

УДК (532.529.2-551.466.81) : 543.1

© 2012 г. А. Ю. Васильев, Ю. Д. Чашечкин

ТРЕХМЕРНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ КОЛЕБАНИЯХ ЧАСТИ НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

Методами теории сингулярных возмущений решена линеаризованная задача генерации течений непрерывно стратифицированной жидкости подвижной частью покоящейся бесконечной наклонной плоскости при учете эффектов диффузии. Подвижная часть плоскости совершает продольные периодические колебания. Полученные решения содержат регулярно возмущенные по диссипативным факторам компоненты — внутренние волны и семейство сингулярно возмущенных компонент, две из которых обусловлены действием вязкости, а еще одна — влиянием диффузии. Предельным случаям соответствуют решения задач в двумерной и одномерной постановках, а в пренебрежении эффектами плавучести — решение Стокса. Расчеты внутренних волн удовлетворительно согласуются с лабораторными данными.

Линеаризованная задача расчета течений вязкой однородной жидкости, возбуждаемых продольно осциллирующей плоскостью, была рассмотрена еще в XIX в. [1]. В дальнейшем развитие получили приближенные модели [2]. Учет эффектов стратификации позволил найти не только одномерные, но также двумерные и трехмерные периодические течения, порождаемые осциллирующей частью плоской поверхности [3, 4]. При этом рассчитывались как крупномасштабные внутренние волны [3], так и сопутствующие тонкоструктурные компоненты, которые располагаются на контактных поверхностях и на краях пучка в толще жидкости [4]. Результаты расчетов волновых пучков удовлетворительно согласуются с ранее полученными асимптотическими оценками [5] и данными лабораторных экспериментов [6]. Приведено сравнение существующих моделей излучения внутренних волн [7].

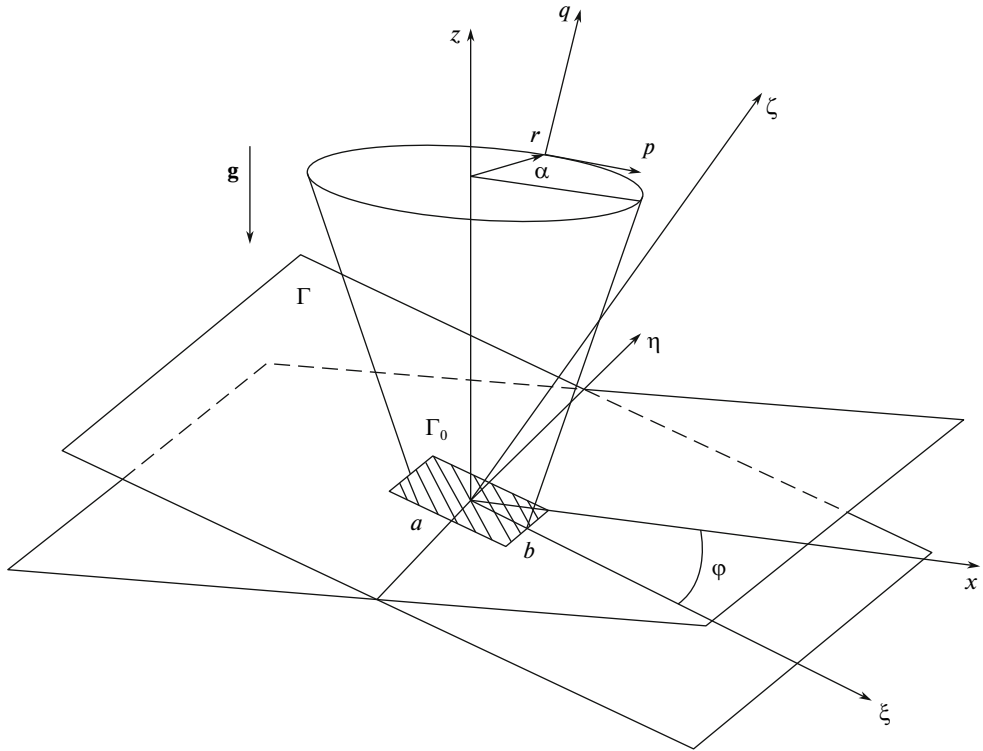
Однако постановка задач [3, 4] не полна, поскольку в ней не учитывается физическая природа стратификации, обусловленная неоднородностью состава (соленостью) и поля температуры, а также сжимаемостью среды (давлением). В полном описании плотность определяется уравнением состояния [8]. При этом в фундаментальной системе появляются уравнения переноса вещества и температуры, в которые входят кинетические коэффициенты диффузии соли и температуропроводности. Учет дополнительных уравнений повышает порядок системы, что значительно затрудняет анализ. Ранее полная задача излучения волн проанализирована только в одном частном случае, когда источником волн служит часть цилиндрической поверхности [9]. Ниже построено полное решение задачи генерации трехмерных течений стратифицированной жидкости осциллирующей частью наклонной плоскости.

1. Основные уравнения и граничные условия. Рассматриваются установившиеся течения линейно стратифицированной жидкости, ее невозмущенная плотность ρ_0 задается профилем солености $S_0(z)$: $\rho_0 = \rho_0(S_0)$ и убывает с высотой z :

$$\rho_0(z) = \rho_{00}(1 - z/\Lambda)$$

где Λ — масштаб стратификации ($N = \sqrt{g/\Lambda}$ — частота плавучести).

В жидкости находится покоящаяся бесконечная плоскость, расположенная под углом φ к горизонту. Источником возмущений служит ограниченная область плоскости (например, прямоугольник размерами $a \times b$, фиг. 1), совершающая продольные гармонические колебания с заданным распределением скорости $U \exp(-i\omega t)$, где ω — частота ($0 < \omega < N$). При установившемся режиме колебаний, который и будет рассматри-



Фиг. 1

ваться дальше, зависимость всех величин от времени носит гармонический характер. Множитель $\exp(-i\omega t)$ далее везде опущен.

Системы координат задачи показаны на фиг. 1. Это лабораторная система координат (x, y, z) с осью z , направленной против ускорения силы тяжести, локальная система координат (ξ, η, ζ) , связанная с осциллирующей поверхностью. С волновым конусом связаны две системы координат: сопутствующая (q, p, α) (ось q , наклоненная под углом $\theta = \arcsin(\omega/N)$ к горизонту, ориентирована в направлении распространения волн, ось p — поперек, а — угловая переменная) и цилиндрическая (r, α, z) . Связи между этими системами координат определяются соотношениями

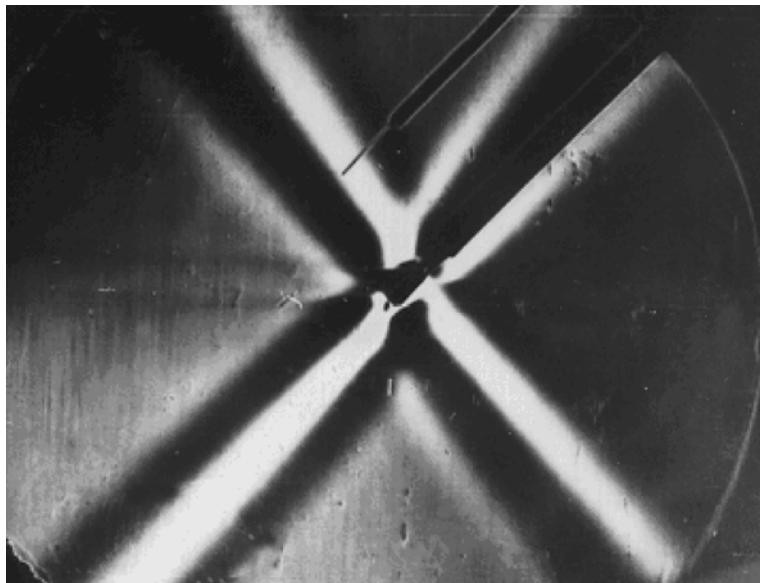
$$\xi = x \cos \varphi + z \sin \varphi, \quad \eta = y, \quad \zeta = -x \sin \varphi + z \cos \varphi$$

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha, \quad z = z$$

$$p = r \sin \theta - z \cos \theta, \quad q = r \cos \theta + z \sin \theta$$

Линеаризованная система уравнений, учитывающая эффекты вязкости и диффузии, в приближении Буссинеска имеет вид [8]

$$\rho_{00} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla P + \rho_{00} \nu \Delta \mathbf{v} + \rho_{00} \mathbf{g} S, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = \kappa_S \Delta S + \frac{\nu_z}{\Lambda}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1.1)$$



Фиг. 2

где $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$, ρ , P и S — скорость, плотность, давление и безразмерная соленость, соответственно, функции времени и координат, ν — коэффициент кинематической вязкости, κ_S — коэффициент диффузии соли. Жидкость считается несжимаемой.

На всей излучающей поверхности Γ , включая ее подвижную (G_0) и неподвижную части ($\Gamma \setminus G_0$), выполняются граничные условия для скорости (условие прилипания) и солености

$$\mathbf{v}|_{\Gamma_0} = \mathbf{U}, \quad \mathbf{v}|_{\Gamma \setminus \Gamma_0} = 0, \quad (\kappa_S \partial S / \partial \mathbf{n})|_{\Gamma} = 0 \quad (1.2)$$

На бесконечности все возмущения затухают:

$$\mathbf{v} \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow \rho_0, \quad \partial P / \partial z \rightarrow \rho_0(z)g \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty \quad (1.3)$$

Условие несжимаемости позволяет ввести тороидально-полоидальное представление, которое двумя вспомогательными скалярными функциями Φ , Ψ определяет трехмерную скорость жидкости

$$\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{e}_z \Psi + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{e}_z \Phi) \quad (1.4)$$

Исключая из системы (1.1) давление и используя представление (1.4), получаем систему уравнений относительно функций Φ , Ψ и S

$$((\partial_t - \kappa_S \Delta)(\partial_t - \nu \Delta) \Delta + N^2 \Delta_{\perp}) \Delta_{\perp} \Phi = 0, \quad (\partial_t - \nu \Delta) \Delta_{\perp} \Psi = 0$$

$$((\partial_t - \kappa_S \Delta)(\partial_t - \nu \Delta) \Delta + N^2 \Delta_{\perp}) \Delta_{\perp} S = 0; \quad \Delta_{\perp} = \partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2$$

Дополнительные решения, обусловленные дифференцированием системы (1.1), устраняются в результате рассмотрения их физического смысла, что позволяет привести систему к виду [4] (Δ — оператор Лапласа)

$$\begin{aligned} ((\partial_t - \kappa_S \Delta)(\partial_t - \nu \Delta) \Delta + N^2 \Delta_{\perp}) \Phi &= 0, \quad (\partial_t - \nu \Delta) \Psi = 0 \\ ((\partial_t - \kappa_S \Delta)(\partial_t - \nu \Delta) \Delta + N^2 \Delta_{\perp}) S &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

с граничными условиями на поверхности

$$\begin{aligned} [\cos \varphi \partial_{\eta} \Psi - \sin \varphi \partial_{\eta}^2 \Phi + \partial_{\zeta} (\cos \varphi \partial_{\xi} - \sin \varphi \partial_{\zeta}) \Phi] \Big|_{\zeta=0} &= u_{\xi} \\ [-(\cos \varphi \partial_{\xi} - \sin \varphi \partial_{\zeta}) \Psi + \partial_{\eta} (\sin \varphi \partial_{\xi} + \cos \varphi \partial_{\zeta}) \Phi] \Big|_{\zeta=0} &= u_{\eta} \\ [-\sin \varphi \partial_{\eta} \Psi - \cos \varphi \partial_{\eta}^2 \Phi + \partial_{\xi} (\sin \varphi \partial_{\xi} - \cos \varphi \partial_{\zeta}) \Phi] \Big|_{\zeta=0} &= u_{\zeta} \\ \kappa_S \partial_{\zeta} S \Big|_{\zeta=0} &= 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $\mathbf{U}(\xi, \eta, \zeta) = (u_{\xi}, u_{\eta}, u_{\zeta})$ — заданное распределение скорости на поверхности, а также с условиями затухания возмущений скорости, солёности и давления при удалении от поверхности.

Условие совместности определяет порядок системы (1.5) и степень соответствующего характеристического уравнения.

В дальнейшем рассматриваются возмущения в верхнем полупространстве ($\zeta > 0$), причем считается, что волновой конус не пересекается с осциллирующей поверхностью. Характеристическое уравнение для периодических волн в задаче с диффузией имеет восьмую степень. Условие затухания на бесконечности позволяют исключить четыре решения.

При учете физических свойств полей скорости и солёности и представления (1.4) решения системы уравнений (1.5) с граничными условиями (1.6) отыскиваются в виде разложений неизвестных функций Φ , Ψ и S в интегралы Фурье (всюду далее суммирование ведется от $j = 1$ до $j = 3$)

$$\begin{aligned} \Phi &= \exp(-i\omega t) \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A_j(k_{\xi}, k_{\eta}) e_j dk_{\xi} dk_{\eta}, \quad \Psi = \exp(-i\omega t) \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B(k_{\xi}, k_{\eta}) e_4 dk_{\xi} dk_{\eta} \\ S &= \exp(-i\omega t) \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C_j(k_{\xi}, k_{\eta}) e_j dk_{\xi} dk_{\eta} \end{aligned} \quad (1.7)$$

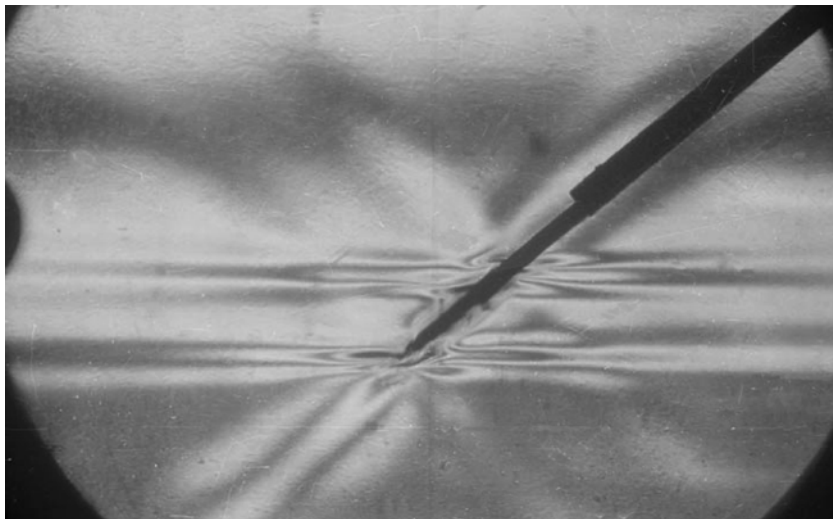
где

$$\begin{aligned} e_l &= \exp(ik_l \zeta + ik_{\xi} \xi + ik_{\eta} \eta), \quad l = 1, 2, 3, 4, \quad C_l = -k_{\perp}^2 A_l / \sigma_l, \quad \sigma_l = \Lambda(\kappa_S w_l^2 - i\omega) \\ w_j^2 &= k_j^2 + k_{\xi}^2 + k_{\eta}^2, \quad w_{\perp, j}^2 = (k_{\xi} \cos \varphi - k_j \sin \varphi)^2 + k_{\eta}^2 \end{aligned}$$

Второе уравнение системы (1.1) позволяет записать выражение для спектрального представления солёности в виде

$$S = \rho_0 \exp(-i\omega t) \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w_{\perp, j}^2 e_j A_j(k_{\xi}, k_{\eta})}{\sigma_l} dk_{\xi} dk_{\eta}$$

Из системы (1.1) и второго уравнения системы (1.5) следует выражение для давления



Фиг. 3

$$P = -\rho_0 \sum_{-\infty}^{+\infty} \int A_j [\omega(k_\xi \cos \varphi + k_j \sin \varphi) + v w_j^2] p_j dk_\xi dk_\eta$$

Представления (1.7) позволяют записать выражения для скоростей.

Для определения спектральных коэффициентов A_j и B полученные разложения для скорости подставляются в граничные условия (1.6), что приводит к системе линейных алгебраических уравнений.

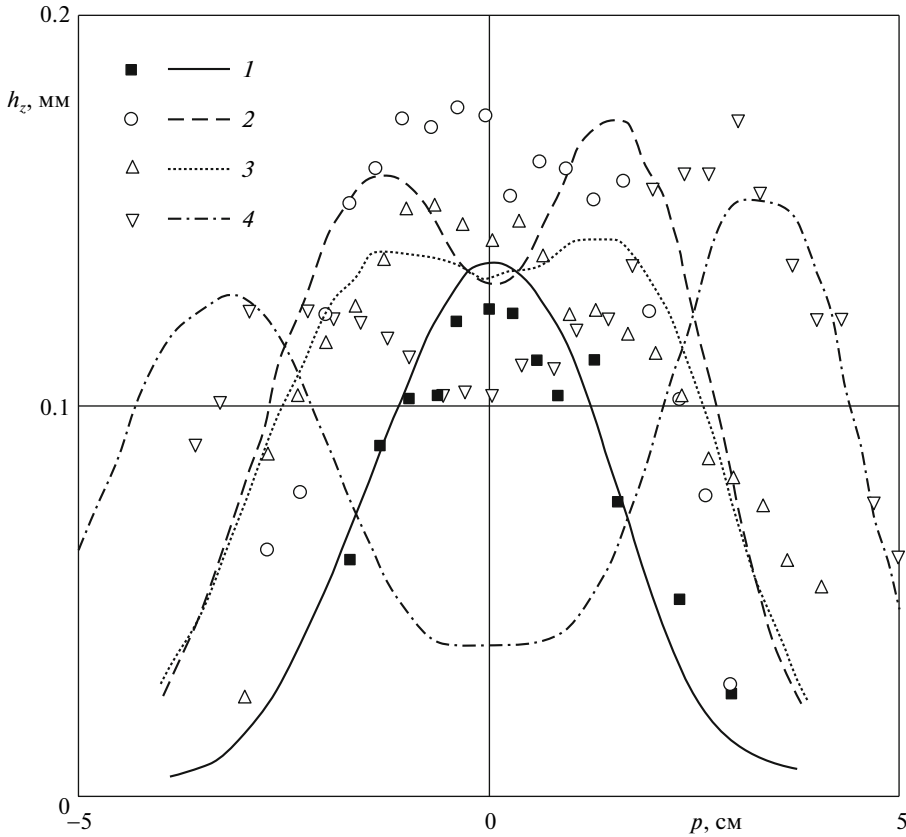
2. Анализ характеристического уравнения. В случае постоянной положительной частоты колебаний ω осциллирующей плоскости условие совместности системы (1.1) дает дисперсионное соотношение

$$\begin{aligned} [v \kappa_S \tilde{k}^6 - i\omega(v + \kappa_S) \tilde{k}^4 - \omega^2 \tilde{k}^2 + N^2 k_\perp^2] (\tilde{k}^2 + \omega/(iv)) &= 0; \\ \tilde{k}^2 &= 2k_\xi^2 + k_\perp^2, \quad k_\perp^2 = k_\xi^2 + k_\eta^2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

которое определяет связь между компонентами волнового вектора $\mathbf{k} = (k_\xi, k_\eta, k_z)$. Решения уравнения (2.1) дают волновые числа $k_l = k_l(k_\xi, k_\eta)$ ($l = 1, 2, 3, 4$), входящие в подынтегральные выражения в равенствах (1.7).

Алгебраическое уравнение (2.1) с комплексными коэффициентами — характеристическое уравнение системы (1.5). При учете эффектов диффузии оно имеет четыре пары комплексных корней. Одна пара корней регулярна по диссипативным факторам (вязкости и диффузии), а три других сингулярны. В дальнейшем учитываются все корни k_l , как регулярные, так и сингулярные.

В дальнейшем будем рассматривать течение только в верхней полуплоскости $\zeta > 0$. В реальной жидкости число Шмидта большое: $Sc = v/\kappa_S \gg 1$, что позволяет использовать для построения решения уравнения (2.1) стандартные методы теории сингулярных возмущений [10].



Фиг. 4

Регулярный корень уравнения (2.1) может быть представлен в виде разложения

$$k_1 = k_1^{(0)} + \delta_N^2 (1 + \varepsilon) k_1^{(1)} + \dots \quad (2.2)$$

$$k_1^{(0)} = \frac{k_\varepsilon \sin \varphi \cos \theta \pm \kappa \cos \theta}{\mu}, \quad k_1^{(1)} = \pm i \operatorname{tg} \theta \frac{(k_\varepsilon \sin \varphi \cos \theta \pm \kappa \cos \theta)^4}{2 \kappa \mu^4}, \quad \delta_N = \sqrt{\frac{\nu}{N}}$$

где

$$\varepsilon = \operatorname{Sc}^{-1} = \kappa_S / \nu, \quad \mu = \sin^2 \varphi - \sin^2 \theta, \quad \kappa = \sqrt{k^2 \sin^2 \theta - k_\eta^2 \sin^2 \varphi} \quad (2.3)$$

В данной задаче решение k_1 совпадает с решением задачи для вязкой стратифицированной жидкости без учета эффектов диффузии, с точностью до замены ν на $\nu + \kappa_S$.

Регулярный корень (2.2) описывает структуру пучка конических внутренних волн, имеющего аналог в идеальной жидкости [11].

Сингулярные корни в приближении $\operatorname{Sc} \gg 1$ будут иметь вид

$$k_2 \approx \frac{1+i}{\delta_\varphi} \left(1 + \varepsilon \frac{\sin^2 \varphi}{2 \sin^2 \theta} \right), \quad k_3 \approx \frac{1+i}{\delta_\kappa} \sqrt{\sin \theta} + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}} \frac{1+i}{\delta_N} \frac{\sin^2 \varphi}{\sin^{3/2} \theta}, \quad k_4 \approx \frac{1+i}{\delta_\nu} \quad (2.4)$$

$$\delta_\varphi = \delta_N \sqrt{\frac{2 \sin \theta}{|\mu|}}, \quad \delta_\kappa = \delta_N \sqrt{\frac{2 \varepsilon}{\sin \theta}}, \quad \delta_\nu = \delta_N \sqrt{\frac{2 \varepsilon}{\sin \theta}}$$

В случае однородной вязкой жидкости сингулярная компонента течения с волновым числом k_4 , определяемая вторым сомножителем левой части уравнения (2.1), имеет аналог — решение в виде периодического пограничного слоя Стокса [1] с масштабом δ_v .

3. Анализ решения. Дальнейший анализ решения проводится в случае, когда часть плоскости в виде прямоугольника со сторонами a и b колеблется вдоль оси $O\xi$ с магнитудой скорости u_0 . Рассматривается течение жидкости только над плоскостью ($\zeta > 0$) при $0 < \varphi < \theta$, когда волновой конус ее не касается. В случае критических углов ($\varphi = \pm\theta$) задача не вырождается, и решения надо искать в виде разложений по малым расстояниям указанных углов.

Граничные условия прилипания на всей плоскости, включая подвижный участок, принимают вид

$$U = u_0 e_\xi \vartheta(a/2 - |\xi|) \vartheta(b/2 - |\eta|)$$

где $\vartheta(x)$ — функция Хэвисайда.

Фурье-образы компонент скорости осциллирующего прямоугольника на поверхности имеют вид

$$U_\xi = \frac{u_0}{\pi^2 k_\xi k_\eta} \sin \frac{k_\xi a}{2} \sin \frac{k_\eta b}{2}, \quad U_\eta = U_\zeta = 0$$

В общем случае решение характеризуется тремя масштабами: δ_φ , δ_k и δ_v . Как и в частном случае $\varphi = 0$ [12], роль сингулярных компонент проявляется не только вблизи осциллирующей поверхности (где традиционно используются приближения пограничного слоя), но и вдали от нее, где они характеризуют положения областей максимальной концентрации завихренности и скорости диссипации энергии.

В пренебрежении эффектами диффузии ($\varepsilon \ll 1$), обычно принятом при изучении течений морской воды и водных растворов минеральных солей, выражения (2.2), (2.3), (2.4) значительно упрощаются. В этом случае множитель $\delta_N^2(1 + \varepsilon)$ в выражении для регулярного по ε корня (2.2) заменяется на δ_N^2 , как и в полученных ранее решениях [5]. Сингулярный корень k_2 определяется только коэффициентом кинематической вязкости. Корень k_4 в аналоге периодического пограничного слоя Стокса не меняется. В выражения для скоростей в локальной системе координат войдут только масштабы δ_φ и δ_v , характеризующие сингулярные компоненты периодического течения:

$$\begin{aligned} v_\xi &\approx -\frac{1-i}{2} \delta_\varphi G_1 + \frac{i\delta_N^2}{\sqrt{|\mu|}} \operatorname{tg}^2 \varphi G_2 - G_3 \\ v_\eta &\approx (1-i) \delta_\varphi G_0 + \frac{1-i}{2} \delta_v \operatorname{tg} \varphi G_2 - (1-i) \delta_\varphi \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} G_3 \\ v_\zeta &\approx \frac{i-1}{2} \delta_\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} u_0 k_\xi e_1 dk_\xi dk_\eta + \frac{i\delta_N^2}{2\sqrt{|\mu|}} \operatorname{tg} \varphi G_2 - \frac{1+i}{\delta_\varphi \sin \varphi} G_3 \\ G_n &= u_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_n}{k_\eta^2 \cos \varphi + k_\xi \beta} dk_\xi dk_\eta, \quad n = 0, 1, 2, 3 \\ g_0 &= \gamma k_\xi k_\eta e_1, \quad g_1 = k_\xi e_1 (k_\eta^2 \sin \varphi - k_1 \beta) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$g_2 = k_\eta Q \exp\left(-\frac{1-i}{\delta_v} \zeta\right) [k_\eta^2 \cos\varphi + k_\xi (k_1 - \gamma)]$$

$$g_3 = Q \exp\left(-\frac{1+i}{\delta_\varphi} \zeta\right) (k_\eta^2 \sin\varphi + k_\xi \beta \sin\varphi)$$

$$Q = \exp(ik_\xi \xi + ik_\eta \eta), \quad \beta = k_\xi \cos\varphi - k_1 \sin\varphi, \quad \gamma = k_\xi \sin\varphi + k_1 \cos\varphi$$

В пренебрежении эффектами диффузии и стремлении κ_S к нулю выражения (3.1) равномерно переходят в полученные ранее [13].

При неограниченном увеличении одной из сторон осциллирующего прямоугольника (без ограничения общности выбирается $b \rightarrow \infty$, или в спектральном представлении $k_\eta \rightarrow 0$) задача в трехмерной постановке трансформируется в двумерную задачу. В предельном случае $k_\eta \rightarrow 0$ выражения для корней уравнения (2.1) принимают вид

$$k_1 = k_1^{(0)} + k_1^{(1)} + \dots; \quad k_1^{(0)} = k_\xi \operatorname{ctg}(\varphi + \theta), \quad k_1^{(1)} = \pm \frac{ik_\xi^3 \delta_N^2}{2 \cos \theta \sin^4(\varphi - \theta)}, \quad k_2 = \frac{1+i}{\delta_\varphi}$$

а выражения для скоростей

$$v_\xi = \frac{u_0}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k_\xi (k_1 - k_2)} \sin \frac{k_\xi a}{2} (k_1 e^{ik_1 \zeta} - k_2 e^{ik_2 \zeta}) e^{ik_\xi \xi} dk_\xi, \quad v_\eta = 0$$

$$v_\zeta = \frac{u_0}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k_2 - k_1} \sin \frac{k_\xi a}{2} (e^{ik_1 \zeta} + e^{ik_2 \zeta}) e^{ik_\xi \xi} dk_\xi$$

Модальная структура пучка определяется отношением ширины полосы к одному из собственных масштабов задачи $L_v = (gv)^{1/3}/N$ и расстоянию от осциллирующей поверхности до плоскости наблюдения. Из двух сингулярно возмущенных решений вязкой задачи остается только одно, поперечный масштаб которого определяется масштабом δ_φ .

Поскольку в реальном эксперименте невозможно создать идеальные условия (постоянная частота плавучести, ровная кромка пластины), малые неоднородности в геометрии могут приводить к формированию всех тонкоструктурных возмущений (двух в вязкой жидкости и трех при учете эффектов диффузии), нелинейное взаимодействие между которыми, а также с излучаемым полем внутренних волн будет приводить к формированию трехмерных вихревых систем (что наблюдается и при колебаниях тел в однородной жидкости [14]).

Вдали от продольно осциллирующего прямоугольника в сопутствующей системе координат (p, q, α) в пренебрежении эффектами диффузии асимптотическое выражение для вертикальных смещений частиц на оси пучка $p = 0$ можно представить в виде

$$h_z(0, q) = \frac{iv_z}{\omega} \sim \frac{u_0 S}{N \delta_N^{2/3} q^{4/3}}$$

В случае, когда источником волн является часть плоскости в виде диска, совершающего поршневые колебания [4], для смещения частиц на оси пучка имеем соотношение

$$h_z(0, q) \sim \frac{u_0 S}{\pi N q \delta_N}$$

Видно, что амплитуда смещений в первом случае спадает быстрее, чем во втором. В обоих случаях она прямо пропорциональна площади осциллирующего прямоугольника.

В ряде полученных выражений допускается переход к предельному случаю, когда частота плавучести стремится к нулю (жидкость считается однородной, а диффундирующая примесь принимается невесомой). При этом выражения (2.2), (2.3) и (2.4) для волновых чисел упрощаются:

$$k_1 = ik_{\perp}, \quad k_2 = \frac{1+i}{\delta_v}, \quad k_3 = \frac{1+i}{\delta_{\kappa}}, \quad k_4 = \frac{1+i}{\delta_v} \quad (3.2)$$

и совпадают с полученными в задаче о колебаниях плоскости [1]. В решениях сохраняется информация о связи лабораторной и локальной систем координат, и выражения для скоростей записываются в виде

$$\begin{aligned} v_{\xi} &\approx \int_{-\infty}^{+\infty} A_1 e_1 (k_{\eta}^2 \sin \varphi - k_1 \beta) dk_{\xi} dk_{\eta} + i \exp\left(-\frac{1-i}{\delta_v} \zeta\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2}{\delta_v^2} A_2 + B \cos \varphi\right) Q dk_{\xi} dk_{\eta} + M_1 \\ v_{\eta} &\approx \int_{-\infty}^{+\infty} A_1 \gamma e_1 k_{\eta} dk_{\xi} dk_{\eta} - \frac{1+i}{\delta_v} \exp\left(-\frac{1-i}{\delta_v} \zeta\right) \int_{-\infty}^{+\infty} (A_2 k_{\eta} - B \sin \varphi) Q dk_{\xi} dk_{\eta} - M_2 \\ v_{\zeta} &\approx \int_{-\infty}^{+\infty} A_1 e_1 (k_{\eta}^2 \sin \varphi - k_{\xi} \beta) dk_{\xi} dk_{\eta} + i \exp\left(-\frac{1-i}{\delta_v} \zeta\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1-i}{\delta_{\varphi}} A_2 k_{\xi} - B \sin \varphi\right) Q dk_{\xi} dk_{\eta} - M_3 \end{aligned}$$

где

$$M_j = a_j \exp\left(-\sigma_{\kappa} \zeta + i \frac{\zeta}{\sqrt{2} \delta_{\kappa}}\right) \sin^2 \varphi \int_{-\infty}^{+\infty} A_3 Q b_j dk_{\xi} dk_{\eta}, \quad j = 1, 2, 3$$

$$\sigma_{\kappa} = \frac{\sqrt{\sin \theta}}{\sqrt{2} \delta_{\kappa}} = \frac{\delta_N}{\delta_{\kappa} \delta_v}$$

Пространственная структура течения определяется двумя масштабами: δ_{κ} и δ_v .

В предельном случае однородной жидкости, когда угол наклона излучающей поверхности тождественно равен нулю, выражения для компонент скорости имеют вид

$$\begin{aligned} v_{\xi} &= \int_{-\infty}^{+\infty} k_{\eta}^2 L_3 dk_{\xi} dk_{\eta} + \int_{-\infty}^{+\infty} k_{\xi}^2 L_1 dk_{\xi} dk_{\eta}, \quad v_{\eta} = \int_{-\infty}^{+\infty} L_3 dk_{\xi} dk_{\eta} + \int_{-\infty}^{+\infty} k_{\xi} k_{\eta} L_1 dk_{\xi} dk_{\eta} \\ v_{\zeta} &= \int_{-\infty}^{+\infty} k_{\eta} k_{\perp}^2 L_2 dk_{\xi} dk_{\eta} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$L_m = u_0 Q \frac{k_1^{2-m} \exp(ik_1 \zeta) + k_2^{2-m} \exp(ik_2 \zeta)}{(k_{\eta}^2 - k_{\xi}^2)(k_2 - k_1)}, \quad m = 1, 2, \quad L_3 = \frac{u_0 Q}{k_{\eta}^2 - k_{\xi}^2} \exp\left(-\frac{1-i}{\delta_v} \zeta\right)$$

В предельном случае $a \rightarrow \infty$ задача о колебаниях части плоскости и полосы в однородной жидкости ($N = 0$) переходит в задачу Стокса о колебаниях плоскости.

4. Сравнение результатов расчетов с экспериментом. Методика экспериментальных исследований разрабатывалась с учетом результатов расчетов [3].

Опыты выполнены в лабораторном волновом канале длиной 9 м и сечением $0.6 \times 0.6 \text{ м}^2$, в боковые стенки которого вклеены оптические иллюминаторы. Бассейн заполнялся стратифици-

рованной по соли жидкостью методом последовательного вытеснения по традиционной схеме. Для визуализации волновых процессов применялся теневой прибор ИАБ-451 с диаметром поля зрения 230 мм. Для определения параметров стратификации и характеристик волновых пучков использовались контактные датчики удельной электропроводности (ДУЭ), градуировка которых осуществляется непосредственно в ходе эксперимента методами “подъем – погружение” или “непрерывных осцилляций” [7]. После заполнения бассейна отстаивался для сглаживания неоднородностей профиля плотности, возникших при создании стратификации. Затем при помощи ДУЭ снимался разрез распределения плотности. На генератор внутренних волн крепился излучатель (пластина выбранного размера) и погружался на выбранный горизонт. После затухания всех возмущений включался генератор и, после окончания всех переходных процессов, проводилось фотографирование картины течения и измерения амплитуд смещений жидких частиц. Во всех случаях, даже при продолжительных измерениях, в поле зрения теневого прибора не наблюдались волны отраженные от боковых стенок, дна и свободной поверхности длинного бассейна.

На фиг. 2 показана теневая картина возмущений, создаваемых продольно осциллирующей пластиной шириной 6 см, установленной под углом $\varphi = 50^\circ$ к горизонту в жидкости с периодом плавучести $T_b = 7.5$ с. Видно, что имеется фазовый сдвиг между колебаниями в верхнем и нижнем полупространстве. От верхней и нижней кромок пластины отходят горизонтальные полосы – внутренние пограничные течения, порождаемые отрывающимся пограничным слоем. Все течения ламинарные, в окрестности пластины нет нерегулярных возмущений и перемешивания жидкости.

Картины течения с момента формирования, полученные цветным теневым методом, изображены на фиг. 3 (ширина пластины 4 см, угол $\varphi = 40^\circ$, период плавучести $T_b = 12$ с). Более чувствительный цветной теневой метод визуализирует не только волны, но и течения, индуцированные диффузией [16], в форме тонких горизонтальных лучей, примыкающих к кромкам полосы.

На фиг. 4 приведены результаты сравнения лабораторного эксперимента (точки) и расчетов (кривые) вертикального смещения частиц (h_z) в пучке в сопутствующей системе координат (угол $\varphi = -30^\circ$, период плавучести $T_b = 7.0$ с). Различия в абсолютных значениях амплитуд учитываются введением коэффициента K , значение которого выбирается из условия минимальности отклонения экспериментальных точек от расчетной кривой. В случае одномодального пучка $K = 1.0$ (кривая 1).

Пластина шириной $a = 3$ см достаточно близко соответствует критическому условию $a \approx L_v$ (для условий данных опытов $T_b = 7.0$ с, $L_v = 2.4$ см). Перестройка модальной структуры пучка происходит в пределах поля зрения. Соответствующие этому случаю два профиля вертикальных смещений частиц приведены на фиг. 4, кривые 2 и 3. Вблизи излучателя ($x = 5.0$ см) волновой пучок бимодален ($K = 1.1$). Уже на расстоянии $x = 7.5$ см максимумы сместились к центру пучка и центральная впадина практически исчезла ($K = 1.05$).

Когда длина пластины a заметно превышает вязкий волновой масштаб, пучок является бимодальным (фиг. 4, кривая 4, $K = 1.0$). Во всех случаях положение наблюдаемых экстремумов и профили пучков хорошо согласуются с расчетными. Несколько более высокая амплитуда в центре пучка на фиг. 4, кривая 4 обусловлена неволновыми эффектами на малых расстояниях от пластины. Как видно на фиг. 3, вблизи краев пластины образуются вихри, которые приводят к перемешиванию жидкости, увеличивая эффективную область излучения.

Отметим в заключение, что проявление нелинейных эффектов следует ожидать как в окрестностях осциллирующего тела, так и в областях конвергенции сингулярно возмущенных решений непосредственно в толще жидкости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (08-05-00473) и Российской академии наук (Программа фундаментальных научных исследований Президиума РАН “Мировой океан”).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stokes G.G.* On the effect of internal friction of fluids on the motion of pendulums // *Trans. Cambr. Phil. Soc.* 1851. V. 9. Pt. 2. P. 8–106.
2. *Schlichting H.* Grenzschichttheorie. Karlsruhe: G. Braun, 1965 = *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука. 1974. 711 с.
3. *Кистович Ю.В., Чашечкин Ю.Д.* Генерация монохроматических внутренних волн в вязкой жидкости // *ПМТФ.* 1999. Т. 40. № 6. С. 31–40.
4. *Чашечкин Ю.Д., Васильев А.Ю.* Расчет излучения внутренних волн поршнем, осциллирующим в непрерывно стратифицированной жидкости, при учете эффектов диффузии // *Докл. РАН.* 2009. Т. 425. № 1. С. 54–59.
5. *Чашечкин Ю.Д., Кистович Ю.В.* Задача генерации монохроматических внутренних волн: точное решение и модель силовых источников // *Докл. РАН.* 1997. Т. 355. № 1. С. 54–57.
6. *Voisin B.* Limit states of internal wave beams // *J. Fluid Mech.* 2003. V. 496. P. 243–293.
7. *Ильиных Ю.С., Кистович Ю.В., Чашечкин Ю.Д.* Сравнение точного решения одной задачи возбуждения периодических внутренних волн с экспериментом // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* 1999. Т. 35. № 5. С. 649–655.
8. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Гидродинамика. Т. 6. М.: Наука, 2001. С. 733.
9. *Чашечкин Ю.Д., Кистович А.В.* Расчет структуры периодических течений в непрерывно стратифицированной жидкости с учетом эффектов диффузии // *Докл. РАН.* 2003. Т. 393. № 2. С. 776–780.
10. *Nayfeh A.H.* Introduction to Perturbation Techniques. N. Y., etc.: Wiley, 1981 = *Найфе А.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
11. *Lighthill J.* Waves in Fluids. Cambridge: Univ. Press. 1978 = *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкости. М.: Мир, 1981. 598 с.
12. *Бардаков Р.Н., Васильев А.Ю., Чашечкин Ю.Д.* Расчет и измерения конических пучков трехмерных периодических внутренних волн, возбуждаемых вертикально осциллирующим поршнем // *Изв. РАН. МЖГ.* 2007. № 4. С. 117–133.
13. *Васильев А.Ю., Чашечкин Ю.Д.* Генерация пучков трехмерных периодических внутренних волн в экспоненциально стратифицированной жидкости // *ПММ.* 2003. Т. 67. Вып. 3. С. 442–452.
14. *Honji H.* Streaked flow around an oscillating circular cylinder // *J. Fluid Mech.* 1981. V. 107. P. 509–520.
15. *Javam A., Imberger J., Armfield S. W.* Numerical study of internal wave-wave interactions in a stratified fluid // *J. Fluid Mech.* 2000. V. 415. P. 65–87.
16. *Кистович А.В., Чашечкин Ю.Д.* Структура нестационарного пограничного течения на наклонной плоскости в непрерывно стратифицированной среде // *ПММ* 1993. Т. 57. Вып. 4. С. 50–56.

Москва

e-mail: corwin@ipmnet.ru

chakin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию

20.IX.2009