寻找三维“复数”的问题

2008 年 9 月 23 日

在 2008 年春季学期, 我第一次讲授《数学物理方法》课程. 讲课期间, 我产生了向三维空间推广解析函数理论, 寻找三维复数的想法. 我意识到这或许是个非常重要的问题, 于是投入了一些精力去思考. 在这篇短文中, 我简要地记录了我的思考过程, 希望能够帮助正在学习或学过复变函数论的学生对如何思考问题、甚至如何做研究有些认识. 其实, 学习和研究之间并无明显的界限, 两者都离不开“思考”二字. 如果能够在学习的过程中积极主动的思考, 自然就会提出问题. 这些问题可能是别人已解决的或尚未被解决的. 无论如何, 解决问题的过程都会使人受益. 如果碰巧遇到了别人未曾解决的问题, 就可能会有新的发现, 为科学的发展做出一些贡献.

复变函数论能够在物理和工程上有着许多重要的应用, 一个直接的原因是复变函数是描述平面向量场的合适工具. 但物理中更一般的场是三维向量场, 能否将复变函数理论推广到三维向量场是一个很自然的问题. 在考虑推广解析函数理论之前, 必须认清为何解析函数是求解平面向量场的有效工具. 首先, 复数 (complex number) 在几何上表示平面向量, 这使得复变函数可以很自然地成为描述平面向量场的工具. 但我们知道一个复变函数只不过等价于一对实二元函数, 真正使其有别于实函数的是称为解析函数的一类复变函数, 因为解析函数具有特别好的性质, 例如解析函数无穷次可导, 可以展成幂级数等. 的确, 复变函数的极限、连续概念与其实部与虚部的极限、连续概念可以说是等价的, 但复变函数的可微概念却大大有别于其实部与虚部的可微性. 在后文中我们会看到造成这种差别的根本原因在于复数乘法的定义. 因此, 解析函数理论向三维向量场推广的关键在于复数理论的推广, 特别是复数乘法运算的推广.

既然要推广复数理论, 就必须先弄清复数的本质. 复数概念的起源可以追溯到 16 世纪 Cardano, Bombelli 等人求解二次方程及三次和四次方程的问题. 但在 18 世纪之前, 复数除了一些形式上的使用外, 几乎是无人理睬. 受微积分理论发展的刺激, 18 世纪初, 在使用部分分式对有理函数进行积分的问题中, 涉及到复数的对数问题. 复数概念才又再次不可避免地出现在数学家的视野中, 引起了激烈的争议, 最终虽然 Euler 成功地对复数的对数问题做出了解答, 但却未能被当时的人们所接受, 因为当时没有人能够说清复数是什么. 直至 18 世纪末 19 世纪初, Wessel, Argand, Gauss 等人相继给出了复数的几何意义[1], 才算确立了复数的合理性. 但澄清复数概念的最后一步是 Hamilton 在 1837 年完成的, 他指出:“复数 $a+bi$ 不是一个像 $2+3$ 意义上的真正的和. 加号的使用只是历史的偶然, bi 不能被加到 a 上去. 复数 $a+bi$ 只不过是有序实数对 (a,b). ” 所以复数可以不依赖于几何直观, 完全从代数的观点来定义.

[1]理解为平面向量或平面上的点.

称有序实数对 (a,b) 为复数, a 和 b 分别称为它的实部和虚部. 定义复数 (a,b) 和 (c,d) 的加法和乘法如下

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d), \quad (a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc).$$

容易看出 $(0,0)$ 和 $(1,0)$ 在上述运算中起着 0 和 1 在实数运算中的作用, 因此可以把减法和除法作为加法和乘法的逆运算引入. 形如 $(a,0)$ 的复数与实数 a 一一对应, 并且有着完全相同的运算性质, 因此可以将两者等同起来, 即约定 $(a,0)=a$. 如果记 $i=(0,1)$, 则

$$\begin{gathered} i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1, \\ (a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)(0,1)=a+bi. \end{gathered}$$

因此这种"新"定义[2]与传统的通过直接添加虚数单位到实数域的定义[3]是一致的. 从这个角度看, 复数域是实数域上的二维向量空间, 而两个有限维实向量空间之间的映射称为向量值函数[4]. 因此复变函数是二维向量值函数. 但一个向量值函数的(全)导数 (total derivative)[5]是一个矩阵, 而不再是一个向量, 并且一个向量值函数可微当且仅当它的每个分量可微[6]. 所以不能把复变函数仅仅看作是向量值函数. 容易看出复变函数可微与向量值函数可微概念之间的差别在于复数有乘法运算而(向量空间中的)向量没有. 要想向三维以上的空间推广解析函数理论, 就必须先定义向量的乘法运算. 这会导致后文中提到的名为代数的数学对象.

现在我们已经认识到复数就是二维实向量, 那么三维复数 (three-dimensional complex number or tricomplex number) 自然应当是三维实向量 (x,y,z), 它的几何意义是三维空间中的向量. 利用向量加法的运算, 可以定义三维复数的加法为

$$(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2).$$

至于乘法运算, 考虑到复数乘法运算在指数形式下非常简单, 其几何意义是旋转和伸缩变换的复合. 这得益于平面向量的极坐标表示. 由此可联想到三维空间向量有球坐标表示. 如果令三维复数的乘法的几何意义仍是旋转和伸缩变换的复合, 好像便不难得到三维复数乘法的定义. 这一切看起来顺理成章, 似乎已经大功告成. 但实际验算一下, 就会立即发现问题. 首先用球坐标 $x=r\sin\phi\cos\theta, y=r\sin\phi\sin\theta, z=r\cos\phi$ 表示三维复数 (x,y,z), 则在设想的几何意义下, 两个三维复数 (x_1,y_1,z_1) 和 (x_2,y_2,z_2) 的乘积 (x,y,z) 的第一个分量为

$$\begin{aligned} x &= r_1r_2\sin(\phi_1+\phi_2)\cos(\theta_1+\theta_2) \\ &= r_1r_2(\sin\phi_1\cos\phi_2+\cos\phi_1\sin\phi_2)(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2) \\ &= x_1z_2\cos\theta_2+z_1x_2\cos\theta_1-y_1z_2\sin\theta_2-z_1y_2\sin\theta_1. \end{aligned}$$

显然, x 无法仅用 x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2 表示出来. 这表明以这种方式定义三维复数的乘法是行不通的.

[2]详细讨论可参阅 [1], [2], [3] 等.

[3]严格来说, 是实数域的代数扩张.

[4]可参考 [4] 的 202-204 页.

[5]定义见 [2] 的 9.11-9.13 节或 [3] 的 12.4 节. 另外, [4] 的 257 页上定义的微分其实应该是导数.

[6]见 [4]260 页上的定理 4.

在三维复数乘法的定义上, 我遇到了困难. 就在我停步不前的时候, 我发现 Kline 的《古今数学思想》第 3 册第 32 章第 2 节专门论述了三维复数的寻找问题. 事实上, 当复数作为平面向量的几何意义被认识之后, 数学家们便已经开始了寻找三维复数的活动. 第一个复数的有用空间类似物的创造属于 Hamilton. 他至少花费了 15 年的时间寻找三维复数, 结果却发现了四元数 (quaternion). 四元数是形如 $a+bi+cj+dk$ 的数, 其中 a,b,c,d 是实数, i,j,k 满足

$$i^2=j^2=k^2=-1,\ ij=-ji=k,\ jk=-kj=i,\ ki=-ik=j.$$

四元数中的 a 称为数量部分, b,c,d 称为向量部分, 对应着三维空间点的直角坐标. Hamilton 相信四元数的创造同微积分一样重要, 将会成为数学物理中的关键工具, 是描述四维时空的自然工具. Maxwell 将四元数的数量部分和向量部分分开处理, 引入了我们今天熟知的向量概念. 向量概念很快完全脱离了四元数, 独立迅速发展成向量分析, 成为物理学不可或缺的工具, 并进入到几何学和分析学中. 应当提到, 四元数的乘法不满足交换律. 这使数学家们认识到可以构造一个有意义的“数”系, 它可以不具备实数和复数的通常的性质. 这一认识对代数学的发展有重大意义.

今天, 我们可以从抽象代数的知识获知, 复数域是一个代数闭域, 即不可能通过添加多项式的根来扩张复数域. 从这个意义上讲, 高维的“数”包括三维复数不可能保持域的结构, 复数原有的运算性质必须有所舍弃, 从而解析函数理论向高维空间的推广必定是有限的. 这意味着**解析函数理论是独一无二的**. 为说清四元数的数学结构, 我们需要引入一个新的数学概念. 粗略的说, 如果一个域上的向量空间同时是一个环[7]（或除环）, 就称为这个域上的代数（或可除代数）. 复数和四元数都是实数域上的可除代数, 但 Frobenius 定理说实数域上的有限维可除代数只有三个：实数域、复数域和四元数代数. 这说明通过牺牲乘法交换律是无法构造出三维复数的. 相关的概念、证明及细节可参考 [6] 的 5.5 节和第 7 章. 伴随着寻找三维复数的活动, 寻找更一般的 n 维复数即超复数 (hypercomplex number) 的活动也在展开. 在这一观点下, 线性代数中的向量、矩阵以及张量都是超复数.

现在我们只有把寻找三维复数的希望放在三维交换代数上. Weierstrass 和 Dedekind 分别在 1861 年和 1870 年证明了：有有限个原始单元的, 实或复系数（原始单元的）代数, 如服从乘积定律[8]和乘法交换律, 就是实数的代数和复数的代数. 既然我们要承认乘法交换律, 那么只有放弃乘积定律, 允许零因子的存在, 就像矩阵乘法中两个非零矩阵的乘积可以是零矩阵一样. 碰巧我手头有文献 [7] 的电子版. 最初我收集它, 纯粹是出于喜好收藏书的习惯. 在我开始考虑三维复数的问题时, 我并没有注意到它. 当我渐渐对寻找三维复数开始失去信心时, 一次, 我在查阅我的电脑上的一些复分析方面的电子书时, 无意间注意到了这本书的书名. 我立刻意识到它可能对我考虑的问题非常重要. 经过浏览之后, 我确定它提供了三维复数的模型, 满足乘法交换律和结合律但有零因子. 在我知道现在仍有人在做超复数研究后, 我利用 Google 搜索对一些诸如 general complex number, hypercomplex number, Commutative hypercomplex numbers 的一些关键词进行了搜索, 了解到对复数概念的一个比较一般但走的不太远的推广是名为 Clifford 代数的数学结构, 并幸运地找到了文献 [8]. [8] 中的第二章建立

[7]粗略地说, 除向量运算外, 还要有乘法运算.

[8]若两个元素的乘积为零, 则至少有一个元素是零元.

了三维复数的解析函数理论, 并成功的推广了解析函数的 Cauchy 积分定理. 解析函数理论的更一般的推广可见 [9] 中第 20 章.

就我所知, 超复数的研究至今仍然活跃. 关于 Clifford 代数, 已有许多专著, 并有专门的学术期刊《Advances in Applied Clifford Algebras》. 此外, 俄罗斯科学家还办了另一份学术杂志《Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics》, 网址为

http://hypercomplex.xpsweb.com/section.php?lang=en&genre=3

这份杂志的创刊词《Number, Geometry and Nature》清晰地阐明了寻求超复数的物理意义, 从中可知满足乘法交换律和结合律但有零因子的超复数是有物理意义的. 当我提出推广解析函数理论和寻找三维复数的问题时, 我是从欧氏空间考虑出发的. 既然更适合讨论现代物理学的空间是伪欧氏空间[9](pseudo-Euclidean space), 或许寻找其它高维的超复数更有意义. 应当指出, 复数概念的推广并不是全部指向更高维空间. 与复数同样是二维的双曲数[10](hyperbolic number) 和双数 (dual number) 都在物理学中找到了自己的位置.

参考文献

[1] J. W. Brown, R. V. Churchill 著, 邓冠铁等译. 复变函数及应用, 第 7 版. 北京：机械工业出版社. 2006.

[2] W. Rudin 著, 赵慈庚, 蒋铎译. 数学分析原理, 第 3 版. 北京：机械工业出版社. 2004.

[3] T. M. Apostol 著, 邢富冲等译. 数学分析, 第 2 版. 北京：机械工业出版社. 2006.

[4] 张筑生. 数学分析新讲, 第二册. 北京：北京大学出版社. 2002.

[5] M. Kline 著, 江泽涵等译. 古今数学思想, 第 1–4 册. 上海：上海科学技术出版社. 2002.

[6] 张广祥. 抽象代数 —— 理论、问题与方法. 大学数学科学丛书, 第 9 卷. 北京：科学出版社. 2005.

[7] 熊锡金. 泛复变函数及其在数学与物理中的应用. 长春: 东北师范大学出版社. 1988.

[8] S. Olariu. *Complex Numbers in n Dimensions*. North-Holland Mathematics Studies, Vol. 190, Amsterdam: Elsevier science B. V. 2002.

[9] P. Lounesto. *Clifford Algebras and Spinors*, 2nd ed. Cambridge: Cambridge university press. 2001.

[9] 从物理上看, 它比欧氏空间多了时间维数.

[10] 它有许多其它的名称, 例如 split-complex number, perplex number 等等.