

# AGH

## **AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE**

Projekt 3

Ekonometria Finansowa i Dynamiczna

Maciej Nagły, Mateusz Mulka, Karol Kuciński

Informatyka i Ekonometria

II stopień, studia stacjonarne

## Spis treści

Wstęp .....	3
Ustalanie parametrów do analizy.....	3
Analiza wpływu zmiany parametru długości danych N.....	4
Stała liczba stopni swobody $df=5$ oraz $\phi = 0,9$ .....	4
Analiza wpływu błędnej specyfikacji rozkładu składnika losowego na estymator $\phi$ .....	4
Interpretacja wykresów.....	5
Stała liczba stopni swobody $df=5$ oraz ujemne $\phi = -0,9$ .....	6
Analiza wpływu błędnej specyfikacji rozkładu składnika losowego na estymator $\phi$ .....	6
Interpretacja wykresów.....	7
Stała liczba stopni swobody $df=5$ oraz neutralne $\phi = 0$ .....	8
Analiza wpływu błędnej specyfikacji rozkładu składnika losowego na estymator $\phi$ .....	8
Interpretacja wykresów.....	9
Stała wartość parametru $\phi = 0,3$ oraz zmienne stopnie swobody = (3, 8) .....	10
Analiza wpływu błędnej specyfikacji rozkładu składnika losowego na estymator $\phi$ .....	10
Interpretacja wykresów.....	11
Analiza wpływu zmiany parametru $\phi$ .....	13
Stałe wysokie N równe 1000, zmienne $\phi$ .....	13
Zestawienie wyników dla różnych stopni swobody oraz $\phi$ .....	13
Zestawienie wyników z testami (nieobciążoność i normalność).....	13
Stałe niskie N równe 50, zmienne $\phi$ .....	16
Zestawienie wyników dla różnych stopni swobody oraz $\phi$ .....	16
Zestawienie wyników z testami (nieobciążoność i normalność).....	16
Analiza wpływu zmiany liczby stopni swobody $df$ .....	19
Stała wysoka wartość N równa 1000, zmienne $\phi$ .....	19
Zestawienie wyników dla różnych stopni swobody oraz $\phi$ .....	19
Zestawienie wyników z testami (nieobciążoność i normalność).....	19
Stała niska wartość N równa 50, zmienne $\phi$ .....	21
Zestawienie wyników dla różnych stopni swobody oraz $\phi$ .....	21
Zestawienie wyników z testami (nieobciążoność i normalność).....	22
Stała wartość $\phi$ równą 0.3, zmienne N .....	24
Zestawienie wyników dla różnych stopni swobody oraz N .....	24
Zestawienie wyników z testami (nieobciążoność i normalność).....	24
Podsumowanie .....	26

# Wstęp

Modelowanie szeregów czasowych stanowi kluczowy element analizy statystycznej i ekonometrycznej w wielu dziedzinach, takich jak ekonomia, finanse, meteorologia czy inżynieria. Wśród stosowanych metod szczególną rolę odgrywają modele ARMA, które pozwalają na efektywne modelowanie i prognozowanie zmiennych losowych wykazujących zależności czasowe. Jednak dokładność wyników uzyskiwanych z takich modeli w dużej mierze zależy od poprawności założeń dotyczących rozkładu składnika losowego.

Celem niniejszego badania jest analiza wpływu błędnej specyfikacji rozkładu składnika losowego na własności estymatorów parametrów modelu ARMA. W szczególności zbadano, jak generowanie danych z rozkładu t-Studenta i estymacja parametrów przy założeniu normalności wpływa na dokładność estymacji, nieobciążoność estymatorów, wyniki testów istotności oraz rozkłady statystyk testowych. Przeprowadzono również analizę autokorelacji reszt dopasowanych modeli w celu oceny ich jakości.

Aby uzyskać kompleksowe wyniki, zastosowano podejście symulacyjne. Dla różnych parametrów modelu i liczności prób ( $N = 50, 100, 1000$ ) wygenerowano szereg danych ze składnikami losowymi z rozkładu t-Studenta. Następnie dopasowano modele ARMA, zakładając normalność składników losowych, i przeanalizowano oszacowania parametrów, ich odchylenia standardowe oraz statystyki diagnostyczne. Proces symulacyjny powtórzono 1000 razy, co pozwoliło na ocenę rozkładów estymatorów i statystyk testowych w zależności od parametrów wejściowych.

Wyniki badania mają istotne znaczenie praktyczne, szczególnie w zastosowaniach finansowych, gdzie błędna specyfikacja modelu może prowadzić do niepoprawnych decyzji inwestycyjnych lub błędnych prognoz ryzyka. Analiza uwypukla również znaczenie wyboru właściwego rozkładu dla składnika losowego w modelach statystycznych oraz pokazuje konsekwencje stosowania uproszczonych założeń w analizie szeregów czasowych.

## Ustalanie parametrów do analizy

W pierwszym kroku analizy ustalono kluczowe parametry, które mają wpływ na generowanie danych oraz późniejszą analizę.

```
# Parametry do analizy
N_values = [50, 100, 1000]
phi_values = [-0.9, -0.3, 0, 0.3, 0.9]
df_values = [3, 5, 8]

# stałe parametry do symulacji
phi_value = 0.6 # przykładowa wartość parametru dla AR(1)
df_value = 5     # stopnie swobody dla rozkładu t-Studenta
N_value = 1000
```

Parametr **N** określa długość danych, czyli liczbę obserwacji w każdej symulacji, a wartości tego parametru rozważane są w trzech przypadkach: 50, 100 oraz 1000. Zmienna  $\phi$  to parametr modelu AR(1), który opisuje współczynnik autokorelacji i przyjmuje różne wartości: -0.9, -0.3, 0, 0.3 oraz 0.9,

co pozwala na zbadanie różnych scenariuszy modelu autoregresyjnego. Z kolei **df** reprezentuje liczbę stopni swobody dla rozkładu t-Studenta, co pozwala na analizowanie rozkładów składników losowych o różnych grubościach ogonów, a rozważane wartości to 3, 5 i 8 stopni swobody.

## Analiza wpływu zmiany parametru długości danych N

Stała liczba stopni swobody  $df=5$  oraz  $\phi = 0,9$ .

Wpływ długości danych N na estymację modelu AR(1) przy  $\phi = 0.9$  i składniku losowym o rozkładzie t-Studenta ( $df = 0,5$ )

Dla każdej długości zbioru danych (50, 100 i 1000) przeprowadzono 1000 symulacji, po czym obliczono średnie wartości wyników dla każdej z iteracji.

Tabela wyników $\phi = 0.9$ , $df = 5$ :				
	N	estimated_phi	stderr_phi	resid_acf1
0	50	0.802021	0.093875	0.049659
1	100	0.850335	0.055907	0.028200
2	1000	0.895283	0.014281	0.002932

**estimated\_phi** to oszacowana wartość parametru  $\phi$  w modelu AR(1), czyli stopień autokorelacji w danych. Im większa próbka (np.  $N=1000$ ), tym estymacja tego parametru jest bliższa jego rzeczywistej wartości.

**stderr\_phi** to odchylenie standardowe oszacowanego parametru  $\phi$ , które zmniejsza się wraz ze wzrostem liczebności próbki, co wskazuje na większą precyzję estymacji dla większych N.

**resid\_acf1** (autokorelacja reszt) powinno być bliskie 0, jeśli model dobrze dopasowuje się do danych i reszty są niezależne. W miarę wzrostu liczebności próbki N wartość **resid\_acf1** maleje, co sugeruje, że model lepiej dopasowuje się do danych przy większych próbkach.

Wyniki są najlepsze dla największego zbioru  $N=1000$ . Wartość **estimated\_phi** (0.8953) jest najbliższa wartości rzeczywistej (0.9). **Niższe odchylenie standardowe: stderr\_phi** (0.0143). **Autokorelacja reszt: resid\_acf1** (0.0029) jest najniższa dla  $N = 1000$

## Analiza wpływu błędnej specyfikacji rozkładu składnika losowego na estymator $\phi$

**Średnie oszacowanie  $\phi$ :** Wartość średnia oszacowanego  $\phi$  wynosi 0.8492, co jest nieco niższe od rzeczywistej wartości (0.9). Świadczy to o **obciążeniu estymatora**, co oznacza, że przy założeniu normalności składnika losowego uzyskane estymaty mogą systematycznie odbiegać od prawdziwej wartości, gdy rzeczywisty rozkład jest inny (w tym przypadku t-Studenta).

**Odchylenie standardowe  $\phi$ :** Odchylenie standardowe wynosi 0.0752, co oznacza stosunkowo duże zróżnicowanie wyników poszczególnych oszacowań  $\phi$ . Duże odchylenie sugeruje, że estymator  $\phi$  jest mniej precyzyjny przy błędnym założeniu o normalności.

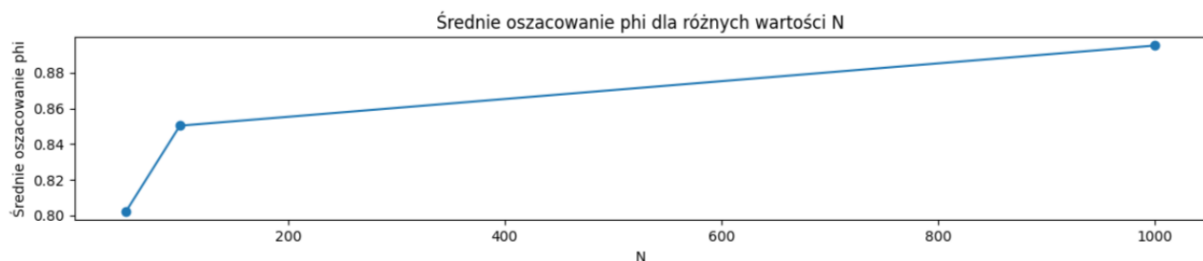
**Test nieobciążoności (t-statystyka i p-value):** Wartość t-statystyki wynosi -37.01, a p-value jest praktycznie równe 0. Wynik ten pozwala na odrzucenie hipotezy zerowej o nieobciążoności

estymatora  $\phi$  z bardzo wysokim poziomem pewności. **Obciążenie estymatora  $\phi$**  jest zatem statystycznie istotne i wynika z błędnego założenia o normalności składnika losowego.

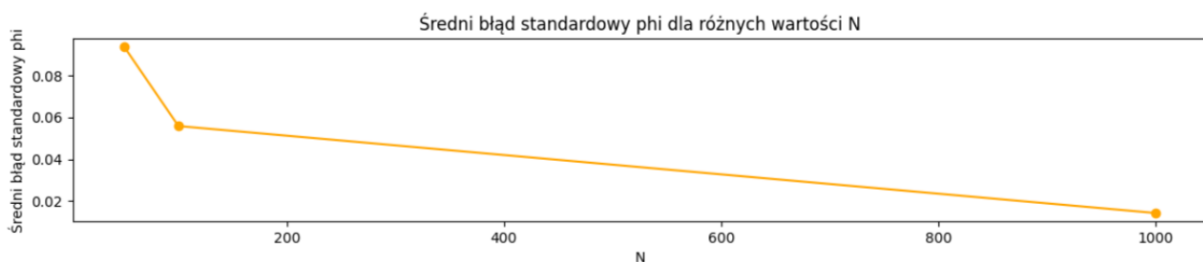
**Odsetek odrzuceń hipotezy  $H_0$ :** Hipotezę zerową odrzucono w 10.33% przypadków przy poziomie istotności 5%. Oznacza to, że pomimo obciążenia estymatora, przy takiej specyfikacji rozkładu składnika losowego istnieje 10.33% szans, że test wskaże na istotne odchylenie od rzeczywistej wartości  $\phi$ .

**Test normalności rozkładu estymatora  $\phi$  (test Kołmogorowa-Smirnowa):** Statystyka testu KS wynosi 0.1626, a p-value jest bliskie zeru ( $8.76e-70$ ), co oznacza, że rozkład estymatora  $\phi$  **znacząco odbiega od normalności**. Potwierdza to, że rozkład estymatora nie jest normalny, co może być efektem błędnej specyfikacji rozkładu składnika losowego.

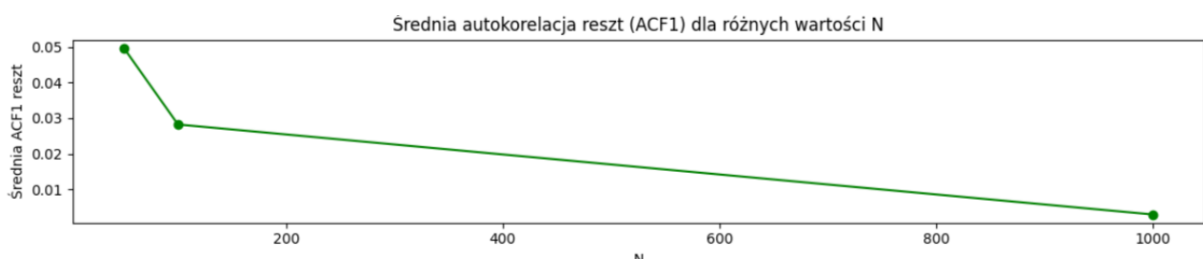
## Interpretacja wykresów



Na pierwszym wykresie widzimy średnią wartość estymowanego parametru  $\phi$  dla próbek o różnej wielkości  $N$ . Wraz ze wzrostem  $N$  (od 50 do 1000) średnia wartość  $\phi$  rośnie i coraz bardziej zbliża się do wartości rzeczywistej, tj. 0.9. Oznacza to, że estymator  $\phi$  jest **asymptotycznie nieobciążony** – wraz ze wzrostem liczby obserwacji jego wartość staje się dokładniejsza.



Drugi wykres ilustruje średni błąd standardowy estymatora  $\phi$  dla różnych wartości  $N$ . Błąd standardowy maleje wraz ze wzrostem wielkości próby, co wskazuje na **zwiększającą się precyzję estymacji** wraz ze wzrostem  $N$ . Jest to zgodne z teorią statystyczną, która mówi, że większa próba pozwala na bardziej precyzyjne oszacowanie parametrów modelu.



Trzeci wykres pokazuje średnią wartość autokorelacji reszt (ACF1) dla różnych wielkości prób. Wartość autokorelacji reszt maleje wraz ze wzrostem N, zbliżając się do zera dla największej próby (1000). Sugeruje to, że dla większych próbek reszty modelu są **mniej skorelowane** (tj. bliższe niezależności), co świadczy o poprawności dopasowania modelu przy większych próbach.

Wzrost liczby obserwacji N korzystnie wpływa na jakość estymacji parametru  $\phi$ . W większych próbach estymator jest mniej obciążony, bardziej precyzyjny, a reszty wykazują mniejszą autokorelację, co jest pożądane w modelach AR(1).

Stała liczba stopni swobody  $df=5$  oraz ujemne  $\phi = -0,9$ .

Przeprowadzono kolejną serię symulacji, wykonując 1000 iteracji dla różnych wielkości próby N (50, 100, 1000). Tym razem analiza została przeprowadzona przy dużym ujemnym parametrze  $\phi=-0.9$  oraz stałej liczbie stopni swobody wynoszącej 5.

Tabela wyników phi -0.9, df 5:				
	N	estimated_phi	stderr_phi	resid_acf1
0	50	-0.849868	0.078800	-0.049472
1	100	-0.873350	0.051287	-0.028354
2	1000	-0.897161	0.014175	-0.002865

Interpretacja wyników wskazuje, że wraz ze wzrostem liczby obserwacji N dokładność estymacji parametru  $\phi$  poprawia się, zbliżając się coraz bardziej do rzeczywistej wartości -0.9. Wartości autokorelacji reszt (resid\_acf1) także maleją wraz ze wzrostem N, co sugeruje, że większe próby poprawiają modelowanie zależności w danych i zmniejszają systematyczne błędy w resztach.

Analiza wpływu błędnej specyfikacji rozkładu składnika losowego na estymator  $\phi$

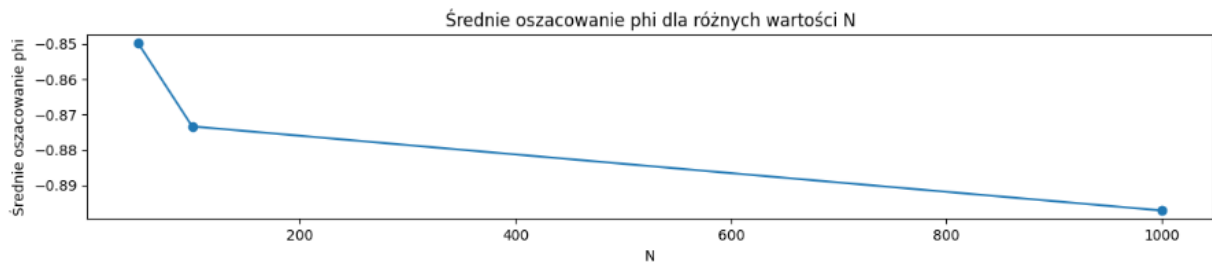
```
Analiza wpływu błędnej specyfikacji rozkładu składnika losowego na estymator phi:
Średnie oszacowanie phi: -0.8734600534736371
Odchylenie standardowe phi: 0.057997300772223204
t-statystyka dla testu nieobciążoności: 25.064144699699323
p-value dla testu nieobciążoności: 0.0
Odsetek odrzuceń hipotezy H0 na poziomie istotności 5.0%: 8.333333333333332%

Test normalności rozkładu estymatora phi:
Statystyka testu Kołmogorowa-Smirnowa: 0.16539417161662578
p-value testu KS: 3.4433145839118513e-72
```

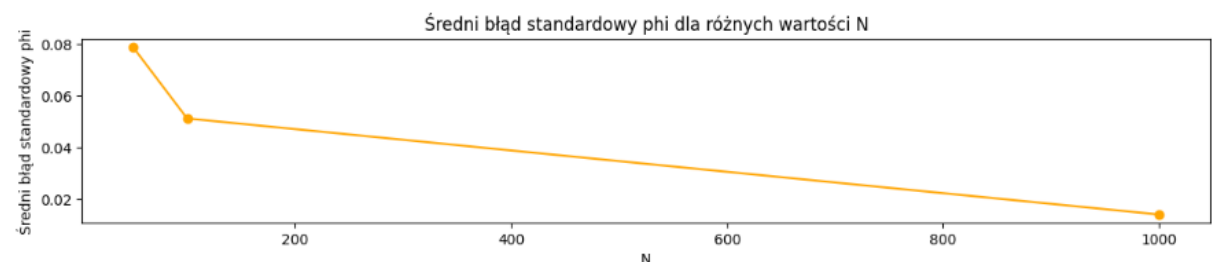
Interpretacja wyników analizy wskazuje, że błędna specyfikacja rozkładu składnika losowego wpływa na oszacowanie parametru  $\phi$ . Średnie oszacowanie parametru wynosi -0.873, co jest bliskie rzeczywistej wartości, ale występuje pewne odchylenie (odchylenie standardowe wynosi 0.058). Wysoka wartość t-statystyki (25.06) oraz niski poziom istotności (p-value = 0.0) sugerują, że

estymator jest obciążony. Na poziomie istotności 5%, w 8.33% przypadków odrzucono hipotezę zerową o nieobciążoności estymatora. Wyniki testu Kołmogorowa-Smirnowa wskazują na istotne odchylenie rozkładu estymatora od normalności (p-value bardzo niskie), co sugeruje, że estymator  $\phi$  nie jest idealnie normalny w tej specyfikacji modelu.

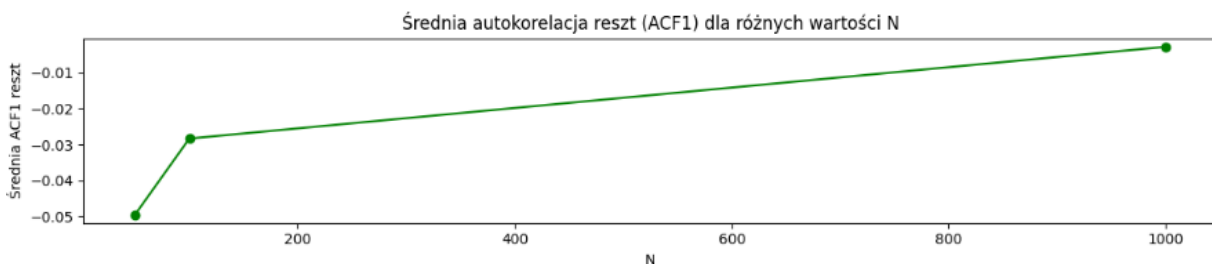
## Interpretacja wykresów



Wykres pokazuje, że wraz ze wzrostem liczby obserwacji  $N$ , średnie oszacowanie parametru  $\phi$  stabilizuje się, zbliżając się do wartości prawdziwej. Przy mniejszych wartościach  $N$ , oszacowanie jest mniej dokładne.



Wraz ze wzrostem liczby obserwacji  $N$ , średni błąd standardowy oszacowania  $\phi$  systematycznie maleje. Oznacza to, że zwiększanie liczby danych poprawia precyzję oszacowania.



Autokorelacja reszt (ACF1) początkowo jest ujemna dla małych  $N$ , ale zbliża się do zera w miarę wzrostu liczby obserwacji. Sugeruje to, że dla większych próbek model lepiej dopasowuje się do danych, a reszty są coraz bardziej losowe (nie wykazują autokorelacji).

Wzrost liczby obserwacji  $N$  prowadzi do poprawy jakości estymacji parametru  $\phi$  oraz dopasowania modelu, co jest widoczne w zmniejszeniu błędu standardowego i autokorelacji reszt.

## Stała liczba stopni swobody $df=5$ oraz neutralne $\phi = 0$

Ponownie przeprowadzono symulacje 1000 razy tym razem dla stałej liczby stopni swobody  $df=5$ , neutralnego  $\phi = 0$ .

Tabela wyników $\phi$ , $df$ 5:				
	N	estimated_phi	stderr_phi	resid_acf1
0	50	-0.013007	0.174405	-0.000870
1	100	-0.015257	0.114110	-0.000418
2	1000	-0.001608	0.032350	0.000017

Wraz ze wzrostem liczby obserwacji  $N$ , oszacowanie parametru  $\phi$  staje się coraz bliższe wartości prawdziwej. Zwiększenie liczby obserwacji poprawia precyzję oszacowania  $\phi$ , co widać w spadku błędu standardowego. Model generuje coraz bardziej losowe reszty przy większych  $N$ .

## Analiza wpływu błędnej specyfikacji rozkładu składnika losowego na estymator $\phi$

```
Analiza wpływu błędnej specyfikacji rozkładu składnika losowego na estymator  $\phi$ :  
Średnie oszacowanie  $\phi$ : -0.009956983614444814  
Odchylenie standardowe  $\phi$ : 0.10011978383816884  
t-statystyka dla testu nieobciążoności: -5.447139737292996  
p-value dla testu nieobciążoności: 5.118624990529952e-08  
Odsetek odrzuceń hipotezy  $H_0$  na poziomie istotności 5.0%: 7.1%  
  
Test normalności rozkładu estymatora  $\phi$ :  
Statystyka testu Kołmogorowa-Smirnowa: 0.07462619221548433  
p-value testu KS: 5.633223250482369e-15
```

### Średnie oszacowanie $\phi$ i odchylenie standardowe:

Średnie oszacowanie  $\phi$  wynosi  $-0.00996$ , co wskazuje na niewielkie odchylenie od wartości prawdziwej (0).

Odchylenie standardowe wynosi 0.1, co świadczy o umiarkowanej niepewności oszacowania.

### Test nieobciążoności:

T-statystyka wynosi  $-5.447$ , co sugeruje odrzucenie hipotezy zerowej o nieobciążoności estymatora  $\phi$

Odrzucenie hipotezy  $H_0$  na poziomie istotności 5% występuje w 7.1%

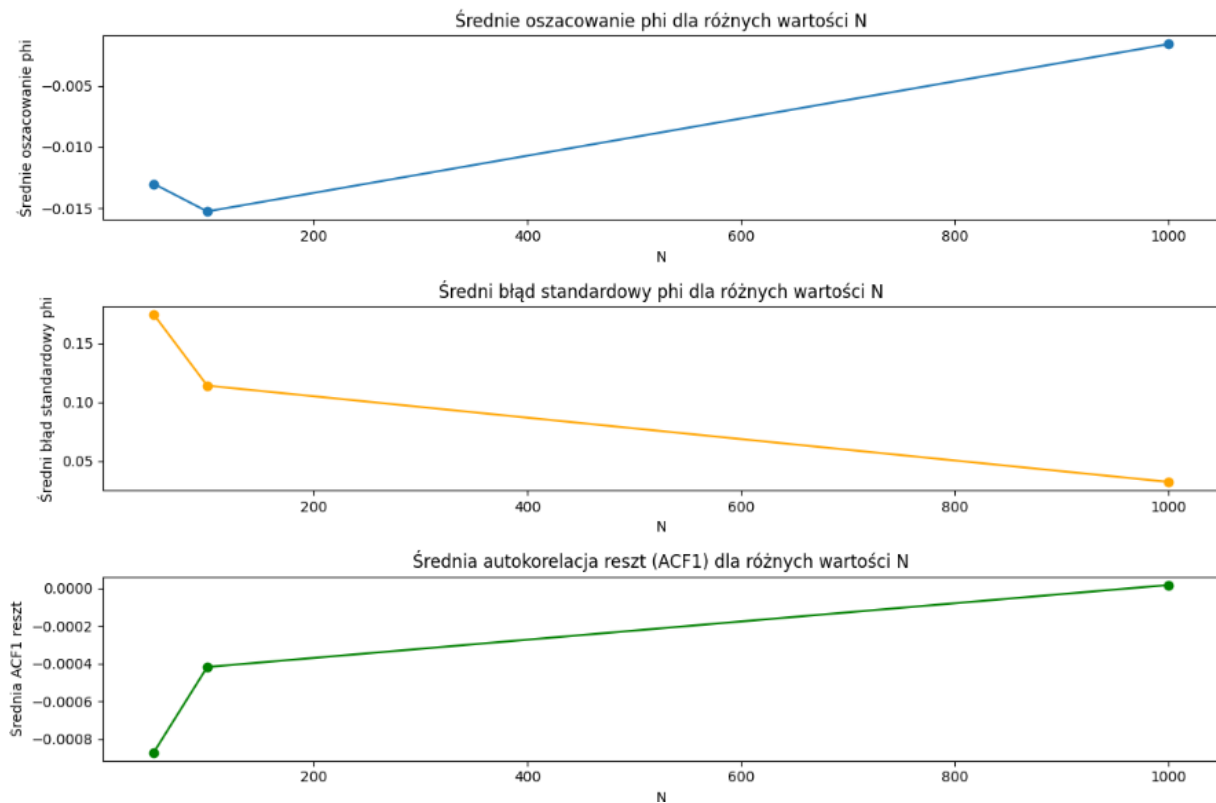
### Test normalności:

Statystyka testu Kołmogorowa-Smirnowa wynosi 0.0746, a p-value bliskie 0. To wskazuje na istotne odchylenie od normalności rozkładu estymatora  $\phi$ .

Błędna specyfikacja rozkładu składnika losowego może prowadzić do niewielkich, ale systematycznych odchyłek w estymacji  $\phi$ , a rozkład estymatora  $\phi$  odbiega od normalności.



## Interpretacja wykresów



### Średnie oszacowanie phi:

Wartość oszacowania  $\phi$  stabilizuje się i zbliża do wartości prawdziwej (0) wraz ze wzrostem  $N$ . Mniejsze  $N$  powoduje większe odchylenie od wartości prawdziwej.

### Średni błąd standardowy phi:

Błąd standardowy maleje wraz ze wzrostem liczby obserwacji  $N$ , co wskazuje na coraz większą precyzję estymatora.

### Średnia autokorelacja reszt:

Przy większych próbach autokorelacja reszt jeszcze bardziej zbliża się do 0, co świadczy o poprawie jakości modelu.

Wzrost liczby obserwacji  $N$  poprawia dokładność i precyzję oszacowania  $\phi$ , redukuje autokorelację reszt oraz zwiększa wiarygodność modelu.

Stała wartość parametru  $\phi = 0,3$  oraz zmienne stopnie swobody = (3, 8)

Symulację przeprowadzono 1000 razy a następnie zebrano średnie wyniki.

phi\_value = 0.3, df\_value = 3

	N	estimated_phi	stderr_phi	resid_acf1
0	50	0.256699	0.192279	0.015311
1	100	0.281359	0.122780	0.007195
2	1000	0.295979	0.033680	0.000759

phi\_value = 0.3, df\_value = 8

	N	estimated_phi	stderr_phi	resid_acf1
0	50	0.249062	0.157059	0.015521
1	100	0.278886	0.103863	0.008525
2	1000	0.297947	0.030660	0.001256

W obu przypadkach (dla  $df=3$  oraz  $df=8$ ), wzrost liczby obserwacji prowadzi do poprawy jakości estymacji parametru  $\phi$ .

Większy stopień swobody ( $df=8$ ) prowadzi do nieco mniejszych odchyłeń standardowych oraz bardziej precyzyjnych estymacji w porównaniu do  $df=3$ , szczególnie przy małych próbach ( $N=50$ )

Analiza wpływu błędnej specyfikacji rozkładu składnika losowego na estymator  $\phi$

phi\_value = 0.3, df\_value = 3

```
Analiza wpływu błędnej specyfikacji rozkładu składnika losowego na estymator phi:
Średnie oszacowanie phi: 0.27801248972557624
Odchylenie standardowe phi: 0.09578816975518513
t-statystyka dla testu nieobciążoności: -12.572591575199805
p-value dla testu nieobciążoności: 0.0
Odsetek odrzuceń hipotezy H0 na poziomie istotności 5.0%: 7.533333333333333%

Test normalności rozkładu estymatora phi:
Statystyka testu Kołmogorowa-Smirnowa: 0.09718173379903833
p-value testu KS: 4.1031255681339034e-25
```

phi\_value = 0.3, df\_value = 8

```
Analiza wpływu błędnej specyfikacji rozkładu składnika losowego na estymator phi:  
Średnie oszacowanie phi: 0.2752982667874054  
Odchylenie standardowe phi: 0.09931418903781669  
t-statystyka dla testu nieobciążoności: -13.623125377241726  
p-value dla testu nieobciążoności: 0.0  
Odsetek odrzuceń hipotezy H0 na poziomie istotności 5.0%: 7.8%  
  
Test normalności rozkładu estymatora phi:  
Statystyka testu Kołmogorowa-Smirnowa: 0.10421655954851516  
p-value testu KS: 7.99252550196239e-29
```

### Test nieobciążoności estymatora $\phi$ :

W obu przypadkach estymator  $\phi$  wykazuje niewielkie, ale systematyczne odchylenie od wartości prawdziwej ( $\phi=0.3$ ).

Hipoteza zerowa o nieobciążoności estymatora jest odrzucana w ok. 7.5-7.8% przypadków na poziomie istotności 5%.

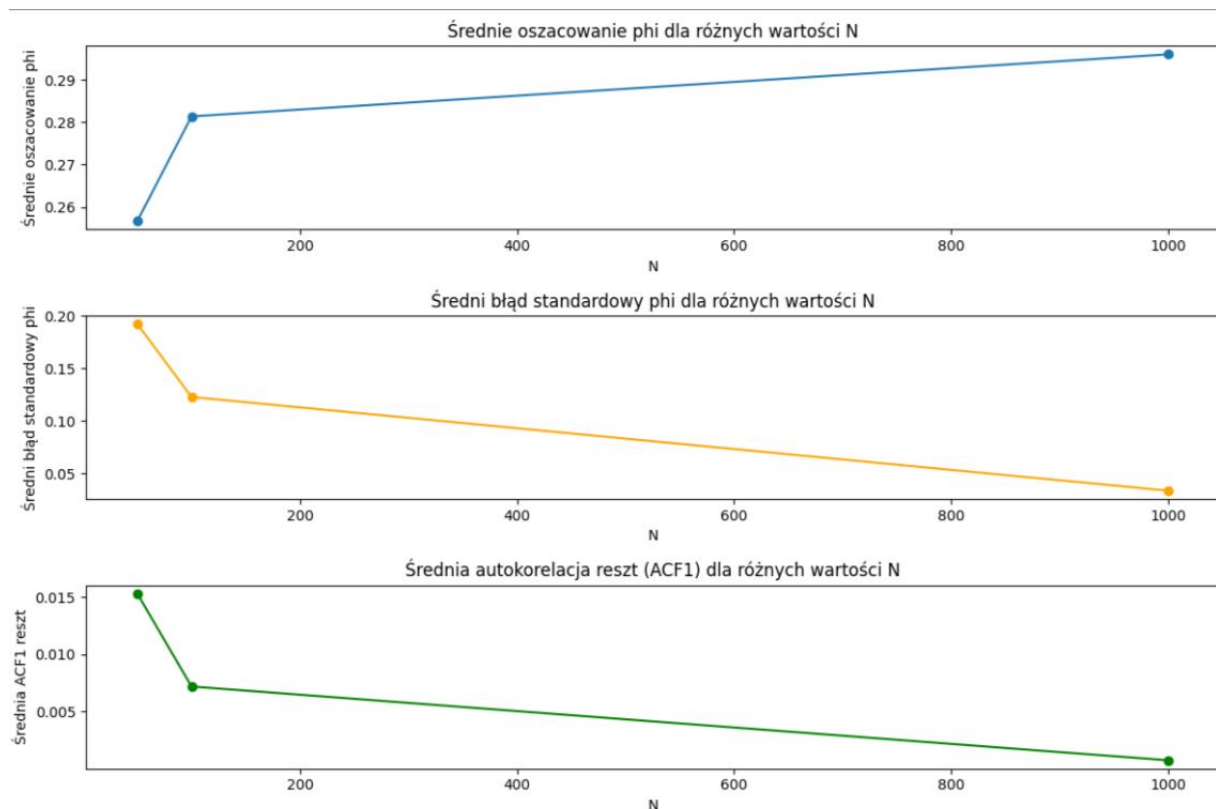
Choć estymator jest bliski wartości rzeczywistej, błędna specyfikacja rozkładu składnika losowego prowadzi do niewielkiej, ale statystycznie istotnej nieobciążoności.

### Test normalności rozkładu estymatora $\phi$

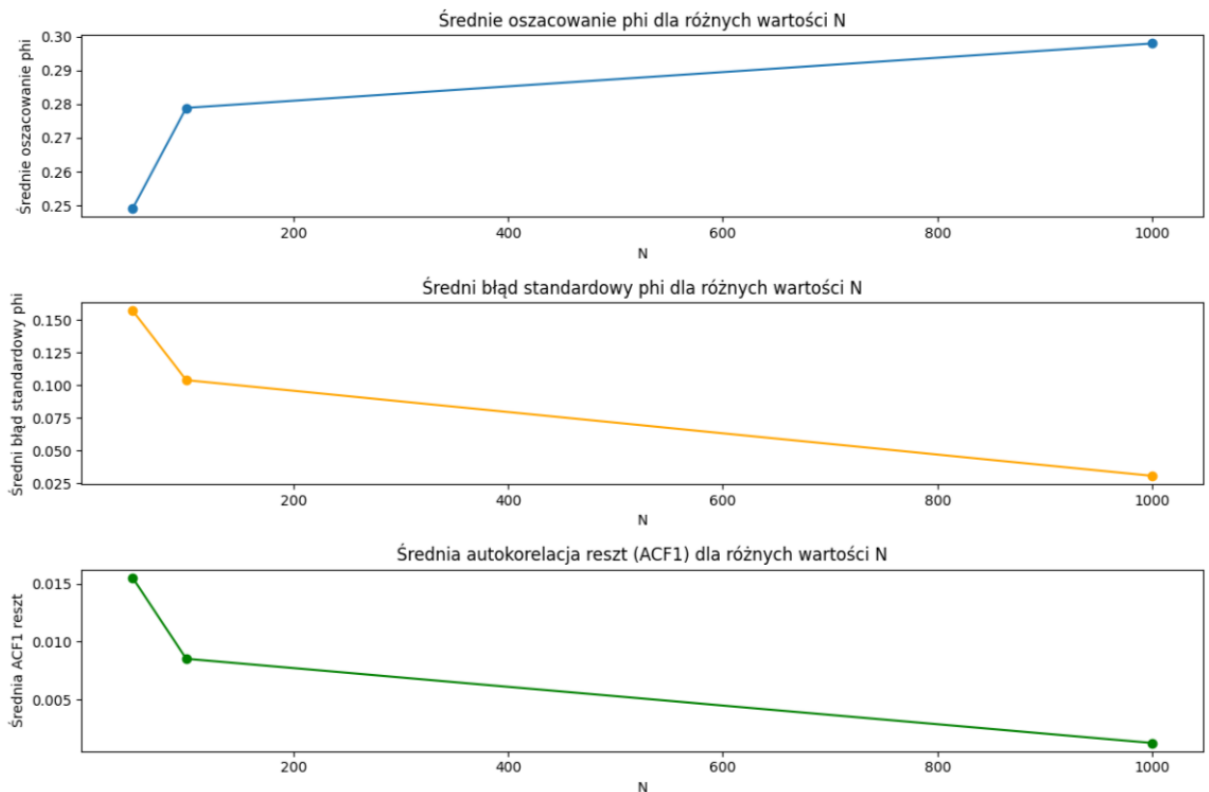
Rozkład estymatora  $\phi$  znacząco odbiega od normalności, co może wynikać z błędnej specyfikacji rozkładu składnika losowego

### Interpretacja wykresów

$\phi\_value = 0.3$ ,  $df\_value = 3$



$\phi\_value = 0.3$ ,  $df\_value = 8$



Podobnie jak w poprzednich interpretacjach wykresów zwiększenie liczby obserwacji poprawia wiarygodność modelu w obu przypadkach dla różnych stopni swobody.

Wzrost liczby obserwacji poprawia jakość estymacji  $\phi$  – oszacowania są bardziej precyzyjne i mniej obciążone błędem.

Wyższe stopnie swobody ( $df=8$ ) skutkują nieco lepszymi wynikami, ale różnice są subtelne.

Estymator  $\phi$  nie jest idealnie nieobciążony – występują niewielkie odchylenia od wartości prawdziwej, które są statystycznie istotne.

Rozkład estymatora  $\phi$  odbiega od normalności, co może wynikać z błędnej specyfikacji rozkładu składnika losowego.

Model poprawnie uchwytuje zależności w danych, co potwierdza brak istotnej autokorelacji reszt.

Choć estymacje  $\phi$  są w dużej mierze poprawne, należy zachować ostrożność przy interpretacji wyników, szczególnie przy małych próbach lub przy błędnej specyfikacji rozkładu składnika losowego. W miarę możliwości należy zwiększać liczbę obserwacji, aby poprawić precyzję wyników i zminimalizować wpływ błędnej specyfikacji modelu.

# Analiza wpływu zmiany parametru $\phi$

## Stałe wysokie N równe 1000, zmienne $\phi$

Badanie analizy wpływu zmiennej parametru N pokazało, że najlepsze wyniki są dla największej liczby danych. Symulacje przeprowadzono 1000 razy dla trzech różnych stopni swobody(3, 5, 8).

## Zestawienie wyników dla różnych stopni swobody oraz $\phi$

Wartości estymowane  $\phi^{\wedge}$  są bardzo bliskie wartościom rzeczywistym  $\phi$  w każdym przypadku.

Zwiększenie stopni swobody (df) powoduje nieznaczne zmniejszenie błędów standardowych  $\text{stderr}\phi$  oraz stabilizację reszt ( $\text{resid\_acf1}$ ) wokół zera, co wskazuje na poprawne odwzorowanie dynamiki modelu.

df	$\phi$	$\phi^{\wedge}$	$\text{stderr}\phi$	$\text{resid\_acf1}$
3	-0.9	-0.897779	0.014957	-0.003139
3	-0.3	-0.301031	0.033752	-0.001168
3	0.0	0.000394	0.037369	-0.000022
3	0.3	0.298791	0.033995	0.000681
3	0.9	0.895545	0.015133	0.003159
5	-0.9	-0.897849	0.014129	-0.003283
5	-0.3	-0.299954	0.030941	-0.000919
5	0.0	-0.001811	0.032511	0.000061
5	0.3	0.296363	0.031009	0.001464
5	0.9	0.895272	0.014351	0.003269
8	-0.9	-0.897495	0.014002	-0.002498
8	-0.3	-0.300289	0.030534	-0.001785
8	0.0	-0.001492	0.031947	0.000001
8	0.3	0.298300	0.030574	0.001149
8	0.9	0.895357	0.014183	0.002228

## Zestawienie wyników z testami (nieobciążoność i normalność)

Parametry testowe (średnia  $\phi^{\wedge}$ , odchylenie standardowe, statystyki t-testu oraz test Kołmogorowa-Smirnowa) są zbliżone dla wszystkich wartości df.

df	Średnie $\phi^{\wedge}$	Odchylenie $\phi^{\wedge}$	T-stat	P-value t-test	Stat. KS	P-value KS
3	-0.000816	0.5985	-0.096	0.9232	0.1241	$1.53 \times 10^{-67}$
5	-0.001596	0.5981	-0.189	0.8504	0.1240	$1.69 \times 10^{-67}$
8	-0.001124	0.5983	-0.133	0.8943	0.1233	$1.14 \times 10^{-66}$

Wnioski:

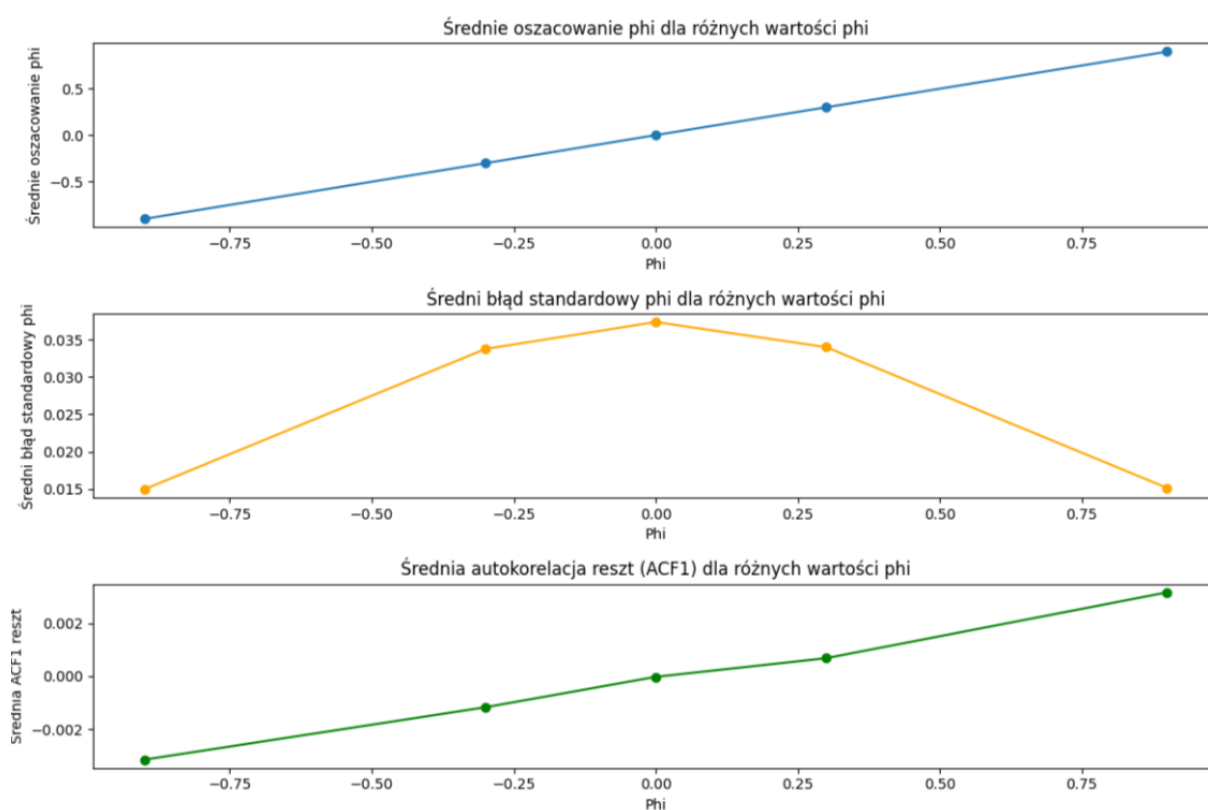
Zwiększenie df powoduje niewielkie zmniejszenie błędów standardowych, co poprawia precyzję estymacji  $\phi$ .

Testy t-statystyczne wskazują na brak istotnych odchyień od rzeczywistych wartości  $\phi$ , co potwierdza, że estymator jest nieobciążony.

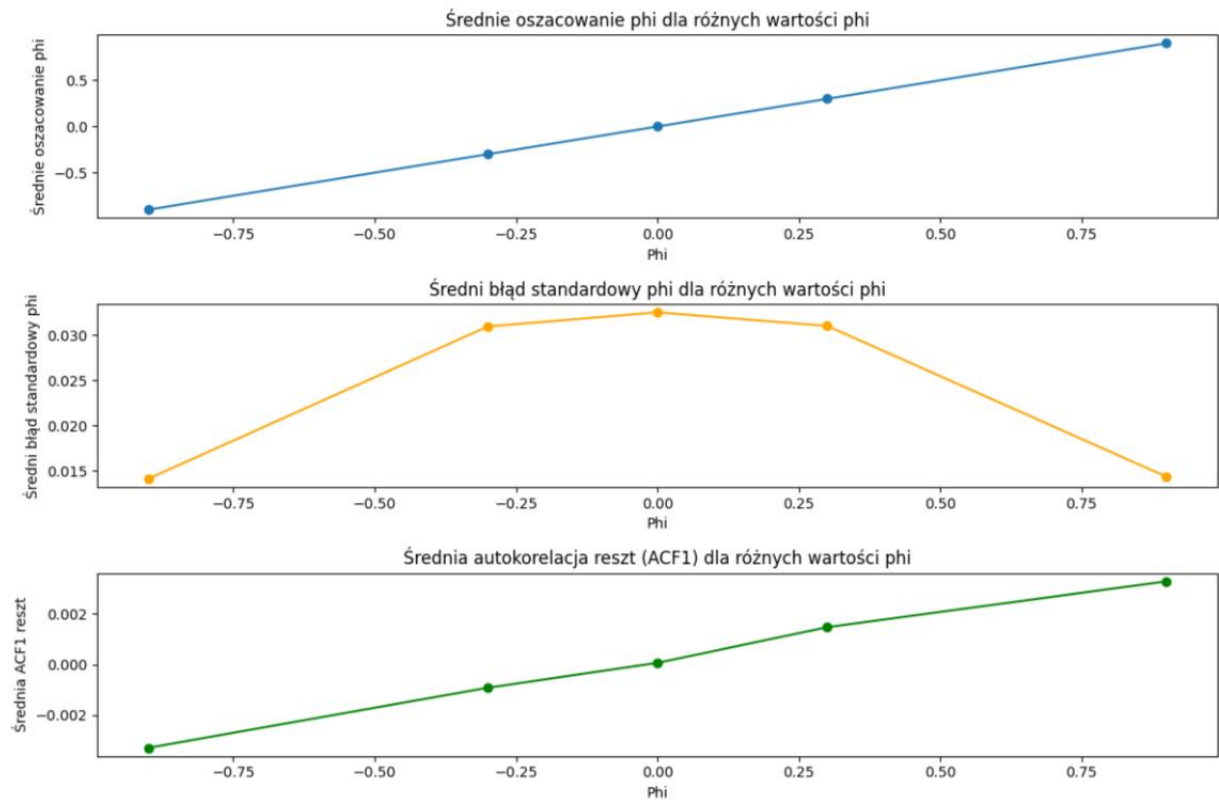
Statystyki KS pokazują, że rozkład estymatora  $\phi$  istotnie odbiega od normalności we wszystkich przypadkach ( $p \approx 10^{-67}$ ).

Wysoka precyzja oszacowań, nawet dla dużych wartości  $\phi$  ( $\phi = -0.9$  oraz  $0.9$ ), oraz brak autokorelacji reszt potwierdzają poprawność przyjętej metody estymacji.

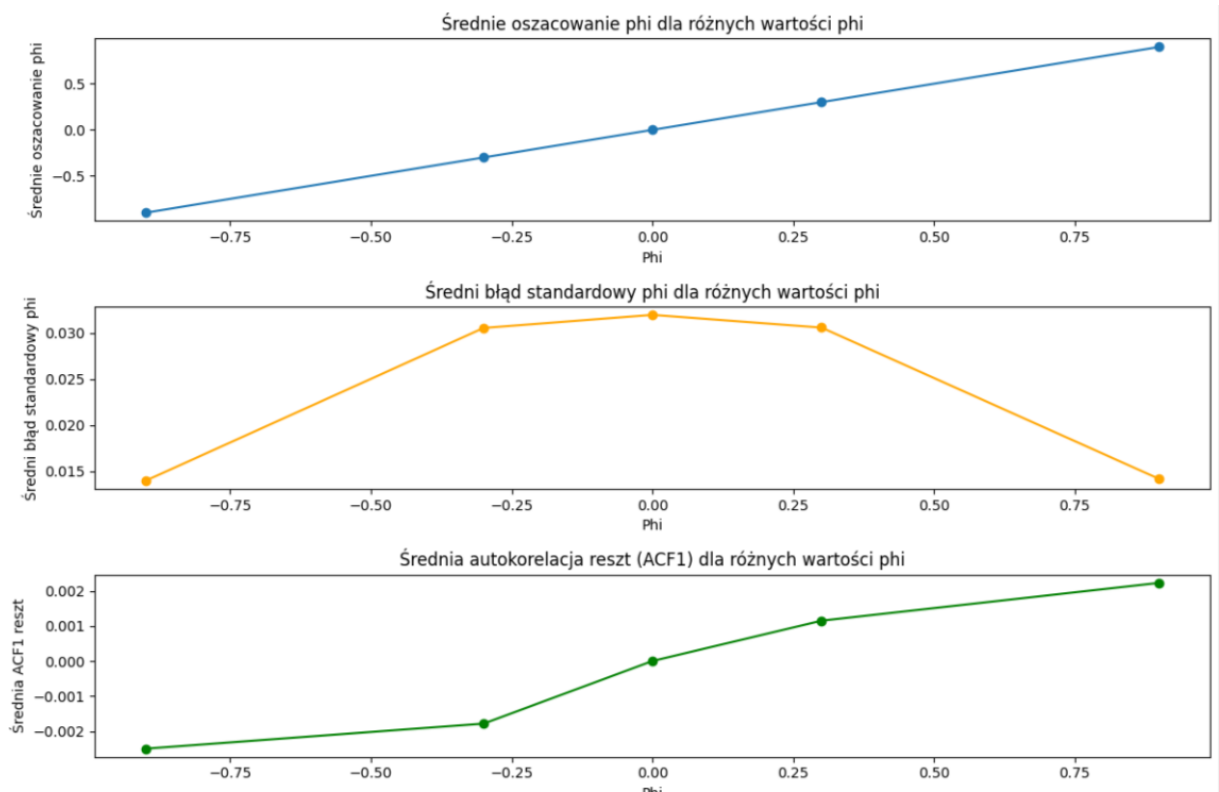
Stałe  $N=1000$ ,  $df=3$



Stałe  $N=1000$ ,  $df=5$



Stałe  $N=1000$ ,  $df=8$



## Stałe niskie N równe 50, zmienne $\phi$

### Zestawienie wyników dla różnych stopni swobody oraz $\phi$

Wartości estymowanego  $\phi^{\wedge}$  są bliskie rzeczywistym wartościom  $\phi$ , jednak odchylenia są większe w porównaniu do wyników dla  $N=1000$ , co jest zgodne z oczekiwaniami wynikającymi z mniejszej próby.

Błędy standardowe są większe przy  $N=50$ , co wskazuje na niższą precyzję estymacji w porównaniu z większą próbką.

Reszty (resid\_acf1) pozostają stabilne i bliskie zera we wszystkich przypadkach.

df	$\phi$	$\phi^{\wedge}$	stderr $\phi$	resid_acf1
3	-0.9	-0.855416	0.085142	-0.048880
3	-0.3	-0.299223	0.185073	-0.014952
3	0.0	-0.018414	0.203403	-0.001182
3	0.3	0.257435	0.184935	0.015474
3	0.9	0.802646	0.100199	0.041823
5	-0.9	-0.854120	0.077772	-0.051841
5	-0.3	-0.292788	0.163270	-0.016186
5	0.0	-0.023815	0.172014	-0.001472
5	0.3	0.253814	0.162630	0.014093
5	0.9	0.801491	0.092542	0.039481
8	-0.9	-0.857118	0.075372	-0.052466
8	-0.3	-0.302650	0.154018	-0.019417
8	0.0	-0.013486	0.163575	-0.000600
8	0.3	0.245030	0.156037	0.013894
8	0.9	0.801219	0.090297	0.047629

### Zestawienie wyników z testami (nieobciążoność i normalność)

df	Średnie $\phi^{\wedge}$	Odchylenie $\phi^{\wedge}$	T-stat	P-value t-test	Stat. KS	P-value KS
3	-0.0226	0.5645	-2.830	0.0047	0.0858	$1.69 \times 10^{-32}$
5	-0.0231	0.5641	-2.894	0.0038	0.0810	$5.26 \times 10^{-29}$
8	-0.0254	0.5645	-3.182	0.0015	0.0826	$4.14 \times 10^{-30}$

Wnioski:

Zwiększenie df nieznacznie zmniejsza błędy standardowe, co wskazuje na lepszą precyzję estymacji przy wyższych stopniach swobody.

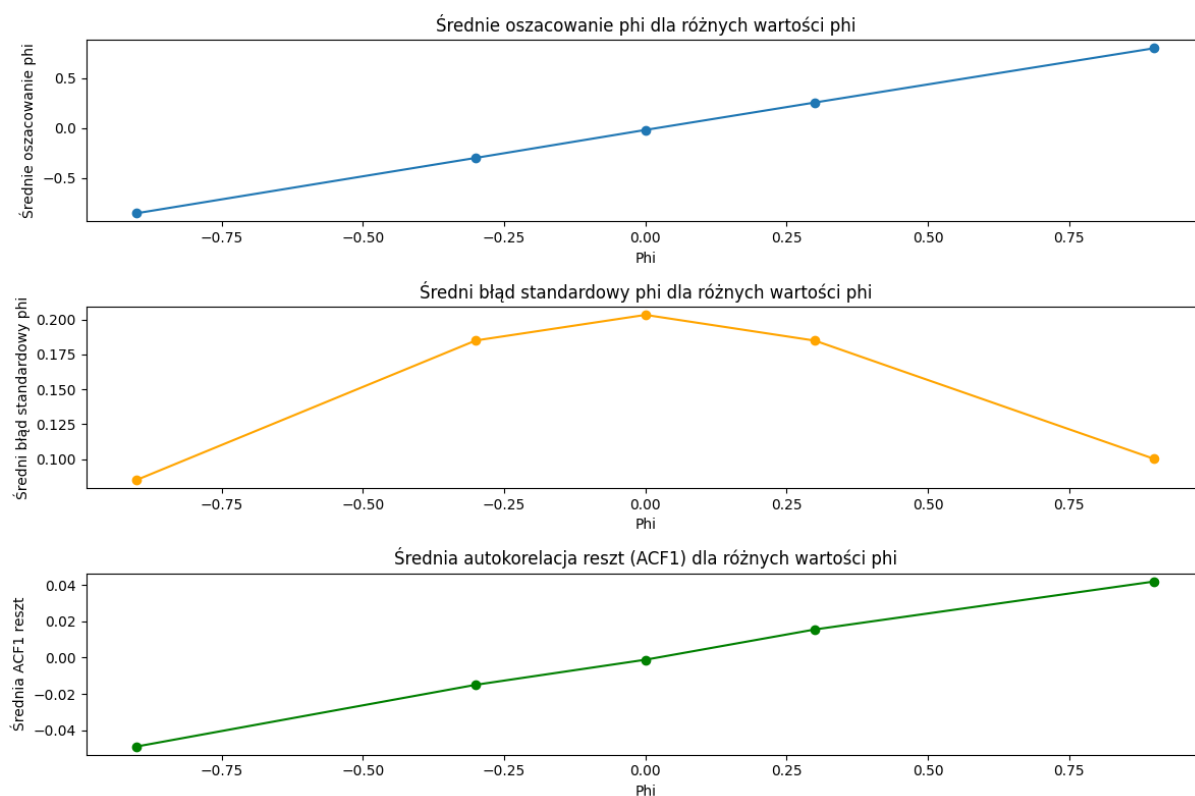
T-statystyki dla testów wskazują na istotne odchylenia średnich  $\phi^{\wedge}$  od rzeczywistych wartości  $\phi$ , co sugeruje, że estymator jest obciążony przy  $N=50$ . P-value testu t-statystycznego są mniejsze od 0.05 we wszystkich przypadkach, co potwierdza obciążenie estymatora



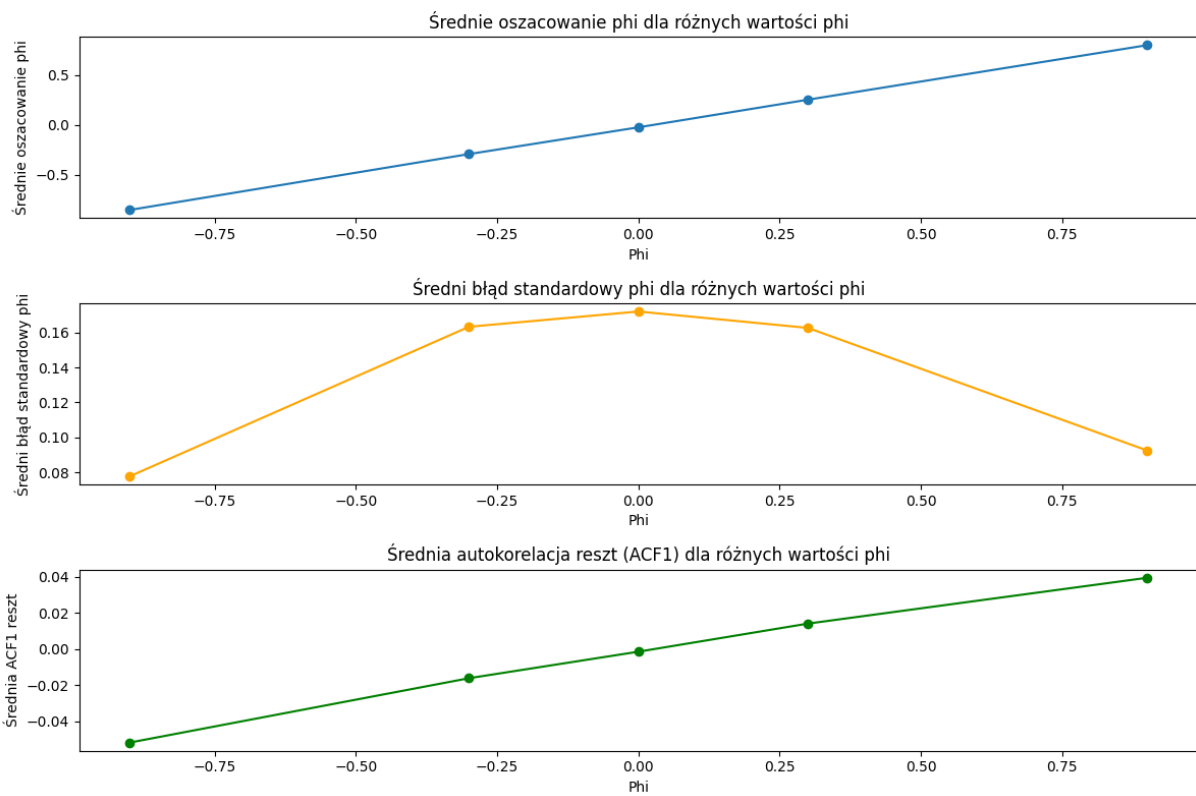
Test Kołmogorowa-Smirnowa wskazuje na istotne odchylenie rozkładu estymatora  $\hat{\phi}$  od normalności (bardzo małe p-values).

W porównaniu do większych prób ( $N=1000$ ), estymacja  $\phi$  jest mniej precyzyjna, a błędy standardowe są większe. Odchylenia średnich wartości  $\hat{\phi}$  rzeczywistych wartości są bardziej widoczne przy małej próbie.

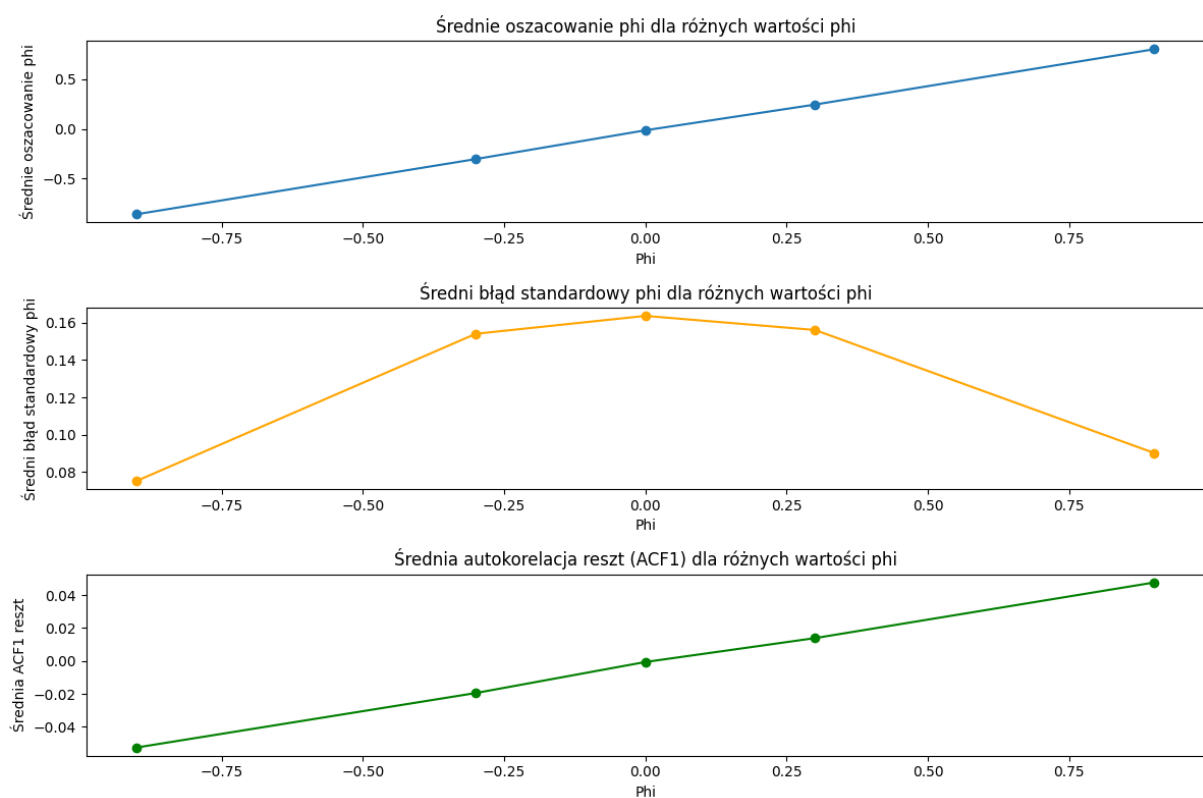
Stałe  $N = 50$ ,  $df = 3$



Stałe  $N = 50$ ,  $df = 5$



Stałe  $N = 50$ ,  $df = 8$



# Analiza wpływu zmiany liczby stopni swobody df

Stała wysoka wartość N równa 1000, zmienne  $\phi$

Zestawienie wyników dla różnych stopni swobody oraz  $\phi$

Wyniki pokazują wpływ różnych wartości  $\phi$  (0.9, 0, -0.9) oraz stopni swobody (df) w rozkładzie t-Studenta na estymację parametrów w dużej próbie (N=1000).

$\phi$	df	$\phi^{\wedge}$	stderr $\phi$	resid_acf1
0.9	3	0.896475	0.015105	0.002658
0.9	5	0.895075	0.014293	0.002605
0.9	8	0.895125	0.014165	0.002993
0	3	-0.001279	0.035586	-0.000030
0	5	-0.002228	0.032507	0.000001
0	8	-0.000626	0.032067	0.000045
-0.9	3	-0.897441	0.015091	-0.003617
-0.9	5	-0.897289	0.014169	-0.001717
-0.9	8	-0.897061	0.014026	-0.002248

Estymator  $\phi^{\wedge}$  jest bliski rzeczywistej wartości  $\phi$  we wszystkich przypadkach, co wskazuje na minimalne obciążenie. Błędy standardowe są większe dla  $\phi=0$ , jednocześnie normalność estymatora jest w tym przypadku najlepiej zachowana.

Zestawienie wyników z testami (nieobciążoność i normalność)

$\phi$	Średnie $\phi^{\wedge}$	Odchylenie $\phi^{\wedge}$	T-stat	P-value t-test	Stat. KS	P-value KS
0.9	0.8956	0.0145	-16.78	0.0	0.0309	0.0065
0	-0.0014	0.0318	-2.38	0.0175	0.0112	0.8453
-0.9	-0.8973	0.0134	11.17	0.0	0.0292	0.0116

Wnioski:

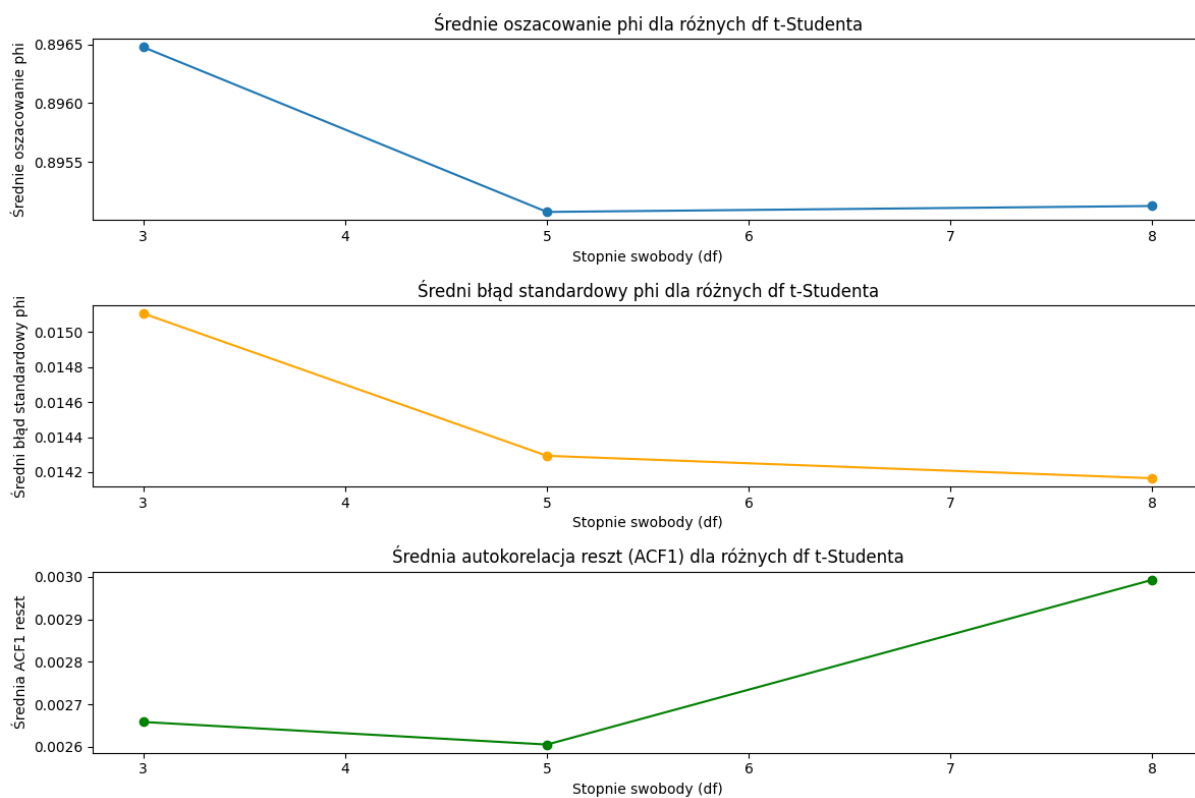
Dla  $\phi=0$  estymator jest bliski nieobciążoności, jednak dla  $\phi=0.9$  i  $\phi=-0.9$  widoczne są istotne odchylenia.

Wzrost df powoduje niewielkie zmniejszenie błędu standardowego estymatora.

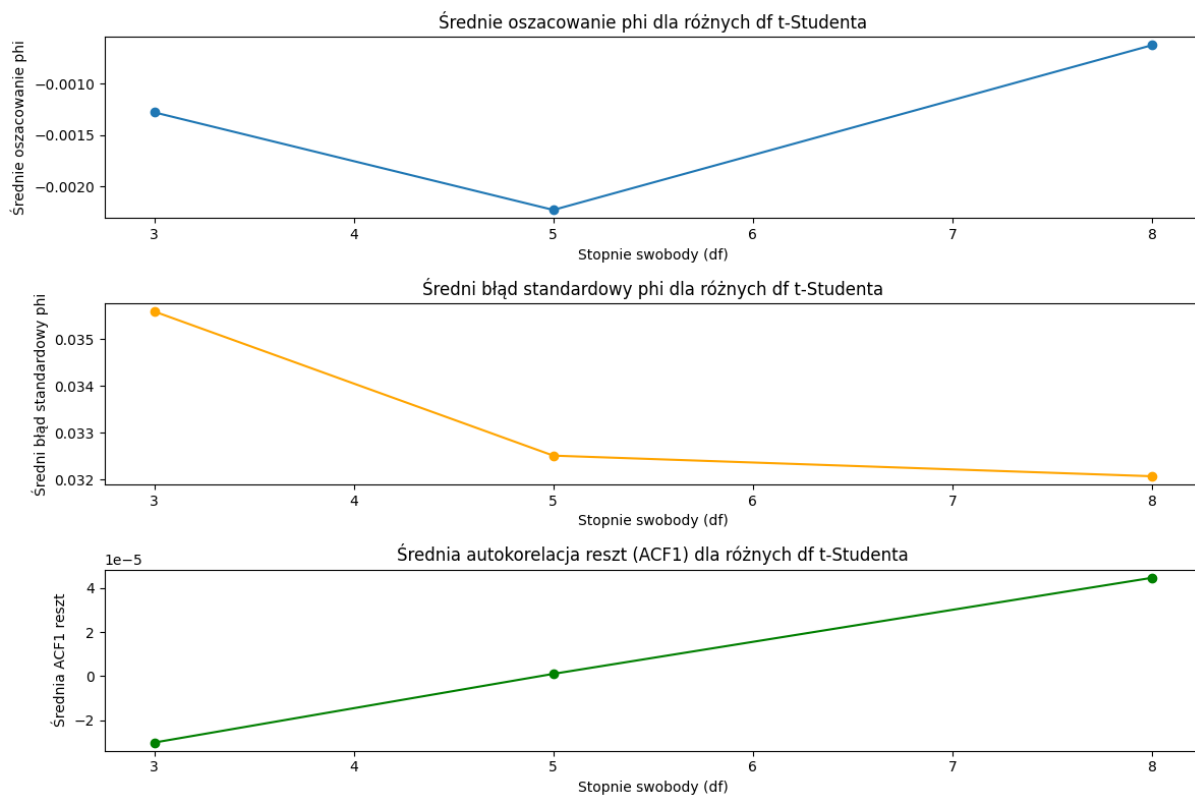
Test Kołmogorowa-Smirnowa wskazuje na nieznaczne odchylenia od normalności dla  $\phi=0.9$  i  $\phi=-0.9$ , ale dla  $\phi=0$  rozkład estymatora jest praktycznie normalny

Przy N=1000 estymacja  $\phi$  jest bardzo precyzyjna, ale wykazuje niewielkie odchylenia od rzeczywistych wartości przy ekstremalnych wartościach  $\phi$ .

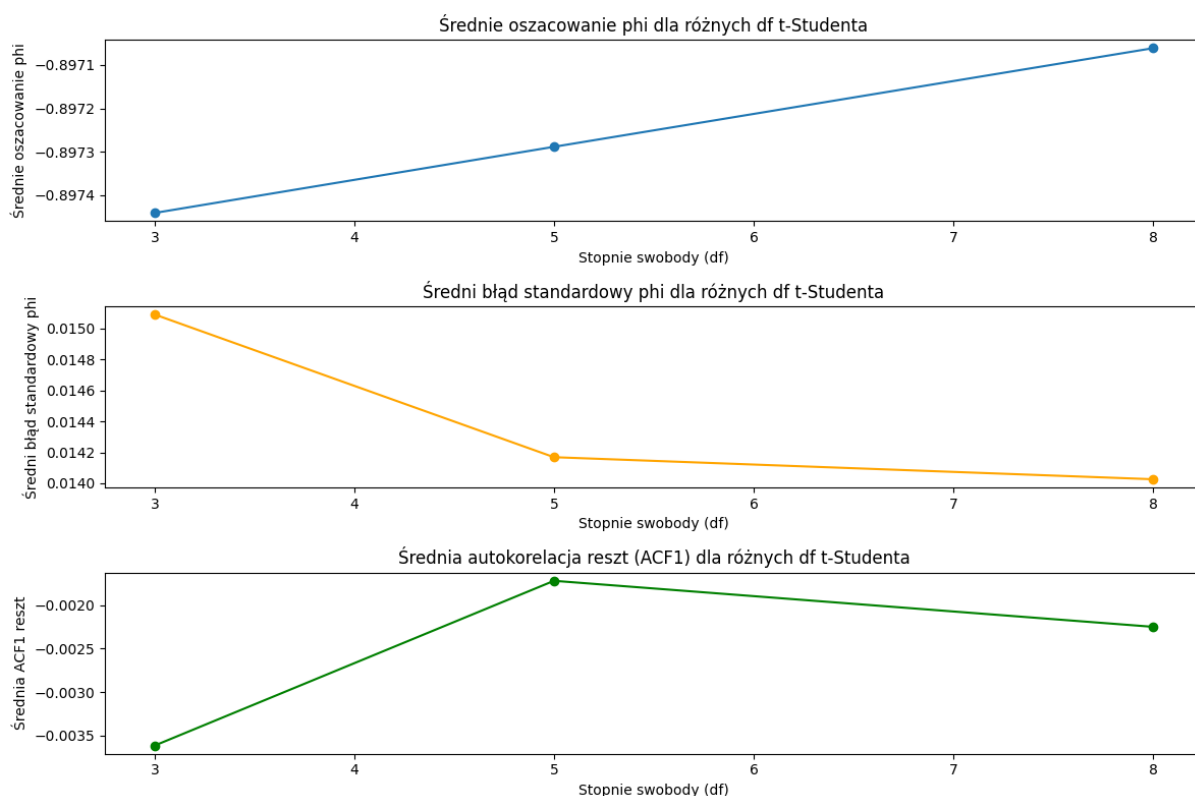
Stałe  $N = 1000$ ,  $\phi = 0.9$



Stałe  $N = 1000$ ,  $\phi = 0$



Stałe  $N = 1000$ ,  $\phi = -0.9$



Stała niska wartość N równa 50, zmienne  $\phi$

Zestawienie wyników dla różnych stopni swobody oraz  $\phi$

Symulacje wykonane dla małej próby (N=50) pokazują, jak różne wartości  $\phi$  (0.9, 0, -0.9) oraz stopnie swobody df w rozkładzie t-Studenta wpływają na jakość estymacji parametru  $\phi$ . Wyniki uwzględniają błędy standardowe, testy na nieobciążoność estymatora oraz normalność rozkładu estymatorów.

$\phi$	df	$\phi^{\wedge}$	stderr $\phi$	resid_acf1
0.9	3	0.809291	0.098115	0.043401
0.9	5	0.809417	0.091590	0.051906
0.9	8	0.801797	0.090507	0.045071
0	3	-0.024405	0.202707	-0.000391
0	5	-0.015683	0.174995	-0.001012
0	8	-0.008724	0.163175	-0.000642
-0.9	3	-0.851664	0.085626	-0.049980
-0.9	5	-0.854819	0.078329	-0.052825
-0.9	8	-0.848984	0.077152	-0.049104

Dla  $\phi=0.9$  średnie wartości estymatora  $\phi^{\wedge}$  są nieco niższe od rzeczywistego  $\phi$  (przeciętnie  $\phi^{\wedge}=0.80$ )

Dla  $\phi=0$  błędy standardowe są większe niż dla ekstremalnych wartości  $\phi$ , co sugeruje większą zmienność w oszacowaniach.

Dla  $\phi = -0.9$  błędy standardowe są nieco niższe niż dla  $\phi = 0.9$ , co sugeruje większą stabilność estymacji w kierunku ujemnym.

### Zestawienie wyników z testami (nieobciążoność i normalność)

$\phi$	Średnie $\phi^{\wedge}$	Odchylenie $\phi^{\wedge}$	T-stat	P-value t-test	Stat. KS	P-value KS
0.9	0.8068	0.0907	-56.28	0.0	0.0759	$1.79 \cdot 10^{-15}$
0	-0.0163	0.1331	-6.69	$2.16 \cdot 10^{-11}$	0.0139	0.6011
-0.9	-0.8518	0.0788	33.49	0.0	0.0983	$1.04 \cdot 10^{-25}$

#### Wnioski:

Estymator  $\phi^{\wedge}$  wykazuje pewne obciążenie w małej próbie ( $N=50$ ), szczególnie dla ekstremalnych wartości  $\phi=0.9$  i  $\phi=-0.9$ . Średnie wartości oszacowań są zaniżone w obu przypadkach.

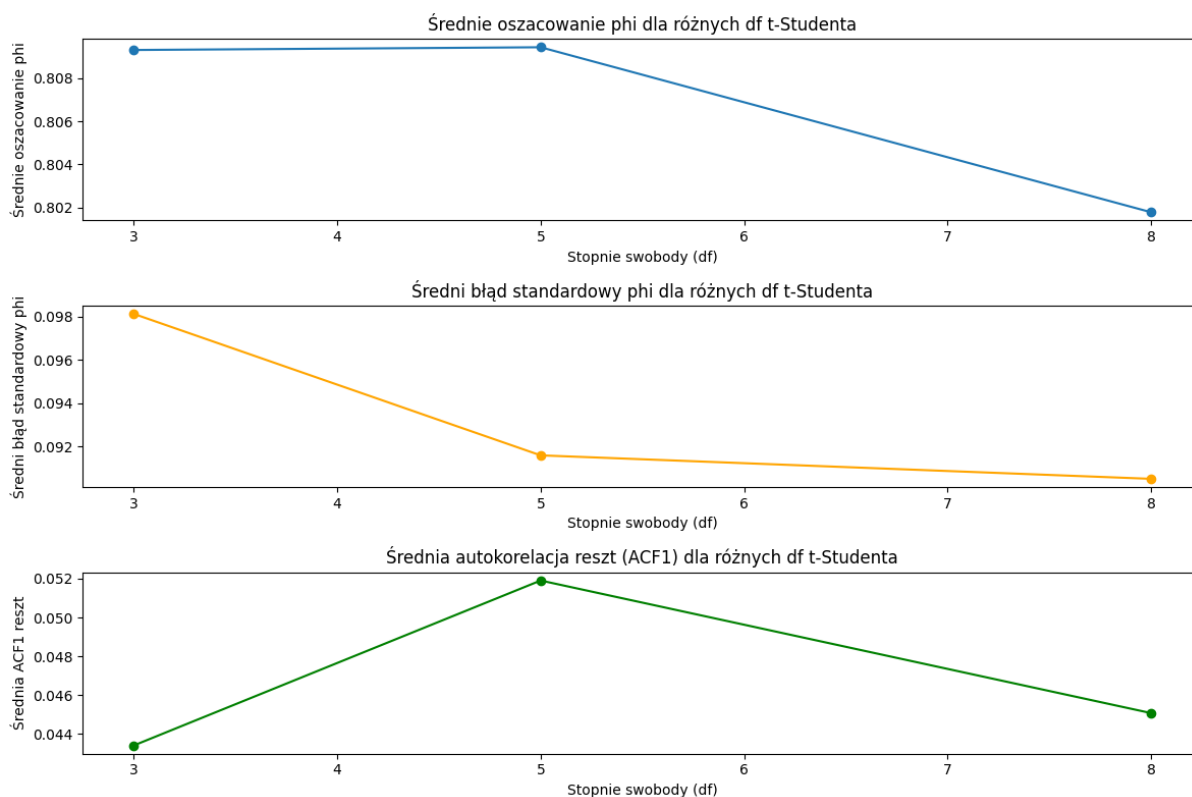
Dla  $\phi=0$  estymator jest mniej obciążony, ale wciąż zauważalnie odbiega od nieobciążoności (t-statystyka istotna na poziomie 5%).

Wzrost df zmniejsza błędy standardowe estymatora  $\phi$ .

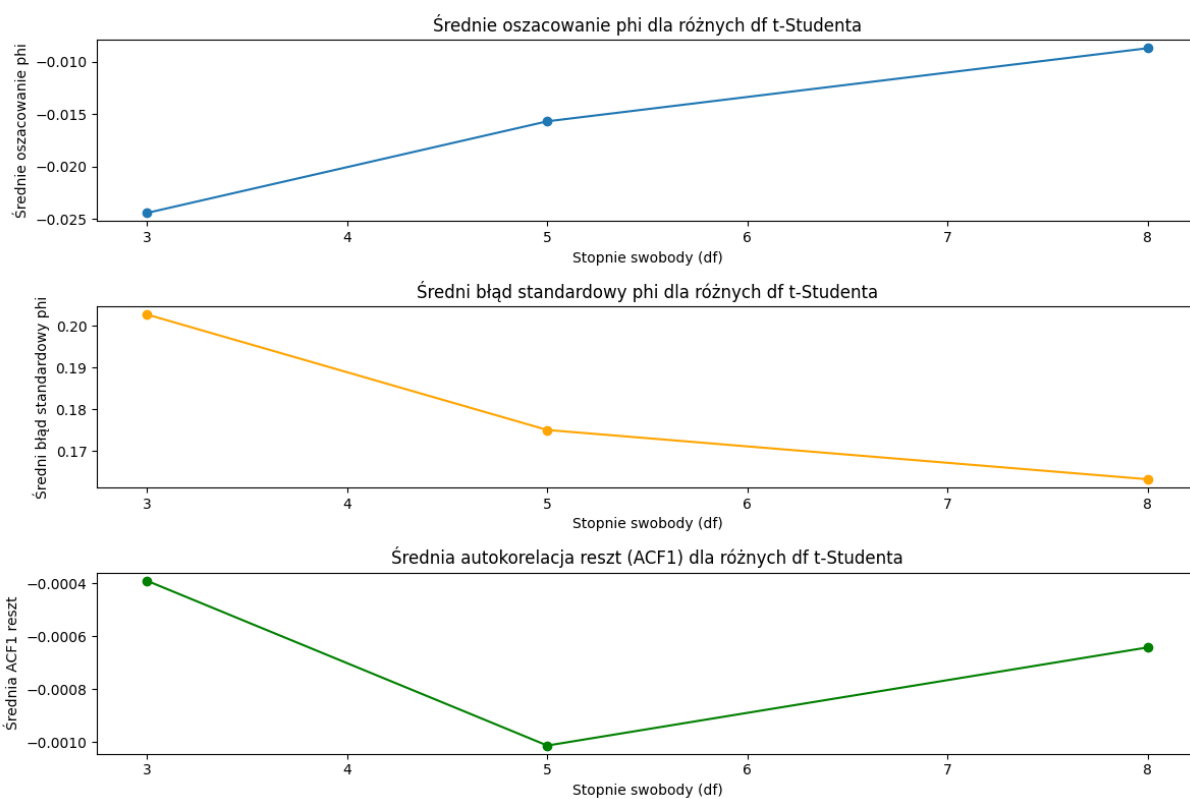
Dla  $\phi=0.9$  i  $\phi=-0.9$  występują wyraźne odchylenia od normalności (niski p-value testu KS).

Dla  $\phi=0$  rozkład estymatora jest najbliższy normalności (wysokie p-value w teście KS).

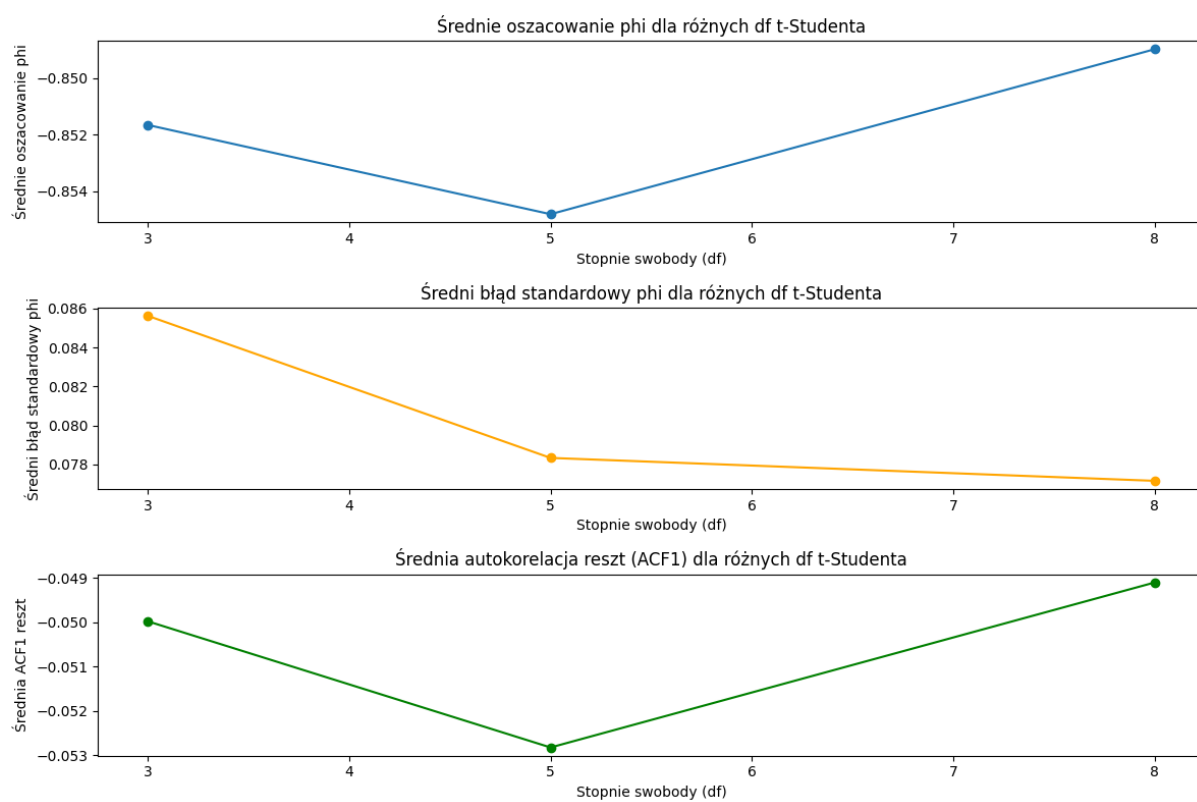
Stałe  $N = 50$ ,  $\phi = 0.9$



Stałe  $N = 50$ ,  $\phi = 0$



Stałe  $N = 50$ ,  $\phi = -0.9$



## Stała wartość $\phi$ równą 0.3, zmienne N

### Zestawienie wyników dla różnych stopni swobody oraz N

Symulacje przeprowadzone dla różnych wielkości próby ( $N=50, 100, 1000$ ) i różnych parametrów  $df$  t-Studenta wskazują na poprawę jakości estymacji wraz ze wzrostem  $N$  oraz niewielki wpływ  $df$  na wyniki.

N	df	$\phi^{\wedge}$	stderr $\phi$	resid_acf1
50	3	0.257007	0.190362	0.015942
50	5	0.261917	0.164553	0.015326
50	8	0.263402	0.156464	0.015135
100	3	0.271817	0.123271	0.007219
100	5	0.278348	0.108575	0.006668
100	8	0.270178	0.104588	0.008480
1000	3	0.297531	0.034493	0.001147
1000	5	0.297707	0.031037	0.001064
1000	8	0.296602	0.030604	0.000980

Dla małych próbek ( $N=50$ ) estymator  $\phi^{\wedge}$  jest zaniżony w stosunku do rzeczywistej wartości ( $\phi=0.3$ ), natomiast błędy standardowe są stosunkowo duże, co odzwierciedla niską precyzję estymacji.

Dla średnich próbek ( $N=100$ ) estymator  $\phi^{\wedge}$  jest bliższy rzeczywistej wartości niż dla  $N=50$ , jednak nadal lekko zaniżony.

Dla dużych próbek ( $N=1000$ ) estymator  $\phi^{\wedge}$  niemal pokrywa się z rzeczywistą wartością  $\phi=0.3$ , co wskazuje na niemal nieobciążoną estymację.

### Zestawienie wyników z testami (nieobciążoność i normalność)

N	Średnie $\phi^{\wedge}$	Odchylenie $\phi^{\wedge}$	T-stat	P-value t-test	Stat. KS	P-value KS
50	0.2608	0.1310	-16.41	0.00	0.0212	0.1331
100	0.2734	0.0931	-15.62	0.00	0.0165	0.3819
1000	0.2973	0.0301	-4.95	$7.32 \cdot 10^{-7}$	0.0109	0.8622

#### Wnioski:

Wraz ze wzrostem  $N$ , estymator  $\phi^{\wedge}$  staje się coraz bliższy rzeczywistej wartości  $\phi=0.3$ . Dla  $N=1000$ , obciążenie staje się praktycznie pomijalne.

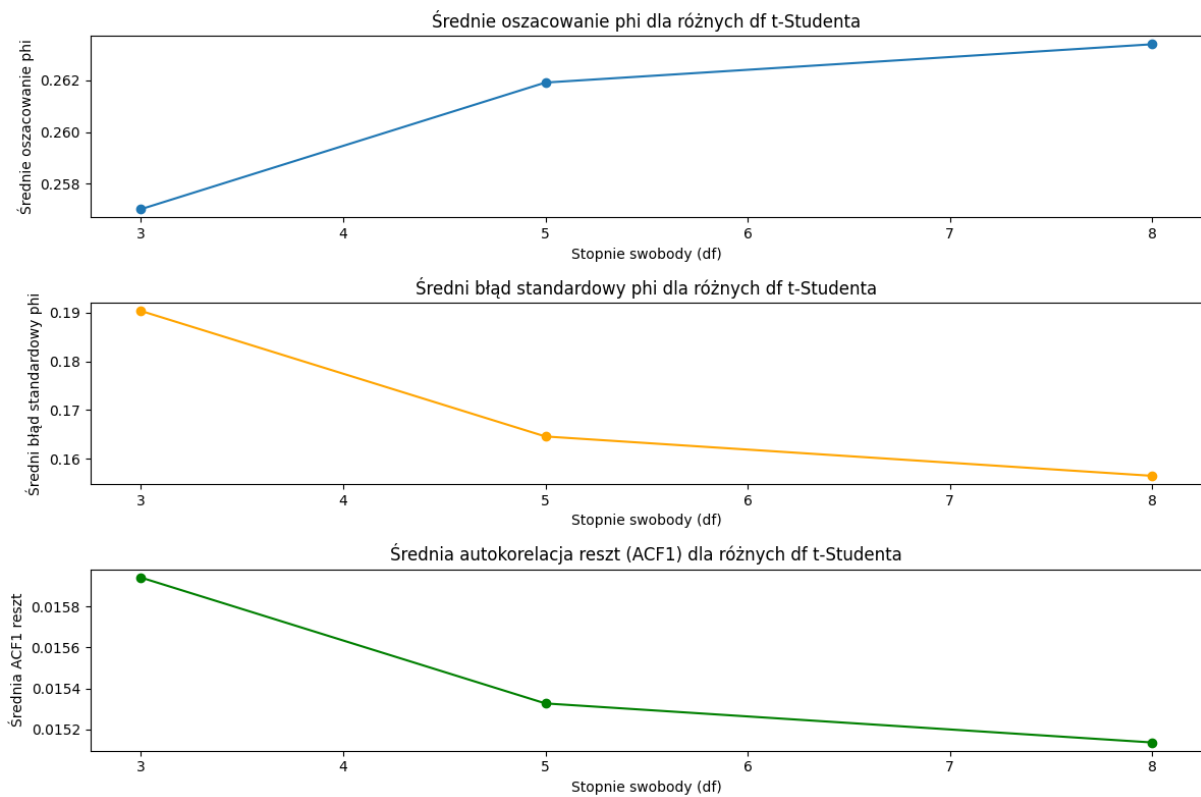
Zmiana stopnia swobody ( $df$ ) ma niewielki wpływ na wyniki estymacji  $\phi$ . Średnie wartości  $\phi^{\wedge}$ , błędy standardowe i autokorelacja reszt są podobne dla różnych  $df$ , co sugeruje, że wpływ błędnej specyfikacji rozkładu składnika losowego jest ograniczony.

Wzrost  $N$  znacząco poprawia precyzję estymacji. Błędy standardowe estymatora  $\phi$  maleją w miarę zwiększania  $N$  (z 0.19 dla  $N=50$  do 0.031 dla  $N=1000$ ).

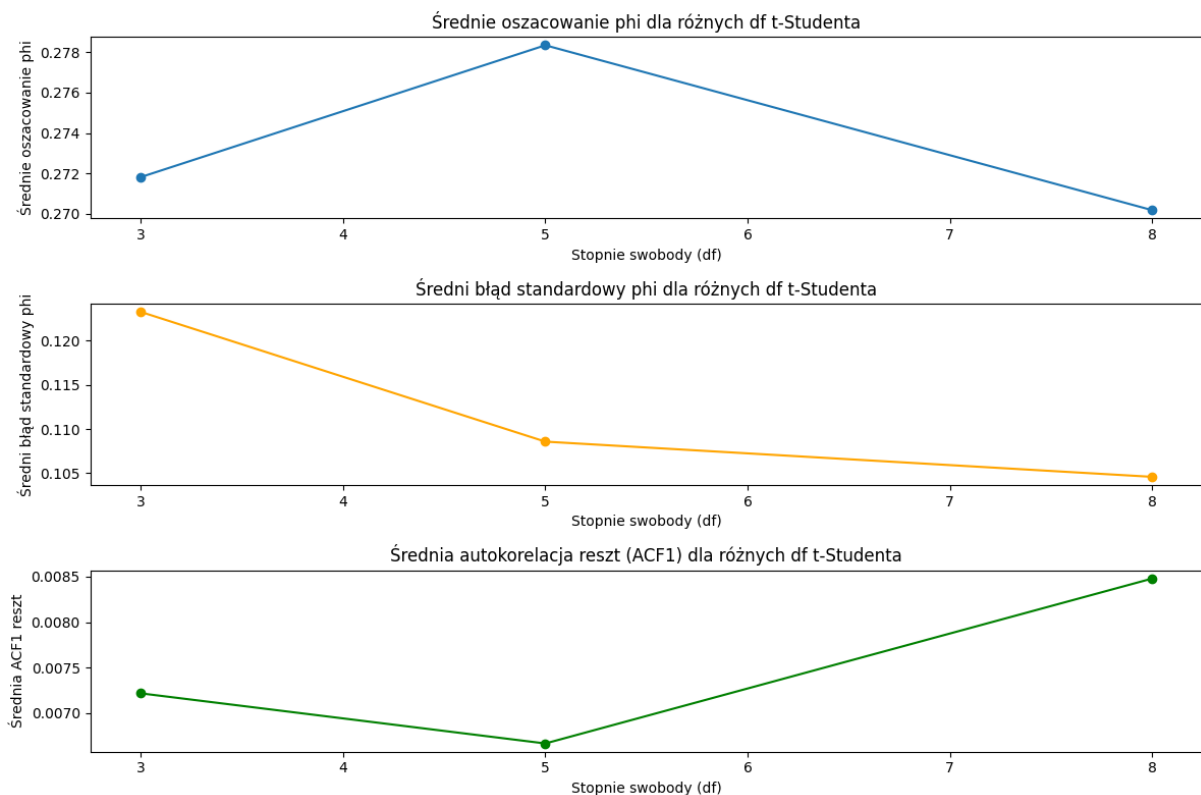


Test Kołmogorowa-Smirnowa wskazuje na zgodność rozkładu estymatora z normalnością, zwłaszcza dla większych prób ( $p > 0.05$ ).

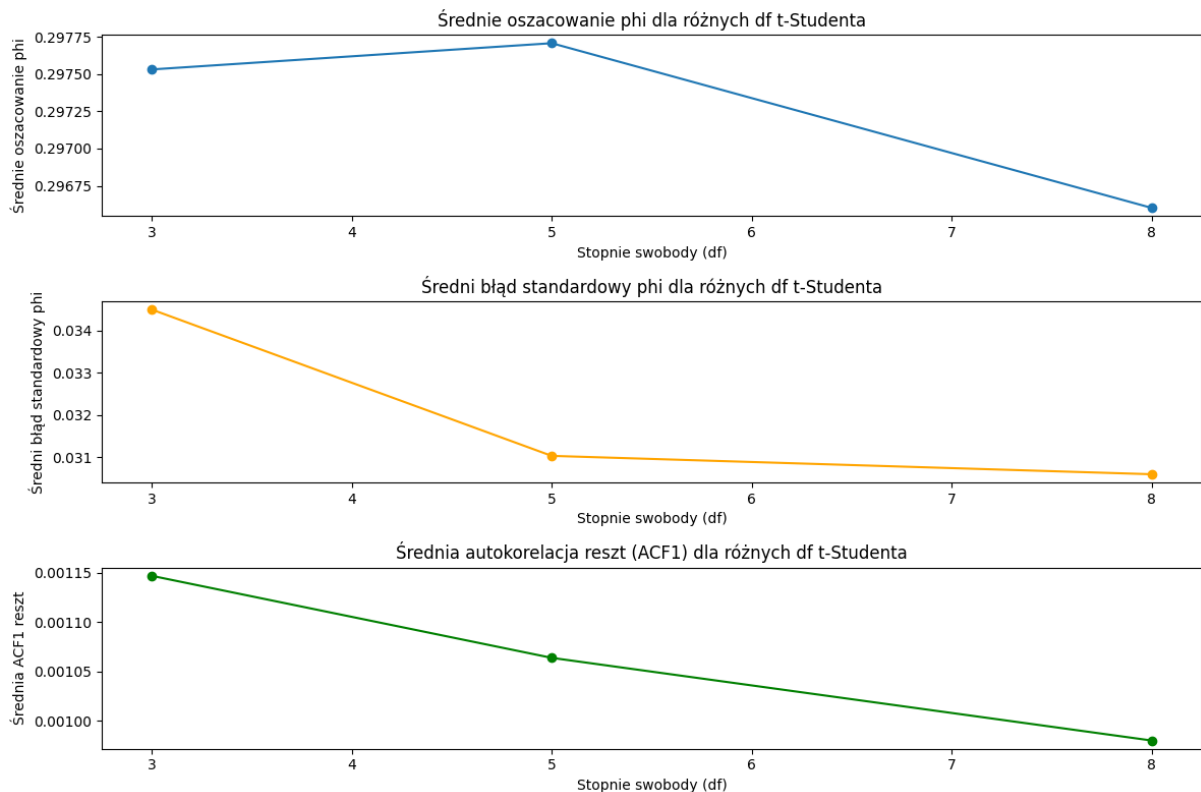
Stałe  $\phi = 0.3$ ,  $N = 50$



Stałe  $\phi = 0.3$ ,  $N = 100$



Stałe  $\phi = 0.3$ ,  $N = 1000$



## Podsumowanie

Przeprowadzone badanie miało na celu analizę wpływu błędnej specyfikacji rozkładu składnika losowego na własności estymatorów parametrów modelu ARMA. Dane generowano z rozkładu t-Studenta, ale estymację przeprowadzano przy założeniu normalności składników losowych. Dzięki zastosowaniu symulacji uwzględniających różne długości próby ( $N$ ), wartości parametru  $\phi$  oraz liczby stopni swobody rozkładu t-Studenta ( $df$ ), uzyskano zbiór wyników pozwalających na ocenę jakości estymacji z różnej perspektywy.

Wyniki symulacji wskazują, że błędne założenie o rozkładzie składnika losowego wpływa na nieobciążoność estymatorów oraz ich rozkład. Przy mniejszych próbach ( $N = 50, 100$ ) estymatory  $\phi$  wykazują większe obciążenie i większą zmienność w porównaniu z większymi próbami ( $N = 1000$ ). Z kolei liczba stopni swobody  $df$  znacząco wpływa na stabilność i precyzję estymatorów – mniejsze wartości  $df$  (tj. bardziej "grube ogony" rozkładu t-Studenta) prowadzą do większych odchyłeń standardowych estymatorów oraz większych odchyłeń ich rozkładu od normalności.

Autokorelacja reszt dopasowanych modeli generalnie maleje wraz ze wzrostem liczby obserwacji, jednak wykazuje pewne odchylenia od zera w mniejszych próbach, co wskazuje na niedoskonałość dopasowania modelu. Testy istotności i testy normalności potwierdziły, że rozkłady estymatorów  $\phi$  istotnie odbiegają od normalności w większości przypadków, szczególnie dla małych prób i niskich wartości  $df$ .

Zwiększenie liczby obserwacji ( $N$ ) znacząco poprawia jakość estymacji, zmniejsza obciążenie estymatorów oraz zmniejsza błędy standardowe. Przy dużych próbach ( $N = 1000$ ) estymatory są niemal nieobciążone, a ich precyzja znacząco wzrasta. Niemniej jednak, nawet przy większych

próbach, wpływ błędnej specyfikacji rozkładu składnika losowego pozostaje widoczny, szczególnie w kontekście testów diagnostycznych.

Podsumowując, przeprowadzone badanie dostarcza istotnych informacji na temat wpływu specyfikacji rozkładu składnika losowego na jakość estymacji modeli ARMA i podkreśla znaczenie poprawnej identyfikacji rozkładu w analizie szeregów czasowych.