# Оглавление



## 3.5. Колебания прямоугольной мембраны

Р! мембр., имеющую в покое форму прямоуг, огр прямыми $x=0, x=l, y=0, y=m$. Ур-ие колеб. мембр. $u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy})$(108) нач. усл $u(x,y,0) = f(x,y)$, (109), $u_t(x,y,0)=F(x,y)$(110)
гр усл $u(0,y,t) = 0,\ u(l,y,t) = 0,\ u(x,0,t) = 0,\ u(x,m,t) = 0.$ (111)
Решаем методом Фурье. Найдем реш в виде произведения 3 ф-ций: $u(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t).$ (112)
Из (111) следует $X(0) = 0, X(l) = 0, Y(0) = 0, Y(m) = 0.$ (113). Подставим (112) в (108): $XYT''=a^2(X''YT+XY''T)$Разделим переменные: $\frac{T''}{a^2T}=\frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}$
$\frac{X''}{X}=-\lambda^2, \frac{Y''}{Y}=-\mu^2, \frac{T''}{T}=-(\lambda^2+\mu^2)$(114). Для ф-ции X(x) получаем $X''+\lambda^2X=0, X(0)=X(l)=0$ (115) , для Y (y): $Y''+\mu^2Y=0, Y(0)=Y(m)=0$(116), для T(t): $T''+a^2(\lambda^2+\mu^2)T=0$(117) . Реш-ие (115) имеет вид
$X(x) = C1\,cos\,\lambda x + C2\,sin\,\lambda x$, (118). Реш-ие (116) имеет вид $Y(y) = D1\,cos\,\mu y + D2\,sin\,\mu y$. (119). Из краевого усл-ия $X(0) = X(l) = 0$ находим $C1 = 0$ и $\lambda l = \pi k$, где $k$ – целое число. Аналогично, из $Y(0) = Y(m) = 0$ находим $D1 = 0$ и $\mu m = \pi n$, где $n$ – целое число.
В рез-те получаем собств. числа и собств. ф-ции $\lambda_k=\frac{\pi k}{l}, X_k(x)=\sin\frac{\pi kx}{l}$(120), $\mu_n=\frac{\pi n}{m}, Y_n(y)=\sin\frac{\pi ny}{m}$121). Ур-е для ф-ции $T(t)$ примет вид: $T''+\pi^2a^2(\frac{k^2}{l^2}+\frac{n^2}{m^2})T(t)=0$(122). Реш-е этого ур-я, зависящее от 2 параметров $k$ и $n$, имеет вид: $T_{kn}(t)=a_{kn}\cos\omega_{kn}t+b_{kn}\sin\omega_{kn}t$(123).
Здесь $\omega_{kn}=\pi a\sqrt{\frac{k^2}{l^2}+\frac{n^2}{m^2}}$(124)- собств. частоты колеб мембр. Т.о., ЧР ур-я колеб.прямоуг. мембраны имеет вид $u_{kn}(x,y,t)=(a_{kn}\cos\omega_{kn}t+b_{kn}\sin\omega_{kn}t)\sin\lambda_k x sin\mu_n y$(125) Можно его привести : $u_{kn}(x,y,t)=F_{kn}\sin(\omega_{kn}t+\varphi_{kn})\sin\lambda_k x sin\mu_n y$(126) где $F_{kn}=\sqrt{a_{kn}^2+b_{kn}^2}$, $tan\varphi_{kn}=$

$\frac{a_{kn}}{b_{kn}}$. Видно, что каждая т-ка мембраны с коорд. $(x,y)$ совершает простое гармонич. колеб. с частотой $\omega_{kn}$и амплитудой$F_{kn}\sin\lambda_k x sin\mu_n y$ Все т-ки колеблются в одной фазе. Точки, координаты которых удовл-ют ур-ям $\sin\lambda_k x=1, \sin\mu_n y=1$будут колебаться с наиб. амплитудой наз-ся пучностями. Линии, т-ки которых не колеблются (амплитуда равна нулю), наз-ся узловыми линиями. Общ. реш-ие задачи о колеб. мембр. представляется как сумма частных $u(x,y,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(a_{kn}\cos\omega_{kn}t+b_{kn}\sin\omega_{kn}t)\sin\lambda_k x sin\mu_n y$(127) Неизв. коэф-ты a и b ищутся из нач. усл.: $u(x,y,0)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{kn}\sin\frac{\pi k}{l}x sin\frac{\pi n}{m}y=f(x,y)$(128) $u_t(x,y,0)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\omega_{kn}b_{kn}\sin\frac{\pi k}{l}x sin\frac{\pi n}{m}y=F(x,y)$(129) Формулы (128) и (129) предс-ют собой разложение ф-ии 2 перем. в двойной ряд Фурье. Коэф-ты этого разложения находятся аналогично коэф-там однократного ряда и имеют вид $a_{kn}=\frac{4}{lm}\int_0^l\int_0^m f(x,y)\sin\frac{\pi k}{l}x sin\frac{\pi n}{m}y dxdy$(130) $b_{kn}=\frac{4}{lm\omega_{kn}}\int_0^l\int_0^m F(x,y)\sin\frac{\pi k}{l}x sin\frac{\pi n}{m}y dxdy$(131)

## 5. Ур эллиптич вида

К ур-ям эллиптич. типа обычно приводит р!-е стац процессов различной физ. природы. Чаще всего встречается ур-е Лапласа: $\Delta u=0$. Гармонич ф-ции – ф-ции, кот. непрерывны в некоторой обл. вместе со своими производными до 2-го порядка включительно, и уд. в этой обл. ур-ю Лапласа.

Оператор Лапласа в декартовых координатах имеет вид:$\Delta u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}$(246)

в цилиндрических координатах: $\Delta u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}$(247)

в сферических координатах: $\Delta u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}$(248)

## 5.1 Задачи, приводящие к ур-ю Лапласа

1) Стационарное тепловое поле
В нестац. случае температура уд. ур-ю теплопроводности $u_t=a^2\Delta u$
В стац. случае, когда распределение температуры не меняется с течением времени $u=u(x,y,z)$, приходим к ур-ю Лапласа $\Delta u=0$
В случае наличия тепловых источников получаем ур-е Пуассона $\Delta u=-g$
2) Электрическое поле неподвижных зарядов
Напряженность эл. поля уд. ур-ю, выражающему Th Гаусса в дифф. форме:$divE=4\pi\rho$, где $\rho(x,y,z)$- объемная плотность зарядов. Напряженность поля связана со скалярным потенциалом $E=-grad\varphi$. В рез-те получаем: $(-grad\varphi)=-\Delta\varphi=4\pi\rho$или $\Delta\varphi=-4\pi\rho$(т.е. получили ур-ие Пуассона). В случае отсутствия объемных зарядов приходим к ур-ю Лапласа: $\Delta\varphi=0$.

## 4.2. Реш задачи о тепл-ти в ∞стержне методом Фурье

Рассм теплопр-й стержень, боковая пов-ть которого теплоизолир. Ур теплопр-ти имеет вид $\frac{\delta u}{\delta t}=a^2\frac{\delta^2u}{\delta x^2}(178)$. Стержень считают бесконечным. В рез-те имеем только нач усл $u(x,0)=f(x)(179)$, что соотв задаче Коши. Заменим $\tau=a^2t$, тогда $\frac{\delta u}{\delta t}=\frac{\delta u\delta\tau}{\delta\tau\delta t}=a^2\frac{\delta u}{\delta\tau}$и ур принимает вид $\frac{\delta u}{\delta\tau}=\frac{\delta^2u}{\delta x^2}(180)$,нач усл $u(x,0)=f(x)$.Будем искать реш в виде $u(x,\tau)=X(x)T(\tau)$. Подст его в (180): $\frac{T'(\tau)}{T(\tau)}=\frac{X''(x)}{X(x)}(181)$. Т.к. левая часть этого ур зависит только от $\tau$, а правая – только от $x$, то рав-во возм только если левая и правая части равны константе: $\frac{T'(\tau)}{T(\tau)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=\beta(182)$. В рез для $T(\tau)$получаем $T(\tau)=Ce^{\beta\tau}$. Т.к. темп стержня должна ост ∞ при $t\to\infty$, то $\beta<0$, т.е. мы можем положить $\beta=-\lambda^2$и $T(\tau)=e^{-\lambda^2\tau}$. Ур для $X(x)$принимает вид $X''(x)+\lambda^2X(x)=0$и его о.р. $X(x)=Dcos\lambda x+Esin\lambda x$. Тогда ч.р. ур (180) принимает вид $u(x,\tau)=(Acos\lambda x+Bsin\lambda x)e^{-\lambda^2\tau}(183)$. В общем случае в (183) $A=A(\lambda),B=B(\lambda)$и семейство ч.р. ур (180) имеет вид $u_\lambda(x,\tau)=(A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x)e^{-\lambda^2\tau},-\infty<\lambda<\infty(184)$. О.Р. ур (180) записывается как суперп ч.р. $u(x,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}(A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x)e^{-\lambda^2\tau}d\lambda(185)$. Неизв $A(\lambda)$и $B(\lambda)$подбир так, чтобы удовл нач усл: $u(x,0)=f(x)$кот примет вид $\int_{-\infty}^{\infty}(A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x)d\lambda=f(x)(186)$. Рав-во (186) – разлож $f(x)$в инт-л Фурье, кот в общ сл имеет вид: $f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\lambda(\xi-x)d\xi(187)$или с учетом $\cos\lambda(\xi-x)=\cos\lambda\xi\cos\lambda x+\sin\lambda\xi\sin\lambda x(188)$получаем $f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\{(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi d\xi)\cos\lambda x+(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi d\xi)\sin\lambda x\}d\lambda$(189). Сравнивая (186) и (189), найдем $A(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi d\xi,B(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi d\xi$(190). Подст (190) в (185): $u(x,\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)e^{-\lambda^2\tau}d\xi(191)$.Т.о. получили реш задачи о тепл-ти в ∞стержне. Для физ интерп изменим порядок интегр-я: $u(x,\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda^2\tau}\cos\lambda(x-\xi)d\lambda\}d\xi(192)$.Преобр внутр инт-л. Для этого заменим $\lambda=\frac{\sigma}{\sqrt\tau}$и $\frac{x-\xi}{\sqrt\tau}=\omega$: $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda^2\tau}\cos\lambda(x-\xi)d\lambda=\frac{1}{\sqrt\tau}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\sigma^2}\cos\sigma\omega d\sigma=\frac{1}{\sqrt\tau}I(\omega)$. Для вычисления $I(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\sigma^2}\cos\sigma\omega d\sigma$ найдем его пр-ю:$I'(\omega)=-\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\sigma^2}\sigma\sin\sigma\omega d\sigma$ и проинт по частям: $I'(\omega)=-\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\sigma^2}\sigma\sin\sigma\omega d\sigma=\frac{1}{2}e^{-\sigma^2}\sin\sigma\omega|_{-\infty}^{\infty}-\frac{1}{2}\omega\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\sigma^2}\cos\sigma\omega d\sigma=\frac{-1}{2}\omega I(\omega)$. Т.о. для $I(\omega)$получаем ДУ $I'(\omega)=\frac{-1}{2}\omega I(\omega)\frac{I'(\omega)}{I(\omega)}=\frac{-\omega}{2}$. Отсюда $\ln I(\omega)=\frac{-\omega^2}{4}+\ln C, I(\omega)=Ce^{-\omega^2/4}$. Т.к. $I(0)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\sigma^2}d\sigma=-\sqrt\pi$(инт-л Пуассона), то $I(\omega)=\sqrt\pi e^{-\omega^2/4}$ и возвр к старым перем: $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda^2\tau}\cos\lambda(x-\xi)d\lambda=\frac{1}{\sqrt\tau}I(\omega)=\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}e^{-(x-\xi)^2/4\tau}$. Окончательно $u(x,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-(x-\xi)^2/4\tau}d\xi$(193). Подставим $\tau=a^2t$ в (193): $u(x,\tau)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-(x-\xi)^2/4a^2t}d\xi$(194). Ф-я $G(x,\xi,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-(x-\xi)^2/4a^2t}$ явл фунд реш-м ур-я теплопр-ти. Физич тепл импульсом наз нач распр темп-ры $f_\xi(x)=\{u_0,|x-x_0|<\varepsilon;0|x-x_0|>\varepsilon$(196). В этом сл реш имеет вид: $u(x,t)=\frac{2\varepsilon u_0}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-(x-\xi)^2/4a^2t}$Точеч тепл импульс соотв $\varepsilon\to0$. Кол-во теплоты, перед стержню, пропорц $2\varepsilon u_0$и при $\varepsilon\to0$должно ост $<\infty$. Пусть $2\varepsilon u_0=1$, тогда $u_0\to\infty$ при $\varepsilon\to0$. Т.о. точеч тепл импульс мб записан в виде ф-ции Дирака: $f(x)=\delta(x-x_0)$. Подст в (194): $u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-(x-\xi)^2/4a^2t}$(199) и получ фунд реш $G(x,\xi,t)$при$\xi=x_0$. Т.о. можем утв, что $G(x,\xi,t-t_0)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t-t_0}}e^{-(x-\xi)^2/4a^2(t-t_0)}$(200) дает темп в $(\cdot)x$в момент врем $t$, если в нач момент врем $t=t_0$в $(\cdot)\xi$возн точеч тепл импульс. Ф-я $G(x,\xi,t-t_0)$ наз ф-цией Грина, с ее пом реш зап в виде $u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)G(x,\xi,t)d\xi(201)$.

## 3.6 Колеб круглой мемб

Применим метод реш зад о колеб прямоу мембр. Пусть мембр в покое занимает круг радиуса R с центром в начале коорд. Введем полярные координаты $r$ и $\varphi$: $x=rcos\varphi,y=rsin\varphi$

Заменим $u(x,y,t)\to u(r,\varphi,t)$ ур колеб мембр приводится к виду $u_{tt}=a^2(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi})$. Гр усл и Нач усл $u(R,\varphi,t)=0 u(r,\varphi,0)=f(r,\varphi)u_t(r,\varphi,0)=F(r,\varphi)$. Р! осесимм колеб мембр, т.е. нач усл не зав от угла $\varphi$. Очевидно, что в любой момент времени скорости и отклонения точек не будут зависеть от угла, поэтому наша задача упрощается: $u_{tt}=a^2(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r)$. Гр усл $u(R,t)=0$ и нач усл $u(r,0)=f(r)u_t(r,0)=F(r)$. Будем искать реш в виде $u(r,t)=U(r)T(t)$. Из гр усл находим $U(R)=0$. Тогда $\frac{T''}{a^2T}=\frac{U''+U'/r}{U}=-\lambda^2$. В рез имеем: $T''+\lambda^2a^2T=0 U''+\frac{1}{r}U'+\lambda^2U=0$

в последнем заменим $\xi=\lambda r$: $U'=\frac{dU}{dr}=\frac{dU}{d\xi}\frac{d\xi}{dr}=\lambda\frac{dU}{d\xi} U''=\frac{dU'}{dr}=\frac{dU'}{d\xi}\frac{d\xi}{dr}=\lambda\frac{dU'}{d\xi}=\lambda^2\frac{d^2U}{d\xi^2}$. Получим: $\frac{d^2U}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{dU}{d\xi}+U=0$

Получившееся ур явл **частным сл ур Бесселя**: $y''+\frac{1}{x}y'+(1-\frac{k^2}{x^2})y=0$. Реш-ми последнего ур при заданном $k$ наз бесселевыми ф-ми порядка $k$. Найдем реш ур (138). Очевидно, что оно имеет особую точку при $x=0$, поэтому его реш будем искать в виде степенного ряда.
Для этого преобр его к виду: $x^2y''+xy'+(x^2-k^2)y=0$
Записываем ряд: $y(x)=x^\gamma(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_lx^l+\cdots)$
Подставляя его в предыдущее и приравнивая коэфф при каждой степени х нулю, получим систему ур: $a_0(\gamma^2-k^2)=0; \dots a_l[(\gamma-l)^2-k^2]=0;\ l=2,3\dots$ Предполагая, что $a_0\neq 0$, находим $\gamma^2-k^2=0\Rightarrow\gamma=\pm k$. Из второго ур находим а1 $=0$ и преобр $l$-ур в системе: $(\gamma+l+k)(\gamma+l-k)a_l+a_{l-2}=0$ и получаем рекуррентную формулу: $a_l=\frac{-a_{l-2}}{(\gamma+l+k)(\gamma+l-k)}$. С учетом $a1=0$ делаем вывод что все нечетные коэфф $=0$. при $\gamma=-k$ реш обращается в $\infty$ при $\mathrm{x}=0$. Р! случай $\gamma=k$. Для четных коэфф получаем: $a_{2m}=-a_{2m-2}\frac{1}{2^2m(m+k)}$. Применяя ее $m-1$ раз, получим: $a_{2m}=(-1)^m\frac{a_0}{2^{2m}m!(k+1)(k+2)(k+3)\dots(k+m)}$. Полагая $a_0=\frac{1}{2^kk!}$ получим $a_{2m}=(-1)^m\frac{1}{2^{2m+k}m!(m+k)!}$. В результате, полученное решение $y(x)\equiv J_k(x)$ наз ф-ей Бесселя первого рода $k$ –ого порядка и имеет вид: $J_k(x)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{m!(m+k)!}(\frac{x}{2})^{2m+k}$. При $\gamma=-k$ имеем $J_{-k}(x)=\sum_{m=k}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{m!(m-k)!}(\frac{x}{2})^{2m-k}$. Заменим $m=k+n, n=0,1,2\dots$: $J_{-k}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{k+n}\frac{1}{(k+n)!(n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k}=(-1)^kJ_k(x)$. В сл круглой мемб реш-м ур явл ф-я Бесселя первого рода нулевого порядка $U(\xi)=U(\lambda r)=J_0(\lambda r)$
из гр усл $u(R,t)=0$ имеем $U(R)=0$ и находим собств числа задачи $J_0(\lambda R)=0$ которыми явл величины $\lambda_k=\frac{\mu_k}{R}$ где $\mu_k$нули ф. Бесселя.
Теперь решаем ур для Т:
$T_k(t)=a_k\cos\lambda_kat+b_k\sin\lambda_kat$ и получаем собств ф-ии: $u_k(r,t)=(a_k\cos\lambda_kat+b_k\sin\lambda_kat)J_0(\lambda_kr)$. Сумма собств ф-ий: $u(r,t)=\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos\lambda_kat+b_k\sin\lambda_kat)J_0(\lambda_kr)$. Коэфф подбираем чтобы удовл н.у.: $u(r,0)=\sum_{k=1}^{\infty}a_kJ_0\left(\mu_k\frac{r}{R}\right)=f(r)$; $u_t(r,0)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a\mu_k}{R}b_kJ_0(\mu_k\frac{r}{R})=F(r)$ В посл. равенствах заменим $x=\frac{r}{R}$: $\sum_{k=1}^{\infty}a_kJ_0(\mu_kx)=f(Rx)$ и $\frac{a}{R}\sum_{k=1}^{\infty}\mu_kb_kJ_0(\mu_kx)=F(Rx)$. Lля нахожд коэфф исп усл ортогональности ф-ий $J_0(\mu_kx)$: $\int_0^1xJ_0(\mu_kx)J_0(\mu_nx)dx=\delta_{kn}\frac{1}{2}J_0^2(\mu_k)$ а также соотн $J_0'(x)=-J_1(x)$. Теперь находим: $a_k=\frac{2}{J_1^2(\mu_k)}\int_0^1xJ_0(\mu_kx)f(Rx)dx$; $b_k=\frac{2R}{a\mu_kJ_1^2(\mu_k)}\int_0^1xJ_0(\mu_kx)F(Rx)dx$

## 5.3 Общие св-ва гармонич. ф-ций

Интегральная Th Остроградского-Гаусса имеет вид: $\iiint_T divAd\tau=\iint_S Ad\sigma$(251)
где T – некоторый объем, ограниченный достаточно гладкой поверхностью S, $d\sigma=nd\sigma$, где n – вектор внешней нормали к поверхности S
$A=Pi+Qj+Rk, divA=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$
Если положить $P=u\frac{\partial v}{\partial x}, Q=u\frac{\partial v}{\partial y}, R=u\frac{\partial v}{\partial z}$, где $u=u(x,y,z), v=v(x,y,z)$– ф-ции, непрерывные вместе со своими 1ми производными внутри T + S, и имеющие непрер. 2е производные внутри T , то из (251) получаем первую формулу Грина: $\iiint_T u\Delta vd\tau=\iint_S u\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma-\iiint_T(\frac{\partial u\partial v}{\partial x\partial x}+\frac{\partial u\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u\partial v}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z})$(252), где $\frac{\partial v}{\partial n}=ngradv$– производная по направлению внешней нормали. Формулу Грина можно переписать с учетом $gradugradv=\nabla u\nabla v=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}$
в результате получаем: $\iiint_T u\Delta vd\tau=\iint_S u\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma-\int_T\nabla u\nabla vd\tau$(253), меняя местами u и v, получаем: $\iiint_T v\Delta ud\tau=\iint_S v\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma-\iiint_T\nabla v\nabla ud\tau$(254). Для того, чтобы получить 2ю формулу Грина, вычтем из (253) формулу (254): $\iiint_T(u\Delta v-v\Delta u)d\tau=\iint_S(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n})d\sigma$(255).
Основные св-ва гармонич. ф-ций:
1. Если $v$- функция, гармоническая в области T , ограниченной поверхностью S, то $\iint_{S_1}\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma=0$(256), где $S1$ – любая замкнутая поверхность, целиком лежащая в области $T$ . Т.к. $v$– гармоническая, то $\Delta v=0$. Полагая, кроме того, в первой формуле Грина $u=1$ получаем (256).
2. Th среднего значения. Если ф-ция $u(x,y,z)=u(M)$гармонична в некоторой обл. T , а $M_0$– произвольная точка, лежащая внутри обл. T , то $u(M_0)=\frac{1}{4\pi a^2}\iint_{S(a)}ud\sigma$(257), где $S(a)$ – сфера радиуса а с центром в точке $M_0$, целиком лежащая в обл. T .
3. Принцип максимального значения. Если ф-ция $u(M)$, определенная и непрерывная в замкнутой обл. $T+S$, уд. ур-ю $\Delta u=0$ внутри T , то max и min значения ф-ции $u(M)$ достигаются на поверхности $S$. Следствие: если ф-ции $u$ и $v$ непрерывны в обл. $T+S$, гармоничны в T и $u\leq v$ на $S$, то $u\leq v$ всюду внутри $T$.

## 5.4 Краевые задачи для ур-ия Лапласа

1. Внутр. задача Дирихле формулируется так: Требуется найти ф-цию $u$, кот.: a) определена и непрерывна в замкнутой обл. $T+S$, b) уд. внутри обл. $T$ ур-ию $\Delta u=0$, c) принимает на границе $S$ заданные значения $f$.
!-ть реш-я первой внутр-й краевой задачи для ур-ия Лапласа доказывается сл. образом. Пусть сущ. две различные ф-ции $u_1$и $u_2$, являющиеся реш-ми задачи. Очевидно, что ф-ция $u=u_1-u_2$также будет гармонической в T , но при этом $u|_S=0$. Т.к. ф-ция u должна принимать $max$ и $min$ значение на $S$, то получаем, что $u\equiv 0$.

**2. Внеш. краевая задача Дирихле** формулируется так. Требуется найти ф-цию u, кот.: a) $\Delta u = 0$ в неогр. обл. $T$, b) непрер. всюду, включая поверхность $S$, c) принимает на границе S заданные значения $f$, d) $u(M) \to 0$ при $M \to \infty$. !-ть реш-я внеш. задачи Дирихле доказывается аналогично внутренней.
**3. Внутр. задача Неймана** формулир. так: Требуется найти ф-цию $u$, кот.: a) определена и непрерывна в замкнутой обл. $T + S$, b) уд. внутри обл. T ур-ию $\Delta u = 0$, c) уд. на границе S усл.:$\frac{\partial u}{\partial n}|_S = f$. Решение внутр. задачи Неймана определяется с точностью до произвольной постоянной. Для док-ва предположим, что у нас есть две ф-ции $u_1$и $u_2$, являющ. реш-ми нашей краевой задачи. Рассмотрим ф-цию $u = u_1 - u_2$, для нее получаем $\Delta u = 0$и$\frac{\partial u}{\partial n}|_S = 0$. Полагая в 1й формуле Грина u = v и с учетом 2х последних соотнош., получаем$\iiint_T ((\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 + (\frac{\partial u}{\partial z})^2)d\tau = 0$. Отсюда в силу непрер. ф-ции и ее 1х производных находим $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, отсюда $u = const.$
4. Внеш. задача Неймана формулируется так: Требуется найти ф-цию $u$, кот.: a) $\Delta u = 0$ в неогранич. обл. T , b) непрерывна всюду, включая поверхность $S$, c)удовлетворяет на границе S условию:$\frac{\partial u}{\partial n}|_S = f$,d)$u(M) \to 0$ при $M \to \infty$. Единственность реш-я внеш. задачи Неймана док-ся аналогично внутр.

## 5.5 Решение ур Лапласа методом разд перем

Р! краевую задачу для круга, кот. формулир. так: найти ф-цию u, уд. ур-ию$\Delta u = 0$внутри круга, и граничному условию$u = f$на границе круга, где$f$- заданная ф-ция. Такая задача носит название внутр. задачи Дирихле на плоскости. Р! также внеш. задачу. В полярных коорд. наше ур-ие будет иметь вид:$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$(258). Будем искать реш в виде: $u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$.Подставляя в ур, получаем $r\frac{d(rdR/dr)}{Rdr} = -\frac{d^2\Phi}{\Phi d\varphi^2}$. В рез. получаем 2 ур-я: $\Phi'' + \lambda\Phi = 0$(259), $r\frac{d}{dr}(r\frac{dR}{dr}) - \lambda R = 0$(260). Реш-е 1го имеет вид: $\Phi(\varphi) = Acos\sqrt{\lambda\varphi} + B\sin\sqrt{\lambda\varphi}$. Из однозначности ф-ции $u(r,\varphi + 2\pi) = u(r,\varphi)$ получаем усл. периодичности: $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$. => $\sqrt{\lambda} = n$, где $n -$ целое число, и $\Phi_n(\varphi) = Acos\, n\varphi + Bsin\, n\varphi$. Ур-е на ф-цию R примет вид: $r^2R'' + rR' - n^2R = 0$. Будем искать его реш-е в виде: $R = Cr^\alpha$. Подставляя, получаем: $\alpha^2 - n^2 = 0 \Rightarrow \alpha = \pm n$ и в рез-те $R(r) = Cr^n + Dr^{-n}$. В случ. внутр. задачи мы должны положить $D = 0$, а в случ. внеш. $C = 0$. Т. о., мы нашли частные реш-я нашей задачи $u_n(r,\varphi) = r^n(A_n cosn\varphi + B_n sinn\varphi), r \le a$(261) и $u_n(r,\varphi) = \frac{1}{r^n}(A_n cosn\varphi + B_n sinn\varphi), r \ge a$(262). Сумма частн. реш-й: внутр $u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n(A_n cosn\varphi + B_n sinn\varphi)(263)$, внеш $u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^n}(A_n cosn\varphi + B_n sinn\varphi)$(264). Для нахожд. неизв коэфф-в исп гр усл. $u(a,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n(A_n cosn\varphi + B_n sinn\varphi) = f$(265). Разложим функцию $f(\varphi)$в ряд Фурье: $f(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n cosn\varphi + \beta_n sinn\varphi)$(266), где $\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)d\psi$, $\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{\square}^{\square} f(\psi)cosn\psi d\psi$, $\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)sinn\psi d\psi$. Сравнивая (265) и (266), получим для внутр. задачи: $A_0 = \frac{\alpha_0}{2}, A_n = \frac{\alpha_n}{a^n}, B_n = \frac{\beta_n}{a^n}$и решение нашей задачи для круга принимает вид $u(r,\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{r}{a})^n(\alpha_n cosn\varphi + \beta_n sinn\varphi)$(267). Для внеш задачи $A_0 = \frac{\alpha_0}{2}, A_n = \alpha_n a^n, B_n = \beta_n a^n$и решение нашей задачи для круга принимает вид: $u(r,\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a}{r})^n(\alpha_n cosn\varphi + \beta_n sinn\varphi)$

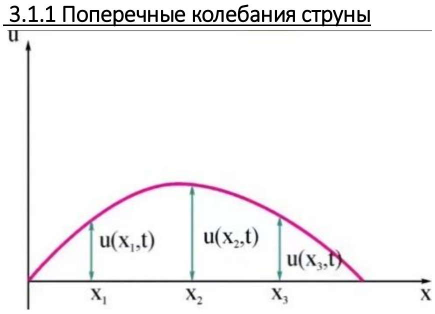
## 5.2 Частные решения ур-я Лапласа

Рассмотрим реш-я ур-я Лапласа, обладающие сферической или цилиндрической симметрией, т.е. зависящие только от одной переменной r. В сферич. случае $u = u(r)$ур-е Лапласа будет иметь вид: $\frac{d}{dr}(r^2\frac{dU}{dr}) = 0$
Интегрируя последнее ур-е получаем: $u = \frac{A}{r} + B$, где A и B – произвольные постоянные. Если A = 1 и B = 0, то получим фундаментальное реш-е ур-я Лапласа в пространстве: $u = \frac{1}{r}$(249)
В цилиндрич. случае u = u(r) ур-е Лапласа будет иметь вид: $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{du}{dr}) = 0$
Интегрируя его, получаем: $u = Alnr + B$, где A и B – произв. пост. Если A = −1 и B = 0, то получим фундаментальн. реш-е ур-я Лапласа на плоскости: $u = \ln\frac{1}{r}$(250)

## 3 Уравнения гиперболического типа

## 3.1 Основные задачи

### 3.1.1 Поперечные колебания струны




Р! струну, колеб в одной пл-ти. Для описан процесса колеб ввод ф-ия $u(x,t)$ – вертикальное смещ струны, так что $u = u(x,t)$ – ур струны в данный мом. В нашей модели струна – гибкая упруг нить, что означ, что напряж в струне всегда направл по касательной к струне. Мы будем р!-ть мал колеб струны. В этом приближении можно показ, что сила натяж струны не зав от $x$ и $t$, т.е. $T(x) = T_0 = const$ Для получ ур-я мал колеб струн составим ее ур-е движ Р! элемент струны от x до x + Δx и запишем для него ур-е движ в проекции на вертик ось :$Tsin\alpha|_{x+\Delta x} - Tsin\alpha|_x + F(x,t)\Delta x = \rho(x)\Delta x u_{tt}$:Т.к. мы р! мал колеб, то мож пренебречь величин высшего порядка малости по сравн с $tan\alpha = u_x$В этом приближ $\sin\alpha = \frac{tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$ В рез-те ур движ мб перепис в виде $T\frac{1}{\Delta x}(u_x(x+\Delta x) - u_x(x)) + F(x,t) = \rho(x)u_{tt}$При $\Delta x \to 0$ получ $Tu_{xx} + F(x,t) = \rho(x)u_{tt}$Получ ур малых попереч колеб струны. В случ однор струны $\rho = const$ его можно перепис в виде$a^2u_{xx} + f(x,t) = u_{tt}$где $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$; $f(x,t) = \frac{F(x,t)}{\rho}$ – плотность силы, отнесенная к единице массы. При отсутствии внеш силы получ однор ур-е $a^2u_{xx} - u_{tt} = 0$

### 3.1.2 Продольные колебания стержня

Ур-е прод колеб однород стерж имеет вид: $a^2u_{xx} + f(x,t) = u_{tt}$где $a = \sqrt{\frac{k}{\rho}}$; $k$ – модуль Юнга стержня, $f(x,t) = \frac{F(x,t)}{\rho}$

### 3.1.3 Поперечные колебания мембраны

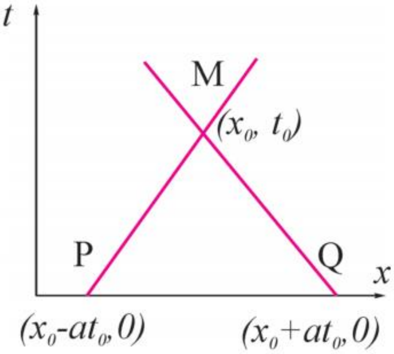
Р! попереч коле мемб. ДУ таких колеб имеет вид $T_0(u_{xx}+u_{yy})+F(x,y,t)=\rho(x,y)u_{tt}$Для однор мемб $a^2(u_{xx}+u_{yy})+f(x,y,t)=u_{tt}$где $a=\sqrt{\frac{T_0}{\rho}};\ f(x,y,t)=\frac{F(x,y,t)}{\rho}$

### 3.2 Гр и нач усл

В сл простейш зад о попереч колеб струн доп усл мб 2х вид: нач и границ. Нач усл показ в каком сост наход струн в мом нач колеб. Нач полож точек струн задается услов $u|_{t=0}=f(x)$, нач скорость $u_t|_{t=0}=F(x)$где $f(x)$ и $F(x)$ – заданные ф-и. Гр усл показ, что происх на концах струн во время колеб. Если концы струн закрепл, то $u|_{x=0}=0, u|_{x=l}=0$.Если нас интерес явл в теч мал промежутка врем, когда влияние границ еще несущественно, то полн зад можно замен предельной зад с нач усл для неогр обл: найти реш ур-я $u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t).-\infty<x<\infty, t>0$ с нач усл $u||_{t=0}=f(x);\ u_t|_{t=0}=F(x)$Эта зад назыв зад Коши.

### 3.3 Метод распространяющихся волн

Р! задачу с н. у. для неогр-ой струны: $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$, (56) $u(x,0)=\varphi(x)$(57), $u_t(x,0)=\psi(x)$. Преобразуем наше ур-е к канон. виду. Запишем характер-ое ур-е $dx^2-a^2dt^2=0$Характер-ое ур-е распадается на два: $dx\ -\ adt\ =\ 0$ и $dx\ +\ adt\ =\ 0$. Интегралы $x\ -\ at\ =\ C1$ и $x\ +\ at\ =\ C2$. Сделаем замену перем. по общим правилам
$\xi\ =\ x\ +\ at, \eta\ =\ x\ -\ at$ . $u_t(\xi(x,t),\eta(x,t))=u_\xi\xi_t+u_\eta\eta_t=u_\xi a-u_\eta a,\ u_{tt}=u_{\xi\xi}a^2-u_{\xi\eta}a^2+u_{\eta\eta}a^2-u_{\eta\xi}a^2, u_x=u_\xi+u_\eta,\ u_{xx}=u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+2u_{\xi\eta}$. Подставляем: $u_{\xi\xi}a^2-u_{\xi\eta}a^2+u_{\eta\eta}a^2-u_{\eta\xi}a^2-a^2u_{\xi\xi}-a^2u_{\eta\eta}-2a^2u_{\xi\eta}=0, u_{\xi\eta}=0$. Общ. реш. полученного уравнения $u(\xi,\eta)=f_1(\xi)+f_2(\eta)$(58) или $u(x,t)=f_1(x+at)+f_2(x-at)$(59)
Теперь мы должны потребовать, чтобы реш. (59) удовл. н. у. : $u(x,0)=f_1(x)+f_2(x)=\varphi(x)$(60), $u_t(x,0)=af_1'(x)-af_2'(x)=\psi(x)$(61). Проинтегрируем (61): $f_1(x)-f_2(x)=\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}\psi(z)dz+C$. В рез-ате получаем систему для нахождения $f1$ и $f2$: $f_1(x)+f_2(x)=\varphi(x)$(62), $f_1(x)-f_2(x)=\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}\psi(z)dz+C$(63). Складывая и вычитая, находим: $f_1(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(z)dz+\frac{C}{2}$(64), $f_2(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(z)dz-\frac{C}{2}$(65). Подставим найденные $f1$ и $f2$ в (59): $u(x,t)=\frac{1}{2}(\varphi(x+at)+\varphi(x-at))+\frac{1}{2a}[\int_{x_0}^{x+at}\psi(z)dz-\int_{x_0}^{x-at}\psi(z)dz]$ (66). $u(x,t)=\frac{1}{2}(\varphi(x+at)+\varphi(x-at))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz$(67).
Формула (67) – ф-ла Даламб. Она была получена в предположении сущ-ия реш-ия р!-мой задачи. Любое реш. задачи Коши для ∞ струны дается ф-лой Даламб, что док-ает !-ть реш. Сам метод вывода ф-лы Даламб доказывает сущ-е реш-я. Полученное реш с физ точки зрения представляет собой процесс распр-я нач отклон и нач скорости. Ф-я $f(x-\ at)$ представляет собой неизменный профиль $f(x)$, перемещающийся в «+» направлении оси х со скоростью а — распр-ся или бегущая волна; функция $f(x\ +\ at)$ – волна, бегущая в «-» направлении оси х.
Т. о., общ. реш. задачи Коши для ∞ струны представляет собой суперпозицию двух волн, одна из кот распр направо со скоростью а, другая налево с той же скоростью.




Для иссл-я решения (67) удобно ввести пл-ть состояний или фазовую плоскость $(x,t)$. Р! фикс-ную точку$M(x_0,t_0)$ и проведем через нее характеристики $x-at=C_1=x_0-at_0$и $x+at=C_2=x_0+at_0$. Очевидно, что эти характеристики пересекут ось х в точках$x_1=x_0-at_0$ и $x_2=x_0+at_0$. Найдем значение ф-ции $u(x,t)$ в точке $M$: $u(x_0,t_0)=f_1(x_0-at_0)+f_2(x_0+at_0)=f_1(x_1)+f_2(x_2)$(68)
Т.о., отклонение струны в точке $M$ определяется нач. откл в вершинах хар-ого треугольника $PQM$ и значением начальной скорости на стороне $PQ$: $u(M)=\frac{1}{2}(\varphi(P)+\varphi(Q))+\frac{1}{2a}\int_{PQ}\psi(z)dz$(69)

### 3.4 Метод разделения переменных

Метод раздел перем наз мет Фурье. Р! его на прим струн с закрепл концами. У-е колеб $u_{tt}=a^2u_{xx}$(1) Гр усл $u(0,t)=0, u(l,t)=0$ Нач усл $u(x,0)=\varphi(x), u_t(x,0)=\psi(x)$Будем иск реш в вид произвед ф-и зависящ только от $x$ и только от $t$: $u(x,t)=X(x)T(t)$(2) Подставляя (2) в (1) получаем $X''T=\frac{1}{a^2}T''X$ Раздел лев и прав часть рав-ва на произвед $XT$: $\frac{X''}{X}=\frac{1}{a^2}\frac{T''}{T}$ лев част явл ф-й только $x$, прав– только $t$, причем оно должно выпол во всей обл знач перемен. Это возмож тольк в том случ если прав и лев часть равны некой const: $\frac{X''}{X}=\frac{1}{a^2}\frac{T''}{T}=-\lambda$
В рез-те получ ОДУ для нахожд неизв ф-й $X$ и $T$: $X''+\lambda X=0;\ T''+a^2\lambda=0$Из границ услов $u(0,t)=X(0)T(t)=0\Rightarrow X(0)=0;\ u(l,t)=X(l)T(t)=0\Rightarrow X(l)=0$ Т.О.для нахожд ф-и $X(x)$ мы получ зад на собств ф-и и собствен знач(зад Штурма-Лиувилля): найти знач парам $\lambda$ (собств знач), при кот сущ нетрив реш зад $X''+\lambda X=0;\ X(0)=X(l)=0$(3) а также соответств им реш- собств ф-и. Р! возможн знач парам $\lambda$ 1). $\lambda\ <\ 0$ В этом сл общ реш у-я (3) ищем в вид:$X=Ce^{\alpha x}$ Тогда:$X'=C\alpha e^{\alpha x}X''=C\alpha^2e^{\alpha x}$Подстав в(3) $C\alpha^2e^{\alpha x}+\lambda Ce^{\alpha x}=0\ =>\alpha^2+\lambda=0;\ \alpha=\pm\sqrt{-\lambda}$ И в рез общ реш имеет вид $X(x)=C_1e^{\sqrt{-\lambda x}}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda x}}$ Из гр усл $X(0)=C_1+C_2=0; X(l)=C_1e^{\sqrt{-\lambda l}}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda x}}=\ C_1e^{\beta}+C_2e^{-\beta}=0$ Из 1ур-я наход $C1\ =\ -C2$, подстав во 2е $C_1(e^{\beta}-e^{-\beta})=0$Отсюда получ $C1\ =\ 0, C2\ =\ 0$. Т.О, мы показ, что при $\lambda\ <\ 0$ зад не имеет нетрив реш. 2). $\lambda\ =\ 0$. В этом сл тоже не возник нетрив реш. 3). $\lambda\ >\ 0$. В этом случ общ реш имеет вид$X(x)=D_1\cos\sqrt{\lambda x}+D_2\sin\sqrt{\lambda x}$ Из гр усл наход $X(0)=D_1=0;\ X(l)=D_2\sin\sqrt{\lambda x}=0$ => $\sin\sqrt{\lambda x}=0, \sqrt{\lambda}=\frac{\pi n}{l}$ где $n$ любое целое число. Т.О. нетрив реш наш зад возмож лишь при знач $\lambda_n=(\frac{\pi n}{l})^2$ Т.о. мы нашли собств знач, им будут соответств собств ф-и $X_n(x)=D_n\sin\frac{\pi n}{l}x$ Здесь $Dn$ – произвол пост. Найденным собств знач соотв реш ур-я для функции Т: $T_n(t)=A_n\cos\frac{\pi n}{l}at+B_n\sin\frac{\pi n}{l}at$ Здесь $An$ и $Bn$ – произв пост. Т.О., мы нашли частн реш исход ур-я колеб струн:$u_n(x,t)=X_n(t)T_n(t)$ или $u_n(x,t)=(A_n\cos\frac{\pi n}{l}at+B_n\sin\frac{\pi n}{l}at)\sin\frac{\pi n}{l}x$ сум частн реш также будет удовл исх ур-ю и гр усл: $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\frac{\pi n}{l}at+B_n\sin\frac{\pi n}{l}at)\sin\frac{\pi n}{l}x$Неизвестные конст надо опред из нач услов: $u(x,0)=\varphi(x), u_t(x,0)=\psi(x)$ Т.е $\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{\pi n}{l}x=\varphi(x)$(4); $\sum_{n=1}^{\infty}Bn\frac{\pi n}{l}asin\frac{\pi n}{l}x=\psi(x)$(5) Ф-лы (4) и (5) представ из себя разлож ф-й $\varphi(x)$ и $\psi(x)$в ряд Фурье. Для нахожд неизвест конст умнож лев и прав части ур-я (4) на $\sin\frac{\pi m}{l}x$и проинт их по $dx$ от 0 до ∞: $\sum_{n=1}^{\infty}A_n\int_0^l\sin\frac{\pi n}{l}xsin\frac{\pi m}{l}xdx=\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\pi m}{l}xdx$(6)

Для вычисл интегр в лев част послед рав воспольз тригоном формул $sin\alpha sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$: $\int_0^l \sin\frac{\pi n}{l}x sin\frac{\pi m}{l}xdx=\frac{1}{2}\int_0^l \cos\frac{\pi(n-m)}{l}xdx-\frac{1}{2}\int_0^l \cos\frac{\pi(n+m)}{l}xdx=\frac{1}{2}\frac{l}{\pi(n-m)}\sin\frac{\pi(n-m)}{l}x|_0^l-\frac{1}{2}\frac{l}{\pi(n+m)}\sin\frac{\pi(n+m)}{l}x|_0^l=0$, еслb $m\neq n$ и $=\frac{1}{2}l$, если $m=n$ Т.О.$\int_0^l \sin\frac{\pi n}{l}x sin\frac{\pi m}{l}xdx=\delta_{mn}\frac{l}{2}$ (7)Подстав (7) в (6), получ $A_m=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi m}{l}xdx$ Аналог для $Bm$ получ $B_m=\frac{2}{\pi ma}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi m}{l}xdx$

Физическая интерпретация решения

Перепишем функцию $u_n(x)$в другом виде $u_n(x,t)=(A_n\cos\frac{\pi n}{l}at+B_n\sin\frac{\pi n}{l}at)\sin\frac{\pi n}{l}x=C_n\sin\frac{\pi n}{l}xcos\frac{\pi n}{l}a(t+\gamma_n)$где $C_n=\sqrt{A_n^2+B_n^2}$;$\frac{\pi n}{l}a\gamma_n=-arctg\frac{B_n}{A_n}$ Т.О., кажд опред (.) струны с коорд $x0$ колеб по закону $u_n(x_0,t)=C_n\sin\frac{\pi n}{l}x_0\cos\frac{\pi n}{l}a(t+\gamma_n)$ или $z_n(t)=Z_n\cos\frac{\pi n}{l}a(t+\gamma_n)$ где $Z_n=C_n\sin\frac{\pi n}{l}x_0$– амплитуда колеб. Т.е. все (.)струны колеб в одинак фазе, но с разными амплитуд. Такое движ струны представ-т из себя стоячую волну. (.), у кото амплитуда колеб =0 наз узлами стоячей вол, (.) у кот амплитуда $max$ – пучности стоячей волны. Частоты колеб всех (.)струны одинак и равны $\omega_n=\frac{\pi n}{l}a$ и носят назв собств частот колеб струны. Самая низкая частота $(n\ =\ 1)$ или самый низкий тон называется основным тоном струны: $\omega_1=\frac{\pi}{l}a$ ост тона, соответств частотам, кратным ω1, называются обертонами.

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ

Метод разд. перем. позволяет реш. зад. о вын. колеб. струны: $a^2u_{xx}+f(x,t)=u_{tt}$. Н.у. :$u(0,t)=0,u(l,t)=0$ , кр.у.:$u(x,0)=\varphi(x),u_t(x,0)=\psi(x)$. Ищем реш. в виде суммы двух ф-ций:$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$. При этом ф-ция $v(x,t)$будет реш. одн. ур-я $a^2v_{xx}=v_{tt}$с н.у. и кр.у:: $v(0,t)=0,v(l,t)=0$, $v(x,0)=\varphi(x),v_t(x,0)=\psi(x)$. А ф-ция $w(x,t)$должна удовл неодн ур-ю $a^2w_{xx}+f(x,t)=w_{tt}$с нул. н.у. и гр.у.: $w(0,t)=w(l,t)=0w(x,0)=w_t(x,0)=0$.Ф-ция $v(x,t)$ опис своб колеб струны, происх. вследствие нач возмущения, $w(x,t)$– вын. колеб. без нач. возмущений. Решение $v(x,t)$уже известно. $w(x,t)$ищем в виде ряда по собств. ф-циям однор. задачи: $w(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k(t)\sin\frac{\pi k}{l}x$. Гр.у. удовл., н. у. удовл, если$\gamma_k(0)=\gamma_k'(0)=0$. Перепишем $a^2w_{xx}+f(x,t)=w_{tt}$в виде$f(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k(t)\sin\frac{\pi k}{l}x$. Подст.$w(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k(t)\sin\frac{\pi k}{l}x$получаем: $\sum_{k=1}^{\infty}[\gamma''(t)+\frac{\pi^2k^2a^2}{l^2}\gamma_k(t)]\sin\frac{\pi k}{l}x=f(x,t)$. Разлагая ф-цию $f(x,t)$по той же сист. ф-ций, пол.:$f(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k(t)\sin\frac{\pi k}{l}x$ где $\beta_k(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{\pi k}{l}xdx$. Подст. $f(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k(t)\sin\frac{\pi k}{l}x$в $f(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k(t)\sin\frac{\pi k}{l}x$и приравн. коэф. при одинак. собств. ф-циях, пол. ОДУ для нах. неизв. ф-ций $\gamma_k(t)$: $\gamma_k''(t)+\frac{\pi^2k^2a^2}{l^2}\gamma_k(t)=\beta_k(t)$. Общ. реш. этого НУ предст. в виде суммы Общ. реш. ОУ и частн. реш. НУ:
$\gamma_k(t)=A_k\cos\frac{\pi ka}{l}t+B_k\sin\frac{\pi ka}{l}t+\gamma_k^{HO}(t)$.

4.3 Решение задачи о теплопроводности для конечного отрезка

Р! задачу о теплопр-ти на отр: $u_t=a^2u_{xx}+g(x,t),(0<x<l,t>0)$. Н.у: $u(x,0)=f(x)$, однор гр.у.: $u(0,t)=0,u(l,t)=0$

4.3.1. Однородная задача

Р! Однор. Здчу: $u_t=a^2u_{xx}$. Будем искать реш-е в виде: $u(x,t)=X(x)T(t)$. Пдствим в ур-е: $\frac{1}{a^2}\frac{T'}{T}=\frac{X''}{X}=-\lambda$. В рез-ате получим 2 ОДУ: $X''+\lambda X=0$ и $T'+a^2\lambda T=0$
Из гр.у. для u получаем гр.у. для X: $X(0)=0,X(l)=0$. В р-те для ф-ции X(x) мы получаем задачу о собств. значениях(Штурма-Лиувилля): $X''+\lambda X=0,\ X(0)=0,X(l)=0$. Ранее было показано, что собств.знач этой задачи: $\lambda_n=(\frac{\pi n}{l})^2$соотв собств.ф-циям: $X_n(x)=\sin\lambda_n x=\sin\frac{\pi n}{l}x$. Далее нах-м ф-цию T(t): $T_n(t)=C_ne^{-a^2\lambda_nt}$. Т.о. мы нашли чр однор задачи: $u_n(x,t)=C_ne^{-a^2\lambda_nt}\sin\frac{\pi n}{l}x$.
Общ. реш-е задачи запишем как суперпозицию частных:$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_ne^{-(\frac{\pi n}{l})^2a^2t}\sin\frac{\pi n}{l}x$. Из н.у. получаем:$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{\pi n}{l}x$ (215). Последнее выр-е есть разлож ф-ции f(x) в ряд Фурье по синусам на интервале (0, l). Для нахождения Cn домножим ур-е (215) на $\sin\frac{\pi m}{l}x$ и проинт: $\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi m}{l}xdx=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\int_0^l \sin\frac{\pi n}{l}xsin\frac{\pi m}{l}xdx$. С учетом ф-лы: $sin\alpha sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$ получим для интеграла в правой части: $\int_0^l \sin\frac{\pi n}{l}xsin\frac{\pi m}{l}xdx=\frac{1}{2}\delta_{nm}l$. В рез-те для коэф-та $C_n$имеем:$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi$.
Подставим в реш-е найденное значение $C_n$: $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi]\,e^{-(\frac{\pi n}{l})^2a^2t}\sin\frac{\pi n}{l}x$. Поменяем порядок суммирования и интегрирования: $u(x,t)=\int_0^l\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(\frac{\pi n}{l})^2a^2t}\sin\frac{\pi n}{l}\xi sin\frac{\pi n}{l}x\,f(\xi)d\xi$
Введем ф-ю:$G(x,\xi,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2a^2t}\sin\frac{\pi n}{l}\xi sin\frac{\pi n}{l}x$ - ф-цию мгнов точечного источника или ф-цию темпер-ого влияния мгновенного точечного источника тепла. С ее использ. реш-е задачи будет иметь вид: $u(x,t)=\int_0^l G(x,\xi,t)f(\xi)d\xi$. Покажем, что ф-ция G(x, ξ, t) предст-ет собой распр-е темп-ры в стержне в момент времени t, если в нач. момент темп.=0 и в этот момент в т. x = ξ мгновенно выделяется некоторое кол-во тепла, при том что на краях стержня поддерж-ся нулевая темп. Для кол-ва тепла, выделившегося в некоторой окр. (.) ξ можно записать: $c\rho\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon}f_\varepsilon(x)dx=Q$,где fε – температура в этой окр., вызванная появлением тепла. Причем fε=0 всюду, кроме отр.$[\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon]$ Т.е. $f(x)=\{f_\varepsilon(x),\vee\, x-\xi\vee\varepsilon 0,\vee\, x-\xi\vee\varepsilon$. Реш-е записывается в виде: $u_\varepsilon(x,t)=\int_0^l G(x,\xi,t)f(\xi)d\xi=\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon}G(x,\xi,t)f_\varepsilon(\xi)d\xi$. Далее восп-мся Th о среднем: $u_\varepsilon(x,t)=G(x,\tilde{\xi},t)\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon}f_\varepsilon(\xi)d\xi=G(x,\tilde{\xi},t)\frac{Q}{c\rho}$, где ξ˜ – некоторая средняя (.) интервала $(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$. Полагая $Q=c\rho$ и $\varepsilon\to 0$. при этом $\tilde{\xi}\to\xi$и в р-те находим: $u(x,t)=G(x,\xi,t)$. Т.о. мы док-ли, что $G(x,\xi,t)$есть темп-ра в (.) x в момент t, вызванная действием мгновенного точеч источника величиной $Q=c\rho$находящегося при t=0 в (.) x = ξ.

4.3.2 Неоднородная задача

Перейдем к неоднор. Ур-ю теплопроводности $u_t = a^2 u_{xx} + g(x,t)$ (223) с нулевыми нач. и граничю усл-ми: $u(x,0) = 0, u(0,t) = 0, u(l,t) = 0$ Будем искать реш-е в виде ряда по собств. Ф-ям задачи Штурма-Лиувилля $\sin\frac{\pi n}{l}x$: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin\frac{\pi n}{l}x$ Разлагая g(x, t) в ряд по тем же собств ф-ям, будем иметь: $g(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \sin\frac{\pi n}{l}x$ Где $g_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l g(\xi,t)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi$ Подставляя все в исходное ур-е, получим $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi n}{l}x[(\frac{\pi n}{l})^2 a^2 u_n(t) + \acute{u}_n(t) - g_n(t)] = 0$

Отсюда получаем $(\frac{\pi n}{l})^2 a^2 u_n(t) + \acute{u}_n(t) - g_n(t) = 0$ или $\acute{u}_n(t) + (\frac{\pi n}{l})^2 a^2 u_n(t) = g_n(t)$. Из нач. усл-й: $u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0)\sin\frac{\pi n}{l}x = 0$. Отсюда $u_n(0) = 0$. У нас получилось неоднор. Ур-е вида $u' + a_1 u = g(t)$ (224) с нулевым начальным условием $u(0) = 0$. Его реш-е может быть записано в виде $u(t) = \int_0^t U(t-\tau)g(\tau)d\tau$, что можно проверить простой подстановкой, здесь U(t) – решение однор. ур-я: $U' + a_1 U = 0$ с нач усл. U(0) = 1. Действительно, находим $u'(t) = \int_0^t U'(t-\tau)g(\tau)d\tau + U(0)g(t) = \int_0^t U'(t-\tau)g(\tau)d\tau + g$ Далее, подставляем в ур-е (224): $\int_0^t U'(t-\tau)g(\tau)d\tau + g(t) + a_1\int_0^t U(t-\tau)g(\tau)d\tau = g(t)$ ,

$\int_0^t (U'(t-\tau) + a_1 U(t-\tau))g(\tau)d\tau + g(t) = g(t)$

$g(t) = g(t)$

Представляя $U(t) = e^{\gamma t}$и подставляя в наше ур-е $\acute{u}_n(t) + (\frac{\pi n}{l})^2 a^2 u_n(t) = 0$ , получим $\gamma + (\frac{\pi n}{l})^2 a^2 = 0$. Отсюда, $\gamma = -(\frac{\pi n}{l})^2 a^2$ и $U(t) = e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 a^2 t}$ . В рез-те, для $u_n(t)$получаем $u_n(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2(t-\tau)} g_n(\tau)d\tau$ (225), а реш-е неоднор. ур-я теплопроводности запишется в виде

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}[\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2(t-\tau)} g_n(\tau)d\tau]\sin\frac{\pi n}{l}x$ (226)

Подставляя сюда выражение для $g_n$, получим

$u(x,t) = \int_0^t \int_0^l G(x,\xi,t-\tau)g(\xi,\tau)d\xi d\tau$(227) где функция источника определяется

$G(x,\xi,t-\tau) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 a^2(t-\tau)}\sin\frac{\pi n}{l}\xi sin\frac{\pi n}{l}x$. Для выяснения физ-го смысла получ. ответа предп-жим, что ф-ия cρg(ξ, τ ), представляющая собой плотность тепловых источников, отлична от нуля только в достаточно малой окр. (.) (ξ0, τ0). Тогда общ. кол-во тепла, выделяющееся на отрезке (0, l) за время действия источников, будет равно

$Q = \int_{\tau_0-\varepsilon_1 \xi_0-\varepsilon_2}^{\tau_0+\varepsilon_1 \xi_0+\varepsilon_2}\int \quad c\rho g(\xi,\tau)d\xi d\tau$ (228)

По Th о среднем найдем $u(x,t) = \int_{\tau_0-\varepsilon_1 \xi_0-\varepsilon_2}^{\tau_0+\varepsilon_1 \xi_0+\varepsilon_2}\int_{\square}^{\square} G(x,\xi,t-\tau)g(\xi,\tau)d\xi d\tau = G(x,\tilde{\xi},t-\tilde{\tau})\int_{\tau_0-\varepsilon_1 \xi_0-\varepsilon_2}^{\tau_0+\varepsilon_1 \xi_0+\varepsilon_2}\int_{\square}^{\square} g(\xi,\tau)d\xi d\tau = G(x,\tilde{\xi},t-\tilde{\tau})\frac{Q}{c\rho}$(229)

Переходя в последнем ур-и к пределу $\varepsilon 1 \to 0, \varepsilon 2 \to 0$, при этом $\tau^{\sim} \to \tau 0, \xi^{\sim} \to \xi 0$, находим

$u(x,t) = \frac{Q}{c\rho}G(x,\xi_0,t-\tau_0)$(230) Если положить Q = cρ, то $G(x,\xi_0,t-\tau_0)$ есть ф-ия влияния мгн-го источника тепла, сосред-го в момент времени τ0 в (.) $\xi 0$. Если тепл. источники действуют в области $(\xi, \xi + \Delta\xi)$ в течение времени $(\tau, \tau + \Delta\tau)$, то получаем $Q = c\rho g(\xi,\tau)\Delta\xi\Delta\tau$ и $u(x,t) = G(x,\xi,t-\tau)g(\xi,\tau)\Delta\xi\Delta\tau$. Если источники распределены непрерывно, то суммируя по всем источникам в области [0, l] за время [0, t], находим $u(x,t) = \int_0^t \int_0^l G(x,\xi,t-\tau)g(\xi,\tau)d\xi d\tau$, что совпадает с выражением (227). Т.о., решение (227) могло быть получено исходя из физ-го смысла ф-ии источника. Мы нашли реш-е неоднор. Ур-ия теплопроводности с нулевыми нач. усл-и. В случае, когда нач усл отлично от нуля, реш-ем будет сумма реш-я однор ур-я с заданным нач усл и реш-я неоднор ур-ия с нулевым нач усл

## 4.4 Ортогональные криволинейные системы координат

x, y, z – декартовы координаты, q1, q2, q3 – криволинейные координаты. Квадрат элемента длины:

$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2$(231) где hi = s ∂x ∂qi 2 + ∂y ∂qi 2 + ∂z ∂qi 2 , i = 1, 2, 3 (232) –метрические коэффициенты или коэффициенты Ламэ. В криволинейных координатах: $\nabla = \sum_{j=1}^{3} a_j \frac{1}{h_j}\frac{d}{dq_j}$(233)

$\Delta = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}[\frac{\partial}{\partial q_1}(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1}) + \frac{\partial}{\partial q_2}(\frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2}) + \frac{\partial}{\partial q_3}(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial}{\partial q_3})]$(234)

Цилиндрическая система координат x = ρ cos ϕ, y = ρ sin ϕ, z = z, h1 = 1, h2 = ρ, h3 = 1 $\nabla = a_1\frac{\partial}{\partial\rho} + a_2\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi} + a_3\frac{\partial}{\partial z}$(235)

$\Delta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$(236)

Сферическая система координат $x = \rho sin\theta cos\varphi, y = \rho sin\theta sin\varphi, z = \rho cos\theta, h_1 = 1, h_2 = \rho, h_3 = \rho sin\theta$

$\nabla = a_1\frac{\partial}{\partial\rho} + a_2\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta} + a_3\frac{1}{\rho sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$(237) $\Delta = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}) + \frac{1}{\rho^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$(238)

## 4.5 Распространение тепла в бесконечном цилиндре

Р! цилиндр радиуса R, боковая пов-сть которого поддерживается при постоянной темп-ре. Если в нач момент времени темп-ра в каждой (.) зависит только от ее расстояния r до оси цилиндра, то и в последующие моменты времени темп-ра будет зависеть только от r и t: u = u(r, t). Переходя в пространственном ур-и теплопроводности к цилиндрическим координатам, получим $\frac{du}{dt} = a^2(\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d^{\square}u}{dr^{\square}})$ (239) Нач усл $u(r,0) = f(r)$ краевое условие – условие постоянства температуры боковой поверхности цилиндра – $u(R,t) = u_0$. Р! случай однор. краевого условия, т.е. u0 = 0. В противоположном случае надо сделать замену $u(r,t) \to \tilde{u}(r,t) = u(r,t) - u_0$ при этом само у-е не изменится, а нач и краев усл примут вид $\tilde{u}(r,0) = f(r) - u_0, \tilde{u}(R,t) = 0$. Будем решать задачу методом раздел перем u(r, t) = U(r)T (t), в рез-те получим $\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{U''(r) + \frac{1}{r}U'(r)}{U(r)} = -\lambda^2$(240). Далее находим $T(t) = Ce^{-\lambda^2 a^2 t}$(241), а для функции U(r) получаем ур-е $U''(r) + \frac{1}{r}U'(r) + \lambda^2 U(r) = 0$ (242) реш-ем которого явл-ся ф-ия Бесселя нулевого порядка $U(r) = J_0(\lambda r)$

Из краевого усл находим $J_0(\lambda r) = 0$ . Т.е., собств числа задачи выражаются через нули ф-ции Бесселя $\mu_k(J(\mu_k) = 0)$

$\lambda_k = \mu_k/R$ Каждому собств. знач λk соответствует собств ф-ия $u_k(r,t) = e^{-\lambda_k^2 a^2 t}J_0(\lambda_k r)$(243) в рез-те реш-е исх. задачи принимает вид $u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\lambda_k^2 a^2 t}J_0(\lambda_k r)$(244) С учетом нач. условия получаем

$u(r,0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0(\lambda_k r) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0(\frac{\mu_k}{R}r) = f(r)$ Сделаем замену перем $x = \frac{r}{R}$, в рез-те получим $\sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0(\mu_k x) = f(Rx)$

Последнее соотношение аналогично (155). Находим аналогичным образом коэффициенты Cn: $C_n = \frac{2}{J_1^2(\mu_k)}\int_0^1 x J_0(\mu_k x)f(Rx)dx$

## 4. Уравнения параболического типа

### 4.1 Линейная задача о распространении тепла

Р! Однор стержень с изолир. бок. пов-ю. Если стержень в нач. момент неравном нагрет, то в нем будет происх передача тепла от более нагретых частей к менее нагретым. Если торцы теплоизолир, то в итоге темп станет одинак у всех точек стержня. Если же может происх теплообмен с окр рс, то распр темп станет сложнее. р! лин задачу о распр тепла, поэтому будем считать, что в каждый момент темп всех точек в одном попер сечении одинаковы. Пусть стержень распол вдоль оси $x$, тогда $u(x,t)$ – темп в сечении стержня с абсц $x$ в момент $t$. $\frac{\partial u}{\partial x}$ будет определять скорость изм темп вдоль оси х. Осн физ законом-ти: Количество тепла $Q_1$кот необх сообщить однор телу, чтобы повысить его темп на $\Delta u$, равно $Q = c\rho V\Delta u$, где $c$ – уд теплоемкость, $\rho$ – плотность, $V$ – объем тела.
Кол-во тепла $Q$, протек через попер сеч за время $\Delta t$, пропорц площади сеч, скорости изм темп в направлении, перпенд сеч, и времени $\Delta t$: $Q = -kS\frac{\partial u}{\partial x}\Delta t$, где $k$- коэфф-т теплопр-ти.
Р! участок стержня, огр попер сеч с коорд $x$ и $x+\Delta x$. Запишем для него ур теплового баланса. Кол-во тепла, проход через левое попер сеч:$Q_1 = -kS\frac{\partial u}{\partial x}\Delta t$. Для нахожд тепла, проход через правое попер сеч, заметим, что с точностью до беск малых высших порядков, $f(x+\Delta x,t) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x$ или если $f(x,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$, то $\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x$. Тогда находим: $Q_2 = -kS(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x)\Delta t$. Кол-во теплоты, сообщенное выбранному участку за время $\Delta t$: $\Delta Q = Q_1 - Q_2$; $\Delta Q = -kS\frac{\partial u}{\partial x}\Delta t + kS(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x)\Delta t$; $\Delta Q = kS\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x\Delta t$. С др стороны, $\Delta Q = c\rho S\Delta x\Delta u = c\rho S\Delta x\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t$
Приравнивая выр-я для $\Delta Q$: $c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$(159). Обозн $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, получаем ур теплопр-ти для однор стержня без тепл источников:$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ где $a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}$- коэф-т температуропроводности.
Р! сл наличия тепл источников. Введем $F(x,t)$- плотность тепл источников – кол-во теплоты, выдел в единицу врем на единице длины. Тогда вместо ур (159) получим: $c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{S}F(x,t)$. Отсюда $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x,t)$, где $g(x,t) = \frac{1}{c\rho S}F(x,t)$.

### 4.1.2 Начальные и краевые условия

Нач усл – задание темп во всех (.) стержня в нач момент: $u(x,0) = f(x)$
Гр усл – усл в тех точках, где мб теплообмен с окр ср – на торц сеч стержня. Простейшие гр усл – концы поддерж при пост темп: $u(0,t) = \tilde{u}_0, u(l,t) = \tilde{u}_l$ где $\tilde{u}_0$и $\tilde{u}_l$- заданные числа. В общ сл на торц сеч происх теплообмен с окр ср по закону Ньютона: поток тепла через единицу пов-ти в единицу времени пропорц разности темп тела и окр ср, т.е. равен $h(u-\tilde{u})$, где $u$- темпратура конца стержня, $\tilde{u}$- темп окр ср, $h$- коэф-т теплообмена, причем $h > 0$, если тепло уходит из стержня.
Тепловой поток, проход через правое торц сеч в рез-те теплопр-ти равен: $-kS\Delta t\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l}$. Через левое торцевое сеч-е: $kS\Delta t\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0}$. С учетом закона сохр-я энергии, получаем для правого торц сеч-я: $-k\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} = h_l[u(l,t) - \tilde{u}_l(t)]$. Для левого торцевого сеч-я: $k\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = h_0[u(0,t) - \tilde{u}_0(t)]$, где $\tilde{u}_0(t)$ и $\tilde{u}_l(t)$- заданные темп внеш. среды.
Т.О. задача теплопр-ти для однор. стержня с теплоизолир боковой пов-ю без тепловых источников сводится к отысканию темп $u = u(x,t)$, удовл ур-ю $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, нач усл $u(x,0) = f(x)$ и гр усл $k\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = h_0[u(0,t) - \tilde{u}_0(t)]$ , $-k\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} = h_l[u(l,t) - \tilde{u}_l(t)]$.

### 4.1.3 Пространственная задача теплопроводности

Р! равном нагретое тело, темп которого в каждой (.) $(x,y,z)$в момент времени $t$ определяется ф-ей $u(x,y,z,t)$. В любой момент $t$ ф-я $u$ определяет скалярное поле темп-ры, кот явл нестац. В фикс момент $t$ совок-ть точек, в кот $u(x,y,z,t) = const$ образует изотерм пов-ть. Форма и располож изотерм пов-тей будет со временем меняться. Направление наиб скорости измен темп $u$ совп с направлением градиента ф-ции $u(x,y,z,t)$ при фикс $t$: $gradu = \frac{\partial u}{\partial x}i + \frac{\partial u}{\partial y}j + \frac{\partial u}{\partial z}k$. Во всех точках изотерм пов-ти градиент направлен по нормали к этой пов-ти в сторону увел-я знач $u$ и модуль градиента равен: $|gradu| = \frac{\partial u}{\partial n}$. Величина теплового потока через малый участок $\Delta\sigma$ изотерм пов-ти за время $\Delta t$ равна $\Delta Q = -k\frac{\partial u}{\partial n}\Delta\sigma\Delta t$, где $k$- коэф-т теплопр-ти. Последняя ф-ла вып для любых пов-тей. Производная по любому направлению, заданному единичным вектором нормали к произвольной поверхности $n$ мб записана так: $\frac{\partial u}{\partial n} = gradu \cdot n$. Тогда поток тепла через участок $\Delta\sigma$ любой пов-ти за время $\Delta t$ равен $\Delta Q = -k(gradu \cdot n)\Delta\sigma\Delta t$. Если ввести вектор тепл потока $A = -kgradu$, то $\Delta Q = A_n\Delta\sigma\Delta t$. Если р! поток через замкнутую пов-ть, то $Q = \Delta t\oint_S A_n d\sigma$. Применяя th Остроградского-Гаусса, получаем $\oint_S A_n d\sigma = \int_V divAdv$, где $V$ – часть тела, огр пов-ю $S$. $divA = -kdivgradu = -k\Delta u$, где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$- оператор Лапласа. Тогда $Q = \Delta t\oint_S A_n d\sigma = \Delta t\int_V divAdv = -\Delta t\int_V k\Delta udv$ и кол-во тепла $Q1$, приобр выделенной частью тела за счет прохожд теплового потока равно $Q_1 = -Q = \Delta t\int_V k\Delta udv$
Если в теле есть тепловые источники, плотность кот $F(x,y,z,t)$, то в выдел части тела за время $\Delta t$ выделится тепло $Q_2 = \Delta t\int_V F(x,y,z,t)dv$. Т.О. кол-во тепла, сообщ выдел объему : $Q_3 = Q_1 + Q_2$, но оно может быть записано так: $Q_3 = \int_V c\rho dv\Delta u = \int_V c\rho dv\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t = \Delta t\int_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dv$. В рез-те $\int_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dv = \int_V k\Delta udv + \int_V F(x,y,z,t)dv$ или $\int_V (c\rho\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u - F(x,y,z,t))dv = 0$. Сл-но $c\rho\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u - F = 0$ или $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u + \frac{1}{c\rho}F$, где $a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}$. В рез-те мы получили осн ур теплопр-ти.

### 4.1.4 Начальные и краевые условия

Н.у- задание распр-я темп во всех (.) тела в нач момент: $u(x,y,z,0) = f(x,y,z)$. Гр усл задается на пов-ти $G$, огранич-ей тело. Поток тепла

изнутри тела через любую часть пов-ти тела $G$ пропорц перепаду темп на этой части границы: $A_n = h(u - \tilde{u})$, где $\tilde{u}$ – темп окр ср в гранич с телом (.) $(G)$, $h$ – коэфф теплообмена. С учетом $A_n = -k(gradu \cdot n) = -k\frac{\partial u}{\partial n}$ получаем: $-k\frac{\partial u}{\partial n}|_G = h(u|_G - \tilde{u})$. В частных случаях гр усл упрощается. Напр, $h = 0$, что соотв теплоизолир границе $\frac{\partial u}{\partial n}|_G = 0$
Другой частный случай $h \to \infty$, т.е. коэфф внешней теплопр-ти очень большой. Получаем $u|_G = \tilde{u}$, что озн, что на границе тело имеет темп внеш ср.

### 4.1.5. Задачи диффузии

В задачах диффузии находится неизв ф-я – концентрация диффундирующего вещ-ва, обозначаемая $c = c(x, y, z, t)$. Процесс диффузии аналогичен теплопр-ти, поэтому ур диффузии будет иметь вид $\frac{\partial c}{\partial t} = D\Delta c$ , где $D$- коэфф диффузии. Нач.усл.- $c(x, y, z, 0) = f(x, y, z)$ мы задаем нач концентрацию. Гр усл- $\frac{\partial c}{\partial n}|_G = 0$ соотв тому, что граница $G$ непроницаема для диффундирующего вещества, $c|_G = 0$- концентрация на границе.