$\boxed{№1}$ $S = \begin{Vmatrix} \cos\theta & \sin\theta\, e^{-i\varphi} \\ \sin\theta\, e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{Vmatrix}$

1) Поиск собственных значений: $\det(S - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & \sin\theta\, e^{-i\varphi} \\ \sin\theta\, e^{i\varphi} & -\cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = (\cos\theta - \lambda)(-\cos\theta - \lambda) - \sin\theta\, e^{-i\varphi} \cdot \sin\theta\, e^{i\varphi} =$$

$$= -(\cos\theta - \lambda)(\cos\theta + \lambda) - \sin^2\theta \cdot e^{0} = -[\cos^2\theta - \lambda^2] - \sin^2\theta =$$

$$= \lambda^2 - \sin^2\theta - \cos^2\theta = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \lambda = 1 \end{array}\right.$$

2) Поиск собственных векторов $\vec{\psi}_{-1} = \| \psi_1^{-1}\ \psi_2^{-1} \|^T$

① $\lambda_{-1} = -1$

$$\begin{Vmatrix} \cos\theta + 1 & \sin\theta \cdot e^{-i\varphi} \\ \sin\theta \cdot e^{i\varphi} & -\cos\theta + 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \psi_1^{-1} \\ \psi_2^{-1} \end{Vmatrix} = \vec{0}$$

$$\left[(\cos\theta + 1)\psi_1^{-1} + \sin\theta \cdot e^{-i\varphi} \cdot \psi_2^{-1} = 0 \right.$$

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$

$$\left[(\cos\theta + 1)\psi_1^{-1} + \sin\theta[\cos\varphi - i\sin\varphi]\psi_2^{-1} = 0 \right.$$

Пусть $\psi_1^{-1} = 1$. Тогда $(\cos\theta + 1) = [-\sin(\theta) \cdot e^{-i\varphi}] \cdot \psi_2^{-1}$

$$\psi_2^{-1} = \frac{\cos(\theta) + 1}{-\sin(\theta) \cdot e^{-i\varphi}} \Rightarrow \vec{\psi}^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 \\ \dfrac{\cos(\theta) + 1}{-\sin(\theta) \cdot e^{-i\varphi}} \end{Vmatrix}$$

Заметим, что $tg\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta}$

$$\frac{\cos\theta + 1}{-\sin\theta \cdot e^{-i\varphi}} = -e^{i\varphi} \cdot \frac{1}{tg\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \quad \vec{\psi}_{-1} = \begin{Vmatrix} 1 \\ -\dfrac{e^{i\varphi}}{tg\left(\frac{\theta}{2}\right)} \end{Vmatrix}$$

$|\vec{\psi}_{-1}| = \sqrt{(\vec{\psi}^*_{-1} \cdot \vec{\psi})} = \sqrt{\ldots e^{i\varphi} \ldots e^{-i\varphi}}$

$$\frac{\cos\theta+1}{-\sin\theta\cdot e^{-i\varphi}} = -e^{i\varphi}\cdot\frac{1}{tg\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \quad \vec{\psi}_{-1} = \begin{Vmatrix} 1 \\ -\frac{e^{i\varphi}}{tg\left(\frac{\theta}{2}\right)} \end{Vmatrix}$$

$$|\vec{\psi}_{-1}| = \sqrt{(\vec{\psi}^{*}_{-1}\cdot\vec{\psi}_{-1})} = \sqrt{1+\frac{-e^{i\varphi}}{tg\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cdot\frac{-e^{-i\varphi}}{tg\left(\frac{\theta}{2}\right)}} = \sqrt{1+\frac{+e^{0}}{tg^{2}\left(\frac{\theta}{2}\right)}} =$$

$$= \sqrt{1+ctg^{2}\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \sqrt{\frac{1}{\sin^{2}\left(\frac{\theta}{2}\right)}} = \frac{\mp 1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \quad \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \text{ т.к. модуль} > 0$$

$$\boxed{1+ctg^{2}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{\sin^{2}\left(\frac{\theta}{2}\right)}}$$

$$\frac{-e^{i\varphi}\cdot\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = -e^{i\varphi}\cdot\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Так, $\vec{\psi}^{-1}_{\text{нормир}} = \begin{Vmatrix} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -e^{i\varphi}\cdot\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{Vmatrix}$

(2) $\lambda_1 = 1$; $\begin{Vmatrix} \cos\theta-1 & \sin\theta\cdot e^{-i\varphi} \\ \sin\theta\cdot e^{i\varphi} & -\cos\theta-1 \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} \psi_1^1 \\ \psi_2^1 \end{Vmatrix} = \vec{0}$

$(\cos\theta-1)\,\psi_1^1 + \sin\theta\, e^{-i\varphi}\psi_2^1 = 0$. Пусть $\psi_1^1 = 1$, тогда $(\cos\theta-1) = -\sin\theta\cdot e^{-i\varphi}\psi_2^1$

$$(1-\cos\theta) = \frac{\sin\theta}{e^{i\varphi}}\psi_2^1 \Rightarrow \psi_2^1 = \frac{(1-\cos\theta)\,e^{i\varphi}}{\sin\theta} = tg\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\varphi}$$

$$|\vec{\psi}_1| = \sqrt{(\vec{\psi}_1\cdot\vec{\psi}_1^{*})} = \sqrt{1+tg^{2}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot e^{i\varphi}\cdot e^{-i\varphi}} = \sqrt{1+tg^{2}\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\vec{\psi}_{1\,\text{нормир}} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\begin{Vmatrix} 1 \\ \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}e^{i\varphi} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot e^{i\varphi} \end{Vmatrix}$$

проверка ортогональности $(\langle\vec{\psi}^1|\vec{\psi}^{-1}\rangle = 0\,?$

$$\langle\vec{\psi}_1|\vec{\psi}_{-1}\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot e^{-i\varphi}\cdot(-e^{i\varphi})\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0.$$

Задание 3 частица со спином в поле

[№2] $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{Vmatrix}1\\1\end{Vmatrix}$, $S = \begin{Vmatrix}\cos\theta & \sin\theta\, e^{-i\varphi}\\ \sin\theta\, e^{i\varphi} & -\cos\theta\end{Vmatrix}$ $\vec{\psi} = \begin{Vmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{Vmatrix}$

состояние

$|\psi\rangle = C_1|\psi^1\rangle + C_{-1}|\psi^{-1}\rangle$ $\quad \begin{Vmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} C_1\psi_1^1 + C_{-1}\psi_1^{-1}\\ C_1\psi_2^1 + C_{-1}\psi_2^{-1}\end{Vmatrix}$

с. в. S

Разложим по базису ψ из собственных векторов оператора $\hat{S}$

$$\langle\psi^1|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{Vmatrix}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot e^{-i\varphi}\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1\\1\end{Vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\frac{\theta}{2} + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot e^{-i\varphi}\right] = C_1$$

$$\langle\psi^{-1}|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{Vmatrix}\sin\frac{\theta}{2} & -\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi}\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1\\1\end{Vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sin\frac{\theta}{2} - e^{-i\varphi}\cos\frac{\theta}{2}\right] = C_{-1}$$

$$p_1 = |C_1|^2 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot e^{-i\varphi}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}e^{+i\varphi}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos^2\frac{\theta}{2} + \underbrace{\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}}_{\frac{1}{2}\sin\theta} e^{+i\varphi} + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\varphi} + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{0}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2}\sin\theta\left[e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right]\right] = \frac{1}{2}\left[1 + \sin\theta\cdot\cos\varphi\right]$$

$$p_2 = |C_1|^2 = \frac{1}{2}\left[\sin\frac{\theta}{2} - e^{-i\varphi}\cos\frac{\theta}{2}\right]\left[\sin\frac{\theta}{2} - e^{i\varphi}\cdot\cos\frac{\theta}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin^2\frac{\theta}{2} - e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2} - e^{-i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}\left[e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right]\right] = \frac{1}{2}\left[1 - \sin\theta\cdot\cos\varphi\right]$$

Проверка: $p_1 + p_2 = 1$. ✓

$\frac{...}{...} = 0$ — не верно

Задание 2. Принцип наименьшего действия. Рассмотрим двумерный осциллятор, потенциальная энергия которого дается выражением

$$U(x,y) = \frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2)\ ;\quad \text{н.у.}: \begin{cases} x(0)=a \\ \dot{x}(0)=0 \\ y(0)=0 \\ \dot{y}(0)=v_0 \end{cases}$$

1) Найти траекторию осциллятора, пользуясь уравнениями движения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

$$L = \frac{m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}{2} - \frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{y}^2}{2} - \frac{m\omega^2 x^2}{2} - \frac{m\omega^2 y^2}{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m}{2}\cdot 2\dot{x} = m\dot{x}\ ;\quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{m}{2}\cdot 2\dot{y} = m\dot{y}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x}\ ;\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = m\ddot{y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{m\omega^2\cdot 2x}{2} = -m\omega^2 x\ ;\quad \frac{\partial L}{\partial y} = -m\omega^2 y$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} \equiv m\ddot{x} + m\omega^2 x\ ;\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} \equiv m\ddot{y} + m\omega^2 y$$

Уравнения движения:
$$\begin{cases} m\ddot{x} + m\omega^2 x = 0 \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x \\ m\ddot{y} + m\omega^2 y = 0 \Rightarrow \ddot{y} = -\omega^2 y \\ x(0)=a \\ \dot{x}(0)=0 \\ y(0)=0 \\ \dot{y}(0)=v_0 \end{cases}$$

$\cancel{\frac{d}{dt}\dot{x} = -\omega^2 x}$ Пусть $\cancel{x = e^{\lambda_x t},\ \ddot{x} = \lambda_x^2 e^{\lambda_x t} = -\omega^2 e^{\lambda_x t}}$

~~Отсюда~~

ЛОДУ II порядка вида с постоянными коэф.

$x'' + px' + qp = 0$

$\ddot{x} + 0\cdot\dot{x} + \omega^2 x = 0$

$p = 0,\ q = \omega^2,$

Найдём корни характеристического уравнения

$k^2+pk+q=0 \Rightarrow \cancel{1+p+q=0}$ $\quad k^2=-q;\ k^2=-\omega^2$

$D=p^2-4q=0-4\omega^2=-4\omega^2<0$ $\quad k=\pm i\omega$

Решение имеет вид $\quad \beta=\omega$

$$\boxed{x(t)=e^{\alpha t}\left[C_1\cdot\cos(\beta t)+C_2\cdot\sin(\beta t)\right]}$$

$$\boxed{k_{1,2}=\alpha\pm\beta i} \quad \alpha=0 \Rightarrow e^{\alpha t}=1$$

$$x(t)=C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t)$$

$$x(0)=a \Rightarrow C_1\cdot\cos 0+C_2\sin 0=C_1 \Rightarrow C_1=a.$$

$$\dot{x}(0)=C_1\cdot\omega(-\sin(\omega\cdot 0))+C_2\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot 0)=0$$

$$C_2\omega=0 \Rightarrow C_2=0$$

$$x(t)=a\cdot\cos(\omega t)$$

Аналогично для $y(t)$ имеем: $\quad y(t)=C_1\cdot\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t)$

$$y(0)=C_1=0 \Rightarrow C_1=0$$

$$\dot{y}(0)=C_1\cdot\omega(-\sin 0)+C_2\cdot\omega\cdot\overset{1}{\cos 0}=v_0, \quad C_2\omega=v_0 \Rightarrow C_2=\frac{v_0}{\omega}$$

$$y(t)=\frac{v_0}{\omega}\cdot\sin(\omega t)$$

Таким образом, траектория осциллятора эллиптическая:

$$\begin{cases} x(t)=a\cdot\cos(\omega t) \Rightarrow \cos(\omega t)=\dfrac{x(t)}{a} \\ y(t)=\dfrac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)=\dfrac{v_0}{\omega}\sqrt{1-\cos^2(\omega t)}=\dfrac{v_0}{\omega}\sqrt{1-\dfrac{x^2(t)}{a^2}}=y(t) \end{cases}$$

$$\frac{v_0^2}{\omega^2}\left(1-\frac{x^2(t)}{a^2}\right)=y^2(t); \quad \frac{\omega^2}{v_0^2}y^2(t)+\frac{x^2(t)}{a^2}=1$$

$y(x)$!

Найти траекторию осциллятора пользуясь принципом Мопертюи

$$S = \int \vec{p}\, d\vec{q} \to max \qquad S = \int p_x dx + \int p_y dy$$

$$\underbrace{p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}}_{\substack{\parallel \\ m\dot{x}}} ; \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$$

$$S = \int m\dot{x}dx + \int m\dot{y}\, dy = m\int \frac{d}{dt} x\, dx + m\int \frac{d}{dt} y\, dy =$$

$$\int \underbrace{\frac{d}{dt}x}_{u} \underbrace{dx}_{dv} \left| \begin{array}{l} du = \ddot{x} \\ v = x \end{array} \right| = \frac{dx}{dt} \cdot x - \int x \cdot \ddot{x}$$

$$= m\dot{x}\int dx + m\dot{y}\int dy \qquad H = \sum_k p_k \dot{q}_k - \mathcal{L} \ominus$$

$$\ominus\ m\dot{x}^2 + m\dot{y}^2 - \frac{m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}{2} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2) = \frac{m}{2}\left[\dot{x}^2+\dot{y}^2 + \omega^2(x^2+y^2)\right] = E.$$

$$E = \frac{m}{2}\left[\frac{dx^2+dy^2}{dt^2} + \omega^2(x^2+y^2)\right] \qquad \frac{2E}{m} - \omega^2(x^2+y^2) = \frac{dx^2+dy^2}{dt^2}$$

$$dt = \sqrt{\frac{dx^2+dy^2}{\frac{2E}{m} - \omega^2(x^2+y^2)}}$$. Тогда импульсы: $p_x = m\frac{dx}{dt} =$

$$p_x = m\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}\sqrt{\frac{2E}{m} - \omega^2(x^2+y^2)}, \qquad p_y = m\frac{dy}{\sqrt{-\text{"}-}} \cdot \sqrt{-\text{"}-}$$

подставляем в S: $S = \int m \frac{dx^2+dy^2}{\sqrt{dx^2+dy^2}}\sqrt{\frac{2E}{m} - \omega^2(x^2+y^2)} = \left| x' = \frac{dx}{dy} \right| =$

$$= \int m \frac{x'^2 dy^2 + dy^2}{\sqrt{x'^2 dy^2 + dy^2}}\sqrt{\frac{2E}{m} - \omega^2(x^2+y^2)} = \int m \frac{dy^2(x'^2+1)}{dy\sqrt{x'^2+1}}\sqrt{\dots} =$$

$$= \int m(dy)\sqrt{x'^2+1}\sqrt{\frac{2E}{m} - \omega^2(x^2+y^2)}$$

Роль канонической координаты q здесь играет x, роль времени y, а лагранжиан $\mathcal{L}(x, x', y) = m\sqrt{(x'^2+1)\left(\frac{2E}{m} - \omega^2(x^2+y^2)\right)}$.

Тогда и условия экстремума ф-я будут просто ур-я Эйлера-Лагранжа. $\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dy}\frac{\partial L}{\partial x'}$, или

$\frac{\partial L}{\partial x} =>$

$$m\sqrt{(x'^2+1)}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{2E}{m}-\omega^2(x^2+y^2)\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-\omega^2)\cdot 2x = \frac{-\omega^2 m x\sqrt{x'^2+1}}{\sqrt{\frac{2E}{m}-\omega^2(x^2+y^2)}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x'} = m\sqrt{\frac{2E}{m}-\omega^2(x^2+y^2)}\;\frac{1}{2}(x'^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x' =$$

$$= \frac{m\sqrt{\frac{2E}{m}-\omega^2(x^2+y^2)}\;x'}{\sqrt{x'^2+1}}$$

$$\cancel{\frac{d}{dy}\frac{\partial L}{\partial x'} = \frac{mx'}{\sqrt{x'^2+1}}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{2E}{m}-\omega^2(x^2+y^2)\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-\omega^2)\cdot 2y =}$$

$$\cancel{= \frac{-mx'y\omega^2}{\sqrt{x'^2+1}\sqrt{\frac{2E}{m}-\omega^2(x^2+y^2)}}}$$

~~Пусть $\Phi(x) =$~~

$$\frac{-\omega^2 x\sqrt{x'^2+1}}{\sqrt{\frac{2E}{m}-\omega^2(x^2+y^2)}} = \frac{d}{dy}\left\{\overbrace{\frac{x'\sqrt{\frac{2E}{m}-\omega^2(x^2+y^2)}}{\sqrt{x'^2+1}}}^{\Phi}\right\}$$

$$\frac{-\omega^2 x\cdot x'}{\Phi} = \frac{d}{dy}\Phi \Rightarrow -\omega^2 x x' = \Phi\frac{d\Phi}{dy} = -\omega^2 x\frac{dx}{dy}$$

$$\int\Phi\, d\Phi = -\int\omega^2 x\, dx \Rightarrow \Phi^2 = -\omega^2 x^2 + C$$

$$\frac{x'^2\left(\frac{2E}{m}-\omega^2(x^2+y^2)\right)}{x'^2+1} = -\omega^2 x^2 + C$$

$x(0)=a$, $y(0)=0$ из н.у

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dt}\Big/\frac{dy}{dt} = \dot{x}/\dot{y} = 0/v_0 = 0$$

$$\frac{0}{1} = -\omega^2 a^2 + C \Rightarrow C = \omega^2 a^2$$ (рассмотрели в точке $x(0)=a$ и $y(0)=0$)

$$x'^2 \cdot \frac{2E}{m} - x'^2\omega^2(x^2+y^2) = -\omega^2 x^2(x'^2+1) + \omega^2 a^2 (x'^2+1)$$

$$x'^2 \cdot \frac{2E}{m} - x'^2\omega^2 y^2 \cancel{- x'^2 \omega^2 x^2} = \cancel{-\omega^2 x^2 x'^2} - \omega^2 x^2 + \omega^2 a^2 x'^2 + \omega^2 a^2$$

$$x'^2\left(\frac{2E}{m} - \omega^2 y^2 - \omega^2 a^2\right) = \omega^2(a^2 - x^2)$$

$$x' = \pm\sqrt{\frac{\omega^2(a^2-x^2)}{\left(\frac{2E}{m} - \omega^2 y^2 - \omega^2 a^2\right)}}$$

$$\frac{dx}{\omega^q\sqrt{a^2-x^2}} = \pm\frac{dy}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \omega^2(y^2+a^2}} = \pm\frac{dy}{\sqrt{v_0^2 + \cancel{\omega^2 a^2} - \omega^2 y^2 - \cancel{\omega^2 a^2}}}$$

$$E = \frac{m}{2}\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \omega^2(x^2+y^2)\right] = const$$

$$E = \frac{m}{2}\left[v_0^2 + \omega^2 a^2\right] \Rightarrow \frac{2E}{m} = v_0^2 + \omega^2 a^2$$

$$\frac{dx}{\omega\sqrt{a^2-x^2}} = \pm\frac{dy}{\sqrt{v_0^2 - \omega^2 y^2}} \cdot \cancel{\pm \frac{dy}{}}$$

Значит, здесь был правильно выбран знак

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \pm\int\frac{\omega\, dy}{\omega\sqrt{\frac{v_0^2}{\omega^2} - y^2}} = \pm\frac{dy}{\sqrt{\frac{v_0^2}{\omega^2} - y^2}}$$

Проверим:

$\frac{x}{a} = \frac{y\omega}{v_0}$ $\quad x(0) = a$, $y(0) = 0$

$\frac{a}{a} = 0$ — не верно.

(Если $\arcsin\frac{x}{a} = \arcsin\frac{y\omega}{v_0}$)

$$\arcsin\frac{x}{a} = \arccos\frac{y\omega}{v_0}$$

$$\sin\left[\arcsin\frac{x}{a}\right] = \sin\left[\arccos\frac{y\omega}{v_0}\right]$$

$$\frac{x}{a} = \sqrt{1 - \frac{y^2\omega^2}{v_0^2}} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2\omega^2}{v_0^2} = 1$$

Задание 3. Частица со спином в однор. магн. поле, наклонён-
$\hat{H} = -\mu B S$, ным под полярным углом θ и азимутальным φ.

S-оператор спина, $\hat{S} = \begin{Vmatrix} \cos\theta & \sin\theta\, e^{-i\varphi} \\ \sin\theta\, e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix} =$

$(H): |\psi\rangle(0) = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix}$ $\quad \hat{H} = -\mu B \begin{Vmatrix} \cos\theta & \sin\theta\, e^{-i\varphi} \\ \sin\theta\, e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{Vmatrix}$

Решая уравнение Шрёдингера с помощью матричной экспоненты, найти вектор состояния частицы через время t.

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi} \qquad i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \underbrace{-\mu B\hat{S}}_{\hat{H}}\psi$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\hat{H}}{i\hbar}\psi, \quad \int\frac{d\psi}{\psi} = \int\frac{\hat{H}}{i\hbar}dt \Rightarrow \ln\psi = \frac{\hat{H}t}{i\hbar} + C, \quad \psi = Ae^{\frac{\hat{H}t}{i\hbar}}$$

ψ_0

$$\boxed{e^{\hat{S}} = 1 + \frac{\hat{S}}{1!} + \frac{\hat{S}^2}{2!} + \dots} \qquad |\psi\rangle(t) = e^{\frac{\hat{H}t}{i\hbar}}|\psi\rangle(0)$$

$$\hat{S}^2 = \begin{Vmatrix} \cos\theta & \sin\theta\, e^{-i\varphi} \\ \sin\theta\, e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \cdot e^{-i\varphi} \\ \sin\theta \cdot e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \hat{I}$$

$$\hat{S}^{2k} = \hat{I}, \quad \hat{S}^{2k+1} = \hat{S}$$

$$e^{\frac{\hat{H}t}{i\hbar}} = 1 + \frac{\hat{H}t}{i\hbar 1!} + \frac{\hat{H}^2 t^2}{i^2\hbar^2 2!} + \frac{\hat{H}^3 t^3}{i^3\hbar^3 3!} + \dots =$$

$$= 1 + \frac{-\mu B t}{i\hbar 1!}\hat{S} + \frac{(-\mu B t)^2 \hat{I}}{i^2\hbar^2 2!} + \frac{(-\mu B t)^3 \hat{S}}{i^3\hbar^3 3!} + \frac{(-\mu B t)^4 \hat{I}}{i^4\hbar^4 4!} + \dots =$$

$\frac{1}{i} = -i$, $\frac{1}{i^3} = -i$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$

$$= 1 + \frac{i\mu B t}{\hbar 1!}\hat{S} - \frac{(\mu B t)^2 \hat{I}}{\hbar^2 2!} - i\frac{(\mu B t)^3 \hat{S}}{\hbar^3 3!} + \frac{(\mu B t)^4 \hat{I}}{\hbar^4 4!} + \dots =$$

$$= \hat{I}\cos\left(\frac{\mu B t}{\hbar}\right) + i\hat{S}\sin\left(\frac{\mu B t}{\hbar}\right); \quad \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix}; \quad \hat{S}\begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta\, e^{i\varphi} \end{Vmatrix}$$

$$e^{\frac{\hat{H}t}{i\hbar}}|\psi\rangle(0) = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix}\cos\left(\frac{\mu B t}{\hbar}\right) + i\begin{Vmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta\, e^{i\varphi} \end{Vmatrix} \cdot \sin\left(\frac{\mu B t}{\hbar}\right)$$

Задание 4.

$\psi(x) = const\, x^2 \cdot e^{\frac{-x}{\lambda}}, \ x \geq 0 \qquad const = A$

(1) Найти нормировочную константу

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1 = \int \psi^*(x)\cdot\psi(x)\,dx = A^2\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{x}{\lambda}}\cdot x^2\cdot e^{-\frac{x}{\lambda}} x^2\,dx =$$

$$= A^2\int_0^{+\infty} \underbrace{x^4}_{u}\underbrace{e^{\frac{-2x}{\lambda}}dx}_{dv} = \left| \begin{matrix} du = 4x^3dx \\ v = e^{\frac{-2x}{\lambda}}\cdot\frac{-\lambda}{2} \end{matrix} \right| = A^2x^4\cdot\left(\frac{-\lambda}{2}\right)\cdot e^{\frac{-2x}{\lambda}}\Big|_0^{+\infty} -$$

$$-A^2\int_0^{+\infty}\left(\frac{-\lambda}{2}\right)e^{\frac{-2x}{\lambda}}\cdot 4x^3dx = \frac{-A^2\lambda x^4}{2e^{2x/\lambda}}\Big|_0^{+\infty} + 2\lambda A^2\int \underbrace{x^3}_{u}\underbrace{e^{-2x/\lambda}dx}_{dv} = \left|\begin{matrix} du = 3x^2dx \\ v = \frac{-\lambda}{2}e^{-2x/\lambda}\end{matrix}\right|$$

$$= \frac{-A^2\lambda}{2}\underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{e^{2x/\lambda}}}_{\text{лопиталь; экспонента растет быстрее}} - \left(\frac{-A\lambda}{2}\right)\cdot\frac{0}{1} + 2\lambda(\cdot A^2)\left[x^3\cdot\frac{-\lambda}{2}e^{\frac{-2x}{\lambda}}\Big|_0^{+\infty} - \int_0\left(\frac{-\lambda}{2}\right)\cdot e^{\cdot}\cdot 3x^2dx\right] =$$

$$= \frac{-A^2\lambda}{2}\cdot 0 - 0 + 2A^2\lambda x^3\frac{-\lambda}{2e^{+2x/\lambda}}\Big|_0^{+\infty} + \frac{\lambda}{\cancel{2}}\cdot 3\int_0 \cdot\cancel{2}A^2\lambda\, x^2 e^{-2x/\lambda}\cdot dx =$$

$$= 3A^2\lambda^2\int_0^{+\infty}\underbrace{x^2}_{u}\underbrace{e^{-2x/\lambda}dx}_{dv} = \left|\begin{matrix} du = 2x\,dx \\ v = \frac{-\lambda}{2}e^{-2x/\lambda}\end{matrix}\right| = \cancel{3A^2\lambda^2 x^2\cdot\left(\frac{-\lambda}{2}\right)e^{-2x/\lambda}}\Big|_0^{+\infty} -$$

$$-\int_0^{+\infty}\left(\frac{-\lambda}{\cancel{2}}\right)e^{-2x/\lambda}\cdot\cancel{2}x\,dx\cdot 3A^2\lambda^2 = 3A^2\lambda^3\int_0^{+\infty} e^{-2x/\lambda}\underbrace{x}_{u}dx = \left|\begin{matrix} du = dx \\ v = \frac{-\lambda}{2}e^{-2x/\lambda}\end{matrix}\right| =$$

$$= \cancel{3A^2\lambda^3 x\cdot\left(\frac{-\lambda}{2}\right)e^{-2x/\lambda}}\Big|_0^{+\infty} - 3A^2\lambda^3\int_0^{+\infty}\left(\frac{-\lambda}{2}\right)e^{-2x/\lambda}dx =$$

$$= \frac{3A^2\lambda^4}{2}\int_0^{+\infty} e^{-2x/\lambda}dx = \frac{3A^2\lambda^4}{2}e^{\frac{-2x}{\lambda}}\cdot\frac{-\lambda}{2}\Big|_0^{+\infty} = \frac{3A^2\lambda^5}{4e^{2x/\lambda}}\Big|_{+\infty}^{0} =$$

$$= \frac{3A^2\lambda^5}{4} - 0 = \frac{3A^2\lambda^5}{4} = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{4}{3\lambda^5}}$$

Задание 4 п. 2 $\psi(x) = \sqrt{\frac{4}{3\lambda^5}}\, x^2 e^{-x/\lambda}, \quad x \geq 0$

Выписать выражение для вероятности измерить координату в интервале $[x, x+dx]$

$$p = |\psi(x)|^2 dx = \frac{4}{3\lambda^5} x^4 e^{-\frac{2x}{\lambda}} dx$$

Задание 4 п. 3 Найти среднее значение координаты в данном состоянии.

$$\bar{f} = \sum_n \underbrace{f_n}_{\text{с.з.}} \underbrace{|a_n|^2}_{\text{соотв. вер-ть}}$$

$$\langle x \rangle = \int_0^{+\infty} x \cdot \psi^*(x) \cdot \psi(x)\, dx = \int_0^{+\infty} x^5 \cdot \frac{4}{3\lambda^5} e^{-2x/\lambda} dx =$$

$$= \frac{4}{3\lambda^5} \int_0^{+\infty} x^5 e^{-2x/\lambda} \cancel{dx} = \frac{\cancel{4}}{3\lambda^5} \cdot \frac{\overset{5}{\cancel{15}}\lambda^6}{\cancel{8}\,2} = \frac{5}{2}\lambda \text{ (см. Wolfram Alpha)}$$

(Счёт аналогичен п. 1)