

**Отчет по финальному экзамену
«Robust Sliding Mode Control for Robot Manipulators»**

1. Теоретический анализ

Запишем динамику манипулятора с учетом неопределенностей:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_c(\dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau}$$

Применим следующий контроллер внешнего контура:

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\mathbf{v} + \hat{\mathbf{c}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{q})$$

Подставляя в динамику, получим:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{v}$$

где $\mathbf{f} = \mathbf{M}^{-1}(\tilde{\mathbf{c}} + \tilde{\mathbf{g}} + \mathbf{D} + \mathbf{F}_c)$ и $\mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1}\hat{\mathbf{M}}$

Уравнение n-мерной поверхности скольжения:

$$\mathbf{s} = \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda\tilde{\mathbf{q}}$$

Определим приблизительный контроллер как slicing feedforward с дополнительной компенсацией \mathbf{v}_s :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_n + \mathbf{v}_s = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_d + \Lambda\tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{v}_s$$

Используем условие скольжения:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} ||\mathbf{s}||^2 = \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} < \eta \cdot ||\mathbf{s}||$$

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{v}_n - \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}_n - \mathbf{f} - \mathbf{B}(\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_s) = \mathbf{w} - \mathbf{B}\mathbf{v}_s$$

где $\mathbf{w} = (\mathbf{I} - \mathbf{B})\mathbf{v}_n - \mathbf{f}$

Подставляя условие скольжения:

$$\mathbf{s}^T \mathbf{w} - \mathbf{s}^T \mathbf{B}\mathbf{v}_s \leq ||\mathbf{s}|| \cdot ||\mathbf{w}|| - \mathbf{s}^T \mathbf{B}\mathbf{v}_s \leq -\eta \cdot ||\mathbf{s}||$$

Можем выбрать \mathbf{v} как:

$$\mathbf{v}_s = \frac{\mathbf{k}}{\sigma_{\max}} \hat{\mathbf{M}}^{-1} \frac{\mathbf{s}}{||\mathbf{s}||} = \rho \frac{\mathbf{s}}{||\mathbf{s}||}$$

где σ_{\max} – максимальное сингулярное значение матрицы \mathbf{M}^{-1} , что удовлетворяет условию:

$$\begin{aligned} ||\mathbf{s}|| \cdot ||\mathbf{w}|| - \mathbf{s}^T \mathbf{B}\mathbf{v}_s &\leq ||\mathbf{s}|| \cdot ||\mathbf{w}|| + \frac{\mathbf{k}}{\lambda_{\max}^2 ||\mathbf{s}||} \mathbf{s}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{s} \leq \\ &\leq ||\mathbf{s}|| \cdot ||\mathbf{w}|| + \mathbf{k} \cdot ||\mathbf{s}|| \leq -\eta \cdot ||\mathbf{s}|| \end{aligned}$$

Коэффициент k будет удовлетворять условию скольжения в диапазоне значений:

$$k > \|w\| + \eta$$

В результате робастный контроллер будет описываться уравнениями:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \hat{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\mathbf{v} + \hat{\mathbf{c}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{v} = \ddot{\mathbf{q}}_d + \Lambda \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{v}_s \\ \mathbf{v}_s = \begin{cases} \rho \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|}, & \|\mathbf{s}\| > \epsilon \\ \rho \frac{\mathbf{s}}{\epsilon}, & \|\mathbf{s}\| \leq \epsilon \end{cases} \\ \mathbf{s} = \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda \tilde{\mathbf{q}} \end{cases}$$

2. Реализация и анализ производительности

Добавим в параметры робота доп. массу, трение и демпфирование:

```
# Set joint damping (example values, adjust as needed)
damping = np.array([0.5, 0.5, 0.5, 0.1, 0.1, 0.1]) # Nm/rad/s
sim.set_joint_damping(damping)

# Set joint friction (example values, adjust as needed)
friction = np.array([1.5, 0.5, 0.5, 0.1, 0.1, 0.1]) # Nm
sim.set_joint_friction(friction)

# Add the end-effector mass and inertia
sim.modify_body_properties(ee_name, mass=3)
```

Были реализованы два контроллера – Inverse Dynamics controller и Designed sliding mode controller.

Коэффициенты ID контроллера:

$$K_p = 100$$

$$K_d = 20$$

Коэффициенты Robust Slicing Mode контроллера:

$$k = 2e6$$

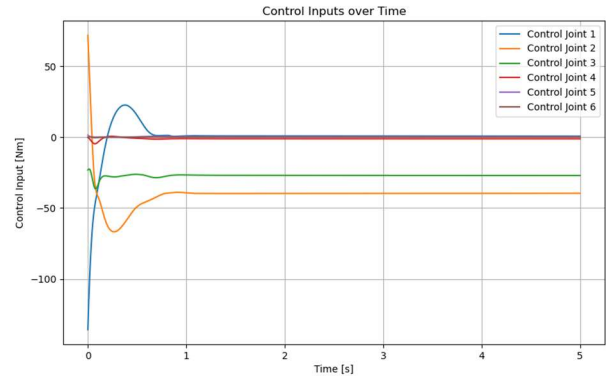
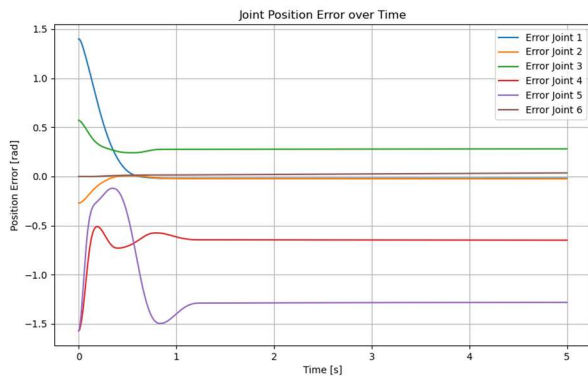
$$L = \text{diag}[200, 200, 200, 100, 100, 100]$$

Сравнение производительности контроллеров

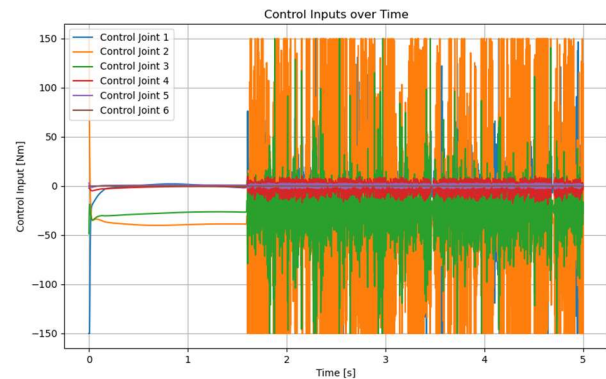
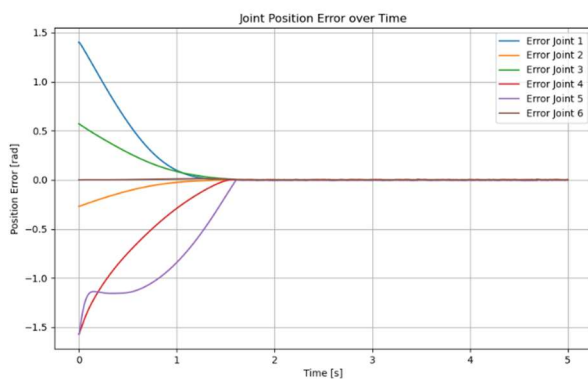
Видео реализации представлено в файлах exam_ID.mp4 и exam_RB.mp4.

Графики отслеживания ошибки положения (слева) и графики входного управления (справа) представлены ниже для обоих контроллеров:

1) ID controller



2) Robust Slicing Mode controller



3. Реализация пограничного слоя

Дребезг возникает из-за частых переключений управляющего сигнала, когда система пытается оставаться на поверхности скольжения; свой вклад вносят непосредственно сами неопределенности в модели, из-за которых управляющий сигнал ведет себя непредсказуемо.

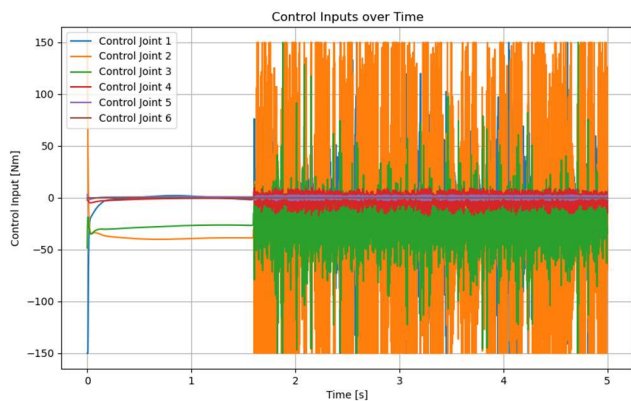
Первым последствием такого поведения управляющего сигнала будет быстрый физический износ компонентов робота. Также высокая активность управления может вызвать увеличение потребления энергии и ухудшение общей производительности.

Чтобы уменьшить дребезг, можно добавить в управление небольшой параметр ϵ – толщину пограничного слоя, наличие которой будет сглаживать переключения в управлении. В теории это было описано в контексте формулы для v_s :

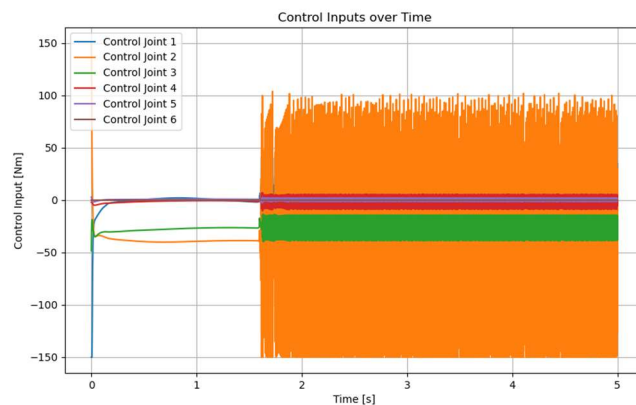
$$v_s = \begin{cases} \rho \frac{s}{||s||}, & ||s|| > \epsilon \\ \rho \frac{s}{\epsilon}, & ||s|| \leq \epsilon \end{cases}$$

Добавим в управление толщину пограничного слоя и сравним производительность для различных значений ϵ :

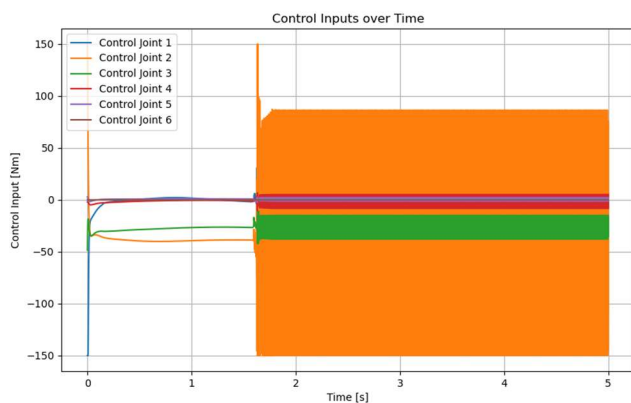
1) $\epsilon = 0.1$



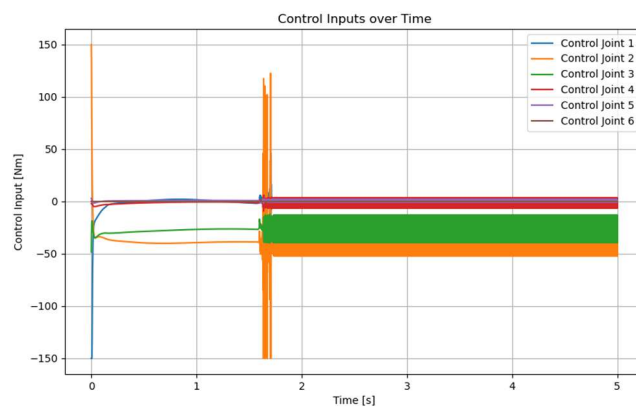
2) $\epsilon = 0.4$



3) $\epsilon = 0.417$



4) $\epsilon = 0.418$



5) $\epsilon = 0.419$

