从寻找“三维复数”谈起

常晋德
中国海洋大学数学科学学院

2009 年 6 月 11 日

2008 年春季学期, 我第一次给工科本科生上《数学物理方法》课. 讲课期间, 我产生了向三维空间推广解析函数理论的想法. 当然, 首先需要把复数的概念推广到三维空间中. 我们把三维空间中的数系称为三维复数或三元数. 这不是一个简单的问题, 但我意识到它的重要性, 于是投入了一些精力去思考. 在这篇短文中, 我简要地记录了我的思考过程和进展情况, 希望能够引起一些读者对这一问题的兴趣. 其实, 学习和研究之间并无明显的界限, 两者都离不开“思考”二字. 如果能够在学习的过程中积极主动的思考, 自然就会提出问题. 这些问题可能是别人已解决的或尚未被解决的. 无论结果如何, 解决问题的过程都会使人受益. 如果碰巧遇到了别人未曾解决的问题, 就可能会有新的发现, 从而为科学的发展做出一些贡献.

复变函数论能够在物理和工程上有着许多重要的应用, 一个直接的原因是复变函数是描述平面向量场的合适工具. 但物理中更一般的场是三维向量场, 能否将复变函数理论推广到三维向量场是一个很自然的问题. 在考虑推广解析函数理论之前, 必须认清为何解析函数是求解平面向量场的有效工具. 首先, 复数 (complex number) 在几何上表示平面向量, 这使得复变函数可以很自然地成为描述平面向量场的工具. 但我们知道一个复变函数只不过等价于一对实二元函数, 真正使其有别于实函数的是称为解析函数的一类复变函数, 因为解析函数具有特别好的性质, 例如解析函数无穷次可导, 可以展成幂级数等. 的确, 复变函数的极限、连续概念与其实部与虚部的极限、连续概念可以说是等价的, 但复变函数的可微概念却大大有别于其实部与虚部的可微性. 造成这种差别的原因在于复数的二维性与复数乘法的定义. 因此, 解析函数理论向三维向量场推广的关键在于复数理论的推广, 特别是复数乘法运算的推广.

既然要推广复数的概念, 就必须先弄清复数的本质. 复数概念的起源可以追溯到 16 世纪 Cardano, Bombelli 等人求解二次方程及三次和四次方程的问题. 但在 18 世纪之前, 复数除了一些形式上的使用外, 几乎是无人理睬. 受微积分理论发展的刺激, 18 世纪初, 在使用部分分式对有理函数进行积分的问题中, 涉及到复数的对数问题. 复数概念才又再次不可避免地出现在数学家的视野中, 引起了激烈的争议, 最终虽然 Euler 成功地对复数的对数问题做出了解答, 但却未能被当时的人们所接受, 因为当时没有人能够说清复数是什么. 直至 18 世纪末 19 世纪初, Wessel, Argand, Gauss 等人相继给出了复数的几何意义[1], 才算确立了复数的合理性. 但澄清复数概念的最后一步是 Hamilton 在 1837 年完成的, 他指出:“复数 $a+bi$ 不是一个像 $2+3$ 意义上的真正的和. 加号的使用只是历史的偶然, bi 不能被加到 a 上去. 复数 $a+bi$ 只不过是有序实数对 (a,b). ” 所以复数可以不依赖于几何直观, 完全从代数的观点来定义. 称有序实数对 (a,b) 为复数, a 和 b 分别称为它的实部和虚部. 定义复数 (a,b) 和 (c,d) 的加法

[1]理解为平面向量或平面上的点.

和乘法如下

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d),\quad (a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc).$$

容易看出 $(0,0)$ 和 $(1,0)$ 在上述运算中起着 0 和 1 在实数运算中的作用, 因此可以把减法和除法作为加法和乘法的逆运算引入. 形如 $(a,0)$ 的复数与实数 a 一一对应, 并且有着完全相同的运算性质, 因此可以将两者等同起来, 即约定 $(a,0)=a$. 如果记 $i=(0,1)$, 则

$$i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1,$$
$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)(0,1)=a+bi.$$

因此这种"新"定义[2]与传统的通过直接添加虚数单位到实数域的定义[3]是一致的. 因为复数域可视作是实数域上的二维向量空间, 而两个有限维实向量空间之间的映射称为向量值函数[4]. 因此复变函数是二维向量值函数. 但一个向量值函数的（全）导数 (total derivative)[5]是一个矩阵, 而不再是一个向量, 并且一个向量值函数可微当且仅当它的每个分量可微[6]. 所以不能把复变函数仅仅看作是向量值函数. 容易看出复变函数可微与向量值函数可微概念之间的差别在于复数有乘法运算而（向量空间中的）向量没有. 要想向三维以上的空间推广解析函数理论, 就必须先定义向量的乘法运算. 这会导致后文中提到的名为代数的数学结构.

既然复数可用二维实向量表示, 那么三维复数 (three-dimensional complex number or tri-complex number) 的表示形式自然可选为三维实向量 (x,y,z). 类似于复数, 三维复数的几何意义是三维空间中的向量. 利用向量加法的运算, 可以定义三维复数的加法为

$$(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2).$$

至于乘法运算, 考虑到复数乘法运算在指数形式下非常简单, 其几何意义是旋转和伸缩变换的复合. 这得益于平面向量的极坐标表示. 由此可联想到三维空间向量有球坐标表示. 如果令三维复数的乘法的几何意义仍是旋转和伸缩变换的复合, 好像便不难得到三维复数乘法的定义. 这一切看起来顺理成章, 似乎已经大功告成. 但实际验算一下, 就会立即发现问题. 首先用球坐标 $x=r\sin\phi\cos\theta, y=r\sin\phi\sin\theta, z=r\cos\phi$ 表示三维复数 (x,y,z), 则在设想的几何意义下, 两个三维复数 (x_1,y_1,z_1) 和 (x_2,y_2,z_2) 的乘积 (x,y,z) 的第一个分量为

$$\begin{aligned}x&=r_1r_2\sin(\phi_1+\phi_2)\cos(\theta_1+\theta_2)\\&=r_1r_2(\sin\phi_1\cos\phi_2+\cos\phi_1\sin\phi_2)(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)\\&=x_1z_2\cos\theta_2+z_1x_2\cos\theta_1-y_1z_2\sin\theta_2-z_1y_2\sin\theta_1.\end{aligned}$$

显然, x 无法仅用 x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2 表示出来. 这表明以这种方式定义三维复数的乘法是行不通的.

在三维复数乘法的定义上, 我遇到了困难. 就在我停步不前的时候, 偶然发现 Kline 的《古今数学思想》第 3 册第 32 章第 2 节专门论述了三维复数的寻找问题. 原来, 当复数作为平面向量的几何意义被认识之后, 数学家们便已经开始了寻找三维复数的活动. 第一个复数的有用空间类似物的创造属于 Hamilton. 他至少花费了 15 年的时间寻找三维复数, 结果却

[2]详细讨论可参阅 [1], [2], [3] 等.

[3]严格来说, 是实数域添加虚数单位 i 后的单代数扩张.

[4]可参考 [4] 的 202-204 页.

[5]定义见 [2] 的 9.11-9.13 节或 [3] 的 12.4 节. 另外, [4] 的 257 页上定义的微分其实应该是导数.

[6]见 [4]260 页上的定理 4.

发现了四元数 (quaternion). 四元数是形如 $a+bi+cj+dk$ 的数, 其中 a,b,c,d 是实数, i,j,k 满足

$$i^2=j^2=k^2=-1,\ ij=-ji=k,\ jk=-kj=i,\ ki=-ik=j.$$

四元数中的 a 称为数量部分, b,c,d 称为向量部分, 对应着三维空间点的直角坐标. Hamilton 相信四元数的创造同微积分一样重要, 将会成为数学物理中的关键工具, 是描述四维时空的自然工具. Maxwell 将四元数的数量部分和向量部分分开处理, 引入了我们今天熟知的向量概念. 向量概念很快完全脱离了四元数, 独立迅速发展成向量分析, 成为物理学不可或缺的工具, 并进入到几何学和分析学中. 读者容易发现, 四元数的乘法不满足交换律. 四元数的出现使数学家们认识到可以构造一个有意义的"数"系, 它可以不具备实数和复数的通常的性质. 这一认识对代数学的发展有重大意义.

四元数的发现并不能直接否定三维复数的存在性. 寻找三维复数的问题实际上是一个数系扩张的问题. 一开始, 数学家们试图寻找具有与实数和复数相同运算性质的三维复数, 但没有成功. 今天我们已经知道那是不可能成功的. 寻找三维复数的问题首先可归结为复数域的扩张问题. 在下面的叙述中, 我们需要而且必须使用抽象代数的知识, 因为数系扩张本就是抽象代数的问题. 假定读者已经知道抽象代数的最基础的知识, 例如群、环、域、同构等.

定义1. *设 F 是一个域, V 是一个加法交换群, 从集合 $F\times V=\{(a,v)|a\in F,v\in V\}$ 到 V 有一个映射 $(a,v)\to av\in V$. 如果对任意的 $a,b\in F$, $u,v\in V$ 有*

(1) $a(u+v)=au+av$;

(2) $(a+b)v=av+bv$;

(3) $a(bv)=(ab)v$;

(4) $1v=v$,

则称 V 是域 F 上的向量空间.

定义2. *若域 F 上的向量空间 V 有有限子集 $\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 使得每个 $v\in V$ 都可表示为*

$$v=a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_nv_n,\quad a_i\in F,i=1,2,\cdots,n,$$

且

$$a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_nv_n=b_1v_1+b_2v_2+\cdots+b_nv_n$$

当且仅当 $a_i=b_i,i=1,2,\cdots,n$, 则称 V 为有限维向量空间, 称 $\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 为 V 的基, 称 n 为 V 的维数; 否则称 V 是无穷维向量空间.

如果 E 是域 F 的扩域, 则 E 是 F 上的向量空间. 例如复数域是实数域上的二维向量空间, $\{1,i\}$ 是它的一个基. 域的扩张可分为代数扩张和超越扩张. 由超越扩张而得的扩域是原来域上的无穷维向量空间. 而我们所寻找的描述三维空间 (或其它有限维空间) 的数系应当是有限维的. 所以只有通过代数扩张的办法来进行扩张, 但代数基本定理告诉我们复数域是一个代数闭域, 即不可能通过添加多项式的根来扩张复数域. 所以, 从同构的角度讲, 复数域已经是最大的数域. 因此超复数 (高维空间中的复数的类似物) 包括三维复数不可能保持域的结构, 复数原有的运算性质必须有所舍弃, 从而解析函数理论向高维空间的推广必定是有限的. 这意味着**复数和解析函数理论都是独一无二的**.

伴随着寻找三维复数的活动, 特别是在发现四元数后, 寻找更一般的 n 维复数即超复数 (hypercomplex number) 的活动慢慢活跃起来. 既然超复数系必定不满足域的结构, 它就应当

满足一个比域性质稍差一些的结构. 广义上, 只要是从域结构中去掉一些条件后所得的代数结构都可看作是超复数, 所以线性代数中的向量、矩阵以及张量都是超复数. 但这样的超复数太宽泛了. 我们应当对超复数的代数结构做出适当的限制. 首先, 受域扩张的启发, 它应当是一个向量空间; 其次它应当有除加法之外的另一种运算（称为乘法）, 还要考虑数乘、加法和乘法这三种运算的相互关系; 最后为使实数成为它的子集, 它必须包括乘法单位元 1. 于是我们定义一种新的代数结构为

定义3. 设 A 是域 F 上的向量空间. 如果在 A 上定义了一种叫乘法的二元运算 $(u,v)(\in A\times A)\to uv\in V$, 使得

$$u(v+w)=uv+uw, (v+w)u=vu+wu,\quad u,v,w\in A,$$
$$a(uv)=(au)v=u(av),\quad a\in F, u,v\in A,$$

并且 A 包含乘法单位元 1, 即 $1u=u1=u, u\in A$, 则称 A 为域 F 上的代数[7].

代数是我们对超复数的代数结构作出的最基本的限制. 我们可以考虑介于代数和域之间的代数结构, 并且应当优先考虑最接近域结构的代数结构. 称代数 A 为**结合代数**, 如果它满足乘法结合律. 称 A 为**可除代数**, 如果对任意的 $u,v\in A$ 有 $uv=0$, 则 $u=0$ 或 $v=0$. 等价地, 代数 A 为可除代数当且仅当对 A 中的每个非零元 u 都有逆元, 即存在 u^{-1} 使得 $uu^{-1}=u^{-1}u=1$. 称代数 A 为**赋范代数**, 如果 A 是一个赋范向量空间, 并满足 $\|uv\|=\|u\|\|v\|, u,v\in A$. 赋范代数必为可除代数, 且 $\|1\|=1$. 称代数 A 为**交错代数**, 如果对任意的 $u,v\in A$ 有 $(uu)v=u(uv), v(uu)=(vu)u$.

可除代数是最接近域结构的代数结构. 复数和四元数都是实数域上的可除代数. 所以在超复数的研究中可除代数首当其冲.

1878 年, Frobenius 证明了（[6, 定理7.2.1, 86页]）

定理1. 实数域上的有限维结合可除代数只有三个：实数域、复数域和四元数代数.

1958 年, Kervaire 和 Bott-Milnor 分别独立证明了（[12, 定理3]）

定理2. 所有可除代数的维数只能是 *1*、*2*、*4* 或 *8* 维.

1898 年, Hurwitz 证明了（[10, 121页] 或 [11, 160页]）

定理3. 实数域上的有限维赋范代数只有四个：实数域、复数域、四元数代数和八元数代数.

定理 1 可被推广为（[10, 139页]）

定理4. 实数域上的有限维交错可除代数只有四个：实数域、复数域、四元数代数和八元数代数.

定理 1 说明仅牺牲乘法交换律是无法构造出三维复数的, 而且三维复数不可能有除法. 因此有人说不存在三维复数（三元数）. 这样说是有一定道理的, 但必须明白这种说法在什么条件下成立.

称代数 A 为**交换代数**, 如果它满足乘法交换律. 有限维交换代数必为结合代数（[13, 定理C.2, 217页]）. 有物理意义的数系应当既满足乘法结合律, 也满足乘法交换律. 对于交换代数我们有 [13, 定理2.1, 6页]）

[7] 有些代数定义中不要求乘法单位元.

定理5 (Scheffers). *对有限维交换代数可建立微积分理论.*

定理 5 足以说明交换代数的重要性. 因此即便三维复数不可能是可除代数, 能成为交换代数也是不错的选择. 所以我们可把寻找三维复数的范围限制在三维交换代数内. 对于交换代数, 必然会有零因子存在, 即 $uv = 0$ 推不出 $u = 0$ 或 $v = 0$. 在文献 [7, 8, 9]、[14] 等中读者可发现三维复数的模型. 特别地, [14] 中的第二章建立了三维复数的解析函数理论, 并成功的推广了解析函数的 Cauchy 积分定理. 除交换代数外, Clifford 代数[8]（[15]）也是一类重要的超复数. 在其基础上发展的 Clifford 分析（[16, 17]）是解析函数理论的推广.

就我所知, 超复数的研究至今仍然活跃. 关于 Clifford 代数, 已有许多专著, 并有专门的学术期刊《Advances in Applied Clifford Algebras》. 此外, 俄罗斯科学家还办了另一份学术杂志《Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics》, 网址为

http://hypercomplex.xpsweb.com/section.php?lang=en&genre=3

这份杂志的创刊词《Number, Geometry and Nature》清晰地阐明了寻求超复数的物理意义, 从中可知超复数中的零因子是有物理意义的. 当我提出推广解析函数理论和寻找三维复数的问题时, 我是从欧氏空间出发考虑的. 既然更适合讨论现代物理学的空间是伪欧氏空间[9](pseudo-Euclidean space), 或许寻找其它高维的超复数更有意义. 应当指出, 复数概念的推广并不是全部指向更高维空间. 与复数同样是二维的双曲数[10](hyperbolic number) 和双数 (dual number) 都在物理学中找到了自己的位置. 此外, 超复数（包括四元数、八元数等）还在计算机模式识别, 生物学 DNA 研究等方面获得了应用.

参考文献

[1] J. W. Brown, R. V. Churchill 著, 邓冠铁等译. 复变函数及应用, 第 7 版. 北京：机械工业出版社. 2006.

[2] W. Rudin 著, 赵慈庚, 蒋铎译. 数学分析原理, 第 3 版. 北京：机械工业出版社. 2004.

[3] T. M. Apostol 著, 邢富冲等译. 数学分析, 第 2 版. 北京：机械工业出版社. 2006.

[4] 张筑生. 数学分析新讲, 第二册. 北京：北京大学出版社. 2002.

[5] M. Kline 著, 江泽涵等译. 古今数学思想, 第 1–4 册. 上海：上海科学技术出版社. 2002.

[6] 张广祥. 抽象代数 —— 理论、问题与方法. 大学数学科学丛书, 第 9 卷. 北京：科学出版社. 2005.

[7] 熊锡金. 泛复变函数及其在数学与物理中的应用. 长春: 东北师范大学出版社. 1988.

[8] 夏新念. 三元数及其在实数域上的三维代数. 武汉化工学院学报. 26(2)(2004), 80-82.

[9] 屈鹏展. 三元数解析. 宝鸡文理学院学报. 2(1994), 61-76.

[10] I. L. Kantor, A. S. Solodovnikov. *Hypercomplex Numbers: An Elementary Introduction to Algebras*. New York: Springer-Verlag. 1989. Translated by Abe Shenitzer.

[11] M. L. Curtis. *Abstract Linear Algebra*. Universitext. New York: Springer-Verlag. 1990.

[8]是结合代数, 但非交换代数.

[9]从物理上看, 它比欧氏空间多了时间维数.

[10]它有许多其它的名称, 例如 split-complex number, perplex number 等等.

[12] John C. Baez. The Octonions. *Bulletin Of The American Mathematical Society*. 39(2)(2001), 145-205.

[13] F. Catoni, D. Boccaletti, etal. *The Mathematics of Minkowski Space-Time: With an Introduction to Commutative Hypercomplex Numbers*. Frontiers in Mathematics. Birkhauser Verlag. 2008.

[14] S. Olariu. *Complex Numbers in n Dimensions*. North-Holland Mathematics Studies, Vol. 190, Amsterdam: Elsevier science B. V. 2002.

[15] P. Lounesto. *Clifford Algebras and Spinors*, 2nd ed. Cambridge: Cambridge university press. 2001.

[16] F. Brackx, J. S. R. Chisholm and Soucek, Vladimir. *Clifford Analysis and Its Applications*. Kluwer Academic Publishers. 2001.

[17] S. Huang, Y.Y. Qiao, G.C. Wen, *Real and Complex Clifford Analysis*. Springer, 2005.