

令和 6 年度 横浜国立大学 理工学部 機械・材料・海洋系学科 卒業研究

Drucker-Prager モデルに対する Block Newton 法の適用

機械工学 EP
2165131 永作 光一

指導教員: 松井 和己 准教授
(令和 7 年 2 月 6 日)

指導教員印



Drucker-Prager モデルに対する Block Newton 法⁽¹⁾の適用

Application of the Block Newton Method⁽¹⁾ to the Drucker-Prager Model

2165131 永作 光一 (横浜国立大学 理工学部 機械・材料・海洋系学科 機械工学 EP マツイ研究室)

Koichi NAGASAKU, Matsui Laboratory, Dept. Mechanical Engineering, Yokohama National University

Abstract: This paper presents a Block Newton method-based approach for solving elastoplastic problems with the Drucker-Prager model. By linearizing the equilibrium equation, the yield condition, the plastic flow rule, and the hardening evolutions simultaneously, the proposed method directly computes displacements and internal variables in a single iteration loop. In contrast to conventional return mapping algorithms that utilize nested iterations, this technique can escape from those iterations. Additionally, the explicit inclusion of internal variables in the formulation allows for an analytical construction of the tangent stiffness matrix through their subsequent elimination, thereby bypassing complex chain-rule expansions.

Key Words: Block Newton Method, Elastoplasticity, Finite Element Analysis, Small Strains

1. 緒言

材料の非線形性を考慮した構造物の挙動は、構造物の変形と材料の非線形応答から決定される。特に、金属材料など塑性変形を伴う挙動は、つりあい方程式から求まる変位と降伏条件に基づいた塑性変形の進展を表す内部変数によって記述される。したがって、弾塑性問題は物質点におけるつりあい方程式と降伏条件式の連成問題と捉えることができる。

弾塑性問題に対しては、これまで様々な数値計算手法が提案されており、中でも弾性予測子と塑性修正子に基づく return mapping アルゴリズムは従来から幅広く利用されている。しかしながら、このような従来手法では、つりあい方程式と降伏条件式をそれぞれ別個に線形化するため、変位と内部変数を求めるために 2 重の内部反復が必要となる。

それに対し、つりあい方程式と降伏条件式を同時に線形化すれば、内部反復を用いることなく変位と内部変数を求めることができる。また、この手法では変位と内部変数を含む形でつりあい方程式と降伏条件を記述しているため、線形化された連成問題から材料構成則における内部変数を消去することで変位に関する接線係数を代数的に構築でき、あわせて内部変数も内部反復を用いることなく代数的に更新することが可能である。以上の手法は山本らによって Block Newton 法と名付けられている⁽¹⁾⁽²⁾。

本論文では、Drucker-Prager モデルを採用した弾塑性問題に対して Block Newton 法を適用し、その有用性を検証することを目的とする。

2. Drucker-Prager モデル

Mohr-Coulomb 則をなめらかに近似する降伏基準が、Drucker と Prager [1952]により提案された。

この Drucker-Prager の降伏基準は、von Mises の降伏基準に付加項を追加することによって、静水圧依存性を導入したものであり、「偏差応力の第 2 不変量 J_2 と静水圧応力 p の組み合わせがある臨界状態に至るときに塑性降伏が開始する」と規定されている。

これは圧力($-p$)が大きいほど、塑性降伏が開始する偏差応力は大きくなるという、地盤材料、岩石、コンクリートなどの摩擦性材料に見られる性質を表現するものである。具体的には、次式が成立するときに塑性降伏が開始するとされる。

$$\sqrt{J_2(s)} + \eta p = c \quad (1)$$

ここで、 η とは材料定数である。また、主応力空間における降伏曲面は対称軸が静水圧軸と一致する円錐となり $\eta = 0$ のときに von Mises の降伏曲面に一致する。Drucker-Prager の降伏基準を模式的に表す円錐を Fig.1 に示す。

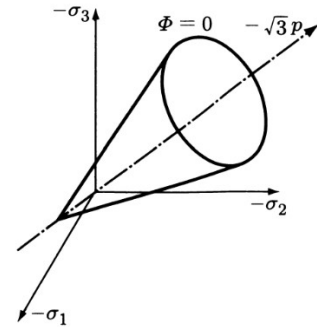


Fig. 1 Drucker-Prager Yield Surface in Principal Stress Space

3. 材料構成則

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e \\ \Phi = \sqrt{J_2(\boldsymbol{\xi})} + \eta p - \xi c(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\gamma} \left(\frac{1}{2\sqrt{J_2(\boldsymbol{\xi})}} \boldsymbol{\xi} + \frac{\eta}{3} \mathbf{I} \right) \\ \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p = \dot{\gamma} \boldsymbol{\xi} \\ \dot{\beta} = \dot{\gamma} \mathbf{H}^k(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \left(\frac{1}{2\sqrt{J_2(\boldsymbol{\xi})}} \boldsymbol{\xi} + \frac{\eta}{3} \mathbf{I} \right) \\ \Phi \leq 0, \quad \dot{\gamma} \geq 0, \quad \Phi \dot{\gamma} = 0 \end{cases}$$

Drucker-Prager モデルに対しては、一般に非関連流れ則が適用される。対応する塑性ポテンシャルは次の通り。

$$\Psi = \sqrt{J_2(\boldsymbol{\xi})} + \bar{\eta} p \quad (2)$$

ここで、定数 $\bar{\eta}$ はダイレイタンス角 ψ に依存するパラメータであり、Mohr-Coulomb モデルに対する Drucker-Prager モデルの近似方法に応じて決定される。

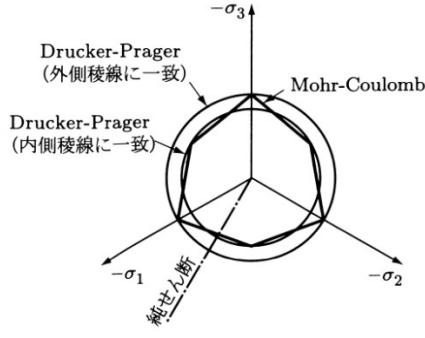


Fig. 2 Mohr-Coulomb Yield Surface in the π -Plane and Its Drucker-Prager Approximate Yield Surface⁽³⁾

4. Block Newton 法を用いた弾塑性解析

弾塑性問題を構造全体のつり合い方程式と各物質点における降伏条件式の連成問題として捉えた場合、解くべきつり合い方程式および降伏条件式は、変位ベクトル \mathbf{u} と内部変数 α を用いてそれぞれ次式で表される。

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}, \alpha) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, \alpha) + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (3)$$

$$g(\mathbf{u}, \alpha) = 0 \quad (4)$$

式(1)および式(2)を解くために、Newton-Raphson 法を採用する。擬似的時間間隔 $[t_n, t_{n+1}]$ において、時刻 t_{n+1} での変位ベクトル \mathbf{u} 、内部変数 α は次式で表される。

$$\mathbf{u}_{n+1}^{(i+1)} = \mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{u}^{(i+1)} \quad (5)$$

$$\alpha_{n+1}^{(i+1)} = \alpha_n + \Delta \alpha^{(i+1)} \quad (6)$$

ここで \mathbf{u}_n 、 α_n は、時刻 t_n における変位ベクトル、内部変数であり、 $\Delta \mathbf{u}^{(i+1)}$ 、 $\Delta \alpha^{(i+1)}$ は時刻 t_n から $i+1$ 回目の反復までの増分を表す。Newton-Raphson 法では、 $i+1$ 回目の反復までの増分量が、 i 回目までの増分量と $i+1$ 回目の修正量 $\delta \mathbf{u}^{(i+1)}$ 、 $\delta \alpha^{(i+1)}$ の合計として考える。

式(5)および式(6)に示す修正量 $\delta \mathbf{u}^{(i+1)}$ 、 $\delta \alpha^{(i+1)}$ を求める式は、次式のように線形化できる。

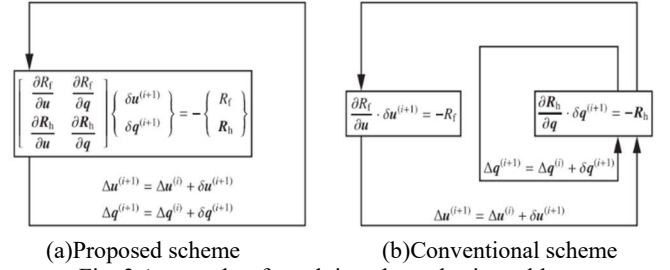
$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}, \alpha_{n+1}^{(i)}) & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \alpha}(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}, \alpha_{n+1}^{(i)}) \\ \frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}, \alpha_{n+1}^{(i)}) & \frac{\partial g}{\partial \alpha}(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}, \alpha_{n+1}^{(i)}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{u}^{(i+1)} \\ \delta \alpha^{(i+1)} \end{Bmatrix} \\ &= - \begin{Bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}, \alpha_{n+1}^{(i)}) \\ g(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}, \alpha_{n+1}^{(i)}) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

式(7)より $\delta \alpha^{(i+1)}$ を消去することで次式が得られる。

$$\left\{ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial g}{\partial \alpha} \right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}} \right\} \delta \mathbf{u}^{(i+1)} = -\mathbf{f} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial g}{\partial \alpha} \right)^{-1} g \quad (8)$$

式(8)の左辺における $\delta \mathbf{u}^{(i+1)}$ の係数は、コンシステント接線係数行列であり、Block Newton 法を適用した場合、この接線係数行列を代数的に構築できる。

ここで、Block Newton 法に基づく数値計算アルゴリズムを Fig.3(a)、従来手法に基づく数値計算アルゴリズムを Fig.3(b) にそれぞれ示す。



5. コンシステント接線係数

従来手法に対して Block Newton 法ではコンシステント接線係数は次の通りに代数的に構築できる。

$$\mathbf{D}^{\text{ep}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial g}{\partial \alpha} \right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}} \quad (9)$$

ここで、この値は

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{\text{ep}} &= 2G \left(1 - \frac{\Delta \gamma_{n+1}}{\sqrt{2} |\boldsymbol{\varepsilon}_{d,n+1}^{\text{etr}}|} \right) \mathbf{I}_d \\ &+ 2G \left(\frac{\Delta \gamma_{n+1}}{\sqrt{2} |\boldsymbol{\varepsilon}_{d,n+1}^{\text{etr}}|} - GA \right) \mathbf{n}_{n+1}^{\text{tr}} \otimes \mathbf{n}_{n+1}^{\text{tr}} \\ &- \sqrt{2} GAK (\eta \mathbf{n}_{n+1}^{\text{tr}} \otimes \mathbf{I} + \bar{\eta} \mathbf{I} \otimes \mathbf{n}_{n+1}^{\text{tr}}) \\ &+ K(1 - K\eta\bar{\eta}) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \end{aligned} \quad (10)$$

となる。ここで、

$$\mathbf{n}_{n+1}^{\text{tr}} \equiv \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{d,n+1}^{\text{etr}}}{|\boldsymbol{\varepsilon}_{d,n+1}^{\text{etr}}|} \quad (11)$$

$$A \equiv \frac{1}{G + K\eta\bar{\eta} + \xi^2 H} \quad (12)$$

この Block Newton 法によるコンシステント接線係数の構築結果は、従来手法により導出される結果と一致していることが確認できた。

6. 結言

本研究では弾塑性問題をつり合い方程式と積分点における拘束条件式の連成問題として捉え、それらを同時に線形化する事で Block Newton 法に基づく数値計算手法を定式化した。今回扱った Drucker-Prager モデルの降伏条件式は静水圧依存性を有し、そのために従来手法に基づいたコンシステント接線係数の定式化には複雑な連鎖律を伴う微分計算が必要となる。対して、提案手法ではコンシステント接線係数を代数的に構築することで、その複雑化した微分計算を回避しながら従来手法と同一の定式化が行えた。

7. 参考文献

- (1) Yamamoto, T. et al.: Simultaneously iterative procedure based on block Newton method for elastoplastic problems, *Int. J. for Numer. Met. in Enginrng.*, Vol.122, pp.2145-2178, 2021.
- (2) 山本剛大, 山田貴博, 松井和己: Block Newton 法の平面応力弾塑性問題への適用, 日本計算工学会論文集, Paper No.20210021, 2021.
- (3) EA de Souza Neto, Peric, DRJ Owen.: 非線形有限要素法-弾塑性解析の理論と実践-, (寺田賢二郎監訳), 森北出版 2012.
- (4) J.C. Simo, R.L. Taylor, Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *Comput. Met. Appl. Mech. Enginrng.*, Vol.48, pp.101-118, 1985.

卒業論文

Drucker-Prager モデルに対する Block Newton 法の適用

横浜国立大学 理工学部 機械・材料・海洋系学科

機械工学 EP

松井研究室

指導教員 松井 和己 准教授

永作 光一

(学籍番号: 2165131)

提出日: 2025 年 2 月 6 日

謝 辞

本論文の作成にあたり多くの方々からご指導，ご支援を頂きましたこと深く感謝いたします。

まず本研究の機会を与えてくださったマツイ和己准教授，山田貴博教授に感謝いたします。マツイ和己准教授には本研究の基礎となるプログラムを提供していただくと共に，研究を進めていく上で必要な様々な知識を丁寧にご指導いただきました。また，学生生活の中で講演会，勉強会や学会へ参加する機会を多く与えていただくだけでなく，研究が遅遅としてはかどらない状況にあっても多くのアドバイスや激励をいただきました。これらは体験は自身の見聞を広め，研究を進める上で大きな糧となりました。不出来な学生であった私に根気強くご指導頂きましたこと深謝いたします。山田貴博教授にはゼミの場において率直なご意見やご指摘を頂き，研究を進めていく上で大変参考になりました。また，分野にとらわれず深い知識と興味をもち広い視点から研究に向かう姿勢には，研究者としてのあり方を学ばせていただきました。お二人のご指導のおかげで本論文を作成できましたことこの場を借りて御礼申し上げます。

また本研究室の先輩方には研究に関して様々なアドバイスをいただくだけでなく，公私にわたって大変お世話になりました。修士課程2年の油川英史さん，ジョンセウォンさん，修士課程1年の進藤海里さんには先輩としての適切なアドバイスを公私に渡っていただきました。先輩方の豊かな人生経験は若輩者の私にとって大変参考になり，これからの人生に役立てて生きたいと思います。同期の仲間達とは学生生活を送る中でお互いの研究に対する意見を交換し，苦楽を分かち合い，とても有意義な研究室生活を送ることができました。皆様方のおかげでこの一年を有意義に過ごせましたことを改めて御礼申し上げます。

最後に，今までの大学の学部生活を支えてくれた両親をはじめ家族，先輩方，後輩，友人たちに深く感謝いたします。

2025年2月6日

永作 光一

目 次

第 1 章 緒言	1
1.1 弾塑性問題の数値計算手法	1
1.2 Block Newton 法 ²⁾³⁾	1
1.3 本論文の目的と構成	2
第 2 章 Drucker-Prager モデル	3
2.1 Drucker-Prager モデル	3
2.2 材料構成則	4
2.2.1 ひずみの弾塑性分解	4
2.2.2 弾性構成則	4
2.2.3 降伏関数	4
2.2.4 非関連塑性流れ則	5
2.2.5 硬化則	6
2.2.6 負荷/除荷条件	7
2.3 時間方向の材料構成則の離散化	7
2.4 積分アルゴリズム	7
2.4.1 試行弾性状態の評価	9
2.4.2 リターンマッピング方程式	9
2.4.3 Return mapping 方程式の解法	10
2.4.4 コンシステント接線係数の導出	11
第 3 章 Block Newton 法を用いた弾塑性数値解析	15
3.1 物質点における連成問題	15
3.2 有限要素離散化	18

3.3 コンシステント接線係数の導出	21
第4章 結言	22
参考文献	23

表 目 次

目 次

2.1	Drucker–Prager Yield Surface in Principal Stress Space ⁴⁾	3
2.2	Mohr–Coulomb Yield Surface in the π -Plane and Its Approximation by the Drucker–Prager Model ⁴⁾	5

第1章 緒言

1.1 弾塑性問題の数値計算手法

有限要素法（FEM）に基づく弾塑性解析は，構造物や部品の塑性変形や延性破壊といった非線形挙動をシミュレーションするために広く利用されている．これらの解析は，非線形問題に対処するために時間積分を通じて逐次的に実行され，静的および準静的解析の多くでは，安定な時間増分に制限がある陽的手法に比べ，陰的時間積分手法の方が効率的であることが一般的である²⁾．材料の非線形性を考慮した構造物の挙動は，構造物の変形と材料の非線形応答から決定される．特に，金属材料など塑性変形を伴う挙動は，つりあい方程式から求まる変位と降伏条件に基づいた塑性変形の進展を表す内部変数によって記述される．したがって，弾塑性問題は物質点におけるつりあい方程式と降伏条件式の連成問題と捉えることができる．弾塑性問題に対して様々な数値計算手法が提案されており，数値計算の収束性・安定性・収束速度の観点から時間積分に後退差分が適用されることが多く，その中でも弾性予測子と塑性修正子に基づく return mapping アルゴリズムは幅広く利用されている．この return mapping アルゴリズムはつり合い方程式と降伏条件式を別々に線形化するため，変位と内部変数を求めるために内部反復を前提とする手法である．応力積分アルゴリズムに整合する接線係数（consistent tangent）を導出すれば2次の収束性が得られると報告されている¹⁾．しかしながら，材料の挙動を表現する構成則が複雑化するにつれて，consistent tangent の導出過程が非常に複雑となり，その解析的な導出が困難となる．

1.2 Block Newton 法²⁾³⁾

山本らにより開発された BlockNewton 法に基づく数値計算手法は，降伏条件式とその他発展式を制約条件と定義し，つり合い式と制約条件式を同時に線形化することで制約条件に対する

残差で表現される偽応力（応力の次元を持つ2階テンソル）を線形化された仮想仕事式に組み込むことで、連成問題の残差が同時に減少する。定式化において内部変数を含む形で連成問題を記述し、線形化された連成問題から内部変数を消去することで変位に関する接線係数が代数的に構築でき、内部変数も代数的に更新される。接線係数が代数的に構築できるので、return mapping アルゴリズムにおける複雑な材料構成則の微分を解析的に導出する必要がなくなるという特徴がある。また、連成問題に仮想仕事式を採用することで、通常の有限要素解析に提案手法を容易に実装可能となる。

1.3 本論文の目的と構成

本論文では、Block Newton 法に基づく数値計算手法を、Drucker–Prager モデルを採用した弾塑性問題に適用し、つりあい方程式と拘束条件式である降伏条件式・硬化係数発展方程式の連成問題を定義し、それらを同時に線形化することで内部反復のない数値計算手法を提案し、提案手法の有用性を検証することを目的とする。提案手法では、定義した連成問題から内部変数を消去することで接線係数を代数的に求めることができ、また内部変数も代数的に更新される。さらに、拘束条件式の残差が線形化されたつりあい方程式に組み込まれ、連成問題の残差を同時に減少させることができる。接線係数が代数的に構築できる

本論文では Block Newton 法に基づく数値計算アルゴリズムを提案手法、そして従来の標準的な解析手法である Return Mapping アルゴリズムと拘束条件により2重の内部反復が生じる数値計算手法を従来手法と呼ぶ。

以下に各章の内容と構成を述べる。第2章では、Drucker–Prager モデルの材料構成則について紹介し、従来手法による積分アルゴリズムについて述べる。第3章では、Block Newton 法に基づく数値計算アルゴリズムについて記述し、提案手法によるコンシステント接線係数の導出について述べる。

第2章 Drucker-Prager モデル

2.1 Drucker-Prager モデル

Mohr–Coulomb 則をなめらかに近似する降伏基準が，Drucker と Prager [1952] により提案された．この Drucker–Prager の降伏基準は，von Mises の降伏基準に付加項を追加することによって，静水圧依存性を導入したものであり，「偏差応力の第 2 不変量 J_2 と静水圧応力 p の組み合わせがある臨界状態に至るときに塑性降伏が開始する」⁴⁾ と規定されている．具体的には，次式が成立するときに塑性降伏が開始するとされる．

$$\sqrt{J_2(s)} + \eta p = c \quad (2.1)$$

ここで， η とは材料定数である．また，主応力空間における降伏曲面は対称軸が静水圧軸と一致する円錐となり， $\eta = 0$ のときに von Mises の円柱に一致する．Drucker–Prager の降伏基準を図 2.1 に示す．

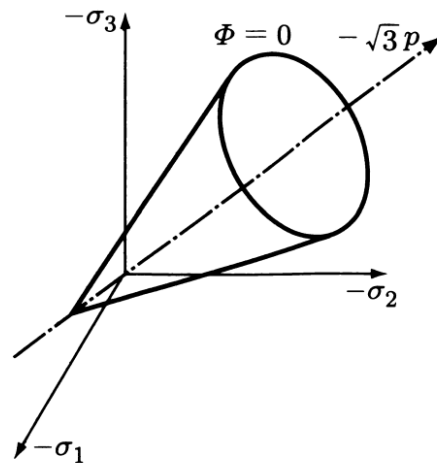


Fig. 2.1 Drucker–Prager Yield Surface in Principal Stress Space⁴⁾

2.2 材料構成則

Drucker-Prager モデルの材料構成則を以下に記述する.

2.2.1 ひずみの弾塑性分解

次式のように全ひずみ ε を弾性ひずみ ε^e と塑性ひずみ ε^p に加算分解する

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (2.2)$$

2.2.2 弾性構成則

弾性構成則を次式で定義する.

$$\sigma = \mathbf{C}^e : \varepsilon^e \quad (2.3)$$

ここで, \mathbf{C}^e は等方弾性テンソル.

2.2.3 降伏関数

Drucker-Prager モデルの降伏関数 Φ は次式で定義される. Mohr-Coulomb の降伏曲面を, 近似することを念頭において, Drucker-Prager モデルの降伏関数を次式のように定義される.

$$\begin{aligned} \Phi &\equiv \sqrt{J_2(s(\sigma) - \beta)} + \eta p(\sigma) - \xi c \\ &= \sqrt{J_2(\xi)} + \eta p(\sigma) - \xi c \end{aligned} \quad (2.4)$$

ここで, β は背応力テンソル, ξ は

$$\xi \equiv s - \beta \quad (2.5)$$

で与えられる相当応力である. c は粘着力 (cohesion) であり, スカラーのパラメータ η と ξ の値は Mohr-Coulomb の降伏基準に対する近似の考え方に応じて決定される.

Mohr-Coulomb の降伏基準を Drucker-Prager の降伏基準で近似するには, Mohr-Coulomb の降伏曲面の外側, あるいは内側の稜線において, 両降伏曲面を一致させる方法がよく用いられる.

“外側”の稜線において一致させる場合は,

$$\eta = \frac{6 \sin \phi}{\sqrt{3} (3 - \sin \phi)}, \quad \xi = \frac{6 \cos \phi}{\sqrt{3} (3 - \sin \phi)} \quad (2.6)$$

“内側”の稜線において一致させる場合は,

$$\eta = \frac{6 \sin \phi}{\sqrt{3} (3 + \sin \phi)}, \quad \xi = \frac{6 \cos \phi}{\sqrt{3} (3 + \sin \phi)} \quad (2.7)$$

と設定すればよい.

内側と外側の間隙は, それぞれ“縮小円筒”と“拡張円筒”として知られている. 内側の間隙は, 一軸引張と三軸圧縮の条件で Mohr–Coulomb の降伏基準に一致する. 外側の間隙は, 一軸圧縮と二軸引張の条件で Mohr–Coulomb の降伏基準に一致する. 両降伏曲面の平面断面を Fig.2.2 に示す.

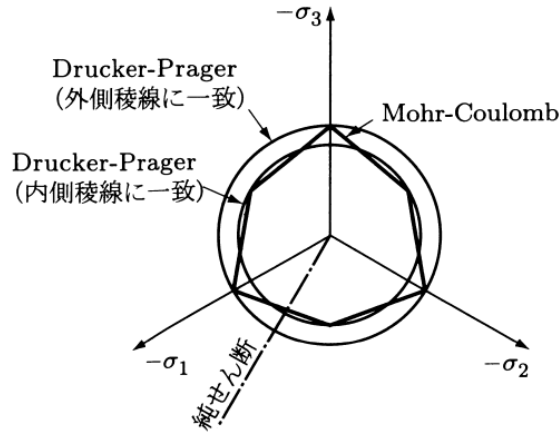


Fig. 2.2 Mohr–Coulomb Yield Surface in the π -Plane and Its Approximation by the Drucker–Prager Model⁴⁾

2.2.4 非関連塑性流れ則

Drucker–Prager モデルの実装に際しては, 一般的に非関連流れ則 (non-associated flow rule) が用いられる. 対応する塑性ポテンシャルは,

$$\Psi(\sigma, c) = \sqrt{J_2(\xi)} + \bar{\eta} p(\sigma) \quad (2.8)$$

ここで、定数 $\bar{\eta}$ はダイレイタシー角 ψ に依存するパラメータで、Mohr–Coulomb モデルに対する Drucker–Prager の近似方法に応じて、与えられる。流れ則は、

$$\dot{\varepsilon}^P = \dot{\gamma} N \quad (2.9)$$

である。ここで、 $\dot{\gamma}$ は塑性乗数、 N は流れベクトルである。非関連塑性流れ則を採用すると、塑性ポテンシャル降伏面の滑らかな部分での流れベクトルは、次式で与えられる。

$$N = \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma} = \frac{1}{2\sqrt{J_2(\xi)}} \xi + \frac{\bar{\eta}}{3} I \quad (2.10)$$

2.2.5 硬化則

今回、等方硬化則と非線形移動硬化則の2つを採用する。

等方ひずみ硬化則

Mohr–Coulomb の塑性モデルについては、降伏関数の式に含まれる粘着力 (cohesion) c を、次式のように硬化に関する内部変数の非線形な関数とみなして硬化則を定義する。

$$c = c(\bar{\varepsilon}^P) \equiv c_0 + K(\bar{\varepsilon}^P) \quad (2.11)$$

ここで、 c_0 は初期粘着力であり、 $K(\bar{\varepsilon}^P)$ は任意の等方硬化関数である。硬化内部変数 $\bar{\varepsilon}^P$ の非関連発展則は次のように定義される。

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^P = \dot{\gamma} \xi \quad (2.12)$$

非線形移動硬化則

背応力の発展則で規定される非線形移動硬化則を次の通りに定義する。

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= H^k(\bar{\varepsilon}^P) \dot{\varepsilon}^P \\ &= \dot{\gamma} H^k(\bar{\varepsilon}^P) \left(\frac{1}{2\sqrt{J_2(\xi)}} \xi + \frac{\bar{\eta}}{3} I \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

ここで,

$$H^k(\bar{\varepsilon}^p) \equiv \frac{dH}{d\bar{\varepsilon}^p} \quad (2.14)$$

は, 移動硬化関数

$$H = H(\bar{\varepsilon}^p) \quad (2.15)$$

の勾配である.

2.2.6 負荷/除荷条件

塑性流れが生じるか否かは以下の制約条件により規定される.

$$\Phi \leq 0, \quad \dot{\gamma} \geq 0, \quad \Phi \dot{\gamma} = 0 \quad (2.16)$$

これらの式から構成される Drucker-Prager モデルの材料構成則を **BOX2.1** にまとめる.

2.3 時間方向の材料構成則の離散化

ある一般的な (疑似的な) 時間間隔 $[t_n, t_{n+1}]$ における積分を行うために, 後退 Euler 法を用いて離散化する.

BOX2.1 に現れる全ての速度形の状態量を今考えている時間内の対応する増分形式に置き換え, その時間間隔の最後の時刻 $[t_{n+1}]$ での値でそれぞれ置き換える.

結果として得られる離散化された Drucker-Prager モデルの材料構成則を **BOX2.2** にまとめる.

2.4 積分アルゴリズム

始めに, 試行弾性ステップとして, 疑似的時間増分 $[t_n, t_{n+1}]$ において $\Delta\gamma_{n+1} = 0$ であるとする. この際, 試行偏差ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\text{tr}}$ を考える.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \\ &\equiv \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\text{tr}} \end{aligned} \quad (2.17)$$

試行弾性状態における各変数は次の通り.

試行弾性ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\text{tr}}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\text{tr}} \\ &\equiv \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\text{tr}}\end{aligned}\quad (2.18)$$

試行弾性体積ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{v}n+1}^{e\text{tr}}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{v}n+1}^e &= \frac{1}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{v}n+1}^e \boldsymbol{I} \\ &= \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e) \boldsymbol{I} \\ &= \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\text{tr}}) \boldsymbol{I} \\ &\equiv \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{v}n+1}^{e\text{tr}}\end{aligned}\quad (2.19)$$

試行弾性偏差ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{d}n+1}^{e\text{tr}}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{d}n+1}^e &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e - \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{v}n+1}^e \boldsymbol{I} \\ &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\text{tr}} - \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\text{tr}}) \boldsymbol{I} \\ &\equiv \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{d}n+1}^{e\text{tr}}\end{aligned}\quad (2.20)$$

試行弾性応力 $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{tr}}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \boldsymbol{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\text{tr}} \\ &\equiv \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{tr}}\end{aligned}\quad (2.21)$$

試行偏差応力 $\boldsymbol{s}_{n+1}^{\text{tr}}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{s}_{n+1} &= 2G \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{v}n+1}^{e\text{tr}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\text{tr}} \right) \\ &\equiv \boldsymbol{s}_{n+1}^{\text{tr}}\end{aligned}\quad (2.22)$$

試行静水圧成分 p_{n+1}^{tr}

$$\begin{aligned}p_{n+1} &= K \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{v}n+1}^{e\text{tr}} \\ &\equiv p_{n+1}^{\text{tr}}\end{aligned}\quad (2.23)$$

試行累積塑性ひずみ $\bar{\varepsilon}_{n+1}^{p\text{tr}}$

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_{n+1}^p &= \bar{\varepsilon}_n^p \\ &\equiv \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p\text{tr}}\end{aligned}\tag{2.24}$$

試行背応力 β_{n+1}^{tr}

$$\begin{aligned}\beta_{n+1} &= \beta_n \\ &\equiv \beta_{n+1}^{\text{tr}}\end{aligned}\tag{2.25}$$

試行相当応力 ξ_{n+1}^{tr}

$$\begin{aligned}\xi_{n+1} &= s_{n+1}^{\text{tr}} - \beta_{n+1}^{\text{tr}} \\ &\equiv \xi_{n+1}^{\text{tr}}\end{aligned}\tag{2.26}$$

2.4.1 試行弾性状態の評価

試行弾性状態における降伏関数 Φ_{n+1}^{tr} は次の通り.

$$\begin{aligned}\Phi_{n+1} &= \sqrt{J_2(\xi_{n+1}^{\text{tr}})} + \eta p_{n+1}^{\text{tr}} - \xi c \left(\bar{\varepsilon}_{n+1}^{p\text{tr}} \right) \\ &\equiv \Phi_{n+1}^{\text{tr}}\end{aligned}\tag{2.27}$$

$\Phi_{n+1}^{\text{tr}} \leq 0$ であれば, $[t_n, t_{n+1}]$ は弾性状態であり, 試行弾性状態は時刻 t_{n+1} における更新後の状態と一致する.

2.4.2 リターンマッピング方程式

$\Phi_{n+1}^{\text{tr}} > 0$ の場合, $[t_n, t_{n+1}]$ は塑性論的に許容されないことになる. 従来手法では $[t_n, t_{n+1}]$ は弾塑性仮定となり, 離散化した式から導かれる代数方程式から, 塑性修正ステップを経て解が求められる. この手続きを return mapping algorithm と称され, その時の代数方程式を return mapping 方程式 (return mapping equation) と呼ばれている.

Drucker-Prager モデルに関する物資点における制約条件式は次の非線形方程式となる.

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\text{tr}} + \Delta\gamma_{n+1} \left(\frac{1}{2\sqrt{J_2(\boldsymbol{\xi}_{n+1})}} \boldsymbol{\xi}_{n+1} + \frac{\bar{\eta}}{3} \mathbf{I} \right) \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{p\text{tr}} + \Delta\gamma_{n+1} \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\beta}_{n+1} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{\text{tr}} + \Delta\gamma_{n+1} \left(\frac{1}{2\sqrt{J_2(\boldsymbol{\xi}_{n+1})}} \boldsymbol{\xi}_{n+1} + \frac{\bar{\eta}}{3} \mathbf{I} \right) \\ \Phi_{n+1} = \sqrt{J_2(\boldsymbol{\xi}_{n+1})} + \eta p_{n+1} - c(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p) = 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

このときの求める変数は $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p$, $\Delta\gamma_{n+1}$, $\boldsymbol{\beta}_{n+1}$ である.

また, 移動硬化を考えない等方硬化のみの構成則における return mapping 方程式は次の通り.

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\text{tr}} + \Delta\gamma_{n+1} \left(\frac{1}{2\sqrt{J_2(s_{n+1})}} s_{n+1} + \frac{\bar{\eta}}{3} \mathbf{I} \right) \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{p\text{tr}} + \Delta\gamma_{n+1} \boldsymbol{\xi} \\ \Phi_{n+1} = \sqrt{J_2(s_{n+1})} + \eta p_{n+1} - c(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p) = 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

このときの求める変数は $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p$, $\Delta\gamma_{n+1}$ である.

2.4.3 Return mapping 方程式の解法

式 (2.28) は塑性乗数 $\Delta\gamma_{n+1}$ と相当応力 $\boldsymbol{\xi}_{n+1}$ に関する 2 つの方程式に縮約することができる.

$$\begin{cases} \tilde{\Phi}(\boldsymbol{\xi}_{n+1}, \Delta\gamma_{n+1}) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \|\boldsymbol{\xi}_{n+1}\| + \bar{\eta} \left(p_{n+1}^{\text{tr}} - \frac{K\bar{\eta}}{3} \right) - \xi \left[c_0 + K \left(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{p\text{tr}} + \Delta\gamma_{n+1} \boldsymbol{\xi} \right) \right] = 0 \\ \tilde{A}(\boldsymbol{\xi}_{n+1}, \Delta\gamma_{n+1}) \equiv \left[1 + \Delta\gamma_{n+1} \frac{1}{\sqrt{2} \|\boldsymbol{\xi}_{n+1}\|} \left(2G + H^k (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{p\text{tr}} + \Delta\gamma_{n+1} \boldsymbol{\xi}) \right) \right] \boldsymbol{\xi}_{n+1} - \boldsymbol{\xi}_{n+1}^{\text{tr}} \\ \quad - \Delta\gamma_{n+1} H^k \left(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^{p\text{tr}} + \Delta\gamma_{n+1} \boldsymbol{\xi} \right) \frac{\bar{\eta}}{3} \mathbf{I} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.30)$$

このときの求める変数は $\Delta\gamma_{n+1}$, $\boldsymbol{\xi}_{n+1}$ である.

式 2.30 は非線形な連立方程式となっている. Return mapping 法によって, $\Delta\gamma_{n+1}$, $\boldsymbol{\xi}_{n+1}$ に対する Newton-Raphson 反復が行われる. それによって求めた $\Delta\gamma_{n+1}$, $\boldsymbol{\xi}_{n+1}$ を用いて各状態変数を計算し, 応力の値が更新できる.

式 (2.28) も同様の手順で塑性乗数 $\Delta\gamma_{n+1}$ に関する 1 つの方程式に縮約することができる。⁴⁾

$$\sqrt{J_2(s_{n+1}^{\text{tr}})} - G\Delta\gamma_{n+1} + \eta(p_{n+1}^{\text{tr}} - K\bar{\eta}\Delta\gamma_{n+1}) - \xi c \left(\bar{\varepsilon}_{n+1}^p + \xi\Delta\gamma_{n+1} \right) = 0 \quad (2.31)$$

求まった $\Delta\gamma_{n+1}$ を用いて、先に示した構成則に基づいて応力の値が更新される。

2.4.4 コンシステント接線係数の導出

ここでは、移動硬化を考えない等方硬化のみの構成則における、コンシステント接線係数の導出を行う。

return mapping での偏差応力の更新式

$$s_{n+1} = \left(1 - \frac{G\Delta\gamma_{n+1}}{\sqrt{J_2(s_{n+1}^{\text{tr}})}} \right) s_{n+1}^{\text{tr}} = 2G \left(1 - \frac{\Delta\gamma_{n+1}}{\sqrt{2} \|\varepsilon_{d n+1}^{e \text{ tr}}\|} \right) \varepsilon_{d n+1}^{e \text{ tr}} \quad (2.32)$$

を直接微分すると、

$$ds_{n+1} = 2G \left[\left(1 - \frac{\Delta\gamma_{n+1}}{\sqrt{2} \|\varepsilon_{d n+1}^{e \text{ tr}}\|} \right) d\varepsilon_{d n+1}^{e \text{ tr}} + \frac{\Delta\gamma_{n+1}}{\sqrt{2} \|\varepsilon_{d n+1}^{e \text{ tr}}\|} (\mathbf{n}_{n+1}^{\text{tr}} \otimes \mathbf{n}_{n+1}^{\text{tr}}) : d\varepsilon_{d n+1}^{e \text{ tr}} - \frac{1}{\sqrt{2}} d(\Delta\gamma_{n+1}) \mathbf{n}_{n+1}^{\text{tr}} \right] \quad (2.33)$$

となる。ここで、2 階のテンソル $\mathbf{n}_{n+1}^{\text{tr}}$ を $\varepsilon_{d n+1}^{e \text{ tr}}$ に平行な単位テンソルとして

$$\mathbf{n}_{n+1}^{\text{tr}} = \frac{\varepsilon_{d n+1}^{e \text{ tr}}}{\|\varepsilon_{d n+1}^{e \text{ tr}}\|} \quad (2.34)$$

と定義した。同様に、静水圧の更新式

$$p_{n+1} = p_{n+1}^{\text{tr}} - K\eta\Delta\gamma_{n+1} = K \left(\varepsilon_{v n+1}^{e \text{ tr}} - \eta\Delta\gamma_{n+1} \right), \quad (2.35)$$

の微分は

$$dp_{n+1} = K \left(d\varepsilon_{v n+1}^{e \text{ tr}} - \eta d(\Delta\gamma_{n+1}) \right), \quad (2.36)$$

となる。 $\Delta\gamma_{n+1}$ と試行ひずみの微分とを関連付ける式は、整合条件を線形化することで得られる。すなわち、弾性構成則を考慮して整合条件を線形化すると、

$$d\Phi = \sqrt{2} G (\mathbf{n}_{n+1}^{\text{tr}} : d\varepsilon_{d n+1}^{e \text{ tr}}) + K\eta d\varepsilon_{v n+1}^{e \text{ tr}} - (G + K\eta\bar{\eta} + \xi^2 \frac{\partial K}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p}) \Delta\gamma_{n+1} = 0, \quad (2.37)$$

が得られ, これを $\Delta\gamma_{n+1}$ について変形すると,

$$d(\Delta\gamma_{n+1}) = \frac{\sqrt{2} G (\mathbf{n}_{n+1}^{\text{tr}} : d\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{d}n+1}^{e\text{tr}}) + K \eta d\varepsilon_{\text{v}n+1}^{e\text{tr}}}{G + K \eta \bar{\eta} + \xi^2 \frac{\partial K}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p}}, \quad (2.38)$$

となる. ここで,

$$\mathbf{D}^{\text{ep}} \equiv \frac{d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\text{tr}}} = \frac{ds_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\text{tr}}} + \mathbf{I} \otimes \frac{dp_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\text{tr}}} \quad (2.39)$$

に対して式 2.33 と式 2.36 を代入する.

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{\text{ep}} = & 2G \left(1 - \frac{\Delta\gamma_{n+1}}{\sqrt{2} \|\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{d}n+1}^{e\text{tr}}\|} \right) \mathbf{I}_d + 2G \left(\frac{\Delta\gamma_{n+1}}{\sqrt{2} \|\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{d}n+1}^{e\text{tr}}\|} - \frac{G}{G + K \eta \bar{\eta} + \xi^2 \frac{\partial K}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p}} \right) \mathbf{n}_{n+1}^{\text{tr}} \otimes \mathbf{n}_{n+1}^{\text{tr}} \\ & - \frac{\sqrt{2} G K (\eta \mathbf{n}_{n+1}^{\text{tr}} \otimes \mathbf{I} + \bar{\eta} \mathbf{I} \otimes \mathbf{n}_{n+1}^{\text{tr}})}{G + K \eta \bar{\eta} + \xi^2 \frac{\partial K}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p}} + K \left(1 - \frac{K \eta \bar{\eta}}{G + K \eta \bar{\eta} + \xi^2 \frac{\partial K}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p}} \right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (2.40) \end{aligned}$$

ここで, \mathbf{I}_d は 4 階の偏差射影テンソル.

BOX2.1 Drucker–Prager モデルの材料構成則

[1] ひずみの弾塑性分解

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$$

[2] 弾性構成則

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e$$

[3] 降伏関数

$$\Phi = \sqrt{J_2(\boldsymbol{\xi})} + \eta p - \xi c(\bar{\varepsilon}^p)$$

[4] 非関連流れ則

塑性ポテンシャル：

$$\Psi = \sqrt{J_2(\boldsymbol{\xi})} + \bar{\eta} p$$

非関連流れ則：

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\gamma} \left(\frac{1}{2\sqrt{J_2(\boldsymbol{\xi})}} \boldsymbol{\xi} + \frac{\bar{\eta}}{3} \mathbf{I} \right)$$

[5] 等方ひずみ硬化則

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \xi$$

[6] 非線形移動硬化則

$$\dot{\beta} = H^k(\bar{\varepsilon}^p) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} H^k(\bar{\varepsilon}^p) \left(\frac{1}{2\sqrt{J_2(\boldsymbol{\xi})}} \boldsymbol{\xi} + \frac{\bar{\eta}}{3} \mathbf{I} \right)$$

[7] 負荷/除荷条件

$$\Phi \leq 0, \quad \dot{\gamma} \geq 0, \quad \Phi \dot{\gamma} = 0$$

BOX2.2 増分形式での Drucker–Prager モデルの材料構成則

[1] ひずみの弾塑性分解

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e + \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$$

[2] 弾性構成則

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$$

[3] 降伏関数

$$\Phi_{n+1} = \sqrt{J_2(\boldsymbol{\xi}_{n+1})} + \eta p_{n+1} - \xi c$$

[4] 非関連流れ則

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma_{n+1} \left(\frac{1}{2\sqrt{J_2(\boldsymbol{\xi}_{n+1})}} \boldsymbol{\xi}_{n+1} + \frac{\bar{\eta}}{3} \mathbf{I} \right)$$

[5] 等方ひずみ硬化則

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma_{n+1} \xi$$

[6] 非線形移動硬化則

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1} = \boldsymbol{\beta}_n + \Delta\gamma_{n+1} H^k(\bar{\varepsilon}_{n+1}^p) \left(\frac{1}{2\sqrt{J_2(\boldsymbol{\xi}_{n+1})}} \boldsymbol{\xi}_{n+1} + \frac{\bar{\eta}}{3} \mathbf{I} \right)$$

[7] 負荷/除荷条件

$$\Phi_{n+1} \leq 0, \quad \Delta\gamma_{n+1} \geq 0, \quad \Phi_{n+1} \Delta\gamma_{n+1} = 0$$

第3章 Block Newton 法を用いた弾塑性数値解析

3.1 物質点における連成問題

つりあい方程式を変位ベクトル \mathbf{u} ，塑性パラメータ γ で構成される関数として，

$$f(\mathbf{u}, \gamma) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, \gamma) + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega \quad (3.1)$$

と記述する．ここで， \mathbf{b} は単位体積あたりの物体力ベクトルである．塑性変形が進展する状況を考えると，Drucker–Prager 降伏条件は，物質点での応力に対する拘束条件式として，

$$g(\mathbf{u}, \gamma) = \sqrt{J_2(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{u}, \gamma))} + \eta p(\mathbf{u}, \gamma) - \xi [c_0 + K(\gamma)] = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (3.2)$$

となる．ここで， c_0 は粘着力， $K(\gamma)$ は等方硬化関数であり，相当応力 ξ は背応力 β を用いて $\xi = \text{dev}[\boldsymbol{\sigma}] - \beta$ と表される．準静的な問題に対してつりあい経路に依存しない数値解を得るために，ひとつ前のつりあい状態から反復まで解の増分量を評価するために，Newton-Raphson 法を採用する．仮想的な時間ステップ $[t_n, t_{n+1}]$ において，時刻 t_{n+1} の変位場 \mathbf{u} ，塑性パラメータ γ は次のように表せる．

$$\mathbf{u}_{n+1}^{(i+1)} = \mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{u}^{(i+1)}, \quad \gamma_{n+1}^{(i+1)} = \gamma_n + \Delta \gamma^{(i+1)}, \quad (3.3)$$

ここで，括弧内の上付き文字 $i+1$ は反復回数，下付き文字は時間ステップを表す． \mathbf{u}_n, γ_n はひとつ前のつりあい状態（時刻 t_n ）における変位ベクトル，塑性パラメータである． $\Delta \mathbf{u}^{(i+1)}, \Delta \gamma^{(i+1)}$ はひとつ前のつりあい状態（時刻 t_n ）から $i+1$ 回目の反復までの増分を意味する．

Newton-Raphson 法では， $i+1$ 回目の反復までの増分量 $(\Delta \mathbf{u}, \Delta \gamma)$ が i 回目の反復までの増分量と $i+1$ 回目の修正量 $(\delta \mathbf{u}, \delta \gamma)$ の合計として，

$$\Delta \mathbf{u}^{(i+1)} = \Delta \mathbf{u}^{(i)} + \delta \mathbf{u}^{(i+1)}, \quad \Delta \gamma^{(i+1)} = \Delta \gamma^{(i)} + \delta \gamma^{(i+1)}, \quad (3.4)$$

と表される．Newton-Raphson 法による i 回目から $i+1$ 回目までの反復において，時刻 t_{n+1} でのつりあい方程式は $\delta \mathbf{u}^{(i+1)}, \delta \gamma^{(i+1)}$ に関する方向微分を用いて線形化すると，

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}_{n+1}^{(i+1)}, \gamma_{n+1}^{(i+1)}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}, \gamma_{n+1}^{(i)}) + D\mathbf{f}(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}, \gamma_{n+1}^{(i)})[\delta \mathbf{u}^{(i+1)}] + D\mathbf{f}(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}, \gamma_{n+1}^{(i)})[\delta \gamma^{(i+1)}] = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (3.5)$$

と線形化される．また，すべての物質点に課される降伏条件式を $\delta \mathbf{u}^{(i+1)}, \delta \gamma^{(i+1)}$ に対する方向微分を用いて線形化すると，

$$g(\mathbf{u}_{n+1}^{(i+1)}, \gamma_{n+1}^{(i+1)}) \approx g(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}, \gamma_{n+1}^{(i)}) + Dg(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}, \gamma_{n+1}^{(i)})[\delta \mathbf{u}^{(i+1)}] + Dg(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}, \gamma_{n+1}^{(i)})[\delta \gamma^{(i+1)}] = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (3.6)$$

i 回目の反復でつりあい方程式 (6)，拘束条件式 (8) が満足されない状況に対して，修正量 $\delta \mathbf{u}^{(i+1)}, \delta \gamma^{(i+1)}$ を算出する連成問題は，

$$D\mathbf{f}(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}, \gamma_{n+1}^{(i)})[\delta \mathbf{u}^{(i+1)}] + D\mathbf{f}(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}, \gamma_{n+1}^{(i)})[\delta \gamma^{(i+1)}] = \mathbf{r}_f(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}, \gamma_{n+1}^{(i)}) \quad \text{in } \Omega, \quad (3.7)$$

$$Dg(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}, \gamma_{n+1}^{(i)})[\delta \mathbf{u}^{(i+1)}] + Dg(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}, \gamma_{n+1}^{(i)})[\delta \gamma^{(i+1)}] = r_g(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}, \gamma_{n+1}^{(i)}) \quad \text{in } \Omega, \quad (3.8)$$

と定義できる．ここで， r_f, r_g は， i 回目の反復でのつりあい状態，拘束条件に対する残差（降伏条件に対する残差）である．

従来手法では伏条件を満足するための 2 重の内部反復が必要となる．それに対して，本研究ではつりあい方程式・降伏条件式の残差を同時に減少させる全体反復のみが実行されるアルゴリズムを考える．

式 2.32 と式 2.35 より

$$\begin{aligned}
\sigma_{n+1} &= s_{n+1} + p_{n+1} \mathbf{I} \\
&= \left(1 - \frac{G \Delta \gamma_{n+1}}{\sqrt{J_2(s_{n+1}^{\text{tr}})}} \right) s_{n+1}^{\text{tr}} + (p_{n+1}^{\text{tr}} - K \eta \Delta \gamma_{n+1}) \mathbf{I} \\
&= s_{n+1}^{\text{tr}} - \frac{G \Delta \gamma_{n+1}}{\sqrt{J_2(s_{n+1}^{\text{tr}})}} s_{n+1}^{\text{tr}} + (p_{n+1}^{\text{tr}} - K \eta \Delta \gamma_{n+1}) \mathbf{I} \\
&= s_{n+1}^{\text{tr}} - \sqrt{2} G \Delta \gamma_{n+1} \mathbf{n}_{n+1}^{\text{tr}} + (p_{n+1}^{\text{tr}} - K \eta \Delta \gamma_{n+1}) \mathbf{I}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

よって式 3.7 と式 3.8 の左辺の方向微分の具体的な計算は次のようになる。

$$Df(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}, \gamma_{n+1}^{(i)})[\delta \mathbf{u}^{(i+1)}] = \mathbf{A}_{\text{ff}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}^{(i+1)}) \tag{3.10}$$

$$Df(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}, \gamma_{n+1}^{(i)})[\delta \gamma^{(i+1)}] = A_{\text{fg}} \delta \gamma^{(i+1)} \tag{3.11}$$

$$Dg(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}, \gamma_{n+1}^{(i)})[\delta \mathbf{u}^{(i+1)}] = \mathbf{A}_{\text{gf}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}^{(i+1)}) \tag{3.12}$$

$$Dg(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}, \gamma_{n+1}^{(i)})[\delta \gamma^{(i+1)}] = A_{\text{gg}} \delta \gamma^{(i+1)} \tag{3.13}$$

ただし,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}^{(i+1)}) &\equiv \text{sym}\left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}^{(i+1)}}{\partial \mathbf{x}}\right) \\
\left\{ \begin{aligned} \mathbf{A}_{\text{ff}} &\equiv \left(2 G \mathbf{I}^d - \sqrt{2} G \Delta \gamma_{n+1} \frac{2 G}{\|s_{n+1}^{\text{tr}}\|} \left(\mathbf{I}^d - \mathbf{n}_{n+1}^{\text{tr}} \otimes \mathbf{n}_{n+1}^{\text{tr}} + K \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) \right), \\ \mathbf{A}_{\text{fg}} &\equiv -\left(\sqrt{2} G \mathbf{n}_{n+1}^{\text{tr}} + K \bar{\eta} \mathbf{I} \right), \\ \mathbf{A}_{\text{gf}} &\equiv \left(\sqrt{2} G \mathbf{n}_{n+1}^{\text{tr}} + \eta K \mathbf{I} \right), \\ A_{\text{gg}} &\equiv -\left(G + K \bar{\eta} \eta + \xi \frac{\partial K}{\partial \Delta \gamma} \right) \end{aligned} \right.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

これらの定式化において、内部変数と変位が独立であるため従来手法と比べて微分の連鎖律が複雑化すること無くそれぞれの導出が行える。

以上より、つりあい方程式 \mathbf{f} , 拘束条件式 g の線形化から式 3.7 と式 3.8 からなる連成問題は次のように書かれる。

$$\nabla \cdot (\mathbf{A}_{\text{ff}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}^{(i+1)}) + A_{\text{fg}} \delta \gamma^{(i+1)}) = -\mathbf{b}_{n+1} - \nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}, \gamma_{n+1}^{(i)}) \quad \text{in } \Omega, \tag{3.15}$$

$$\mathbf{A}_{\text{gf}} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}^{(i+1)}) + A_{\text{gg}} \delta \gamma^{(i+1)} = -g(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}, \gamma_{n+1}^{(i)}) \quad \text{in } \Omega \tag{3.16}$$

3.2 有限要素離散化

仮想変位 \mathbf{v} を導入すると、連成問題 (3.15), (3.18) は、

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\mathbf{A}_{ff} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}^{(i+1)}) + \mathbf{A}_{fg} \delta \gamma^{(i+1)}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{v}) d\Omega \\ &= - \int_{\Omega} \mathbf{b}_{n+1} \cdot \delta \mathbf{v} d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}, \gamma_{n+1}^{(i)}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{v}) d\Omega \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{A}_{gf} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}^{(i+1)}) + \mathbf{A}_{gg} \delta \gamma^{(i+1)} = -g(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}, \gamma_{n+1}^{(i)}) \quad \text{in } \Omega \quad (3.18)$$

と表せる．構造全体の平衡方程式を解くために有限要素法による離散化を用いる．式 3.17 および式 3.18 で示された連成問題は、グローバル剛性行列 $\mathbf{K}_{UU}, \mathbf{K}_{UQ}, \mathbf{K}_{QU}, \mathbf{K}_{QQ}$ 、グローバル変位ベクトル \mathbf{U} 、塑性パラメータのみにより構成される内部変数のグローバルベクトル \mathbf{Q} 、残差力ベクトル \mathbf{R}_f 、および部分ベクトル \mathbf{r}_g からなるグローバル残差ベクトル \mathbf{R}_g を用いて、以下のようなブロック行列形式で表せる：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{UU} & \mathbf{K}_{UQ} \\ \mathbf{K}_{QU} & \mathbf{K}_{QQ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{Q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_f \\ \mathbf{R}_g \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

ここで、

$$\mathbf{R}_f = \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{A}(\mathbf{r}_f), \quad (3.20)$$

$$\mathbf{R}_g = [\mathbf{r}_g]. \quad (3.21)$$

ここで、 n_{el} は要素数を表し、 \mathbf{A} は従来のアセンブリ演算子、 \mathbf{r}_g は降伏条件に対する残差ベクトルであり、要素内のガウス積分点数を n_{gi} とすると、その成分数が n_{gi} となる．本研究では、Block Newton 法を用いて離散化方程式 3.19 を解く手順を以下に示す．

提案手法では、塑性パラメータが変位ベクトルと独立であるため、このパラメータを要素レベルで消去できる．この特徴により、提案手法で得られる連立一次方程式系の未知数の数は従来の変位法と同じになる．したがって、平衡方程式の増分形を行列表現で記述するとき、グローバル剛性行列を \mathbf{K} 、グローバル変位ベクトルを \mathbf{U} 、グローバル残差力ベクトルを \mathbf{R} とし、要素行列・ベクトルをアセンブルすると、

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{R} \quad (3.22)$$

となる。ここで,

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{A}(\mathbf{k}), \quad (3.23)$$

$$\mathbf{R} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{A}(\mathbf{r}). \quad (3.24)$$

要素 e に対応する領域 Ω_e において, 要素剛性行列 \mathbf{k} と要素残差力ベクトル \mathbf{r} は

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_{uu} - \mathbf{k}_{uq} \mathbf{k}_{qq}^{-1} \mathbf{k}_{qu}, \quad (3.25)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_f - \mathbf{k}_{uq} \mathbf{k}_{qq}^{-1} \mathbf{r}_g, \quad (3.26)$$

で与えられる。ここで,

$$\mathbf{k}_{uu} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{A}_{ff} \mathbf{B} d\Omega = \sum_{j=1}^{n_{gi}} w_{\langle j \rangle} \mathbf{B}_{\langle j \rangle}^T \mathbf{A}_{ff\langle j \rangle} \mathbf{B}_{\langle j \rangle}, \quad (3.27)$$

$$\mathbf{k}_{uq} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{A}_{fg} d\Omega = \sum_{j=1}^{n_{gi}} w_{\langle j \rangle} \mathbf{B}_{\langle j \rangle}^T \mathbf{A}_{fg\langle j \rangle}, \quad (3.28)$$

$$\mathbf{k}_{qu} = [\mathbf{A}_{gf\langle j \rangle} \mathbf{B}_{\langle j \rangle}], \quad (3.29)$$

$$\mathbf{k}_{qq} = \text{DIAG} [\mathbf{A}_{gg\langle j \rangle}], \quad (3.30)$$

$$\mathbf{r}_f = \mathbf{b} - \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \mathbf{b} - \sum_{j=1}^{n_{gi}} w_{\langle j \rangle} \mathbf{B}_{\langle j \rangle}^T \boldsymbol{\sigma}_{\langle j \rangle}, \quad (3.31)$$

$$\mathbf{r}_g = \{-\mathbf{g}_{\langle j \rangle}\}. \quad (3.32)$$

ここで, \mathbf{k}_{uu} , \mathbf{k}_{uq} , \mathbf{k}_{qu} , \mathbf{k}_{qq} は剛性マトリックスを表し, \mathbf{r}_f と \mathbf{r}_g はそれぞれ外力および降伏条件に対する残差ベクトルである。 \mathbf{B} は変位-ひずみマトリックスを表す。 \mathbf{A}_{ff} , \mathbf{A}_{fg} , \mathbf{A}_{gf} は式 3.14 に示した 4 階テンソル \mathbf{C} , 2 階テンソル \mathbf{A}_{fg} と \mathbf{A}_{gf} から構成される行列である。 また, \mathbf{k}_{qq} は式 3.14 における \mathbf{A}_{gg} を対角要素にもつ $n_{gi} \times n_{gi}$ の対角行列である。 さらに, \mathbf{b} は節点の自由度に対応する外力ベクトル, $\boldsymbol{\sigma}$ は応力テンソルのベクトル形表現, \mathbf{r}_g は先行反復で計算された降伏条件に対する残差のベクトル形表現である。 角括弧付きの下付き j は, 要素内の j 番目のガウス積分点で評価される量を示し, $w_{\langle j \rangle}$ は j 番目のガウス積分点における重み係数を示す。

式 3.27 から式 3.32 を式 3.25 および式 3.26 に代入すると, 要素剛性マトリックス \mathbf{k} と要素残差力ベクトル \mathbf{r} は次のように書き直すことができる。

ここで材料剛性行列,

$$\mathbf{D}^{\text{ep}} = \mathbf{A}_{\text{ff}} - \mathbf{A}_{\text{fg}} \mathbf{A}_{\text{gg}}^{-1} \mathbf{A}_{\text{gf}} \quad (3.33)$$

は式 3.14 に示した 4 階テンソル \mathbf{A}_{ff} から構成され, \mathbf{D}^{ep} はコンシステント接線係数に代わる接線係数である. 従来手法によるコンシステント接線係数の導出は定式化の段階で内部変数を消去しているが, 本研究の手法は内部変数の消去を代数的に行っており, 各変数に関する微分のみを求めればよい.

提案手法では, 一般的な連成問題と同様に収束判定を定義する. すなわち, 平衡方程式に対する収束判定と降伏条件に対する収束判定が同時に満たされるとき, 解は十分に収束したものとみなす. 平衡方程式に関しては, 要素レベルの寄与を用いてグローバルな力ベクトルを以下のように構成する.

$$\mathbf{F}_{\text{int}} = \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \mathbf{A} \left(\int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega \right), \quad \mathbf{F}_{\text{ext}} = \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \mathbf{A}(\mathbf{f}), \quad (3.34)$$

ここで, \mathbf{F}_{int} と \mathbf{F}_{ext} はそれぞれグローバルな内部力および外力ベクトルを表す. よって, (59) 式で示されたグローバル残差力ベクトル \mathbf{R}_f は次のように書き直せる.

$$\mathbf{R}_f = \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \mathbf{A}(\mathbf{r}_f) = \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \mathbf{A} \left(\mathbf{f} - \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega \right) = \mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{F}_{\text{int}}. \quad (3.35)$$

平衡方程式に対する収束判定は, このグローバル残差力ベクトル \mathbf{R}_f を用いて

$$\|\mathbf{R}_f\|_2 \leq h_f \|\mathbf{F}_{\text{ext}}\|_2 \quad (3.36)$$

と表せる. ここで, h_f は収束許容値 (小さな数) であり,

$$\|\mathbf{R}_f\|_2 = \sqrt{\mathbf{R}_f^T \mathbf{R}_f}, \quad \|\mathbf{F}_{\text{ext}}\|_2 = \sqrt{\mathbf{F}_{\text{ext}}^T \mathbf{F}_{\text{ext}}} \quad (3.37)$$

である.

一方, 降伏条件に対する収束判定は, 式 3.21 で示されるグローバル残差ベクトル \mathbf{R}_g を用いて表すことができる.

3.3 コンシステント接線係数の導出

式 3.14 の 4 つを式 3.33 に代入すると、材料剛性行列 \mathbf{D}^{ep} は

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{\text{ep}} = & 2G \mathbf{I}^d - \sqrt{2} G \Delta\gamma_{n+1} \frac{2G}{\|s_{n+1}^{\text{tr}}\|} \left(\mathbf{I}^d - \mathbf{n}_{n+1}^{\text{tr}} \otimes \mathbf{n}_{n+1}^{\text{tr}} + K \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) \\ & - \left(\sqrt{2} G \mathbf{n}_{n+1}^{\text{tr}} + \eta K \mathbf{I} \right) \left(-G - K \bar{\eta} \eta - \xi \frac{\partial K}{\partial \Delta\gamma} \right)^{-1} \left(\sqrt{2} G \mathbf{n}_{n+1}^{\text{tr}} + \eta K \mathbf{I} \right) \end{aligned} \quad (3.38)$$

となる。ここで、

$$s_{n+1}^{\text{tr}} = 2G \boldsymbol{\varepsilon}_{d n+1}^{e \text{tr}} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial K}{\partial \Delta\gamma} \right|_{n+1} &= \left. \frac{\partial K}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} \frac{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p}{\partial \Delta\gamma} \right|_{n+1} \\ &= \xi \frac{\partial K}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p} \end{aligned} \quad (3.40)$$

を考慮すれば、

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{\text{ep}} = & 2G \left(1 - \frac{\Delta\gamma_{n+1}}{\sqrt{2} \|\boldsymbol{\varepsilon}_{d n+1}^{e \text{tr}}\|} \right) \mathbf{I}_d + 2G \left(\frac{\Delta\gamma_{n+1}}{\sqrt{2} \|\boldsymbol{\varepsilon}_{d n+1}^{e \text{tr}}\|} - \frac{G}{G + K \eta \bar{\eta} + \xi^2 \frac{\partial K}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p}} \right) \mathbf{n}_{n+1}^{\text{tr}} \otimes \mathbf{n}_{n+1}^{\text{tr}} \\ & - \frac{\sqrt{2} G K \left(\eta \mathbf{n}_{n+1}^{\text{tr}} \otimes \mathbf{I} + \bar{\eta} \mathbf{I} \otimes \mathbf{n}_{n+1}^{\text{tr}} \right)}{G + K \eta \bar{\eta} + \xi^2 \frac{\partial K}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p}} + K \left(1 - \frac{K \eta \bar{\eta}}{G + K \eta \bar{\eta} + \xi^2 \frac{\partial K}{\partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p}} \right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \end{aligned} \quad (3.41)$$

これは従来手法により求めたコンシステント接線係数式 2.40 と一致する。

第4章 結言

本研究では弾塑性問題をつり合い式と積分点における拘束条件式の連成問題として捉え、それらを同時に線形化することで Block Newton 法に基づく計算手法を開発した。今回扱った Drucker-Prager モデルの降伏条件式は静水圧依存性を有し、そのために従来手法に基づいたコンシステント接線係数の定式化には複雑な連鎖律を伴う微分計算が必要となる。対して、提案手法ではコンシステント接線係数を代数的に構築することができた。従来手法における複雑化した微分計算を回避しながら従来手法と同一のコンシステント接線係数の定式化が行えた。

参考文献

- 1) J.C. Simo, R.L. Taylor, Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol.48, pp.101-118, 1985.
- 2) T. Yamamoto, T. Yamada and K. Matsui, Simultaneously iterative procedure based on block Newton method for elastoplastic problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.122, pp.2145-2178, 2021.
- 3) 山本剛大, 山田貴博, 松井和己, Block Newton 法による接線係数を代数的に導出した弾塑性損傷解析. 日本機械学会論文集, Vol.90, pp.24-42, 2024.
- 4) EA de Souza Neto, D Peric, DRJ Owen 共著; 寺田賢二郎 監訳: 非線形有限要素法 弾塑性解析の理論と実践, 森北出版, 2012.