, entonces x es libre en φ.

3. Condición terminal: x no es libre en otro caso.

¿Estuvo duro, no? Veamos algunos muchos ejemplos.

Ejemplos
Ejercicios

Definición 6.6. Sea φ una fórmula del lenguaje de lógica de predicados. Si x es un símbolo que conforma a φ como expresión, pero x no es libre, entonces decimos que x es una variable ligada de φ.

6.5. Verdad, falsedad y derivaciones en la lógica de predicados

Consideremos la siguiente fórmula:

$$\forall x(R(x) \wedge S(x))$$

¿Cómo podemos decidir su verdad? En la sección 5.3 vimos que para decidir si una proposición es verdadera basta ver que todas las partes que componen a la proposición lo son, y que para decidir si una proposición es verdadera basta aplicar el esquema

La proposición "P" es verdadera si y solamente si P

¿Podemos aplicar este mismo esquema a los predicados? Intentemos con una fórmula. Supongamos que H y M son símbolos de predicados que toman un solo argumento (son 1-arias), R es un símbolo de predicado arbitrario de dos argumentos, y que H denota la propiedad "ser humano", y M denota la propiedad "ser mortal". Consideremos entonces la fórmula

$$\exists x\ R(x, y)$$

¿Es verdad? En principio no podemos saber, pues la variable y es totalmente desconocida por nosotros en tanto que no tenemos información que nos diga algo sobre y, de esta forma, queda indeterminada sin importar qué objeto sea x. Lo mismo ocurre si la fórmula es

$$\exists x\ R(y, w)$$

Observemos que en cambio para la fórmula

$$\forall y \forall w\ R(y, w)$$

ya podemos decir algo: si $R(y, w)$ fuera verdad **para cualesquiera** y **y** w, entonces la fórmula es verdadera. ¿Cuál fue la diferencia fundamental entre las expresiones? notemos que en la expresión $\exists x\ R(y, w)$ las variables y y w son variables libres, mientras que en la expresión $\forall y \forall w\ R(y, w)$ tenemos que las variables son variables ligadas.

Entonces, ya tenemos una primera condición que deben satisfacer nuestras fórmulas para poder hablar sobre su verdad, y esta condición es que no tenga variables libres. Esta clase de fórmulas reciben un nombre particular.

Definición 6.7. Si φ es una fórmula del lenguaje de la lógica de predicados tal que φ no tiene ningua variable libre, diremos que φ es un enunciado.

Agregar ejercicios para decidir si una fórmula es enunciado o nop

Juego 6.5. Diga si las siguientes expresiones son enunciados o no. Argumente su respuesta.

1. $\forall x \forall y \ (\exists z \ (x \supset y) \vee (w \wedge z))$
2. $\forall x(S(x))$
3. $\exists(x \wedge s)$
4. $\forall x \ (\exists y \ S(x,y) \wedge T(x,y))$

Ahora, consideremos el siguiente enunciado:

$$\forall x \ H(x)$$

Intuitivamente, ¿es verdadera? ¡no! porque en particular **existe** un valor de x, a saber $x =$ Caballo tal que $H(x)$ es falso pues un caballo no es un ser humano. En cambio,

$$\exists x \ H(x)$$

es verdadera porque para $x =$ Yo se tiene que $H(x)$ es verdad; es decir, **existe** un valor de x para el cual al sustituir todas las ocurrencias de x en la expresión que conforma a la fórmula H por dicho valor de x, en este caso ”Yo”, se tiene que $H(\text{Yo})$ es verdadero.

Ahora, supongamos que S es una fórmula proposicional 1-aria que denota la propiedad ”es ser vivo” y consideremos el enunciado

$$\exists x \ (S(x) \wedge \neg M(x))$$

Intuitivamente, ¿es verdadera?. Para decidir si lo es, basta exhibir un x para el cual $S(x) \wedge \neg M(x)$ es verdadera. Traduciendo lo que dice la fórmula a palabras, para poder decir que el enunciado es verdadero debemos mostrar que existe un objeto x tal que x es un ser vivo, y x no es mortal. Para mi infortunia, desconozco si existe un ser vivo que satisfaga esto, pero suponiendo que todo ser vivo es mortal, el enunciado es entonces falso **para todo** valor de x.

Consideremos la siguiente fórmula:

$$\forall x(H(x) \supset S(x))$$

Intuitivamente, ¿es verdadera?. Para decidir su verdad o falsedad, debemos ver si para cualesquiera valor de x se tiene que $H(x) \supset S(x)$; en otras palabras menos técnicas, el enunciado es verdadero si para cualquier x tal que si x representa un ser humano, entonces es un ser vivo. Dicho lo anterior, tomamos un x arbitrario. Luego, si suponemos que $H(x)$ para el x arbitrario que tomamos, podemos ver que se sigue por sentido común que $S(x)$ es verdad. Por lo tanto, como el x que tomamos fue uno arbitrario que satisface $H(x)$, y mostramos que entonces $S(x)$, podemos concluir que el enunciado es verdadero.

Ejemplo 6.2. Pongamos a prueba la intuición adquirida en los párrafos anteriores. Demostremos paso a paso lo siguiente:

Para cada natural n, existe un natural $k > n$.

La primer cosa que debemos hacer antes de comenzar una demostración, y en general a la hora de intentar resolver un problema es entender lo que nos piden. Este paso es muy fácil de olvidar, y muchas veces es la parte más difícil de la resolución del problema. Hacer esto no solo ayuda a resolver el problema de forma más rápida y sencilla, sino que además nos permite convencernos de que lo que se nos pide resolver es verdadero. Quizás al leer esto último uno piense

¿Pero por qué nos pedirian demostrar algo que es falso?,

y esta pregunta tiene al menos tres respuestas:

- Muchas veces las personas cometemos errores, por lo que pudiera ocurrir que quien pide que usted demuestre algo haya cometido algún error al momento de escribir el enunciado a demostrar.
- En otras ocasiones, lo que se pide es decir es si un enunciado es verdadero o falso. En estos casos, de ser falso uno debe dar explicitamente un caso para el que el enunciado es falso.
- La tercera es que, cuando uno quiere proponer alguna solución a algún problema muchas veces se desconoce si lo que se propone es verdadero o falso (funciona o no).

El enunciado del problema nos pide mostrar que, dado cualquier n tal que es número natural existe algún otro número natural k tal que es mayor que el n dado. Por ejemplo:

- Si $n = 10$, entonces $k = 15$ satisface lo que se quiere.
- Si $n = 100000$, entonces $k = 1000000$ satisface lo que se desea.
- Si $n = 2$, entonces $k = 25$ satisface lo que se desea.

Una vez que entendimos el problema, podemos escribir la oración anterior en el lenguaje de la lógica de predicados como a continuación:

$$\forall n\ (n \in \mathbb{N} \supset (\exists k\ (k \in \mathbb{N} \wedge k > n)))$$

Observamos que el enunciado comienza con los símbolos $\forall n$. Cuando hicimos el análisis sobre cómo decidir de forma intuitiva si un enunciado es verdadero, concluimos que para ver si un enunciado que comienza con esos símbolos es verdadero, debemos mostrar que para cualquier valor arbitrario pero fijo de n lo que está dentro de los paréntesis es verdadero.

Sea n.

Al escribir lo anterior, estamos declarando que n es un objeto arbitrario pero fijo.

Luego, como lo que está dentro de los paréntesis es una implicación, por el teorema de la deducción podemos suponer el antecedente de la implicación y derivar la conclusión de la implicación para demostrar su verdad.

Sea n. Supongamos que $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, queremos mostrar que existe un k tal que $k \in \mathbb{N}$ y $k > n$. Mientras uno está aprendiendo a demostrar cosas, es **muy recomendable** escribir en algún lado lo que se quiere demostrar.

Sea n. Supongamos que $n \in \mathbb{N}$.
$\boxed{\text{PD: } \exists k\ (k \in \mathbb{N} \wedge k > n)}$

Como queremos mostrar que existe un k tal que $k \in \mathbb{N}$ y $k > n$, entonces debemos ser ingeniosos para encontrar tal k. Algo muy importante a tener en cuenta es que dicho k debe ser para cualquier $n \in \mathbb{N}$, pues esa es la restricción impuesta sobre n dentro de los paréntesis que le siguen a los símbolos $\exists k$. Entonces, de cierta forma k debe depender de n.

¿Cómo podemos encontrar dicho k para un n arbitrario? Sabemos que n es un número natural, y para que el enunciado completo sea verdadero, tiene que ser verdad que $k \in \mathbb{N} \wedge k > n$. Luego, ¿qué sabemos sobre los números naturales? Por la Definición 4.1 sabemos que todo número natural tiene otro que le sucede, que resulta de "sumarle 1". De esta forma, si $k = n + 1$ entonces ¡es cierto que $n < k$ para cualquier valor que tome n!. De esta forma, deducimos que $\exists k\ (k \in \mathbb{N} \wedge k > n)$ es verdadero a partir de suponer $n \in \mathbb{N}$. Por el teorema de la deducción entonces podemos concluir que $(n \in \mathbb{N}) \supset (\exists k\ (k \in \mathbb{N} \wedge k > n))$. Luego, como n fue arbitrario, podemos generalizar nuestro resultado para todo n. De esta forma, concluimos que

$$\forall n\ (n \in \mathbb{N} \supset (\exists k\ (k \in \mathbb{N} \wedge k > n)))$$

es un enunciado verdadero.

Finalmente, escribimos nuestro argumento en limpio y lo más claro posible para que otras personas nos puedan entender con facilidad.

Demostración

Sea n. Supongamos que $n \in \mathbb{N}$. Como $n \in \mathbb{N}$ entonces se tiene por definición de $\mathbb{N}$ que existe $(n+1) \in \mathbb{N}$. Sea entonces $k = n + 1$. Luego, $n < k$. Por lo tanto, como n fue arbitrario entonces se tiene que para todo n un número natural existe k otro número natural, a saber $k = n + 1$, tal que $n < k$ como se quería mostrar. ■

Hablaremos más sobre técnicas de demostración en la sección 7 donde estudiaremos un poco de Deducción Natural.

Juego 6.6. Abreviamos por $D(m,n)$ a la fórmula

$$\exists k \ (k \in \mathbb{Z} \wedge m \cdot k = n)$$

de modo que $D(m,n)$ codifica la relación m *divide a* n.

- Diga si el siguiente enunciado es verdadero o falso.

$$(2 \in \mathbb{Z} \wedge 4 \in \mathbb{Z}) \supset D(2,4)$$

  Si es verdadero demuéstrelo, y de ser falso brinde un contraejemplo.

- Diga si el siguiente manera:

  enunciado es verdadero o falso.

$$\forall a \ \forall b \ \forall c \ (a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} \wedge c \in \mathbb{Z} \wedge D(a,b) \supset D(a, b \cdot c))$$

  Si es verdadero demuéstrelo, y de ser falso brinde un contraejemplo.

En el análisis que hicimos para intuir cuándo un enunciado es verdadero hay algo fundamental a rescatar:

- Para ver si un enunciado de la forma $\exists x P(x)$ es verdadero, basta con exhibir un valor de x para el cual $P(x)$ sea verdadero.
- Para ver si un enunciado de la forma $\forall x P(x)$ es verdadero, debemos mostrar que para cualquier x se tiene que $P(x)$ es verdadero. Una técnica usual para hacer esto es suponer que x toma un valor arbitrario pero fijo, y a partir de este supuesto mostrar que $P(x)$ es verdadero; como el x tomado fue supuesto arbitrario y fijo, entonces podemos generalizar el resultado para cualquier x pues en efecto mostramos que $P(x)$ es independiente de un valor específico de x.

Esto se resume en los siguientes axiomas y reglas de inferencia para este nuevo sistema:

Axiomas

Pensar si incluir esto. Quizás es muy complicado y sobra.

Para cualquier fórmula $A(x)$ que involucre a la variable libre x, y cualquier término t:

QL1. $\forall x A(x) \supset A(x)^{[x \to t]}$ [4]

QL2. $A(x)^{[x \to t]} \supset \exists x A(x)$ [4]

donde $A(x)^{[x \to t]}$ denota la acción de sustituir toda instancia de la variable libre x por t en la expresión que forma a $A(x)$. Por ejemplo, si

$$A(x) := x \wedge \neg x$$

entonces al sustituir toda instancia de la variable libre x por t tenemos

$$A(x)^{[x \to t]} = t \wedge \neg t$$

Observación 4. Lo que nos quiere decir el axioma QL1. es que, si ocurre que para todo valor de x es verdad que $A(x)$, entonces en particular para $x = t$ con t un término se tendrá que al sustituir cualquier instancia de x en A como expresión por el término t, $A(x)^{[x \to t]}$, el resultado de esta sustitución es verdadera.

Por otro lado, lo que nos quiere decir el axioma QL2. es que, si ocurre que $A(x)$ es verdadero al sustituir x por algún término t, entonces podemos afirmar que existe un valor particular de x para el cual $A(x)$ es verdadero, es decir, $\exists x A(x)$ es verdadero.

Reglas de inferencia

Pensar si incluir esto. Quizás es muy complicado y sobra.

QR1. Si $A \supset B(x)$ es derivable, x no forma parte de A como expresión, y z es una variable que no forma parte de $B(x)$ como expresión, entonces $A \supset \forall z B(z)$ es derivable. [4]

QR2. Si $B(x) \supset A$ es derivable, x no no forma parte de A como expresión, y z es una variable que no forma parte de $B(x)$, entonces $\exists x B(x) \supset A$ es derivable. [4]

Observación 5. La regla de inferencia QR1. lo que captura es que, si observamos que en la derivación de $A \supset B(x)$ no importó el valor que tomó x, y desde luego x no ocurre en A, entonces podemos generalizar la derivación a cualquier z.

Por otro lado, lo que la regla de inferencia QR2. busca capturar es una forma de generalizar resultados, pues lo que dice es que si pudiste derivar que $B(x) \supset A$, entonces es porque existe algún valor para x que es evidencia para que ocurra $B(x) \supset A$

En resumen, ambas reglas de inferencia nos permiten generalizar resultados.

Juego 6.7. Abreviamos por $D(m, n)$ a la fórmula

$$\exists k \ (k \in \mathbb{Z} \wedge m \cdot k = n)$$

de modo que $D(m, n)$ codifica la relación m *divide a* n.

- ¿La siguiente fórmula es verdadera? Argumente su respuesta con base en las reglas de inferencia QR1, QR2, y los axiomas QL1. y QL2.

  $$\forall z (z \in \mathbb{Z} \supset D(z, 1))$$

  Pista: Considere la regla de inferencia QR1. Si

  $$A := \top, B(z) := D(1, z)$$

  y usted logra derivar

  $$A \supset B(s)$$

para s arbitrario, entonces podrá concluir que

$$A \supset \forall z B(z).$$

Será de mucha ayuda si usted reflexiona lo que se discutió en los párrafos siguientes a la Definición 6.7 teniendo en mente lo que dice esta pista.

Otros detalles importantes que podemos rescatar de nuestro análisis sobre cuándo un enunciado es verdadero son los siguientes:

- Un enunciado de la forma
$$\forall x P(x)$$
es **falso si existe** un valor de x para el cual ocurra que $\neg P(x)$ es verdad.
- Un enunciado de la forma
$$\exists x P(x)$$
es **falso si para todo** valor de x ocurre que $\neg P(x)$ es verdad.

Entonces, podemos pensar que la negación de un enunciado de la forma

$$\forall x P(x)$$

es el enunciado

$$\exists x \neg P(x)$$

mientras que la negación de un enunciado de la forma

$$\exists x P(x)$$

es el enunciado

$$\forall x \neg P(x)$$

Ejemplo 6.3. Escribamos la negación de algunos de los enunciados que vimos en el ejemplo 6.1

- Se dice que una función f es inyectiva si para cualesquiera dos elementos x, y en $\mathrm{Dom}(f)$ el dominio de f, si $f(x) = f(y)$ entonces $x = y$.
$$\forall x, y \in \mathrm{Dom}(f)(f(x) = f(y) \supset x = y)$$
Si escribimos bien los abusos de notación tendremos el enunciado
$$\forall x \forall y\ (x \in \mathrm{Dom}(f) \wedge y \in \mathrm{Dom}(f) \supset (f(x) = f(y) \supset x = y))$$
La negación de este enunciado de acuerdo con lo observado es la siguiente:
$$\exists x \exists y ((x \in \mathrm{Dom}(f) \wedge y \in \mathrm{Dom}(f)) \wedge \neg(f(x) = f(y) \supset x = y))$$
pero sabemos que $\neg(P \supset Q) \iff (\neg P \wedge Q)$. Entonces
$$\exists x \exists y ((x \in \mathrm{Dom}(f) \wedge y \in \mathrm{Dom}(f)) \wedge (f(x) = f(y) \wedge x \neq y))$$
es la negación del enunciado. En plabaras esto se lee como
Una función f no es inyectiva si existen x y y en el dominio de f tales que $f(x) = f(y)$ y $x \neq y$

- Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Decimos que A es acotado superiormente si existe $\sigma \in \mathbb{R}$ tal que es mayor a todo elemento de A.

  $$\exists \sigma \in \mathbb{R}\ (\forall x \in A\ .\ x < \sigma)$$

  Si escribimos bien los abusos de notación, tendremos el enunciado

  $$\exists \sigma (\sigma \in \mathbb{R} \supset \forall x (x \in A \supset x < \sigma))$$

  La negación de este enunciado es

  $$\forall \sigma\ (\sigma \in \mathbb{R} \wedge \exists x (x \in A \wedge x \geq \sigma))$$

  y se lee en Español como

  Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ (A un subconjunto del conjunto de los números reales). A no es acotado superiormente si para todo σ número real existe un x elemento de A tal que $x \geq \sigma$

Juego 6.8. Escriba la negación de los siguientes enunciados en símbolos y en Español.

- Para cada número natural n existe un número natural m tal que $m > n$.

  $$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ (m > n)$$

- Decimos que S es una subcolección de M, y lo denotamos por $S \subseteq M$, si todo elemento de S es también un elemento de M.

  $$\forall x \in S\ (x \in M)$$

Por el momento bastará este tratamiento no tan formal de la lógica de predicados. El estudio de la semántica de este lenguaje se realiza comúnmente en un segundo curso de lógica matemática en la Facultad de Ciencias, sin embargo, la idea fundamental yace en lo presentado hasta el momento. Con base en lo observado de forma intuitiva y con apoyo de la definición de verdad de Tarski uno puede construir un formalismo denominado *teoría de modelos* sobre el cual se pueden estudiar las propiedades semánticas de un lenguaje de primer orden (¡sí, cualquier lenguaje de primer orden!). Como último comentario, así como en la lógica proposicional existe un teorema de la deducción, también hay un teorema de la deducción para la lógica de predicados, el cual se puede consultar en [4].

Dar ejercicios

7. Deducción natural

7.1. Introducción

Como se mencionó en secciones anteriores, trabajar directamente con un sistema axiomático tipo Hilbert es complicado y poco intuitivo. Como alternativa al sistema axiomático presentado en las secciones anteriores está el sistema de deducción natural planteado originalmente por Gentzen, matemático alemán que trabajó en la Universidad de Göttingen en el siglo XIX y quien contribuyó significativamente a la lógica matemática. A diferencia del sistema axiomático de Hilbert, en deducción natural se asumen más reglas de inferencia, que capturan de forma más cercana la manera en que uno razona como matemático para obtener conclusiones. Como quizás el nombre lo indica, el sistema de deducción natural se basa fuertemente en el teorema de la deducción: para probar algo de la forma $A \supset B$ basta suponer A verdadera y derivar B.

Además de que el sistema de deducción natural nos brindará herramientas y estategias más intuitivas para demostrar enunciados, este constituye un lenguaje para hablar sobre tipos, los cuales tomarán protagonismo en las siguientes partes de este libro.

La idea es introducir a partir de esta parte un poco de Agda

Ver la forma de usar Agda para demostrar cosas usando lógica de predicados

Considerar mover la parte de calculo lambda no tipado antes de esta sección

Para motivar mejor las abstracciones sobre hipótesis y como las pensamos como funciones.

7.2. Reglas y deducciones

Primero, acordemos de forma precisa lo que entendemos por una deducción en este nuevo sistema.

Definición 7.1. Una deducción de una fórmula A es un árbol de fórmulas tal que en toda fórmula que no es un supuesto es la conclusión de una aplicación de una de las reglas de inferencia. Los supuestos en la deducción que no son descargados por cualquier regla en ella son *supuestos abiertos* de la deducción. Si cada deducción es descargada, esto es que no haya deducciones abiertas del todo, entonces diremos que la deducción es una *demostración* de A, y que A es un *teorema*. [4].

Para aclarar un poco sobre a qué nos referimos por descarga, recuerde que cuando *suponemos cierto* algún supuesto, nuestras conclusiones **siempre deben ser ciertas sujetas a que se satisfacen dichos supuestos**. Al *descargar* los supuestos estamos haciendo nota de que hemos utilizado un supuesto y nuestra conclusión depende de dicho supuesto. Esto se verá claro en los ejemplos de la sección 7.3.2. Cada paso en una deducción entonces debe ser justificada por una regla de inferencia.

7.2.1. Reglas de $\supset$

Como ya hemos observado antes, por ejemplo cuando demostramos la proposición 5.1, un patrón común en la demostración de un enunciado de la forma $A \supset B$ es suponer A y derivar B. En el sistema de deducción natural, este patrón se codifica mediante la siguiente regla:

Definición 7.2 (Regla de introducción del operador condicional $\supset$)**.**

$$\dfrac{\begin{array}{c} h_1 : A \\ \vdots \\ h_k : B \end{array}}{f : A \supset B} \supset_I$$

Esta regla se llama *regla de introducción* porque nos dice cómo podemos *introducir* o formar una expresión que involucra el símbolo en cuestión, en este caso el símbolo $\supset$. Observe que esta regla codifica el teorema de deducción natural.

El hecho de que las letras mayúsculas estén acompañadas de letras minúsculas a su izquierda y estas están separadas por dos puntos (" : ") significa que son hipótesis o derivaciones; por ejemplo, $f : A \supset B$ se puede pensar como un testigo de la veracidad de $A \supset B$, y de forma análoga $h_1 : A, \ldots, h_k : B$ se pueden pensar como evidencia de $A, \ldots, B$.

Veremos más adelante que esta notación es muy útil para referirnos a nuestras hipótesis en el árbol de derivación y descargarlas cuando sea necesario.

Como último comentario sobre la regla de introducción de $\supset$, note usted que dado P podemos concluir P de la siguiente manera:

$$\dfrac{h_1 : P}{\lambda h_1 \;.\; h_1 : P \supset P} \supset_I$$

En otras palabras, cualquier proposición P se implica a si misma.

Hacer mención de que se pueden repetir hipótesis sin problema

Por otro lado, es frecuente que si tenemos una expresión de la forma $A \supset B$, querramos obtener B por separado. Para esto, tenemos la siguiente regla *de eliminación* para el conectivo $\supset$:

Hacer la nota sobre la notación $\equiv$

Definición 7.3 (Regla de eliminación del operador condicional $\supset$)**.**

$$\dfrac{f : A \supset B \qquad h : A}{f\ h : B} \supset_E$$

En general, una regla de eliminación nos ayuda a *eliminar* o descomponer una expresión complicada en sus partes. Observe que la regla de eliminación es la misma que modus ponens (5.4.1).

La notación $f\ h$ en principio es pura notación: bien uno puede escribir $b : B$ o $pedro : B$, sin embargo resulta muy útil escribirla

$$f\ h : B$$

para leerse como

Aplicamos la hipótesis h a f.

7.2.2. Reglas de $\wedge$

Así como tenemos una regla de introducción y eliminación para el operador condicional, también tenemos una regla de introducción y eliminación para el operador $\wedge$:

Definición 7.4 (Regla de introducción para el operador $\wedge$)**.**

$$\frac{a : A \qquad b : B}{p : A \wedge B} \wedge_I$$

Cuando realizamos nuestro análisis semántico sobre $\wedge$, hicimos notar que si $A \wedge B$ es verdadero esto es porque A y B son ambos verdaderos. De esta forma, tiene sentido que de $A \wedge B$ se puedan derivar A y B por separado.

Definición 7.5 (Reglas de eliminación para el operador $\wedge$)**.**

$$\frac{p : A \wedge B}{\pi_1\ p : A} \wedge_E \qquad\qquad \frac{p : A \wedge B}{\pi_2\ p : B} \wedge_E$$

A diferencia de el operador $\supset$, en el caso de $\wedge$ tenemos dos reglas de eliminación. Observe que una regla nos permite derivar la proposición a la izquierda de la conjunción (o la primera proposición), mientras que la otra regla de eliminación nos permite obtener la segunda proposición.

Usualmente, π_1 y π_2 se entienden como la primera y segunda proyección de una evidencia de una conjunción, de modo que se pueden leer los símbolos

$$\pi_1\ p : A \wedge B \qquad \pi_2\ p : A \wedge B$$

como la primera y segunda proyección de $p : A \wedge B$. De nuevo, no es estrictamente necesario escribir los símbolos $\pi_1\ p$ o $\pi_2\ p$. La ventaja de escribir estos símbolos es que son relativamente estándar en la literatura matemática, y que además recuerdan cómo fue la deducción de la proposición. Esto se verá mejor en el siguiente ejemplo:

Observación 6. Nótese que la regla de introducción de $\wedge$ nos permite deducir

$$\frac{p : A \wedge B \qquad c : C}{p_2 : (A \wedge B) \wedge C} \wedge_I$$

Podemos derivar B de $p_2 : (A \wedge B) \wedge C$ como a continuación:

$$\cfrac{\cfrac{p_2 : (A \wedge B) \wedge C}{\pi_1\ p_2 : A \wedge B} \wedge_E}{\pi_2\ (\pi_1\ p_2) : B} \wedge_E$$

y leer la notación

$$\pi_2\ (\pi_1\ p_2) : B$$

como

"la segunda proyección de la primera proyección de p_2".

Observe que $\pi_2\ (\pi_1\ p_2)$ sintetiza el árbol de derivación si lo leemos de derecha a izquierda.

Observación 7. Observe que de las reglas de introducción y eliminación se puede deducir lo siguiente:

$$\dfrac{c : C \qquad f : C \supset A \qquad g : C \supset B}{h : A \wedge B}$$

En efecto,

$$\dfrac{\dfrac{c : C \qquad f : C \supset A}{f\ c : A} \qquad \dfrac{c : C \qquad g : C \supset B}{g\ c : B}}{\langle f\ c, g\ c\rangle : A \wedge B}\ \wedge_I$$

En virtud de lo anterior se tiene una forma alternativa de enunciar la regla de introducción de $\wedge$. De esta manera, podemos representar las reglas de introducción y eliminación de $\wedge$ de forma gráfica mediante el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A & A \wedge B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B \\
& C \arrow[ul, "\supset"] \arrow[u, dashed, "\supset"] \arrow[ur, "\supset"'] &
\end{tikzcd}$$

La lectura del diagrama anterior es muy directa:

"Si C implica A, C implica B y sabemos que C ocurre, entonces ***existe*** *una forma de implicar $A \wedge B$ desde C".*

Juego 7.1. Suponga que no tenemos la regla de introducción $\wedge_I$ y en su lugar sólo contamos con la regla mencionada en la observación 7. ¿Puede deducir $\wedge_I$? ¿Por qué?

7.2.3. Reglas de $\vee$

Recordemos que, de nuestro análisis semántico, para que una expresión de la forma $A \vee B$ sea verdadera, basta que A o B sean verdaderas. Una forma de pensar esta observación es que debe bastar que A o B sean verdaderas para poder formar una expresión de la forma $A \vee B$.

Definición 7.6 (Regla de introducción para el operador $\vee$)**.**

$$\frac{\alpha : A}{\mathrm{inl} : A \vee B}\,\vee_I \qquad\qquad \frac{\beta : B}{\mathrm{inr} : A \vee B}\,\vee_I$$

De nuevo, las etiquetas inl e inr son opcionales, aunque serán estándar en el resto de este texto, además de que son estándar en mucha literatura. Como quizás se haya dado cuenta, la l en inl hace referencia a *left* (izquierda en Inglés), y la r en inr hace referencia a *right* (derecha en Inglés).

Supongamos que de A se sigue C o de B se sigue C. Es lógico entonces esperar que independientemente de que ocurra A o B (énfasis en el "o") se seguirá C, pues cualquiera de las dos ocurrencias permiten concluir C. De esta forma, es sensato esperar que de $A \vee B$ se pueda concluir C, pues $A \vee B$ nos dice que alguno de los dos enunciados que conforman a $A \vee B$ ocurre. Este razonamiento por casos es el que codifica la regla de eliminación de $\vee$.

Definición 7.7 (Regla de eliminación de $\vee$)**.**

Preguntarle a la profesora Lourdes si tiene alguna sugerencia para el nombre de este término.

$$\frac{h : A \vee B \qquad f : A \supset C \qquad g : B \supset C}{ind(f,g)\ h : C}\,\vee_E$$

Observación 8. Observe que lo anterior es equivalente al siguiente árbol de derivación:

$$\frac{h : A \vee B \qquad \begin{matrix}\alpha : A\\ \vdots \\ caso_\alpha : C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\beta : B\\ \vdots \\ caso_\beta : C\end{matrix}}{caso_{\alpha\vee\beta} : C}\,\vee_E$$

En efecto, recuerde que por la regla de introducción de $\supset$ se tiene que

$$\frac{\begin{matrix}\alpha : A\\ \vdots \\ caso_\alpha : C\end{matrix}}{f : A \supset C}\,\supset_I \qquad\qquad \frac{\begin{matrix}\beta : B\\ \vdots \\ caso_\beta : C\end{matrix}}{g : B \supset C}\,\supset_I$$

La regla de eliminación de $\vee$ codfica un proceso de análisis de casos: si tenemos prueba de que de A se sigue C, y de que B implica C, entonces indepenientemente de si ocurre que $h : A \vee B$ ha sido formado a partir de una prueba $\alpha : A$ o una prueba $\beta : B$, sabemos que **en cualquier caso** podemos concluir una prueba de C. Esto último significa que tenemos en cualquier caso una prueba de C a partir de h sin importar si tomamos el camino $f : A \supset C$ o $g : B \supset C$ para generar dicha prueba.

Observación 9. Otra forma de entender a $\wedge$ es mediante el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\mathrm{inl}"] \arrow[dr, "\supset"'] & A \vee B \arrow[d, dashed, "\supset"] & B \arrow[l, "\mathrm{inr}"'] \arrow[dl, "\subset"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

El cual se puede leer de la siguiente forma:

"Si A implica C, y B implica C, entonces ***existe*** *una forma de implicar C desde $A \vee B$."*.

Juego 7.2. ¿Qué diferencias nota entre el diagrama de $\wedge$ estudiado en la observación 7 y el diagrama de $\vee$ estudiado en la observación 9? ¿Qué puede concluir de las diferencias observadas?

7.2.4. Falsedad, negación, y verdad

Así como un sistema axiomático tipo Hilbert nos permite hablar sobre negación y falsedad, también podemos hablar sobre negación y falsedad en deducción natural. En nuestro análisis semántico de la implicación observamos que $\perp \supset A$ siempre es vedadero para cualquier A. Adoptamos este mismo principio, llamado **principio de explosión** (tradicionalmente conocido como *ex falso quodlibet*) en nuestras reglas de inferencia en deducción natural, de modo que

$$\frac{\perp}{x : A}\ \perp$$

¿Cómo podemos introducir una fórmula de la forma $\neg A$? Si de suponer A cierta llegamos a una contradicción ($\perp$), entonces es porque cometimos un error al suponer A cierta, es decir, no ocurre A ($\neg A$). En virtud de lo anterior, suena sensato definir $\neg A$ como $A \supset \perp$. Obsérvese que de $\supset_I$ y $\supset_E$ se tienen las siguientes deducciones:

$$\frac{\begin{array}{c}\alpha : A\\ \vdots\\ \perp\end{array}}{s : A \supset \perp}\ \supset_I \qquad\qquad \frac{f : A \supset \perp \qquad x : A}{\perp}\ \supset_E$$

pero por definición $\neg A$ es $A \supset \perp$, por lo que tenemos de forma "gratuita" las reglas de introducción y eliminación de $\neg$.

$$\frac{\begin{array}{c}\alpha : A\\ \vdots\\ \perp\end{array}}{s : \neg A}\ \neg_I \qquad\qquad \frac{f : \neg A \qquad x : A}{\perp}\ \neg_E$$

Hacer una nota de que esta forma de definir a la negación no implica la forma 'clásica' de tratarla

Observación 10. Observe que $\perp$ no viene acompañado de alguna letra a la izquierda. Esto es porque no tiene sentido que exista evidencia de algo falso en nuestro sistema.

Observación 11. Así como $\supset_I$ descarga supuestos, también $\neg_I$.

Presentar un ejemplo que demuestre esto y dirigir al lector a la literatura que profundiza

Ya que hemos hablado sobre negación y falsedad, consideremos ahora lo que entenderemos por "verdad". De nuestro análisis semántico de la lógica, notamos que

$$1 \vee x$$

siempre es verdadero para cualquier valor de verdad de x. En virtud de que nos gustaría conservar esta idea, introducimos un nuevo objeto que la codifique:

$$\frac{}{\star : \top}\ \top_I$$

Si uno ve fijamente la regla anterior y deja pasar el tiempo suficiente, se dará cuenta que la regla anterior nos dice que, sin importar tus hipótesis siempre puedes concluir que hay evidencia para la verdad.

¿Cuál podría ser entonces su regla de eliminación? Para esto, en virtud de que nuestro sistema está hecho de tal modo que sólo podemos deducir cosas verdaderas, entonces debe ser que de la verdad se deduce algo verdadero. Agregar los simbolos a la izq de

$$\frac{\top \supset A}{A}\ \top_E$$

Otra cosa que podemos rescatar de nuestra regla de introducción para $\top$, es que en virtud de que bajo cualquier contexto se sigue, en particular para cualquier proposición P se tendrá una implicación $\top$.

$$\dfrac{\dfrac{h_1 : P}{\star : \top}\ \top_I}{\lambda h_1\ .\ \star : P \supset \top}\ \supset_I$$

De momento no hablaremos mucho sobre $\top$, pero es importante tenerlo en cuenta pues subsecuentemente jugará un papel más relevante en nuestro estudio. Por lo mientras, veamos que en efecto

$$(\top \vee A) \supset \top$$

Demostración. Supongamos $\top \vee A$ y veamos que podemos obtener $\top$ a partir de este supuesto. Por análisis de casos, si $\top$ entonces como $\top$ se obtiene desde cualquier contexto, tendremos $\top$.

$$\dfrac{\dfrac{h_2 : \top}{\star : \top}\ \top_I}{\lambda h_2\ .\ \star : \top \supset \top}\ \supset_I$$

Ahora, si suponemos A, entonces como de cualquier contexto podemos concluir $\top$ tendremos que al haber supuesto A concluimos $\top$ como queríamos.

$$\dfrac{\dfrac{h_3 : A}{\star : \top}\ \top_I}{\lambda h_3\ .\ \star : A \supset \top}\ \supset_I$$

Así, como en cualquier caso tenemos $\top$, por la regla de eliminación de $\vee$ tendremos que de $\top \vee A$ se sigue $\top$.

$$\dfrac{h_1 : \top \vee A \qquad \dfrac{\dfrac{h_2 : \top}{\star : \top}\,\top_I}{\lambda h_2 \,.\, \star : \top \supset \top}\,\supset_I \qquad \dfrac{\dfrac{h_3 : A}{\star : \top}\,\top_I}{\lambda h_3 \,.\, \star : A \supset \top}\,\supset_I}{\star : \top}$$

De nuevo, aplicando la regla de introducción de la implicación, podemos obtener lo que queríamos demostrar:

$$(\top \vee A) \supset \top$$

Finalmente, el árbol de derivación resultante es el siguiente:

$$\dfrac{\dfrac{h_1 : \top \vee A \qquad \dfrac{\dfrac{h_2 : \top}{\star : \top}\,\top_I}{\lambda h_2 \,.\, \star : \top \supset \top}\,\supset_I \qquad \dfrac{\dfrac{h_3 : A}{\star : \top}\,\top_I}{\lambda h_3 \,.\, \star : A \supset \top}\,\supset_I}{\star : \top}}{\lambda h_1 \,.\, \mathrm{ind}_{\vee}(\lambda h_2 \,.\, \star\,,\ \lambda h_3 \,.\, \star)\ h_1 : (\top \vee A) \supset \top}\,\supset_I$$

$\square$

No se preocupe si no entendió la prueba tras la primera lectura. Nos encargaremos de hacer muchos ejemplos en toda la sección 7.3. Seguramente que, tras leer y trabajar dicha sección, si vuelve a leer esta demostración le entenderá mucho mejor. Borrar esto

Juego 7.3. Considere la regla de eliminación $\vee_E$. De una interpretación para la regla antes mencionada si $C = A$ y $B = \bot$ y si $C = B$ y $A = \bot$.

7.2.5. Reglas de $\forall$ y $\exists$

Cuando estudiamos los cuantificadores en la sección 6.5 hicimos notar que el axioma

QL1. $\forall x A(x) \supset A(x)^{[x \to t]}$ [4]

y la regla de inferencia

QR1. Si $A \supset B(x)$ es derivable, x no forma parte de A como expresión, y z es una variable que no forma parte de $B(x)$ como expresión, entonces $A \supset \forall z B(z)$ es derivable. [4]

codificaban una forma natural e intuitiva de cómo razonamos ante el cuantificador $\forall$. En virtud de esto, resulta entonces natural que las reglas para el cuantificador universal ($\forall$) sean las siguientes:

Definición 7.8 (Regla de introducción de $\forall$)**.**
Daremos por entendido que x es una variable arbitraria. La regla de introducción del cuantificador $\forall$ es:

Pensar si dejar la definición como la tenía originalmente.

$$\frac{a(x) : A(x)}{\lambda x.a(x) : \forall x A(x)}\ \forall_I$$

Recuerde que los símbolos a la izquierda de las fórmulas simplemente son notación, aunque ciertamente la elección de los símbolos no es arbitraria. Se recomienda seguirla pues esta notación será recurrente a lo largo de todo este texto.

Definición 7.9 (Regla de eliminación de $\forall$)**.**

$$\frac{f : \forall x A(x) \qquad \begin{array}{c} f(x)^{[x\to t]} : A(x)^{[x\to t]} \\ \vdots \\ c : C \end{array}}{c : C}\ \forall_E$$

El supuesto en la regla de introducción de $\forall_I$ lo podemos leer como

> *(una propuesta de) Interpretación para $\forall_I$*
>
> *Si $a(x)$ es una prueba de $A(x)$ con x arbitraria, entonces en general a será una prueba de que $A(x)$ es verdad para toda x.*

mientras que una posible interpretación para la regla de eliminación de $\forall$ es

> *(una propuesta de) Interpretación para $\forall_E$*
>
> "si $f : \forall x A(x)$ es una prueba de $A(x)$ para x arbitraria, y si al sustituir cualquier instancia de x por un valor concreto t en nuestra prueba de $A(x)$ y en $A(x)$ misma entonces podemos producir una prueba $c : C$ de C, entonces para cualquier valor arbitrario que tome x podemos deducir una prueba $c : C$ de C desde $f(x) : A(x)$".

Observe que en el caso particular de $C = A(x)^{[x\to t]}$ la regla de eliminación de $\forall$ se reduce a la regla de inferencia $QR1$.

$$\frac{f : \forall x A(x)}{f(x)^{[x\to t]} : A(x)^{[x\to t]}}$$

Para abreviar la notación escribiremos simplemente $f(t)$ para $f(x)^{[x\to t]}$ y análogamente $A(t)$ para $A(x)^{[x\to t]}$ a menos que exista posibilidad de ambigüedades.

La regla de introducción $\forall_I$ tiene la siguiente restricción:

Restricción sobre $\forall_I$

> La sustitución de x por y en $A(x)$ debe ser correcta, esto es, al sustituir x por y en $A(x)$ se tiene que y no es libre en cualquier otro supuesto del que dependa $A(x)^{[x\to y]}$ y tampoco ocurre libre en el consecuente $\forall x A(x)$. [5]

Esta restricción sobre $\forall_I$ garantiza que nuestra idea de "generalización de abstracción para cualquier otro valor arbitrario sobre $A(x)$" se mantenga. Por mencionar un ejemplo, al **sustituir** el símbolo x por t en la expresión

$$f(x) = x + t,$$

si queremos conservar "el sentido" o "la idea" de "sumar el símbolo t al parámetro", deberíamos escribir

$$f(t) = t + s,$$

de modo que x fue sustituido en la expresión original por t y t por s en la expresión original; de esta forma conservando la "intención" o "significado" original de la expresión. Por otro lado, si hacemos la sustitución sin este cuidado, llegaremos a

$$f(t) = 2t.$$

En muchos contextos dentro de matemáticas queremos conservar el sentido de las expresiones al cambiar de símbolos o notaciones; uno muy particular, que es el que nos encontramos estudiando, es el de la lógica matemática.

Recordando que no sólo teníamos el axioma $QL1$ y la regla de inferencia $QR1$ sino que también contamos con el axioma

QL2. $A(x)^{[x\to t]} \supset \exists x A(x)$ [4]

y la regla de inferencia

QR2. Si $B(x) \supset A$ es derivable, x no no forma parte de A como expresión, y z es una variable que no forma parte de $B(x)$, entonces $\exists x B(x) \supset A$ es derivable. [4]

entonces resulta natural que las reglas para el cuantificador existencial ($\exists$) sean las siguientes:

Definición 7.10 (Regla de introducción de $\exists$)**.**

$$\frac{m : A(x)^{[x\to a]}}{\langle a, m\rangle : \exists x A(x)}\ \exists_I$$

donde a es un término cerrado, esto es, que no tenga variables libres.

Definición 7.11 (Regla de eliminación de $\exists$)**.**

$$\frac{e : \exists x A(x) \qquad \begin{array}{c} s^{[x\to t]} : A(x)^{[x\to t]} \\ \vdots \\ c : C \end{array}}{c : C}\ \exists_E$$

Esta última regla es de apariencia complicada, pero de interpretación sencilla:

(una propuesta de) Interpretación para $\exists_E$

Si

$$e : \exists x A(x)$$

es una prueba de que existe alguien que hace a A verdadero tras sustituir x por ese alguien, y observamos que

$$s^{[x \to t]} : A(x)^{[x \to t]}$$

es una prueba de que al sustituir x por t en $A(x)$ uno obtiene una prueba $c : C$, entonces podemos concluir C verdadera con prueba c.

También, ya que estamos en eso, presentamos una propuesta a interpretación para la regla de $\exists_I$:

(una propuesta de) Interpretación para $\exists_I$

Si al sustituir x por a en el predicado $A(x)$ obtenemos una prueba m de su veracidad, entonces tenemos un testigo a y una prueba m de la veracidad de que existe un x tal que $A(x)$.

Observación 12. Es importante señalar que no necesariamente ocurre que en $\exists_I$ la prueba $m : A(x)$ depende de la variable. Considere por ejemplo el predicado

Existe un hombre tal que el cielo es azul

Como último comentario, la consideración que hay que tener con la sustitución es la misma que la impuesta para $\forall$: la sustitución no debe alterar el significado de la fórmula sobre la cual se hace el reemplazo de símbolos.

Esta subsección se visitará más adelante pero con el enfoque de tipos.

7.3. Deducción natural en acción

En la sección anterior no mostramos muchos ejemplos. Esta decisión fue tomada con el propósito de que, una vez introducidas todas las reglas, tengamos muchos "juguetes" en los que probar esta nueva forma de pensar.

7.3.1. Ejemplos con $\wedge$

Ejemplo 7.1. Deduzca $S \wedge Q$ desde $Q \wedge S$

Una estrategia, no sólo común en deducción natural sino que también al momento de demostrar cualquier cosa en otras áreas de las matemáticas, es partir de lo que queremos concluir y ver qué condiciones necesitan satisfacerse para llegar a lo que queremos; de esta forma, vamos construyendo la demostración "de abajo hacia arriba".

Hacer mención de que se pueden consultar ejemplos en la literatura shalala

1. Partimos de lo que queremos concluir, y como desconocemos en un principio de qué se sigue la conclusión, ponemos de forma temporal un signo de interrogación:

$$\frac{?}{\langle s, q\rangle : S \wedge Q}$$

2. Notamos que la única forma que sabemos para concluir algo de la forma $S \wedge Q$ es mediante la regla de introducción de $\wedge$. Por lo tanto, nuestro árbol de derivación tiene que verse hasta cierto punto de la forma:

$$\frac{? \quad ?}{\langle s, q\rangle : S \wedge Q} \wedge_I$$

de nuevo, claramente de la forma de la regla de introducción de $\wedge$ debe ser que los signos de interrogación sean sustituidos por S y Q en ese orden (de izquierda a derecha):

$$\frac{\dfrac{?}{s : S} \qquad \dfrac{?}{q : Q}}{\langle s, q\rangle : S \wedge Q} \wedge_I$$

Es importante no olvidar que S y Q deben ser sustituidos en ese orden, y también que tanto S como Q deben venir de algún lado pues en principio no sabemos si son verdaderos hasta el momento, a diferencia de $Q \wedge S$ que sí es una fórmula que podemos dar por verdadera.

3. Esta última observación nos lleva a la siguiente pregunta: ¿cómo podemos obtener S y Q? Recordando que $Q \wedge S$ es un supuesto dado por el enunciado mismo de lo que nos piden derivar, podemos usar la regla de eliminación de $\wedge$ para obtener S y Q:

$$\frac{\dfrac{\langle q, s\rangle : Q \wedge S}{s : S} \wedge_E \qquad \dfrac{\langle q, s\rangle : Q \wedge S}{q : Q} \wedge_E}{\langle s, q\rangle : S \wedge Q} \wedge_I$$

Este último árbol de derivación es el deseado.

En tanto que este resultado es en particular bastante útil, resumiremos esta misma construcción en una regla de inferencia:

Definición 7.12.

$$\frac{x : B \wedge A}{\wedge\text{−conm } x : A \wedge B} \wedge\text{-conm}$$

Observe que la regla $\wedge$-conm es el caso particular del ejemplo anterior en el que $S := A$ y $Q := B$.

Ese proceso de "dar vuelta" o "torcer" una expresión que pareciera tener cierto orden usualmente se puede encontrar en la literatura como *twist*. Observe que la construcción que tenemos se ve reflejada en un diagrama con flechas de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd}
A & A \wedge B \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, dashed, leftrightarrow] & B \arrow[dll, leftrightarrow] \\
B & B \wedge A \arrow[l] \arrow[r] & A \arrow[ull, leftrightarrow]
\end{tikzcd}$$

Donde las flechas con ambas cabezas representan $\iff$.

Juego 7.4. Argumente por qué podemos asegurar que $A \wedge B \iff B \wedge A$ en el diagrama anterior.

Ejemplo 7.2. Muestre que de suponer $(A \wedge B) \wedge C$ uno puede inferir $A \wedge (C \wedge B)$.

Así como en el ejemplo anterior partimos de lo que queríamos concluir para construir el árbol de derivación, podemos comenzar por las hipótesis dadas e ir construyendo ahora de "arriba hacia abajo" el árbol deseado.

Sabemos por hipótesis que $(A \wedge B) \wedge C$ es verdadero y nuestra meta es construir un árbol de derivación que concluya en $A \wedge (C \wedge B)$.

¿Cómo podemos proceder para lograr nuestro objetivo? Un primer paso es empezar por reflexionar qué clase de información nos brinda nuestra hipótesis.

Notemos que de nuestra hipótesis podemos obtener $(A \wedge B)$ y C mediante aplicaciones de la regla de eliminación $\wedge_E$.

$$\dfrac{h : (A \wedge B) \wedge C}{\pi_1\ h : A \wedge B}\wedge_E \qquad\qquad \dfrac{h : (A \wedge B) \wedge C}{\pi_2\ h : C}\wedge_E$$

Más aún, de $(A \wedge B)$ podemos obtener A y B mediante aplicaciones de la regla de eliminación $\wedge_E$.

$$\dfrac{\dfrac{h : (A \wedge B) \wedge C}{\pi_1\ h : A \wedge B}\wedge_E}{\pi_1(\pi_1\ h) : A}\wedge_E \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{h : (A \wedge B) \wedge C}{\pi_1\ h : A \wedge B}\wedge_E}{\pi_2(\pi_1\ h) : B}\wedge_E$$

Recordando que queremos un árbol de derivación que concluya en $A \wedge (C \wedge B)$, observamos que esa fórmula está compuesta por A y $(C \wedge B)$, y por el análisis que hemos hecho hasta el momento sobre nuestra hipótesis, ¡deberíamos tener ya todos los ingredientes para formar el árbol deseado!

En efecto, obsérvese que podemos obtener $(C \wedge B)$ a partir de C y B mediante la regla de introducción $\wedge_I$.

$$\dfrac{\pi_2\ h : C \qquad \pi_2(\pi_1\ h) : B}{\langle \pi_2\ h, \pi_2(\pi_1\ h)\rangle : C \wedge B}\wedge_I$$

y podemos formar $A \wedge (C \wedge B)$ utilizando la regla de introducción $\wedge_I$.

$$\frac{\pi_1(\pi_1\ h) : A \qquad \langle \pi_2\ h, \pi_2(\pi_1\ h)\rangle : C \wedge B}{\langle\ \pi_1(\pi_1\ h),\ \langle \pi_2\ h, \pi_2(\pi_1\ h)\rangle\ \rangle : A \wedge (C \wedge B)}\wedge_I$$

De esta forma, juntando todas las piezas en un solo árbol obtenemos la siguiente derivación.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{h : (A \wedge B) \wedge C}{\pi_1\ h : A \wedge B}\wedge_E}{\pi_1\ (\pi_1\ h) : A}\wedge_E \qquad \dfrac{\dfrac{h : (A \wedge B) \wedge C}{\pi_2\ h : C}\wedge_E \qquad \dfrac{\dfrac{h : (A \wedge B) \wedge C}{\pi_1\ h : A \wedge B}\wedge_E}{\pi_2\ (\pi_1\ h) : B}\wedge_E}{\langle \pi_2\ h, \pi_2(\pi_1\ h)\rangle : C \wedge B}\wedge_I}{\langle\ \pi_1(\pi_1\ h),\ \langle \pi_2\ h, \pi_2(\pi_1\ h)\rangle\ \rangle : A \wedge (C \wedge B)}\wedge_I$$

Juego 7.5. Repita el ejemplo anterior, pero ahora empleando la estrategia de "abajo hacia arriba".

Juego 7.6. Muestre que de suponer A uno puede deducir $A \wedge A$.

Juego 7.7. Suponga que se tiene un testigo $p : A \wedge (B \wedge C)$. Deduzca una testigo de B.

Juego 7.8. Verifique que $A \wedge B \supset A$ y $A \wedge B \supset B$ son tautologías.

Juego 7.9. Muestre que de $A \wedge (B \wedge C)$ uno puede inferir $(A \wedge B) \wedge C$. Si usted lo desea, puede utilizar la regla $\wedge$-conm y el ejemplo 7.2.

En virtud de la utilidad de esta derivación, resumiremos el árbol en la siguiente regla.

Definición 7.13.

$$\frac{h : A \wedge (B \wedge C)}{\wedge\text{-assoc-izq}\ h : (A \wedge B) \wedge C}\wedge\text{-asoc-izq}$$

Juego 7.10. Muestre que de $(A \wedge B) \wedge C$ uno puede inferir $A \wedge (B \wedge C)$. Si usted lo desea, puede utilizar la regla $\wedge$-conm y el ejemplo 7.2.

En virtud de la utilidad de esta derivación, resumiremos el árbol en la siguiente regla.

Definición 7.14.

$$\frac{h : (A \wedge B) \wedge C}{\wedge\text{-asoc-der}\ h : A \wedge (B \wedge C)}\wedge\text{-asoc-der}$$

Observación 13. En general, cuando tenemos una operación $\star$ (en este caso $\star \equiv \wedge$) tal que dados 3 elementos que puede operar se tiene que

$$a \star (b \star c) \equiv (a \star b) \star c$$

con $\equiv$ una noción de equivalencia (por ejemplo el igual $=$ en álgebra) decimos que la operación $\star$ es asociativa. Así, en particular por los juegos 7.10 y 7.9 tenemos que $\wedge$ es una operación asociativa. Como veremos en su momento, la suma de números naturales y el producto son también ejemplos de operaciones asociativas.

Juego 7.11. Suponga que se tiene una prueba

$$p : (A \wedge (B \wedge C)) \wedge (P \wedge Q)$$

y la derivación

$$\pi_1\ (\pi_2\ (\pi_1\ p)) : ?$$

Determine ?, la proposición a la cual corresponde $\pi_1\ \pi_2\ \pi_1\ p$, y reconstruya la derivación que sintetiza la expresión.

Juego 7.12. Suponga que se tiene una prueba

$$p_1 : A \wedge (B \wedge (C \wedge D))$$

y una prueba

$$p_2 : (A \wedge B) \wedge (C \wedge D).$$

Deduzca una prueba de D desde p_1 y p_2. ¿Se parecen las pruebas? ¿Por qué crees que se parecen? ¿Puedes dar una implicación

$$f : A \wedge (B \wedge (C \wedge D)) \supset (A \wedge B) \wedge (C \wedge D)$$

y otra implicación

$$g : (A \wedge B) \wedge (C \wedge D) \supset A \wedge (B \wedge (C \wedge D))?$$

Juego 7.13. Sean

$$\alpha : A \qquad \beta : B \qquad \gamma : C \qquad \delta : D$$

y considere las pruebas

$$\langle \alpha, \langle \beta, \langle \gamma, \delta \rangle \rangle \rangle : A \wedge (B \wedge (C \wedge D))$$

$$\langle \langle \alpha, \beta \rangle, \langle \gamma, \delta \rangle \rangle : (A \wedge B) \wedge (C \wedge D)$$

Con las respuestas dadas en el juego anterior acomplete las siguientes derivaciones.

$$\frac{f : A \wedge (B \wedge (C \wedge D)) \supset (A \wedge B) \wedge (C \wedge D) \qquad \langle \alpha, \langle \beta, \langle \gamma, \delta \rangle \rangle \rangle : A \wedge (B \wedge (C \wedge D))}{f\ \langle \alpha, \langle \beta, \langle \gamma, \delta \rangle \rangle \rangle : ?}$$

$$\frac{g : (A \wedge B) \wedge (C \wedge D) \supset A \wedge (B \wedge (C \wedge D)) \qquad f\ \langle \alpha, \langle \beta, \langle \gamma, \delta \rangle \rangle \rangle : ?}{g\ (f\ \langle \alpha, \langle \beta, \langle \gamma, \delta \rangle \rangle \rangle) : ??}$$

$$\frac{g : (A \wedge B) \wedge (C \wedge D) \supset A \wedge (B \wedge (C \wedge D)) \qquad \langle \langle \alpha, \beta \rangle, \langle \gamma, \delta \rangle \rangle : (A \wedge B) \wedge (C \wedge D)}{g\ \langle \langle \alpha, \beta \rangle, \langle \gamma, \delta \rangle \rangle : ?}$$

$$\frac{f : A \wedge (B \wedge (C \wedge D)) \supset (A \wedge B) \wedge (C \wedge D) \qquad g\ \langle \langle \alpha, \beta \rangle, \langle \gamma, \delta \rangle \rangle : ?}{f\ (g\ \langle \langle \alpha, \beta \rangle, \langle \gamma, \delta \rangle \rangle) : ??}$$

¿Qué puede concluir de las derivaciones anteriores? ¿Qué conclusiones puede obtener con respecto a $A \wedge (B \wedge (C \wedge D))$ y $(A \wedge B) \wedge (C \wedge D)$?

7.3.2. Ejemplos con $\supset$

Ejemplo 7.3. Deduzca la fórmula $(A \wedge B) \supset (B \wedge A)$.

Nuestro objetivo es llegar a una fórmula de la forma $P \supset Q$, donde $P := A \wedge B$ y $Q := B \wedge A$, y la única forma de hacer esto es mediante la regla de introducción $\supset_I$.

$$\dfrac{\begin{array}{c} h_1 : A \\ \vdots \\ h_k : B \end{array}}{f : A \supset B}\ \supset_I$$

Por lo tanto, podemos partir de suponer $A \wedge B$ y mostrar que mediante una serie de pasos llegamos a $B \wedge A$. Para lograr esto último, sabemos que de $A \wedge B$ podemos obtener $B \wedge A$; más aún, ¡ya derivamos antes este resultado! pues esto último es un caso particular de la proposición 7.12. De esta forma, tenemos el siguiente árbol de derivación.

$$\dfrac{\dfrac{h : A \wedge B}{\wedge\text{-conm } h : B \wedge A}\ \wedge\text{-conm}}{(\lambda x\ .\ \wedge\text{-conm}(x)) : (A \wedge B) \supset (B \wedge A)}\ \supset_I$$

Observe que la suposición $h : A \wedge B$ fue descargada al momento de aplicar la regla de introducción.

incluir este comentario?

Juego 7.14. Deduzca la fórmula $(A \wedge B) \supset (A \vee B)$, pero sin utilizar $\wedge$-conm y verifique que el árbol resultante es el mismo que resulta de haber sustituido la derivación completa que resume $\wedge$-conm con $S := A$ y $Q := B$.

Ejemplo 7.4. Demuestre que $(A \supset B) \supset [(A \wedge C) \supset (B \wedge C)]$.

A primer vistazo podemos apreciar que la fórmula a concluir es relativamente complicada. **Una estrategia general a seguir para este tipo de situaciones es dividir el problema en partes más sencillas**.

En virtud de la forma de la fórmula a deducir, sabemos que debemos utilizar la regla de introducción de $\supset$. La regla de introducción antes mencionada nos pide suponer que $A \supset B$ y deducir $(A \wedge C) \supset (B \wedge C)$.

$$\dfrac{\begin{array}{c} h_1 : A \supset B \\ \vdots \\ ? : (A \wedge C) \supset (B \wedge C) \end{array}}{\lambda\ h_1\ .\ ? : (A \supset B) \supset [(A \wedge C) \supset (B \wedge C)]}\ \supset_I$$

Notemos que, para deducir $(A \wedge C) \supset (B \wedge C)$, la única forma que tenemos de hacer esto es de nuevo mediante la regla de introducción de $\supset$.

$$\dfrac{\begin{array}{c} h_2 : A \wedge C \\ \vdots \\ ? : B \wedge C \end{array}}{\lambda\ h_2\ .\ ? : (A \wedge C) \supset (B \wedge C)}\ \supset_I$$

Notemos que de $h_2 : A \wedge B$ podemos obtener un testigo de A por $\wedge_E$, y por $\supset_E$ podemos utilizar el testigo antes adquirido para obtener B. Además, de h_2 podemos obtener evidencia de C, y así contamos con todos los ingredientes para formar un testigo de $B \wedge C$ como queríamos. Lo anterior luce en un árbol de derivación como a continuación:

$$\dfrac{\dfrac{h_1 : A \supset B \qquad \dfrac{h_2 : A \wedge C}{\pi_1\ h_2 : A}\ \wedge_E}{h_1(\pi_1\ h_2) : B}\ \supset_E \qquad \dfrac{h_2 : A \wedge C}{\pi_2\ h_2 : C}\ \wedge_E}{\langle h_1(\pi_1\ h_2)\ ,\ \pi_2\ h_2 \rangle : B \wedge C}\ \wedge_I$$

Así, regresando a nuestro problema original más complicado, utilizando la solución al subproblema más sencillo que acabamos de resolver obtenemos el siguiente árbol de derivación.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{h_1 : A \supset B \qquad h_2 : A \wedge C}{\langle h_1(\pi_1\ h_2)\ ,\ \pi_2\ h_2 \rangle : B \wedge C}}{\lambda h_2\ .\ \langle h_1(\pi_1\ h_2)\ ,\ \pi_2\ h_2 \rangle : (A \wedge C) \supset (B \wedge C)}\ \supset_I}{\lambda h_1\ .\ (\lambda h_2\ .\ \langle h_1(\pi_1\ h_2)\ ,\ \pi_2\ h_2 \rangle) : (A \supset B) \supset ((A \wedge C) \supset (B \wedge C))}\ \supset_I$$

Esto concluye la prueba.

Observe como en el testigo de $(A \supset B) \supset ((A \wedge C) \supset (B \wedge C))$,

$$\lambda h_1\ .\ (\lambda h_2\ .\ \langle h_1(\pi_1\ h_2)\ ,\ \pi_2\ h_2 \rangle) : (A \supset B) \supset ((A \wedge C) \supset (B \wedge C))$$

estamos descargando las hipótesis al utilizar la regla de introducción de $\supset$, y esto se ve reflejado en los terminos que acompañan a las *lambda*.

Ejemplo 7.5. Demuestre que $[(A \supset B) \wedge (B \supset C)] \supset (A \supset C)$.

Notemos que la estructura general de la proposición que hay que probar es

$$(P \wedge Q) \supset S$$

por lo tanto, para nuestra prueba hay que comenzar suponiendo $P \wedge Q$ y probar que a partir de ese supuesto se sigue S. Recuerde que esto es en virtud de la regla de introducción de $\supset$.

Supongamos entonces $(A \supset B) \wedge (B \supset C)$. Necesitamos demostrar que $(A \supset C)$ para poder concluir lo que queremos. De nuestra hipótesis podemos obtener de forma individual $A \supset C$ y $B \supset C$.

$$\frac{h_1 : (A \supset B) \wedge (B \supset C)}{\pi_1\ h_1 : A \supset B} \qquad\qquad \frac{h_1 : (A \supset B) \wedge (B \supset C)}{\pi_2\ h_1 : B \supset C}$$

Nuestra meta actual es obtener algún testigo de $A \supset C$, pero ¿cómo podemos obtener prueba de A para concluir lo que queremos?

Como tenemos que probar una implicación, la regla de introducción de $\supset$ nos pide mostrar que de suponer el antecedente podemos concluir el consecuente. Por lo tanto, suponemos el antecedente y buscamos construir con ese supuesto el consecuente. Como ya tenemos $h_2 : A$ un testigo de A, podemos entonces concluir B con la información que obtuvimos de nuestro primer supuesto.

$$\dfrac{\dfrac{h_1 : (A \supset B) \wedge (B \supset C)}{\pi_1\ h_1 : A \supset B} \qquad h_2 : A}{(\pi_1\ h_1)\ h_2 : B} \supset_E$$

Ya con un testigo de B, podemos obtener un testigo de C a partir de la información obtenida de nuestro primer supuesto.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{h_1 : (A \supset B) \wedge (B \supset C)}{\pi_1\ h_1 : A \supset B} \qquad h_2 : A}{(\pi_1\ h_1)\ h_2 : B} \supset_E \qquad \dfrac{h_1 : (A \supset B) \wedge (B \supset C)}{\pi_2\ h_1 : B \supset C}}{(\pi_2\ h_1)\ ((\pi_1\ h_1)\ h_2) : C} \supset_E$$

A este punto de la demostración podemos preguntarnos si ya podemos concluir lo que queremos, y la respuesta es que sí. Notemos que $h_2 : A$ sigue siendo un supuesto abierto, de modo que debemos descargarlo. Al descargarlo, obtendremos evidencia de $A \supset C$ y tendremos $h_1 : (A \supset B) \wedge (B \supset C)$ pendiente por descargar. Así, descargando todos nuestros supuestos obtenemos un testigo de

$$((A \supset B) \wedge (B \supset C)) \supset (A \supset C)$$

lo que queríamos. Así, nuestra derivación de $(A \supset B) \wedge (B \supset C) \supset (A \supset C)$ es la siguiente:

Check the proof in Agda

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{h_1 : (A \supset B) \wedge (B \supset C)}{\pi_1\ h_1 : A \supset B} \qquad h_2 : A}{(\pi_1 h_1)\ h_2 : B} \supset_E \qquad \dfrac{h_1 : (A \supset B) \wedge (B \supset C)}{\pi_2\ h_1 : B \supset C}}{(\pi_2\ h_1)\ ((\pi_1\ h_1)\ h_2) : C} \supset_E}{\lambda h_2\ .\ (\pi_2\ h_1)\ ((\pi_1\ h_1)\ h_2) : A \supset C} \supset_I}{\lambda h_1\ .\ (\lambda h_2\ .\ (\pi_2\ h_1)\ ((\pi_1\ h_1)\ h_2)) : ((A \supset B) \wedge (B \supset C)) \supset (A \supset C)} \supset_E$$

esto concluye la prueba.

Ejemplo 7.6. Demuestre que si $((A \supset C) \wedge (B \supset C)) \supset ((A \wedge B) \supset C)$.

Demostración.

Notemos que la estructura general de la proposición a demostrar es la siguiente:

$$(P \wedge Q) \supset (R \supset S)$$

Así, en virtud de que la única forma que tenemos para formar una derivación de algo de la forma $X \supset Y$ es mediante $\supset_I$, suponemos $(P \wedge Q)$ para derivar $(R \supset S)$; en este caso, esto significa en particular para nuestro problema suponer $(A \supset C) \wedge (B \supset C)$ y derivar $(A \wedge B) \supset C$.

$$h_1 : (A \supset C) \wedge (B \supset C)$$

Bajo un razonamiento totalmente análogo, para derivar entonces $(A \wedge B) \supset C$ debemos suponer $(A \wedge B)$ y buscar derivar C.

$$h_2 : (A \wedge B)$$

De nuestro primer supuesto, podemos obtener $(A \supset C)$ y $(B \supset C)$ por $\wedge_E$.

$$\frac{h_1 : (A \supset C) \wedge (B \supset C)}{\pi_1\ h_1 : (A \supset C) \qquad \pi_2\ h_2 : (B \supset C)}$$

Además, notemos que de $(A \wedge B)$ podemos concluir A y B.

$$\frac{h_2 : (A \wedge B)}{\pi_1\ h_2 : A \qquad \pi_2\ h_2 : B}$$

En virtud de nuestros primeros supuestos, mediante $\supset_E$ podemos concluir por lo anterior C.

$$\frac{\dfrac{h_1 : (A \supset C) \wedge (B \supset C)}{\pi_1\ h_1 : (A \supset C)} \qquad \dfrac{h_2 : (A \wedge B)}{\pi_1\ h_2 : A}}{(\pi_1\ h_1)\ (\pi_1\ h_2) : C}$$

Así, de suponer $(A \wedge B)$ hemos logrado derivar C. Por lo tanto, podemos concluir $(A \wedge B) \supset B$ por la regla $\supset_I$ y, además por la misma regla podemos concluir $((A \supset C) \wedge (B \supset C)) \supset ((A \wedge B) \supset C)$ como queríamos. $\square$

Ejemplo 7.7. Demuestre que $(A \supset B) \supset ((A \supset C) \supset (A \supset (B \wedge C)))$.

Notemos que la estructura general de la proposición a probar es la siguiente:

$$P \supset (Q \supset R)$$

Procedemos entonces de forma análoga a como lo hicimos en el ejemplo anterior. Supongamos que $(A \supset B)$ y veamos que $((A \supset C) \supset (A \supset (B \wedge C)))$. Para esto, supongamos entonces que $(A \supset C)$ y veamos que $(A \supset (B \wedge C))$, pero para esto supongamos también A. Como A, entonces por $\supset_E$ tenemos B

y C. Por lo tanto, de $\wedge_I$ tenemos $B \wedge C$. Dado que supusimos A, entonces $A\,\mathrm{sup}(B \wedge C)$ y, como para lo anterior supusimos $(A \supset C)$, entonces tenemos $(A \supset C) \supset (A \supset (B \wedge C))$, y finalmente en virtud de que al principio supusimos $(A \supset B)$ para concluir lo anterior, tenemos que

$$(A \supset B) \supset ((A \supset C) \supset (A \supset (B \wedge C)))$$

como queríamos demostrar. La derivación formal de lo anterior es entonces

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\supset_E\dfrac{h_1 : A \supset B \qquad h_3 : A}{h_1\ h_3 : B} \qquad \dfrac{h_2 : A \supset C \qquad h_3 : A}{h_2\ h_3 : C}\supset_E}{\langle h_1\ h_3\ ,\ h_2\ h_3\rangle : B \wedge C}}{\lambda\ h_3\ .\ \langle h_1\ h_3\ ,\ h_2\ h_3\rangle : A \supset (B \wedge C)}\supset_I}{\lambda h_2\ .\ \lambda\ h_3\ .\ \langle h_1\ h_3\ ,\ h_2\ h_3\rangle : (A \supset C) \supset (A \supset (B \wedge C))}\supset_I}{\lambda h_1\ .\ (\lambda h_2\ .\ (\lambda\ h_3\ .\ \langle h_1\ h_3\ ,\ h_2\ h_3\rangle)) : (A \supset B) \supset ((A \supset C) \supset (A \supset (B \wedge C)))}\supset_I$$

Esto concluye la prueba.

Observación 14. Observe que la proposición anterior codifica lo que se mencionaba en la observación 7 al presentar las reglas de introducción y eliminación de $\wedge$ de forma diagramática:

$$\begin{tikzcd}
B & B \wedge C \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & C \\
& A \arrow[ul, "\supset"] \arrow[u, dashed, "\supset"] \arrow[ur, "\supset"'] &
\end{tikzcd}$$

Ahora le toca a usted divertirse con los siguientes juegos.

Juego 7.15. Demuestre que $A \supset (A \wedge A)$.

Juego 7.16. Demuestre que $(A \wedge (A \supset B)) \supset B$

Juego 7.17. Demuestre que $[A \supset (B \supset C)] \supset [(A \supset B) \supset (A \supset C)]$.

Juego 7.18. Demuestre que $((A \wedge B) \supset C) \supset (A \supset (B \supset C))$.

Juego 7.19. Demuestre que $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \wedge B) \supset C)$.

Juego 7.20. ¿Qué puede concluir de los ejercicios 7.18 y 7.19?

Juego 7.21. Demuestre que $((A \supset B) \wedge (A \supset C)) \supset (A \supset (B \wedge C))$.
Nos referiremos a este juego posteriormente. Se recomienda por lo menos intentarlo.

Sugerencia: Utilizar los juegos 7.18 y 7.19 y el ejemplo 7.7.

7.3.3. Ejemplos con $\vee$

Ejemplo 7.8. Demuestre

$$((A \supset C) \wedge (B \supset C)) \supset ((A \vee B) \supset C)$$

Demostración.
Supongamos que $((A \supset C) \wedge (B \supset C))$ para ver que $((A \vee B) \supset C)$. Por $\wedge_E$ tenemos $(A \supset C)$ y $(B \supset C)$. En virtud de que queremos probar una implicación, supongamos que $(A \vee B)$.

Por la regla de eliminación de $\vee$, en virtud de que $A \supset C$ y $B \supset C$ tenemos entonces que C. Como lo anterior vino de suponer $A \vee B$, entonces $(A \vee B) \supset C$; luego, a su vez lo anterior es consecuencia de haber supuesto $(A \supset C) \wedge (B \supset C)$, por lo que entonces

$$((A \supset C) \wedge (B \supset C)) \supset ((A \vee B) \supset C)$$

como queríamos demostrar. La prueba anterior se ve reflejada en el siguiente árbol de derivación:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{h_1 : (A \supset C) \wedge (B \supset C)}{\pi_1\ h_1 : (A \supset C)} \qquad \dfrac{h_1 : (A \supset C) \wedge (B \supset C)}{\pi_2\ h_1 : (B \supset C)} \qquad h_2 : (A \vee B)}{\mathrm{ind}_{\vee}(\pi_1\ h_1\ ,\ \pi_2\ h_1)\ h_2 : C}\ \vee_E}{\lambda h_2\ .\ \mathrm{ind}_{\vee}(\pi_1\ h_1\ ,\ \pi_2\ h_1)\ h_2 : (A \vee B) \supset C}}{\lambda h_1\ .\ (\lambda h_2\ .\ \mathrm{ind}_{\vee}(\pi_1\ h_1\ ,\ \pi_2\ h_1)\ h_2) : ((A \supset C) \wedge (B \supset C)) \supset ((A \vee B) \supset C)}$$

Esto concluye la prueba. $\square$

Ejemplo 7.9. Demuestre

$$([A \vee B] \wedge [A \supset C] \wedge [B \supset C]) \supset C$$

Demostración.
Notemos que si hicimos el ejercicio 7.18 podemos simplemente invocar el resultado, aplicar adecuadamente $\wedge - conm$ y obtener una prueba. Sin embargo, haremos la demostración partiendo de solamente las reglas y las derivaciones que hemos demostrado juntos.

Supongamos que $([A \vee B] \wedge [A \supset C] \wedge [B \supset C])$. Entonces $A \vee B, A \supset C$ y $B \supset C$. Directamente por la regla de eliminación de $\vee$ tenemos entonces que C. Así, por la regla de introducción de $\supset$ podemos concluir que

$$([A \vee B] \wedge [A \supset C] \wedge [B \supset C]) \supset C$$

como se quería. La siguiente derivación testifica la correctud de nuestra demostración:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{h_1 : ([A \vee B] \wedge [A \supset C] \wedge [B \supset C])}{\pi_1\ h_1 : A \vee B \qquad \pi_2\ h_1 : A \supset C \qquad \pi_3\ h_1 : B \supset C}}{\mathrm{ind}_{\vee}(\pi_2\ h_1, \pi_3\ h_1)\ (\pi_1\ h_1) : C}\ \vee_E}{\lambda h_1\ .\ \mathrm{ind}_{\vee}(\pi_2\ h_1, \pi_3\ h_1)\ (\pi_1\ h_1) : ([A \vee B] \wedge [A \supset C] \wedge [B \supset C]) \supset C}
$$

□

Ejemplo 7.10. Demuestre

$$(P \vee (Q \vee R)) \supset ((P \vee Q) \vee R)$$

Demostración.
Supongamos que $P \vee (Q \vee R)$ para concluir $(P \vee Q) \vee R$. Procedemos por análisis de casos:

- Caso P:

  Si P, entonces por $\vee_I$ tenemos $(P \vee Q)$, y de nuevo por $\vee_I$ tenemos $(P \vee Q) \vee R$.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{h_2 : P}{\mathrm{inl}\ \ h_2 : P \vee Q}\ \vee_I}{\mathrm{inl}\ (\mathrm{inl}\ \ h_2) : (P \vee Q) \vee R}\ \vee_I}{\lambda h_2\ .\ \mathrm{inl}\ (\mathrm{inl}\ \ h_2) : P \supset ((P \vee Q) \vee R)}}{f \equiv \lambda h_2\ .\ \mathrm{inl}\ (\mathrm{inl}\ \ h_2) : P \supset ((P \vee Q) \vee R)}
$$

  Nota: En la última linea del árbol de derivación se muestra

$$f \equiv \lambda h_2\ .\ \mathrm{inl}\ (\mathrm{inl}\ \ h_2) : P \supset ((P \vee Q) \vee R)$$

  Esto significa que estamos definiendo f tal que es *sintácticamente equivalente* a la expresión a la derecha de $\equiv$. Estas definiciones sólo son una conveniencia didáctica agregada que no forman parte de la teoría ni el lenguaje formal. Por lo tanto, cada que veamos el símbolo f dentro de este contexto, sabremos que lo podemos intercambiar sin consecuencia alguna por $\lambda h_2\ .\ \mathrm{inl}\ (\mathrm{inl}\ \ h_2)$. Sin embargo nos atendremos a una regla: sólo podremos dar nombre o definir algo una vez que lo hayamos construído o demostrado.

- Caso $Q \vee R$:

  Si $Q \vee R$, entonces tenemos dos subcasos:

  - Subcaso Q:
    Si Q, entonces por $\vee_I$ tenemos $(P \vee Q)$, y de nuevo por $\vee_I$ tenemos $(P \vee Q) \vee R$.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{h_4 : Q}{\text{inr } h_4 : P \vee Q}\;\vee_I}{\text{inl (inr } h_4) : (P \vee Q) \vee R}\;\vee_I}{g \equiv \lambda h_4 \;.\; \text{inl (inr } h_4) : Q \supset (P \vee Q) \vee R)}$$

- Subcaso R:
  Si R, entonces por $\vee_I$ tenemos $(P \vee Q) \vee R$.

$$\cfrac{\cfrac{h_5 : R}{\text{inr } h_5 : (P \vee Q) \vee R}\;\vee_I}{s \equiv \lambda h_5 \;.\; \text{inr } h_5 : R \supset ((P \vee Q) \vee R)}$$

Así, como en cualquier caso tenemos $(P \vee Q) \vee R$ entonces podemos concluir por $\vee_E$ que $(P \vee Q) \vee R$. Además, como lo anterior fue consecuencia de haber supuesto $(P \vee Q) \vee R$, entonces por $\supset_I$ tenemos que $(P \vee (Q \vee R)) \supset ((P \vee Q) \vee R)$ como se quería.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{h_3 : Q \vee R \qquad g : Q \supset ((P \vee Q) \vee R)) \qquad s : R \supset ((P \vee Q) \vee R)}{\text{ind}_\vee(g, s)\ h_3 : (P \vee Q) \vee R}\;\vee_E}{\lambda h_3 \;.\; \text{ind}_\vee(g, s)\ h_3 : (Q \vee R) \supset ((P \vee Q) \vee R)}}{m \equiv \lambda h_3 \;.\; \text{ind}_\vee(g, s)\ h_3 : (Q \vee R) \supset ((P \vee Q) \vee R)}$$

$$\cfrac{\cfrac{h_1 : P \vee (Q \vee R) \qquad f : P \supset ((P \vee Q) \vee R) \qquad m : (Q \vee R) \supset ((P \vee Q) \vee R)}{\text{ind}_\vee(f, m)\ h_1 : ((P \vee Q) \vee R)}\;\vee_E}{\lambda h_1 \;.\; \text{ind}_\vee(f, m)\ h_1 : (P \vee (Q \vee R)) \supset ((P \vee Q) \vee R)}$$

$\square$

Ejemplo 7.11. Demuestre que

$$(A \vee (B \wedge Q)) \supset ((A \vee B) \wedge (A \vee Q))$$

Demostración.

Supongamos $(A \vee (B \wedge Q))$ para demostrar $((A \vee B) \wedge (A \vee Q))$. Procedemos por análisis de casos:

- Caso A

  Si A, entonces por $\vee_I$ tenemos $(A \vee B)$ y también $(A \vee Q)$ y así en particular podemos concluir $(A \vee B) \wedge (A \vee Q)$. Como supusimos A, entonces por $\supset_I$ tenemos que $A \supset ((A \vee B) \wedge (A \vee Q))$.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{h_2 : A}{\text{inl}\, h_2 : A \vee B} \qquad \cfrac{h_2 : A}{\text{inr}\, h_2 : A \vee Q}}{\langle \text{inl}\, h_2 \;,\; \text{inr}\, h_2 \rangle : (A \vee B) \wedge (A \vee Q)}}{\lambda h_2 \;.\; \langle \text{inl}\, h_2 \;,\; \text{inr}\, h_2 \rangle : A \supset ((A \vee B) \wedge (A \vee Q))}}{f \equiv \lambda h_2 \;.\; \langle \text{inl}\, h_2 \;,\; \text{inr}\, h_2 \rangle : A \supset ((A \vee B) \wedge (A \vee Q))}$$

- Caso $B \wedge Q$

  Si $B \wedge Q$, entonces B y Q por $\wedge_E$. Luego, dado B obtenemos $(A \vee B)$ y por Q tenemos $(A \vee Q)$; de esta forma mediante $\wedge_I$ tenemos $(A \vee B) \wedge (A \vee Q)$. Así, como partimos de $B \wedge Q$ y demostramos $(A \vee B) \wedge (A \vee Q)$ entonces por $\supset_I$ podemos concluir $(B \wedge Q) \supset ((A \vee B) \wedge (A \vee Q))$.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{h_3 : B \wedge Q}{\pi_1\ h_3 : B}}{\operatorname{inr} \pi_1\ h_3 : A \vee B} \qquad \dfrac{\dfrac{h_3 : B \wedge Q}{\pi_2\ h_3 : Q}}{\operatorname{inr} \pi_1\ h_3 : A \vee Q}}{\langle \operatorname{inr} \pi_1\ p\ ,\ \operatorname{inr} \pi_1\ h_3 \rangle : (A \vee B) \wedge (A \vee Q)}}{\lambda\ h_3\ .\ \langle \operatorname{inr} \pi_1\ p\ ,\ \operatorname{inr} \pi_1\ h_3 \rangle : (B \wedge Q) \supset ((A \vee B) \wedge (A \vee Q))}}{g \equiv \lambda\ h_3\ .\ \langle \operatorname{inr} \pi_1\ p\ ,\ \operatorname{inr} \pi_1\ h_3 \rangle : (B \wedge Q) \supset ((A \vee B) \wedge (A \vee Q))}
$$

De esta forma, como en cualquier caso tenemos que $((A \vee B) \wedge (A \vee Q))$ entonces por $\vee_E$ podemos concluir $((A \vee B) \wedge (A \vee Q))$.

$$
\dfrac{h_1 : (A \vee (B \wedge Q)) \qquad f : A \supset ((A \vee B) \wedge (A \vee Q)) \qquad g : (B \wedge Q) \supset ((A \vee B) \wedge (A \vee Q))}{\operatorname{ind}_\vee(f, h)\ h_1 : (A \vee B) \wedge (A \vee Q)}
$$

Finalmente, como lo anterior es consecuencia de haber supuesto desde un principio que $A \vee (B \wedge Q)$, entonces por $\supset_I$ podemos concluir $(A \vee (B \wedge Q)) \supset ((A \vee B) \wedge (A \vee Q))$, lo que queríamos demostrar.

$$
\dfrac{\dfrac{h_1 : (A \vee (B \wedge Q)) \qquad f : A \supset ((A \vee B) \wedge (A \vee Q)) \qquad g : (B \wedge Q) \supset ((A \vee B) \wedge (A \vee Q))}{\operatorname{ind}_\vee(f, h)\ h_1 : (A \vee B) \wedge (A \vee Q)}}{\lambda h_1\ .\ \operatorname{ind}_\vee(f, g)\ h_1 : (A \vee (B \wedge Q)) \supset ((A \vee B) \wedge (A \vee Q))}
$$

□

Ahora le toca divertirse a usted.

Juego 7.22. Demuestre que

$$P \supset (P \wedge P) \text{ y que } (P \wedge P) \supset P.$$

Juego 7.23. Demuestre que

$$((P \vee Q) \vee R) \supset (P \vee (Q \vee R)).$$

Juego 7.24. Demuestre que

$$(P \vee (P \wedge Q)) \supset P \text{ y } P \supset (P \vee (P \wedge Q)).$$

Juego 7.25. Demuestre que

$$((A \vee B) \supset C) \supset ((A \supset C) \wedge (B \supset C))$$

Observación 15. Observe que la prueba anterior y el primer ejemplo de esta sección testifican que el diagrama de la observación 9 está bien hecho, en el sentido de que en efecto muestra una propiedad de $\vee$.

Juego 7.26. Demuestre que

$$((A \vee B) \wedge (A \vee Q)) \supset (A \vee (B \wedge Q))$$

7.3.4. Ejemplos con $\neg$

Trabajar con la negación es un poco truculento. La recomendación del autor para aprovechar esta sección; donde me di la libertad de hacer muchos ejemplos y explicarlos de forma que la cantidad de detalles va disminuyendo gradualmente; es que intente hacer las demostraciones por cuenta propia, valiéndose de lo que se tocó en secciones anteriores. Si encuentra mucha dificultad, intente empezar con la derivación en árbol y luego escrita en prosa, o comience haciendo un bosquejo de la demostración en prosa y con ella dibuje el árbol de derivación para corraborar que su argumento está bien. Si nota que aún se atora, no desespere pues es normal cuando uno apenas comienza a trabajar con un objeto matemático nuevo. La recomendación en ese caso es que lea las pruebas hasta que sienta que puede avanzar en la demostración por cuenta propia.

Ejemplo 7.12. Demuestre que

$$\neg(A \wedge \neg A)$$

A esta proposición se le suele llamar *ley de no contradicción.*

Demostración.
Por la regla de introducción de $\neg$, para probar $\neg(A \wedge \neg A)$ debemos suponer $(A \wedge \neg A)$ y deducir $\perp$. Así, supongamos $(A \wedge \neg A)$.

Si $(A \wedge \neg A)$, entonces por $\wedge_E$ podemos concluir A y $\neg A$.

$$\frac{h_1 : A \wedge \neg A}{\pi_1\ h_1 : A \qquad \pi_2\ h_1 : \neg A}$$

Como $\neg A$, por $\supset_E$ tenemos que en virtud de A y $A \supset \perp A$ podemos deducir $\perp$.

$$\dfrac{\dfrac{h_1 : A \wedge \neg A}{\pi_1\ h_1 : A \qquad \pi_2\ h_1 : \neg A}}{\perp}\neg_E$$

Como concluimos $\perp$ a partir de suponer $(A \wedge \neg A)$, entonces por $\supset_I$ tenemos $(A \wedge \neg A) \supset \perp$ como queríamos.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{h_1 : A \wedge \neg A}{\pi_1\ h_1 : A} \qquad \dfrac{h_1 : A \wedge \neg A}{\pi_2\ h_1 : \neg A}}{\perp}\neg_E}{\neg h_1 : \neg(A \wedge \neg A)}$$

$\square$

Ejemplo 7.13. Demuestre que

$$(A \supset B) \supset \neg(A \wedge \neg B)$$

Esta proposición es muy útil, pues permite expresar la implicación en términos de la conjunción y negación. Además, el converso también es cierto y le tocará a usted demostrarlo en el juego 7.27, de modo que en verdad $\neg(A \wedge \neg B)$ es equivalente a $A \supset B$.

Demostración.

Como debemos demostrar una implicación, primero suponemos el antecedente para derivar el consecuente y, así poder concluir con $\supset_I$ la implicación.

Supongamos $(A \supset B)$.

$$h_1 : A \supset B$$

Como queremos demostrar $\neg(A \wedge \neg B)$, por la regla de introducción de $\neg$ debemos entonces suponer $A \wedge \neg B$ y derivar $\bot$. Así, supongamos entonces $A \wedge \neg B$.

$$h_1 : A \supset B \qquad\qquad h_2 : A \wedge \neg B$$

Por $\wedge_E$ obtenemos A y $\neg B$. Observese que si tuvieramos B entonces con $\neg B$ podriamos concluir de $\bot$ por $\neg_E$.

$$h_1 : A \supset B \qquad\qquad \dfrac{h_2 : A \wedge \neg B}{\pi_1\ h_2 : A} \qquad \dfrac{h_2 : A \wedge \neg B}{\pi_2\ h_2 : \neg B}$$

Recordando que tenemos como hipótesis $A \supset B$, y además contamos con A, entonces por $\supset_E$ podemos derivar B.

$$\dfrac{h_1 : A \supset B \qquad \dfrac{h_2 : A \wedge \neg B}{\pi_1\ h_2 : A}}{h_1\ (\pi_1\ h_2) : B} \qquad \dfrac{h_2 : A \wedge \neg B}{\pi_2\ h_2 : \neg B}$$

Así como B y $\neg B$, por $\neg_E$ obtenemos entonces $\bot$.

$$\dfrac{\dfrac{h_1 : A \supset B \qquad \dfrac{h_2 : A \wedge \neg B}{\pi_1\ h_2 : A}}{h_1\ (\pi_1\ h_2) : B} \qquad \dfrac{h_2 : A \wedge \neg B}{\pi_2\ h_2 : \neg B}}{\bot}\ \neg_E$$

Como concluimos $\bot$ de suponer $A \wedge \neg B$, entonces por $\neg_I$ tenemos $\neg(A \wedge \neg B)$ y, más aún como lo anterior lo concluimos de suponer $A \supset B$, entonces podemos concluir por $\supset_I$

$$(A \supset B) \supset \neg(A \wedge \neg B)$$

lo que queríamos demostrar.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{h_1 : A \supset B \qquad \dfrac{h_2 : A \wedge \neg B}{\pi_1\ h_2 : A}}{h_1\ (\pi_1\ h_2) : B} \qquad \dfrac{h_2 : A \wedge \neg B}{\pi_2\ h_2 : \neg B}}{\bot}\,\neg_E}{\lambda h_2\ .\ (\pi_2\ h_2)\ (h_1\ (\pi_1\ h_2)) : \neg(A \wedge \neg B)}\,\neg_I}{\lambda h_1\ .\ \lambda h_2\ .\ (\pi_2\ h_2)\ (h_1\ (\pi_1\ h_2)) : (A \supset B) \supset \neg(A \wedge \neg B)}$$

$\square$

Ejemplo 7.14. Demuestre que

$$\neg(A \vee B) \supset (\neg A \wedge \neg B)$$

Esta proposición es muy útil, porque nos permite expresar la negación de una disjunción como una conjunción. Le daremos un uso en el ejemplo 7.18.

Demostración.

Supongamos $\neg(A \vee B)$.

$$h_1 : \neg(A \vee B)$$

Para demostrar $\neg A \wedge \neg B$ debemos ver que $\neg A$ y $\neg B$ se sigue de nuestra hipótesis, y para demostar $\neg A$ y $\neg B$ debemos suponer A y deducir $\bot$, y análogamente para B.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} h_2 : A \\ \vdots \\ \bot \end{array}}{? : \neg A} \qquad \dfrac{\begin{array}{c} h_3 : B \\ \vdots \\ \bot \end{array}}{? : \neg B}}{? : \neg A \wedge \neg B}$$

Supongamos entonces A. Si A, entonces $A \vee B$ pero por hipótesis $\neg(A \vee B)$. Por $\neg_E$ entonces podemos concluir $\bot$. Por lo tanto, $\neg A$. Bajo un razonamiento totalmente análogo obtenemos $\neg B$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{h_1 : \neg(A \vee B) \qquad \dfrac{h_2 : A}{\mathrm{inl}\, h_2 : A \vee B}}{\bot}\,\neg_E}{h_1\ (\mathrm{inl}\, h_2) : \neg A}}{f \equiv h_1\ (\mathrm{inl}\, h_2) : \neg A}$$

Así, por $\neg_I$ tenemos $\neg A \wedge \neg B$. Como concluimos lo anterior de suponer $\neg(A \vee B)$ entonces por $\supset_I$ tenemos

$$\neg(A \vee B) \supset (\neg A \wedge \neg B)$$

como queríamos demostrar.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{h_1 : \neg(A \vee B) \qquad \dfrac{h_2 : A}{\mathrm{inl}\, h_2 : A \vee B}}{\bot}\,\neg_E}{h_1\ (\mathrm{inl}\, h_2) : \neg A}}{f \equiv h_1\ (\mathrm{inl}\, h_2) : \neg A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{h_1 : \neg(A \vee B) \qquad \dfrac{h_3 : B}{\mathrm{inr}\, h_3 : A \vee B}}{\bot}\,\neg_E}{h_1\ (\mathrm{inr}\, h_3) : \neg B}}{g \equiv h_1\ (\mathrm{inr}\, h_3) : \neg B}}{\langle f, g\rangle : \neg A \wedge \neg B}}{\lambda h_1\ .\ \langle f, g\rangle : \neg(A \vee B) \supset (\neg A \wedge \neg B)}
$$

□

Ejemplo 7.15. Demuestre que

$$(\neg A \wedge \neg B) \supset \neg(A \vee B)$$

Observe que esta proposición es el converso de la anterior. En general, las proposiciones o resultados que nos permiten expresar algunas cosas de otra forma, y que además nos permiten regresar a la forma original sin requisito alguno más que una forma de hacerlo o evidencia de que se puede hacer, son resultados sumamente útiles e importantes, y hablaremos de ellos en secciones siguientes.

Demostración.

Supongamos que $\neg A \wedge \neg B$ para demostrar $\neg(A \vee B)$; para esto último basta suponer $(A \vee B)$ y llegar a $\bot$. Supongamos que $A \vee B$.

$$
\dfrac{\begin{array}{c} h_1 : \neg A \wedge \neg B \qquad h_2 : A \vee B \\ \vdots \\ \bot \end{array}}{? : \neg(A \vee B)}
$$

Notemos que por $\neg A \wedge \neg B$ tenemos $\neg A$ y $\neg B$.

$$
\dfrac{h_1 : \neg A \wedge \neg B}{\pi_1\ h_1 : \neg A} \qquad\qquad \dfrac{h_1 : \neg A \wedge \neg B}{\pi_2\ h_1 : \neg B}
$$

Procedemos por análisis de casos sobre $A \vee B$. Si A, como tenemos $\neg A$ entonces concluimos $\bot$; y análogamente para B.

$$
\dfrac{\dfrac{h_1 : \neg A \wedge \neg B}{\pi_1\ h_1 : \neg A} \qquad h_3 : A}{\bot} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{h_1 : \neg A \wedge \neg B}{\pi_2\ h_1 : \neg B} \qquad h_4 : B}{\bot}
$$

Así, en cualquier caso de $(A \vee B)$ se tiene una forma de deducir $\bot$, por lo que entonces $\neg(A \vee B)$.

$$\dfrac{\dfrac{\neg_E\ \dfrac{\dfrac{h_1 : \neg A \wedge \neg B}{\pi_1\ h_1 : \neg A} \quad h_3 : A}{\bot} \quad \dfrac{\dfrac{h_1 : \neg A \wedge \neg B}{\pi_2\ h_1 : \neg B} \quad h_4 : B}{\bot}\ \neg_E \quad h_2 : A \vee B}{\bot}}{\lambda h_2\ .\ \lambda h_3\ .\ \lambda h_4\ .\ \mathrm{ind}((\pi_1\ h_1)\ h_3\ ,\ (\pi_2\ h_1)\ h_4)\ h_2 : \neg(A \vee B)}$$

Como esto último lo concluimos de haber supuesto desde un inicio $\neg A \wedge \neg B$, entonces $(\neg A \wedge \neg B) \supset \neg(A \vee B)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg_E\ \dfrac{\dfrac{h_1 : \neg A \wedge \neg B}{\pi_1\ h_1 : \neg A} \quad h_3 : A}{\bot} \quad \dfrac{\dfrac{h_1 : \neg A \wedge \neg B}{\pi_2\ h_1 : \neg B} \quad h_4 : B}{\bot}\ \neg_E \quad h_2 : A \vee B}{\bot}}{\lambda h_2\ .\ \lambda h_3\ .\ \lambda h_4\ .\ \mathrm{ind}((\pi_1\ h_1)\ h_3\ ,\ (\pi_2\ h_1)\ h_4)\ h_2 : \neg(A \vee B)}\ \neg_I}{\lambda h_1\ .\ \lambda h_2\ .\ \lambda h_3\ .\ \lambda h_4\ .\ \mathrm{ind}((\pi_1\ h_1)\ h_3\ ,\ (\pi_2\ h_1)\ h_4)\ h_2 : (\neg A \wedge \neg B) \supset \neg(A \vee B)}$$

□

Juego 7.27. Demuestre que

$$\neg(A \wedge \neg B) \supset (A \supset B)$$

Ejemplo 7.16. Demuestre que

$$\neg(A \supset B) \supset A$$

Demostración.

Como debemos demostrar una implicación, primero suponemos el antecedente para derivar el consecuente y, así poder concluir con $\supset_I$ la implicación.

Supongamos $\neg(A \supset B)$. Notemos que es una negación □

Ejemplo 7.17. Demuestre que

$$\neg(A \vee B) \supset (\neg A \wedge \neg B)$$

Demostración.

Supongamos que $\neg(A \vee B)$ y veamos que $(\neg A \wedge \neg B)$. Para ello, en virtud de la regla de introducción de $\wedge$, debemos derivar entonces $\neg A$ y $\neg B$ y, para esto último, por $\neg_I$ debemos suponer A y derivar $\bot$ y suponer B y derivar $\bot$.

$$h_1 : \neg(A \vee B)$$

Si A, entonces $A \vee B$. Como $\neg(A \vee B)$, entonces por $\neg_E$ tenemos $\bot$ y por $\neg_I$ tenemos $\neg A$. Análogamente, si B, entonces $A \vee B$ y como $\neg(A \vee B)$, se tiene $\bot$ y así por $\neg_I$ concluimos $\neg B$.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{h_2 : A}{\mathrm{inl}\, h_2 : A \lor B} \qquad h_1 : \neg(A \lor B)}{\bot}\,\neg_E}{h_1\ (\mathrm{inl}\, h_2) : \neg A}\,\neg_I}{\lambda h_1\ .\ h_1\ (\mathrm{inl}\, h_2) : \neg(A \lor B) \supset \neg A}$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{h_3 : B}{\mathrm{inr}\, h_3 : A \lor B} \qquad h_1 : \neg(A \lor B)}{\bot}\,\neg_E}{h_1\ (\mathrm{inr}\, h_3) : \neg B}\,\neg_I}{\lambda h_1\ .\ h_1\ (\mathrm{inr}\, h_3) : \neg(A \lor B) \supset \neg B}$$

Luego, notese que tenemos

$$\neg(A \lor B) \supset \neg A \qquad \neg(A \lor B) \supset \neg B$$

y por lo tanto

$$(\neg(A \lor B) \supset \neg A) \land (\neg(A \lor B) \supset \neg B)$$

Entonces por el juego 7.21 podemos concluir que

$$\neg(A \lor B) \supset (\neg A \land \neg B)$$

como queríamos.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{h_2 : A}{\mathrm{inl}\, h_2 : A \lor B} \qquad h_1 : \neg(A \lor B)}{\bot}\,\neg_E}{h_1\ (\mathrm{inl}\, h_2) : \neg A}\,\neg_I}{\lambda h_1\ .\ h_1\ (\mathrm{inl}\, h_2) : \neg(A \lor B) \supset \neg A} \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{h_3 : B}{\mathrm{inr}\, h_3 : A \lor B} \qquad h_1 : \neg(A \lor B)}{\bot}\,\neg_E}{h_1\ (\mathrm{inr}\, h_3) : \neg B}\,\neg_I}{\lambda h_1\ .\ h_1\ (\mathrm{inr}\, h_3) : \neg(A \lor B) \supset \neg B}}{\langle \lambda h_1\ .\ h_1\ (\mathrm{inl}\, h_2)\ ,\ \lambda h_1\ .\ h_1\ (\mathrm{inr}\, h_3)\rangle : (\neg(A \lor B) \supset \neg A) \land (\neg(A \lor B) \supset \neg B)}}{\lambda h_1\ .\ \langle h_1\ (\mathrm{inl}\, h_2)\ ,\ h_1\ (\mathrm{inr}\, h_3)\rangle : \neg(A \lor B) \supset (\neg A \land \neg B)}\ (\text{Juego } 7.21)$$

□

Ejemplo 7.18. Demuestre que

$$\neg\neg(A \lor \neg A)$$

Observe que la proposición nos dice que la negación de la negación del principio del tercer excluido es válido en lógica intuicionista, sin embargo esto no significa que $A \lor \neg A$ es verdad en general.

Demostración.

Como queremos probar la negación de una proposición, por la regla $\neg_I$ debemos suponer $\neg(A \lor \neg A)$ y llegar a $\bot$ para demostrar lo que queremos. Entonces supongamos $\neg(A \lor \neg A)$.

$$h_1 : \neg(A \vee \neg A)$$

Notemos que para poder eliminar la negación de la proposición, debemos proveer de A o de $\neg A$, para lo cual no tenemos forma. Nos gustaría mucho tener alguna forma de reexpresar lo que tenemos en una manera más útil para nuestros fines. Haciendo memoria que en el ejemplo 7.14 demostramos una proposición que nos permite reexpresar la negación de una disyunción, expresamos $\neg(A \vee \neg A)$ como $\neg A \wedge \neg\neg A$.

$$\frac{h_1 : \neg(A \vee \neg A)}{h_1' : \neg A \wedge \neg\neg A} \text{ Ejemplo 7.14}$$

Notemos además que la proposición obtenida es de la forma

$$P \wedge \neg P$$

con $P \equiv \neg A$, y por el principio de no contradicción (ejemplo 7.12) tenemos automáticamente que

$$\neg(\neg A \wedge \neg\neg A)$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{h_1 : \neg(A \vee \neg A)}{h_1' : (\neg A) \wedge \neg(\neg A)} \text{ Ejemplo 7.14}}{\perp} \text{ Ejemplo 7.12}}{\neg h_1 : \neg\neg(A \vee \neg A)} \neg_I$$

Esto concluye la demostración. $\square$

A continuación podrá encontrar algunos juegos que le ayudarán a entender mejor cómo trabajar con la negación.

Juego 7.28. Demuestre que

$$((\neg A) \vee B) \supset (A \supset B)$$

Juego 7.29. Demuestre que

$$\neg A \supset (B \vee \neg A)$$

Juego 7.30. Demuestre que

$$\neg((A \supset \neg A) \wedge (\neg A \supset A))$$

Juego 7.31. Demuestre que

$$\neg(\neg A \wedge \neg\neg A)$$

A esta proposición se le conoce como la *ley del tercer excluido para la negación.*

Juego 7.32.

$$\neg(A \vee B) \supset \neg A$$

7.3.5. Ejemplos con $\bot$ y $\top$

Después de haber trabajado con la negación, trabajar con $\bot$ es más familiar. Se deja como un reto al lector o lectora verificar que las pruebas presentadas a continuación están bien mediante el árbol de derivación, o en su caso, escribir una prueba en prosa dada un árbol de derivación.

Ejemplo 7.19. Demuestre que

$$\bot \supset A$$

Demostración.

Se sigue de inmediato por el principio de explosión. $\square$

Ejemplo 7.20. Demuestre que

$$\neg A \supset (A \supset \bot)$$

Demostración.
Supongamos $\neg A$ para demostrar $A \supset \bot$. Como queremos demostrar $A \supset \bot$, basta suponer A y concluir $\bot$. Por $\neg_E$, de $\neg A$ y A obtenemos $\bot$. Así, por la regla de introducción de $\supset$ tenemos $A \supset \bot$. Como lo anterior fue consecuencia de haber supuseto $\neg A$, entonces $\neg A \supset (A \supset \bot)$. $\square$

Ejemplo 7.21. Demuestre que

$$(A \supset \bot) \supset \neg A$$

Demostración.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{h_1 : A \supset \bot \qquad h_2 : A}{\bot}}{\lambda h_2 \,.\, h_1 h_2 : \neg A}}{\lambda h_1 \,.\, \lambda h_2 \,.\, h_1 h_2 : (A \supset \bot) \supset \neg A}$$

$\square$

Ejemplo 7.22. Demuestre que

$$\neg\bot \supset \top$$

Demostración. Como $\top$ se sigue de cualquier contexto en una prueba, entonces en particular lo podemos usar en el contexto donde $\neg\bot$ es una hipótesis. Por lo tanto, por $\supset_I$ tenemos $\neg\bot \supset \top$ como queríamos.

$$\dfrac{\dfrac{h_1 : \neg\bot}{\star : \top}\,\top_I}{\lambda h_1 \,.\, \star : \neg\bot \supset \top}$$

$\square$

Ejemplo 7.23. Demuestre que

$$\neg\top \supset \bot$$

Juego 7.33. Demuestre que

$$\neg\neg\bot \supset \bot$$

Juego 7.34. Demuestre que

$$\neg\neg\top \supset \top$$

Juego 7.35. Si usted intenta demostrar

$$\neg\neg A \supset A$$

encontrará que no es posible. Observe que esta proposición es un caso más general del ejemplo 7.34. ¿Por qué cree que no es posible demostrar esta proposición a diferencia del ejemplo antes mencionado?

Juego 7.36. Si usted intenta demostrar

$$\neg A \vee A$$

encontrará que no es posible. ¿Por qué cree que no es posible? Si suponemos válida la proposición $\neg\neg A \supset A$, y disponemos de todas las proposiciones que hemos probado en esta sección, ¿puede demostrar la proposición?

Ejemplo 7.24. Demuestre que

$$\neg(A \supset \bot) \supset A$$

Juego 7.37. Demuestre que

$$\bot \supset \neg(A \vee \neg A)$$

7.3.6. Ejemplos con $\forall$

Ejemplo 7.25. Demuestre que $\forall x(A \wedge B(x)) \supset (A \wedge \forall x B(x))$.

Demostración.
Supongamos que $\forall x(A \wedge B(x))$ para demostrar $(A \wedge \forall x B(x))$.

$$h_1 : \forall x(A \wedge B(x))$$

Para concluir $(A \wedge \forall x B(x))$ primero debemos demostrar A y luego $\forall x B(x)$.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} h_1 : \forall x(A \wedge B(x)) \\ \vdots \\ ? : A \qquad ? : \forall x B(x) \end{array}}{? : A \wedge \forall x B(x)}}{\lambda h_1 \ . \ ? : \forall x(A \wedge B(x)) \supset A \wedge \forall x B(x)}$$

Para obtener A, notemos que por $\forall_E$ podemos dar t tal que $A \wedge B(t)$ y, de $\wedge_E$ concluir el A que buscamos.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{h_1 : \forall x(A \wedge B(x))}{h_1(t) : A \wedge B(t)}\ \forall_E}{\pi_1 h_1(t) : A} \qquad \begin{array}{c} h_1 : \forall x(A \wedge B(x)) \\ \vdots \\ ? : \forall x B(x) \end{array}}{? : A \wedge \forall x B(x)}}{\lambda h_1 \ . \ ? : \forall x(A \wedge B(x)) \supset A \wedge \forall x B(x)}$$

Por otro lado, dado s arbitrario tal que $A \wedge B(s)$ podemos obtener $B(s)$. Como s fue arbitrario, entonces $\forall x B(x)$ como queríamos.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{h_1 : \forall x(A \wedge B(x))}{h_1(t) : A \wedge B(t)}\ \forall_E}{\pi_1 h_1(t) : A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{h_1 : \forall x(A \wedge B(x))}{h_1(s) : A \wedge B(s)}\ \forall_E}{\pi_1 h_1(s) : B(s)}}{\lambda x \ . \ \pi_1 h_1(x) : \forall x B(x)}\ \forall_I}{\langle \pi_1 h_1(t) \ , \ (\lambda x \ . \ \pi_1 h_1(x)) \rangle : A \wedge \forall x B(x)}}{\lambda h_1 \ . \ \langle \pi_1 h_1(t) \ , \ (\lambda x \ . \ \pi_1 h_1(x)) \rangle : \forall x(A \wedge B(x)) \supset A \wedge \forall x B(x)}$$

$\square$

Ejemplo 7.26. Demuestre que

$$(\forall x P(x) \supset Q(x)) \supset ((\forall x P(x)) \supset (\forall x Q(x)))$$

Demostración.
Supongamos que $\forall x P(x) \supset Q(x)$ para ver que $(\forall x P(x)) \supset (\forall x Q(x))$. Para esto, basta suponer $\forall x P(x)$ y ver que $\forall x Q(x)$.

$$h_1 : \forall x P(x) \supset Q(x) \qquad h_2 : \forall x P(x)$$

Sea entonces s arbitrario pero fijo. Como por hipótesis tenemos que

$$h_1 : \forall x P(x) \supset Q(x),$$

entonces en particular para s tendremos que $P(s) \supset Q(s)$ por $\forall_E$.

$$\dfrac{h_1 : \forall x P(x) \supset Q(x)}{h_1(s) : P(x) \supset Q(s)}\ \forall_E$$

Además, como también tenemos por hipótesis que $\forall x P(x)$, entonces en particular para s tendremos $P(s)$ por $\forall_E$. Así, por $\supset_E$ podemos concluir $Q(s)$. Como s fue arbitraria pero fija, entonces por $\forall_I$ tenemos que $\forall x Q(x)$.

$$\cfrac{\cfrac{h_1 : \forall x P(x) \supset Q(x)}{h_1(s) : P(s) \supset Q(s)}\,\forall_E \qquad \cfrac{h_2 : \forall x P(x)}{h_2(s) : P(s)}\,\forall_E}{\cfrac{h_1(s)\ h_2(s) : Q(s)}{\lambda x\ .\ h_1(x)\ h_2(x) : \forall x Q(x)}\,\forall_I}$$

Por lo tanto, $(\forall x P(x)) \supset (\forall x Q(x))$ y como lo anterior fue deducido a partir de haber supuesto $\forall x P(x) \supset Q(x)$, entonces

$$(\forall x P(x) \supset Q(x)) \supset ((\forall x P(x)) \supset (\forall x Q(x)))$$

como queríamos demostrar.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{h_1 : \forall x P(x) \supset Q(x)}{h_1(s) : P(s) \supset Q(s)}\,\forall_E \qquad \cfrac{h_2 : \forall x P(x)}{h_2(s) : P(s)}\,\forall_E}{\cfrac{h_1(s)\ h_2(s) : Q(s)}{\lambda x\ .\ h_1(x)\ h_2(x) : \forall x Q(x)}\,\forall_I}}{\lambda h_2\ .\ \lambda x\ .\ h_1(x)\ h_2(x) : \forall x P(x) \supset \forall x Q(x)}}{\lambda h_1\ .\ \lambda h_2\ .\ \lambda x\ .\ h_1(x)\ h_2(x) : (\forall x P(x) \supset Q(x)) \supset ((\forall x P(x)) \supset (\forall x Q(x)))}$$

$\square$

Ejemplo 7.27. Demuestre que

$$(\forall x A(x) \wedge B(x)) \supset ((\forall x A(x)) \wedge (\forall x B(x)))$$

Ejemplo 7.28. Demuestre que

$$(\forall x B(x) \vee C(x)) \supset ((\forall x B(x)) \vee (\forall x C(x)))$$

Ejemplo 7.29. Demuestre que

$$(\forall x B(x) \vee C) \supset ((\forall x.B(x)) \vee C)$$

Ejemplo 7.30. Demuestre que

$$((\forall x.B(x)) \vee (\forall x.C(x))) \supset (\forall x B(x) \vee C(x))$$

Ver cual de las 3 anteriores no se pueden probar

Juego 7.38. Demuestre que

$$((\forall x A(x)) \wedge (\forall x B(x))) \supset (\forall x A(x) \wedge B(x))$$

7.3.7. Ejemplos con $\exists$

Ejemplo 7.31. Demuestre que

$$\exists x \exists y P(x,y) \supset \exists y \exists x P(y,x)$$

7.4. Deducción natural para la lógica clásica

Hasta el momento nuestro sistema de deducción natural codifica la lógica intuicionista, sin embargo al intentar demostrar fórmulas como

$$\neg(x \wedge y) \supset (\neg x \vee \neg y)$$

$$\neg\neg x \supset x$$

$$x \vee \neg x$$

uno encontrará obstáculos. La veracidad de estas fórmulas dependen de axiomas adicionales sobre la lógica intuicionista; por lo tanto al agregar estos axiomas adicionales la lógica resultante deja de ser intuicionista y se convierte en lógica clásica.

El axioma adicional que consideramos en esta sección es uno atribuido a Prawitz [4] y se puede considerar como una generalización a la regla de $\perp$ que dimos en secciones anteriores.

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg A]\\ \vdots \\ \perp\end{array}}{A}\perp_K$$

Esta regla adicional codifica un principio de prueba por contradicción: Si de suponer que la premisa A es falsa se llega al absurdo $\perp$, entonces es porque cometimos un error al suponer A como falsa; en virtud de que **(en lógica clásica)** un enunciado es exclusivamente verdadero o falso, entonces debe ser que A es verdadero.

En el razonamiento anterior, es importante hacer énfasis en que su potencial validez depende fuertemente de suponer que un enunciado es o no es; como habíamos comentado antes, esta suposición es lo que distingue a la lógica intuicionista de la lógica clásica.

8. Parte 2: Funciones, recursión e inducción

TODO Para prox martes tener al menos la mitad de la primera subseccion

TODO y tener las subsecciones mejor definidas

8.1. La esencia de las funciones

8.2. Funciones y cómputo

8.3. Un primer acercamiento a los Tipos

8.4. Funciones y Tipos

9. Parte 3: Introducción a la teoría de tipos dependientes de Per-Martin Löf

- Parte I: Un poco de lógica
    1. Introducción
        a) Lógica como herramienta de razonamiento.
    2. Lenguajes
        a) Lenguaje y metalenguaje.
        b) Un lenguaje común para hablar de colecciones.
    3. Lógica proposicional.
        a) Lógica proposicional.
        b) El lenguaje de la lógica proposicional.
        c) Una introducción a la semántica de la lógica proposicional.
        d) Cálculo de proposiciones.
        e) Derivaciones como árboles.
    4. Lógica de predicados.
        a) Motivación.
        b) El lenguaje de la lógica de predicados.
        c) Variables libres y variables ligadas.
        d) Sintaxis de la lógica de predicados.
        e) Verdad, falsedad y derivaciones en la lógica de predicados.
    5. Deducción natural.
        a) Introducción.
        b) Reglas y deducciones.
        c) Deducción natural en acción.
        d) Deducción natural para la lógica clásica.
- Parte II Funciones, recursión e inducción.
    1. La esencia de las funciones.
    2. Funciones y cómputo.
    3. Recursión.
    4. Un primer acercamiento a los tipos.

5. Funciones y tipos.

1. Introducción a la teoría de tipos de Per Martin-Löf
   a) Teoría de tipos dependiente.
   b) El tipo de las funciones dependientes.
   c) Algunos tipos inductivos
   d) Tipos identidad
   e) Universos
   f) El tipo de los números naturales
      1) Construcción
      2) Operaciones
      3) La decidibilidad e igualdad decidible
      4) Principio del buen orden.
      5) La infinitud de los números primos.
   g) El tipo de los números enteros
      1) Resultados básicos de divisibilidad.
      2) Congruencias.
      3) Grupos cíclicos.
2. Introducción a las matemáticas univalentes
   a) Equivalencias.
   b) Tipos contráctiles y funciones contráctiles.
   c) El teorema fundamental de los tipos identidad.
   d) Proposiciones, conjuntos y niveles superiores de truncamiento.
   e) Extensionalidad de funciones.
   f) Truncamiento proposicional.
   g) Factorizaciones de imágen.
   h) Tipos finitos.
   i) El axioma de univalencia.
   j) Cocientes de conjuntos.

This catalog of 23 entries was generated by calibre on Wednesday, 21. December 2022 14:21

Referencias

[1] David Meza Alcántara. Notas de lógica matemática i (version 3), Dec 100.

[2] JULIO ERNESTO SOLIS DAUN : YOLANDA TORRES FALCON. Logica matematica, Jul 2005.

[3] Nils Kürbis. An argument for minimal logic. 73(1):31–63.

[4] Paolo Mancosu and Richard Zach. *An Introduction to Proof Theory: Normalization, Cut-Elimination, and Consistency Proofs*, volume 1. Oxford University Press, Oct 2021.

[5] Jan Von Plato Sara Negri. Structural proof theory, May 2010. Cambridge University Press.

[6] Ernst Snapper. *The Three Crises in Mathematics: Logicism, Intuitionism and Formalism*, volume 52 of *Mathematics Magazine*. Mathematical Association of America, Dec 1979.