Ευφυή και Προσαρμοστικά Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου
Εργασία 2022-2023

Κώστας Μαυρογιαννάκης , 9789

January 28, 2023

1. Να γραμμικοποιηθεί το (1) στη γειτονία του μηδενός.
   Το δωσμένο σύστημα είναι το

$$M\ddot{q} + Gsin(q) + C\dot{q} = u \tag{1}$$

   Ορίζουμε το διάνυσμα των εξισώσεων κατάστασης x ώς

$$x = [x_1, x_2]^T = [q, \dot{q}]^T$$

$$q = x_1$$

$$\dot{q} = x_2$$

   Οπότε αντικαθιστόντας στην (1) έχουμε

$$M\dot{x}_2 + Gsin(x_1) + Cx_2 = u$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{u - Cx_2 - Gsin(x_1)}{M}$$

   Στην γειτονία του μηδενός ισχύει sin(x)=x οπότε έχουμε

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -G/M & -C/M \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix} u$$

   Έχουμε τη μορφή

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{2}$$

2. Θεωρώντας το (1) πλήρως γνωστό, να σχεδιαστεί ελεγκτής μοντέλου αναφοράς όταν από το (1) είναι διαθέσιμα προς μέτρηση μόνο η έξοδος $y = q$ και η είσοδος u. Να προσομοιώσετε σε MATLAB τη λειτουργία του συστήματος κλειστού βρόγχου για τα παρακάτω δύο σενάρια.

   (a) Εκτρέπουμε το εκκρεμές κατά γωνία $q(0)$ = 0.1745 rad (ή 10^o). Το κρατάμε ακίνητο στη θέση αυτή. Στη συνέχεια το αφήνουμε και επιθυμούμε να ακινητοποιηθεί στη θέση q = 0, εμφανίζοντας μηδενική υπερύψωση και χρόνο αποκατάστασης που να μην υπερβαίνει τα 10 s. Να επαναλάβετε τη προσομοίωση και για γωνία εκτροπής $q(0)$ = 0.8727 rad (ή 50^o).

(b) Θεωρώντας ως αρχική γωνία εκτροπής $q(0)$ =0 rad, η γωνία εκτροπής να παρακολουθεί τα σήματα $0.0175sin(0.5t)$, $0.0873sin(90t)$.

Υπολογίζουμε στον Laplace την (2)

$$(sI - A)X(s) = BU(s)$$

όπου

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ G/M & s + C/M \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + s\frac{C}{M} + \frac{G}{M}} \begin{bmatrix} s + \frac{C}{M} & 1 \\ \frac{-G}{M} & s \end{bmatrix}$$

Γνωρίζουμε την σχέση που συνδέει x με u. Εφόσον $y = q = x_1 = [1\ 0]x \Leftrightarrow y =C^T x$

$$Y(s) = CX(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s)$$

$$\Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow y = \frac{1}{M}\frac{1}{s^2 + s\frac{C}{M} + \frac{G}{M}}u$$

Επομένως $k_p = 1/M$, $Z_p(s) = 1$, $R_p(s) = s^2 + s\dfrac{C}{M} + \dfrac{G}{M}$

Για να μην έχει το μοντέλο υπερύψωση αρκεί $\zeta = 1$ και για χρόνο αποκατάστασης μικρότερο από 10 δευτερόλεπτα

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \Leftrightarrow \frac{4}{\omega_n} < 10 \Leftrightarrow \omega_n > 0.4$$

Επιλέγω ω_n = 0.5 . Το μοντέλο θα έχει την μορφή

$$y_m = \frac{0.25}{s^2 + s + 0.25}r,$$

$$k_m = 0.25, Z_m(s) = 1, R_m(s) = s^2 + s + 0.25$$

Τα $Z_m(s), R_m(s)$ είναι κανονικά, ευσταθή πολυώνυμα.Έχουμε την μορφή που χρειαζόμαστε από την θεωρία οπότε ξεκινάμε την σχεδίαση. Επιλέγω ευσταθές πολυώνυμο $\Lambda(s) = s + 1$

$$\alpha(s) = [1], c_0* = \frac{k_m}{k_p} = \frac{M}{4}, F = [-1], g = [1]$$

Για να υπολογίσουμε το θ_1* θα χρειαστεί να κάνουμε την διαίρεση $\dfrac{\Lambda(S)R_m(s)}{R_p(s)}$ που δίνει πηλίκο $Q(s) = s + (2 - \frac{C}{M})$

και υπόλοιπο $k_p\Delta^*(s) = (1.25 - \frac{G}{M} - 2\frac{C}{M} + \frac{C^2}{M^2})s + 0.25 - (2\frac{G}{M} - \frac{GC}{M^2})$

Οπότε $\theta_1^{*T}\alpha(s) = \Lambda(s) - Z_p(s)Q(S) \Leftrightarrow \theta_1^{*T} * 1 = (s+1) - 1 * (s + (2 - \frac{C}{M})) \Leftrightarrow \theta_1^{*T} = -1 + \frac{C}{M}$

Για τα θ_2^*, θ_3^* έχουμε $\theta_2^{*T}\alpha(s) + \theta_3^{*T}\Lambda(s) = \dfrac{R_p(s)Q(s) - \Lambda_o(s)R_m(s)}{k_p} \Leftrightarrow$

$$\theta_2^{*T} + \theta_3^{*T}(s+1) = \frac{(2\frac{C}{M} - \frac{C^2}{M^2} + \frac{G}{M} - 1.25)s + (2\frac{G}{M} - \frac{CG}{M^2} - 0.25)}{\frac{1}{M}}$$

Εξισώνοντας τα 2 πολυώνυμα προκύπτει:

$$\theta_3^{*T} = 2C - \frac{C^2}{M} + G - 1.25M,$$

$$\theta_2^{*T} = G + M - 2C + \frac{C^2}{M} - \frac{CG}{M}$$

Άρα έχω

$$u = \theta^{*T}\omega$$

$$\dot{\omega}_1 = F\omega_1 + gu, \omega_1(0) = 0$$

$$\dot{\omega}_2 = F\omega_2 + gy, \omega_2(0) = 0$$

Όπου $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$ και $\theta^* = [\theta_1^{*T}, \theta_2^{*T}, \theta_3^{*T}, c_o^*]^T, \omega = [\omega_1^T, \omega_2^T, y, r]^T, F = -1, g = 1.$
Το μοντέλο αναφοράς γράφεται ως

$$\dot{x}_m = A_c x_m + B_c r,$$

$$y_m = C_c^T x_m$$

όπου οι πίνακες A_C, B_c και C_c υπολογίζονται από την εξίσωση (2.50) της θεωρίας. Προσπερνόντας τις πράξεις

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1.25 & -2 & 2 & -19 \\ 9.375 & 0 & 0 & -9.5 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.25 \\ 0.125 \\ 0 \end{bmatrix}, C_c^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Το διάνυσμα θ επίσης προκύπτει $\theta = \begin{bmatrix} 1 & -9.5 & 9.375 & 0.125 \end{bmatrix}$

3. Θεωρώντας άγνωστες τις παραμέτρους της (1), να σχεδιαστεί άμεσος προσαρμοστικός ελεγκτής μοντέλου αναφοράς ανάδρασης καταστάσεων και να προσομοιωθεί σε MATLAB η λειτουργία του συστήματος κλειστού βρόγχου για τα σενάρια α) και β) του Ζητήματος 2.

Έχουμε το σύστημα

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ x \in \mathbb{R}^2,\ \ u \in \mathbb{R},\ \ A \in \mathbb{R}^{2x2}, B \in \mathbb{R}^{2x1}$$

$$y = C^T x,\ C^T = [1\ \ 0]$$

με πίνακες A,B άγνωστους και το μοντέλο μας $\dot{x}_m = A_m x + B_m r$

Το μοντέλο μας έχει συνάρτηση μεταφοράς $y_m = \dfrac{0.25}{s^2 + s + 0.25}\, r$,

εφόσον $y_m = C_m^T x_m,\ C_m^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.25 & -1 \end{bmatrix}, B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.25 \end{bmatrix}$

Ο πίνακας A είναι ευσταθής (έχει διπλό πόλο το -0.5) και το διάνυσμα B φραγμένο.
Αν οι πίνακες A, B ήταν γνωστοί θα μπορούσαμενα εφαρμόσουμε τον νόμο ελέγχου

$$u = -K^* x + L^* r$$

και το σύστημα θα είχε την μορφή:

$$\dot{x} = (A - BK^*)x + BL^* r, \;\; A - BK^* = A_m, \;\; BL^* = B_m$$

Με $K^* \in \mathbb{R}^{1x2}, L^* \in \mathbb{R}$
Όταν τα A,B είναι άγνωστα εφαρμόζουμε τον νόμο ελέγχου

$$u = -K(t)x + L(t)r$$

όπου τα K,L είναι εκτιμήσεις των K^*, L^*. Προσθαφαιρώντας το $-B(K^*x - L^*r)$:

$$\dot{x} = A_m + B_m r + B(K^*x - L^*r + u)$$

Προσπερνόντας την ανάλυση της θεωρίας για το σφάλμα και την συνάρτηση Lyapunov, οι παράγωγοι των K(t),L(t) είναι

$$\dot{K} = B_m^T P e x^T sgn(l)$$
$$\dot{L} = -B_m^T P e r^T sgn(l)$$

Μας μένει να υποθέσουμε το $sgn(l)$ γνωστό και να λύσουμε την εξίσωση Lyapunov ώστε να βρούμε τον πίνακα P που θα μπει στην εξίσωση των $\dot{K}, \dot{L}$. Από την θεωρία, όλα τα σήματα στον κλειστό βρόχο προκύπτουν φραγμένα και

$$e(t) \to 0, \dot{K}(t) \to 0, \dot{L}(t) \to 0, e = x - x_m.$$

Όσον αφορά την προσομοίωση ,από την θεωρία, το $sgn(l)$ το υπολογίζουμε από το στοχείο L^*,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} L^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

Μοναδική λύση είναι η $L^* = \frac{1}{8}$ με $sgn(l) = 1$.
Μετά από πράξεις , βρίσκουμε το K*

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} * K^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -19.75 & -1 \end{bmatrix} \to K^* = [-9.875 - 0.5]$$

Τώρα πρέπει να επιλέξουμε έναν πίνακα $P^T = P > 0$ που να ικανοποιεί την εξίσωση Lyapunov $A_m^T P + P A_m = -Q$ για κάποιο δοσμένο $Q^T = Q > 0$. Βλέποντας ότι εν προκειμένω το σύστημα να προσεγγίσει το μοντέλο χρειάζομαι κέρδη της τάξης του 10^6 ορίζω τον πίνακα P

$$P = \begin{bmatrix} 2.000.000 & 500.000 \\ 500.000 & 3.000.000 \end{bmatrix}$$

Ο οποίος είναι συμμετρικός με ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1.792.900, \lambda_2 = 3.207.100$
Λύνοντας την εξίσωση Lyapunov προκείπτει

$$Q = \begin{bmatrix} 250.000 & -750.000 \\ -750.000 & 5.000.000 \end{bmatrix}$$

Ένας συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας με ιδιοτιμές $\lambda_1 = 134.400, \lambda_2 = 5.115.600$.

4. Θεωρώντας άγνωστες τις παραμέτρους της (1), να σχεδιαστεί άμεσος προσαρμοστικός ελεγκτής μοντέλου αναφοράς ανάδρασης καταστάσεων και να προσομοιωθεί σε MATLAB η λειτουργία του συστήματος κλειστού βρόγχου για τα σενάρια α) και β) του Ζητήματος 2.

   Για να υλοποιήσουμε Α-ΠΕΜΑ $n^* = 2$ πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι για κατάλληλο p η συνάρτηση μεταφοράς $G_m(s)(s+p_0)$ του μοντέλου είναι αυστηρά θετική πραγματική.

   $G_m(s) = \dfrac{0.25}{s^2+s+0.25} = \dfrac{0.25}{(s+0.5)(s+0.5)}$.

   Για ευκολία επιλέγω $p_0 = 5$ και έχω $G(s) = G_m(s)(s+p_0) = \dfrac{0.25}{s+5}$, η οποία είναι ΑΘΠ αφού:

   (a) Η G(s) είναι παραγωγίσιμη ως προς σ≥ 0,

   (b) $\Re(G(j\omega)) = \Re(\dfrac{0.25}{5+j\omega}) = \Re(\dfrac{1.25-\frac{j\omega}{4}}{25+\omega^2}) = \dfrac{1.25}{25+\omega^2} > 0 \ \forall \ \omega \in \mathbb{R}$,

   (c) $\lim_{\omega\to\infty} \omega^2 \dfrac{1.25}{25+\omega^2} = 1.25 > 0$

   Η ανάλυση είναι παρόμοια με το ερώτημα 2. αλλά τώρα δεν γνωρίζουμε το διάνυσμα θ^* οπότε το αντικαθιστούμε με την εκτίμησή του.

   Καταλήγουμε στον νόμο ελέγχου:

$$u = \theta^T\omega + \dot{\theta}^T\phi \ , \ \omega = [\omega_1^T \ \omega_2^T \ y \ r]^T$$

$$\dot{\omega}_1 = F\omega_1 + gu, \omega_1(0) = 0$$

$$\dot{\omega}_2 = F\omega_2 + gy, \omega_2(0) = 0$$

$$\dot{\phi} = -p_0\phi + \omega, \phi(0) = 0$$

$$\dot{\theta} = -\Gamma\epsilon\phi sgn(\frac{k_p}{k_m}), \epsilon = y - y_m$$

   Όπου F και g είναι ίδια με πριν , $\phi \in \mathbb{R}^4, p_0 = 5, sgn(\dfrac{k_p}{k_m}) = 1$ και Γ ένας διαγώνιος πίνακας κερδών.
   Οι εξισώσεις κατάστασης του μοντέλου δίνονται στην αρχή της σελίδας 17

$$\dot{x}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -20 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x_c + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_c = C_c^T X_c$$

5. Για τα Ζητήματα 2, 3 και 4 να γίνει μελέτη ευρωστίας (με τη βοήθεια προσομοιώσεων), των αποκρίσεων εξόδου ως προς τις μεταβολές των ελεύθερων παραμέτρων των ελεγκτών που σχεδιάζετε.

   Όπως ανάφερα και προηγουμένως, στο ερώτημα 3. χρειάστηκε πειραματισμός ώστε να βρω τον κατάλληλο πίνακα P ώστε το σύστημα να έχει την επιθυμητή συμπεριφορά. Παρ' ότι όμως το σύστημα έχει την ίδια έξοδο με το μοντέλο , οι εκτιμήσεις των παραμέτρων ανάλογα με την αρχικοποίηση μπορεί να απέχουν από τις αληθινές τιμές. Αυτό μπορεί να αποτραπεί μέσω υλοποίησης μίας σ-τροποποίησης, δηλαδή

$$\dot{K} = B_m^T Pex^T sgn(l) - \sigma_1 K$$

$$\dot{L} = -B_m^T Per^T sgn(l) - \sigma_2 L$$

Παρόμοια υλοποίηση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και το ερώτημα 4. δηλαδή

$$\dot{\theta} = -\Gamma\epsilon\phi sgn(\frac{k_p}{k_m}) - \sigma\theta^T$$

Προϋπόθεση για να έχουμε καλές εκτιμήσεις είναι να ικανοποιείται η ΣΕΔ, κάτι που στα 2 πρώτα υποερωτήματα των προσομοιώσεων δεν ισχύει καθώς η είσοδος είναι μια δέλτα, δηλαδή ικανά πλούσια τάξης 1, ενώ θέλουμε το σήμα εισόδου να είναι ικανά πλούσιο τάξης 2. Με μεγαλύτερα κέρδη στον ελεγκτή του 4 (πολλαπλασιάζοντας με π.χ. 100 τον πίνακα των κερδών) μπορούμε να προσεγγίσουμε ακόμα καλύτερα την θέση του μοντέλου. Για μεγαλύτερα χρονικά διαστήματα οι προσομοιώσεις παρουσιάζουν παρόμοια συμπεριφορά με το χρονικό διάστημα [0,10].