BTS Informatique de gestion
2^{e} année

Denis Jaudon

Mathématiques

Cours

Directrice de publication : Valérie Brard-Trigo

Sommaire

Conseils généraux

Le contenu de ce fascicule dont la référence est : 8 2931 TG PA 00 couvre environ le dernier quart du programme du *BTS informatique de gestion.* Il devrait vous permettre de préparer l'épreuve de mathématiques, en laissant le temps nécessaire à l'entraînement à l'examen, par les devoirs qui vous seront proposés.

Nous vous proposons une progression pédagogique en quatre unités, comportant chacune une ou plusieurs séquences. Une séquence d'apprentissage est composée d'une partie **cours** et d'une partie **exercices « autocorrectifs »** d'égale importance dans le processus de votre apprentissage.

Cours

Ce cours doit être travaillé attentivement : une lecture rapide des notions abordées ne vous servira à rien.

- lisez et relisez les définitions, les théorèmes et les propriétés ;
- insistez sur les conditions d'utilisation des théorèmes et des propriétés ;
- faites et refaites les exemples proposés.

Nous avons aussi prévu des renvois à des exercices d'application, signalés à l'aide du picto . Ils seront pour vous l'occasion de tester la compréhension du cours. Ces rendez-vous sont très utiles ; essayez de les respecter et de « jouer le jeu ».

Exercices « autocorrectifs »

À la fin de chaque séquence, nous avons réservé une large place à des exercices dont on vous propose une correction très détaillée. Ces exercices sont présentés sous trois formes :

- **Exercices d'application** : application presque directe du cours. À chaque fois que vous rencontrerez le picto , ce sera une invitation à aller travailler les exercices proposés.
- **Exercices d'approfondissement** : ce sont des exercices qui sont à faire après l'étude complète de la séquence et qui nécessitent le plus souvent une recherche approfondie des solutions.
- **Travaux pratiques :** ils sont présents à la fin de certaines séquences et sont constitués de problèmes qui comportent les savoirs et les savoir-faire évalués à l'examen.

Tous ces exercices nécessitent un investissement personnel important. Les corrigés (voir fascicule d'autocorrection réf. 8 2931 TC PA 00) ne doivent être consultés qu'après avoir effectué un travail sérieux pour trouver la solution : un corrigé rapidement consulté, sans un travail préalable, vous donnera l'impression trompeuse d'avoir compris les notions abordées, mais ce n'est malheureusement qu'une illusion !

Devoirs

Avec ce fascicule, il vous est servi un fascicule (réf. 8 2931 DG) de trois devoirs, n'hésitez pas à le consulter régulièrement. Ces devoirs sont à envoyer à la correction suivant la progression indiquée dans son sommaire et rappelée au début de chaque devoir.

Un travail sérieux donnera toujours un résultat.

Vous n'avez besoin d'aucun autre ouvrage en mathématiques pour préparer votre BTS.

L'équipe pédagogique remercie le personnel du Cned de Poitiers qui a contribué à la mise en page et à la production de ce fascicule et attend de vous toutes les remarques qui contribueront à l'amélioration de ce support pour le bien de tous les inscrits.

Bon courage !

Unité 1

Les graphes

➤ Prérequis

- **Calcul matriciel**
- **Calcul booléen**

➤ Objectifs

- Initiation aux graphes orientés
- Mise en œuvre, sans théorie générale, d'algorithmes permettant d'obtenir les chemins de longueur *p*, la fermeture transitive, les niveaux et chemin de valeur minimale

➤ Contenu

- Séquence 1 : notions sur les graphes

Notions sur les graphes

Séquence 1

Prérequis

- Calcul matriciel
- Calcul booléen

Objectifs

- Initiation aux graphes orientés
- Mise en œuvre, sans théorie générale, d'algorithmes permettant d'obtenir les chemins de longueur *p*, la fermeture transitive, les niveaux et chemin de valeur minimale

Contenu

1. Graphes simples orientés

1A. Graphe – représentation sagittale

1B. Sommets – arcs – chemin – longueur d'un chemin – boucle – circuit – chemin hamiltonien

1C. Prédécesseurs – successeurs

1D. Matrice adjacente

1E. Niveau des sommets d'un graphe

1F. Arborescence

2. Opérations sur les matrices adjacentes

2A. Somme, produit et puissance des matrices

2B. Somme, produit et puissance booléens des matrices

2C. Fermeture transitive d'un graphe

3. Graphes valués

3A. Définitions

3B. Chemin minimal – chemin maximal

4. La méthode Pert

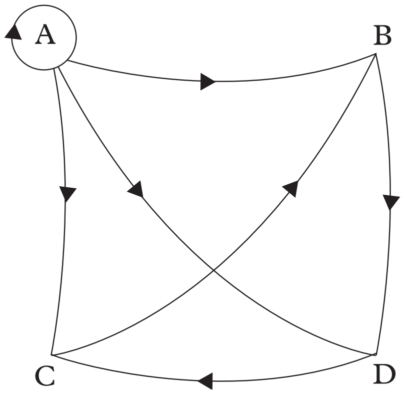
1. Graphes simples orientés

1A. Graphe – représentation sagittale

Exemple

On considère l'ensemble S = {A, B, C, D} où A, B, C et D sont 4 points du plan.

L'ensemble G = {(A, A); (A, B); (A, C); (A, D); (B, D); (D, C); (C, B)}, formé par des couples d'éléments de S, définit un **graphe** sur S.



Les couples de G sont représentés par des arcs orientés. Le schéma ci-dessus est la **représentation sagittale** de G (ou représentation par points et flèches).

1B. Sommets – arcs – chemin – longueur d'un chemin – boucle – circuit – chemin hamiltonien

Pour la représentation sagittale donnée au paragraphe 1A :
Les quatre éléments A, B, C, D de S représentés par des points sont appelés **sommets** et les couples de G sont appelés **arcs**.
(A, D) est un **chemin de longueur 1** qui va de A à D et (A, B, D, C) est un **chemin de longueur 3** qui va de A à C.
Le chemin (A , A) est appelé une **boucle**. Le chemin (**B**, D, C, **B**) est un **circuit**.
(A, B, D, C) est un chemin de longueur 3 qui passe par tous les sommets du graphe, et ne passe qu'une fois par chacun d'eux : (A, B, D, C) est un chemin **hamiltonien**.

Application/Exercice 1

1C. Prédécesseurs – successeurs

Définition

Si (A , B) est un arc d'un graphe alors on dira que A est un **prédécesseur** de B et que B est un **successeur** de A.

L'ensemble des **prédécesseurs** d'un sommet A est noté $\Gamma^-(A)$ et l'ensemble des **successeurs** d'un sommet A est noté $\Gamma^+(A)$.

Exemple

Pour la représentation sagittale donnée au paragraphe 1A on aura ainsi :

Sommets	**Successeurs Γ^+**	**Prédécesseurs Γ^-**
A	A, B, C, D	A
B	D	A, C
C	B	A, D
D	C	A, B

$$\Gamma^-(A) = \{A\} \text{ et } \Gamma^+(A) = \{A, B, C, D\}$$

Application/Exercice 2

1D. Matrice adjacente

À un graphe orienté peut être associé un tableau booléen où l'on note 1 si deux sommets sont reliés par un arc, 0 sinon.

Exemple

Pour le graphe G du paragraphe 1A. on aura ainsi :

Il y a un arc (A, B)

Prédécesseurs \ Successeurs	A	B	C	D
A	1	1	1	1
B	0	0	0	1
C	0	1	0	0
D	0	0	1	0

Il n'y a pas d'arc (B, A)

On appelle alors **matrice adjacente** M associée au graphe pour les sommets A, B, C et D dans cet ordre, la matrice **booléenne** :

La disposition des points respecte celle du tableau

$$M = \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array}}^{\textit{Successeurs}} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \left.\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array}\right\} \textit{Prédécesseurs}$$

Application/Exercice 3

1E. Niveau des sommets d'un graphe

Les graphes simples sans circuits (donc sans boucles) peuvent être ordonnés par niveau.

Définition

On appelle sommets de niveau 0 dans un graphe simple orienté, les sommets qui n'ont pas de prédécesseur.

Si l'on note S_0 l'ensemble des sommets de niveau 0, on appellera sommets de niveau 1, les sommets qui n'ont pas de prédécesseur dans $S - S_0$ et ainsi de suite.

Exemple

On considère le graphe défini par le tableau suivant :

Successeurs / Prédécesseurs	A	B	C	D	E
A	0	0	0	1	1
B	0	0	1	0	0
C	0	0	0	0	0
D	0	1	0	0	0
E	0	1	1	0	0

Le premier tableau ci-dessous présente les prédécesseurs de chaque sommet :

Sommets	Prédécesseurs
A	aucun
B	D, E
C	B, E
D	A
E	A

Le sommet A n'a pas de prédécesseur, il est donc de niveau 0 et $S_0 = \{A\}$.

Le tableau ci-dessous présente les prédécesseurs de tous les sommets sauf A (sommet de niveau 0) :

Sommets	Prédécesseurs
B	D, E
C	B, E
D	aucun
E	aucun

Les sommets D et E n'ont pas de prédécesseur dans $S - S_0$, ils sont donc de niveau **1** et $S_1 = \{D, E\}$.

Le troisième tableau ci-dessous présente les prédécesseurs de tous les sommets sauf A (sommet de niveau 0), D et E (sommets de niveau 1) :

Sommets	Prédécesseurs
B	aucun
C	B

Le sommet B n'a pas de prédécesseur dans $S - S_0 \cup S_1$, il est donc de niveau **2** et $S_2 = \{B\}$.

Et pour terminer, considérons le tableau ci-dessous qui présente les prédécesseurs de tous les sommets sauf A (sommet de niveau 0) ; D, E (sommets de niveau 1) et B de niveau 2 :

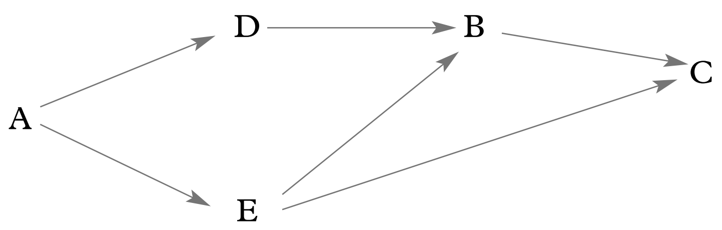
Sommet	Prédécesseur
C	aucun

Le sommet C n'a pas de prédécesseur dans $S - S_0 \cup S_1 \cup S_2$, il est donc de niveau **3** et $S_3 = \{C\}$.

On effectuera ces démarches dans un seul tableau en plaçant dans un même niveau les sommets qui n'ont pas de prédécesseur et en barrant successivement les sommets de niveaux déjà trouvés.

Sommets	Prédécesseurs	niveau 0	niveau 1	niveau 2	niveau 3
A	aucun	A			
B	~~D~~, ~~E~~			B	
C	B, ~~E~~				C
D	~~A~~		D		
E	~~A~~		E		

D'où la représentation du graphe, ordonné par niveaux :



Application/Exercice 4

1F. Arborescence

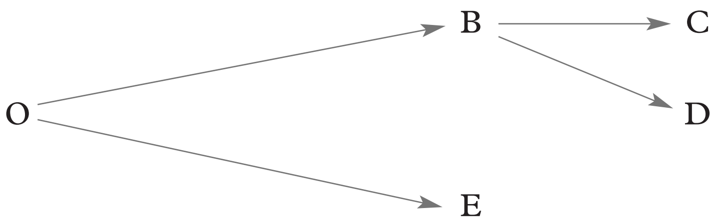
Définition

Soit G un graphe défini sur un ensemble S et O un sommet de S.

Si
- O est un sommet de niveau 0
- tout sommet M, différent de O, n'a qu'un seul prédécesseur différent de M
- Il existe un chemin allant de O à M

alors on dira que G est une **arborescence**.

Exemple



Successeurs / Prédécesseurs	O	B	C	D	E
O	0	1	0	0	1
B	0	0	1	1	0
C	0	0	0	0	0
D	0	0	0	0	0
E	0	0	0	0	0

Remarque

Une arborescence ne peut comporter ni boucle ni circuit.

2. Opérations sur les matrices adjacentes

2A. Somme, produit et puissance des matrices

Les opérations somme, produit et puissance des matrices ont été définies dans le cours de 1re année séquence « Calcul Matriciel ». On les note $A + B$, $A \times B$ et A^n.

Propriété

Soit M la matrice adjacente associée à un graphe.

Le coefficient m_{ij} de la matrice M^n indique le nombre de **chemins de longueur *n*** reliant le i-ième prédécesseur au j-ième successeur.

Exemple

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice adjacente associée au graphe du paragraphe 1.A.

m_{12}

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$m_{11} = 1$ indique qu'il existe 1 chemin de longueur 2 reliant A à A.

$m_{12} = 2$ indique qu'il existe 2 chemins de longueur 2 reliant A à B.

$m_{21} = 0$ indique qu'il n'existe pas de chemin de longueur 2 reliant B à A. Etc.

Chemins de longueur 2

En lisant les lignes de M^2 : il existe 1+2+2+2 chemins de longueur 2 partant de A, 1 chemin de longueur 2 partant de B, etc. Et au total 10 chemins de longueur 2.

En lisant les colonnes de M^2 : il existe 1+0+0+0 chemins de longueur 2 arrivant en A, 2+0+0+1 chemins de longueur 2 arrivant en B, etc.

Chemins de longueur 3

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il existe 1+3+3+3 chemins de longueur 3 partant de A, 1 chemin de longueur 3 partant de B, etc. Et au total 13 chemins de longueur 3.

Il existe 1 chemin de longueur 3 arrivant en A, 4 arrivant en B, etc.

Application/Exercice 5

2B. Somme, produit et puissance booléens des matrices

Définition

Soient M et M' deux matrices booléennes. La somme booléenne des matrices M et M', notée $M \oplus M'$, est la matrice obtenue en effectuant la somme booléenne des coefficients de M et M'.

On définit de façon analogue le produit $M \otimes M'$ et la puissance *n*-ième booléenne d'une matrice M, notée $M^{[n]}$: $M^{[n]} = M \otimes M \otimes \ldots \otimes M$ (M est présente *n* fois).

Rappel

Pour les constantes booléennes 0 et 1 : 0+0=0   1+0=1   1+1=1
0.0=0   1.0=0   1.1=1

Exemple

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors :

$$M \oplus M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M \otimes M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarques

Soit M une matrice quelconque. Alors :

1. On note $M^{[1]}$ la matrice booléenne qui lui est associée.

2. Pour déterminer $M^{[n]}$ on pourra soit déterminer $M^n = M \times M \times \ldots \times M$ (M étant présente *n* fois) puis prendre la matrice booléenne $M^{[n]}$ associée, soit déterminer directement $M^{[n]} = M^{[1]} \otimes M^{[1]} \otimes \ldots \otimes M^{[1]}$ ($M^{[1]}$ étant présente *n* fois).

Exemples

1. Si $M=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ alors $M^{[1]}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Si $M=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors $\mathbf{M}^2=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ d'où $\mathrm{M}^{[2]}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ou encore $M^{[2]}=M^{[1]}\otimes M^{[1]}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Application/Exercice 6

Propriété (admis)

Un coefficient non nul de $\mathrm{M}^{[n]}$ indique qu'il existe au moins un **chemin de longueur *n*** reliant deux points du graphe.

Exemple

Reprenons le graphe défini au paragraphe 1A.

Existence de chemins de longueur 2

$$\mathrm{M}^{[2]}=\mathrm{M}\otimes\mathrm{M}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il existe des chemins allant de A vers A, B, C et D, allant de B vers C, etc. Il y a au total 7 couples de points que l'on peut relier par des chemins de longueur 2.

Existence de chemins de longueur 3

$$\mathrm{M}^{[3]}=\mathrm{M}^{[2]}\otimes\mathrm{M}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il n'existe pas de chemin de longueur 3 allant de B vers A, C et D, etc.

Application/Exercice 7

2C. Fermeture transitive d'un graphe

Définition

On appelle **fermeture transitive** du graphe G le graphe noté $\hat{G}$ (lire « G chapeau ») obtenu en complétant G par tous les arcs (X, Y) **lorsqu'il existe un chemin quelconque allant de X à Y** dans G.

Remarque

On a évidemment $G \subset \hat{G}$.

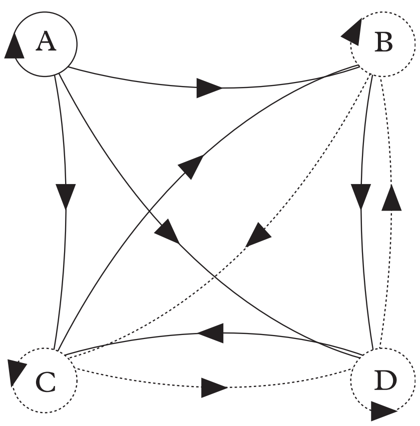
Exemple

On considère le graphe G = {(A, A); (A, B); (A, C); (A, D); (B, D); (D, C); (C, B)} défini sur l'ensemble S = {A, B, C, D}.

On obtient $\hat{G}$ en complétant G par les 6 arcs (B, B); (B, C); (C, C); (C, D); (D, B); (D, D).

$\hat{G}$ = {(A, A); (A, B); (A, C); (A, D); (B, D); (D, C); (C, B); (B, B); (B, C); (C, C); (C, D); (D, B); (D, D)}

Le graphique ci-dessous donne la **représentation sagittale** de G (« flèches pleines ») et celle de $\hat{G}$ (« flèches pleines » + « flèches en pointillés »).



Application/Exercice 8

Propriété

Si G est un graphe simple orienté à ***n* sommets** de matrice M alors $\hat{G}$ a pour matrice adjacente :

$$\hat{M} = M \oplus M^{[2]} \oplus \ldots \oplus M^{[n]}$$

Exemple

Matrice adjacente de la fermeture transitive du graphe G du paragraphe 1.A.

Le graphe comportant n=4 sommets on calcule :

$$\hat{\mathrm{M}} = \mathrm{M} \oplus \mathrm{M}^{[2]} \oplus \mathrm{M}^{[3]} \oplus \mathrm{M}^{[4]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } \hat{\mathrm{M}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifiera sur la figure précédente que (B, A), (C, A) et (D, A) $\notin \hat{G}$

Application/Exercice 9

3. Graphes valués

3A. Définitions

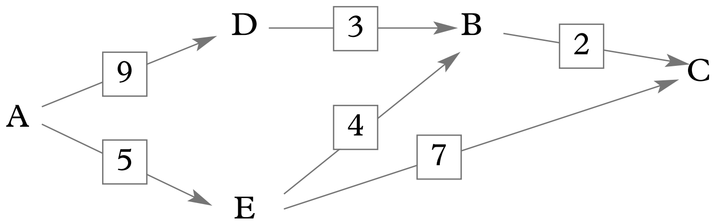
Définition

On appelle **graphe valué** un graphe dans lequel chaque arc est affecté d'une valeur.

On appelle **valeur d'un chemin** la somme des valeurs des arcs qui le composent.

Exemple

Le graphe simple orienté et **valué** ci-dessous, ordonné par niveaux, indique la durée des trajets entre cinq villes A, B, C, D et E.



Le chemin (A, D, B, C) a pour longueur 3 et pour valeur 14. Le chemin (A, E, C) a pour longueur 2 et pour valeur 12.

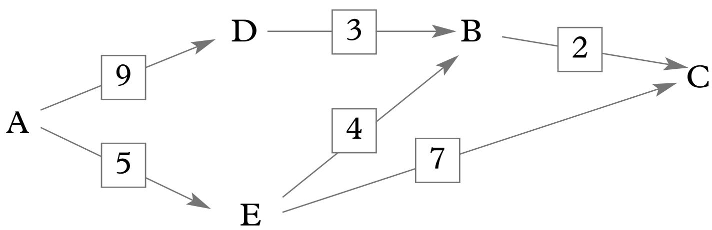
Pour un graphe **dont tous les arcs ont la valeur 1**, la longueur d'un chemin et sa valeur sont identiques.

3B. Chemin minimal – chemin maximal

Définitions

Parmi tous les chemins menant d'un sommet A à un sommet B, on appelle :
- **chemin minimal** un chemin dont la valeur est minimale ;
- **chemin maximal** un chemin sans circuit dont la valeur est maximale ;
- **chemin optimal** tout chemin minimal ou maximal.

Exemple



Pour aller de A à C :
- le chemin (A, D, B, C), de longueur 3 et de valeur 14, est un chemin maximal ;
- le chemin (A, E, B, C), de longueur 3 et de valeur 11, est un chemin minimal ;
- le chemin (A, E, C), de longueur 2 et de valeur 12, n'est pas un chemin optimal.

Propriété

Tout chemin optimal est composé de chemins eux-mêmes optimaux.

Remarque

La recherche des chemins minimaux effectuée sur les graphes ordonnés par niveaux est proposée en travaux pratiques.

4. La méthode PERT

Conformément au programme officiel du BTS, la méthode PERT ne peut faire l'objet « *d'aucune évaluation en mathématiques* » c'est-à-dire qu'à l'épreuve de Mathématiques à l'examen du BTS vous n'aurez aucune question concernant cette méthode.

La méthode PERT (Program Evaluation Research Task) est une méthode **d'ordonnancement** et **d'optimisation** pour la réalisation de projets comportant un grand nombre de tâches.

Cette méthode, mise au point aux USA pour la réalisation du programme des fusées Polaris, utilise les graphes orientés. Elle permet par exemple de planifier des travaux de construction de maisons, de navires, d'avions …

Les graphes qui en découlent décrivent des **tâches** et des **étapes**. On parle de ***graphes*** ou de ***réseaux*** PERT.

Définitions

On appelle **tâche** le déroulement dans le temps d'une opération.

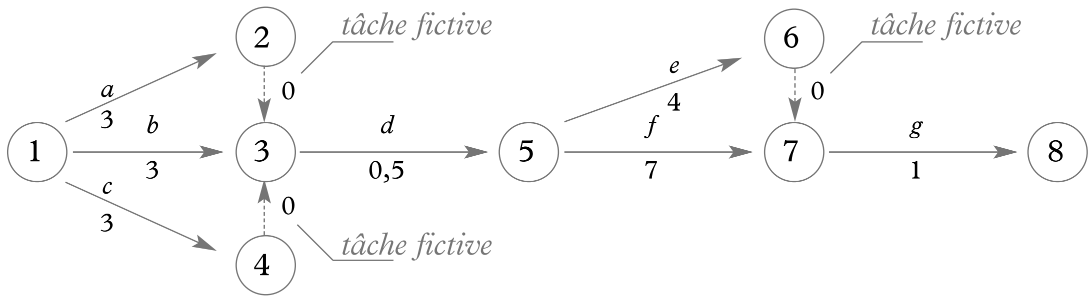
On appelle **étape** le commencement ou la fin d'une tâche.

Exemple 1

La construction de 2 immeubles doit être réalisée à partir des 2 projets choisis parmi 3 conçus simultanément. La planification des travaux nécessite les tâches ci-dessous :

a : conception du projet 1 (durée : 3 mois)
b : conception du projet 2 (durée : 3 mois)
c : conception du projet 3 (durée : 3 mois)
d : analyse et choix des 2 projets (durée : 15 jours)
e : réalisation de l'immeuble 1 (durée : 4 mois)
f : réalisation de l'immeuble 2 (durée : 7 mois)
g : réception des travaux / reprise de finitions (durée : 1 mois)

Le graphe PERT correspondant, exprimé en mois, est donné ci-dessous :



Remarques

1. Une tâche est représentée par une et une seule flèche sur laquelle sont indiquées la tâche à effectuer (représentée par une lettre) et la durée de réalisation de celle-ci.

2. Une étape est de durée nulle. Elle est représentée par un cercle ou un rectangle numéroté, à partir de 1, en respectant les niveaux du graphe.

3. Deux tâches se déroulant de façon simultanée sont représentées par deux flèches distinctes. Les étapes finales correspondantes sont alors reliées par une étape dite fictive.

Par exemple les tâches *a*, *b* et *c* sont simultanées. Les étapes 2 et 3, ainsi que 3 et 4 sont reliées par une tâche fictive de durée nulle : la tâche *d* ne pourra donc commencer avant que les tâches *a*, *b* et *c* ne soient achevées.

De même la tâche *g* ne pourra pas commencer avant que les tâches *e* et *f* ne soient achevées.

Exemple 2

Pour la conception et la réalisation d'un nouveau produit une entreprise estime qu'el-le doit réaliser les 10 tâches a, b, c, d, e, f, g, h, j et k en tenant compte de l'ordre et des durées indiquées ci-dessous :

Tâches	*Durée des tâches en jours*	*Tâches antérieures*
a	1	-
b	2	-
c	6	d
d	3	-
e	4	a
f	1	b
g	4	f, j
h	5	g, c
j	3	a
k	6	e

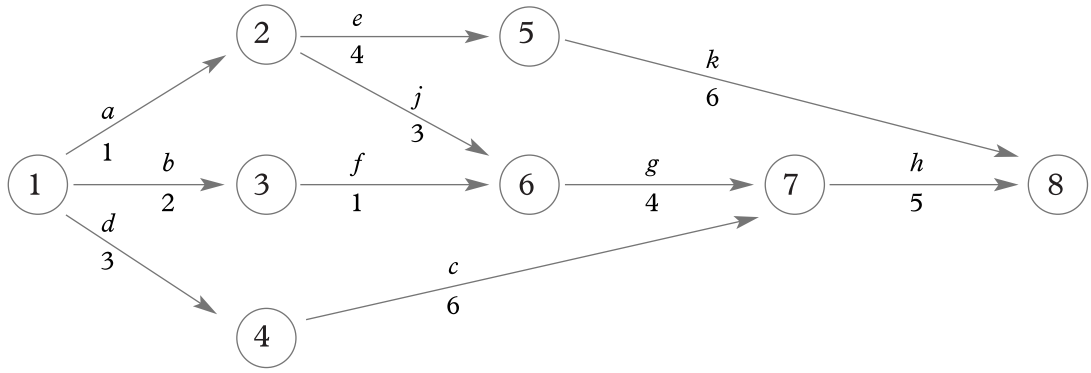
Pour optimiser les temps de réalisation, on procède par étapes comme ci-dessous :

Étape 1 : On ordonne les tâches (arcs) par niveaux

Tâches	*Tâches antérieures*	*niveau 0*	*niveau 1*	*niveau 2*	*niveau 3*
a	-	a	-	-	-
b	-	b	-	-	-
c	d	-	c	-	-
d	-	d	-	-	-
e	a	-	e	-	-
f	b	-	f	-	-
g	f, j	-	-	g	-
h	g, c	-	-	-	h
j	a	-	j	-	-
k	e	-	-	k	-

Étape 2 : On représente le graphe associé

Les étapes initiales de chaque tâche sont classées par niveaux. On numérote les tâches.

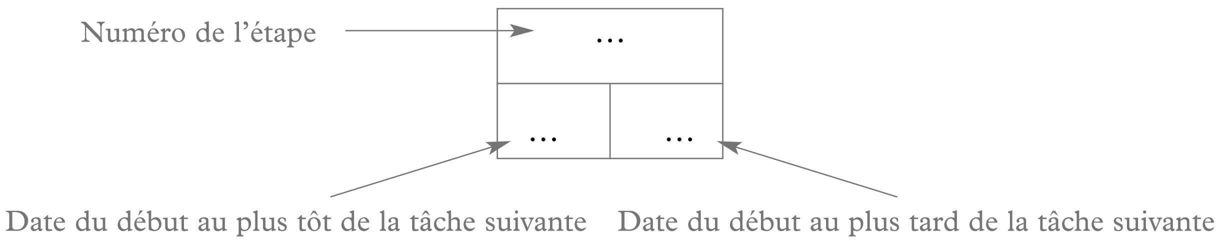


Les étapes 2, 3 et 4 sont les étapes initiales des tâches de niveau 2. Les étapes 5 et 6 sont les étapes initiales des tâches de niveau 3.

Les tâches finales doivent se rejoindre en une même étape.

Étape 3 : On calcule les dates de début au plus tôt et au plus tard de chaque tâche

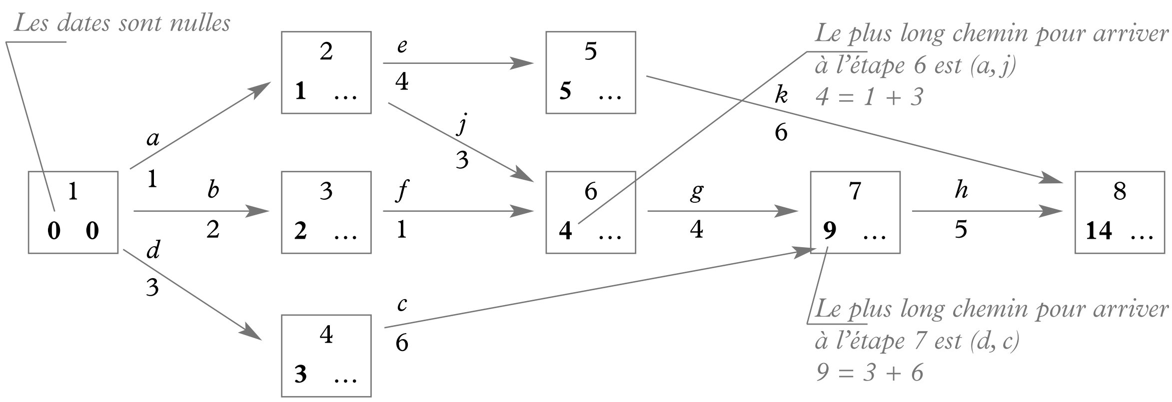
Ces dates sont indiquées sur chaque étape.



Pour l'étape 1 ces dates sont nulles.

Étape 3.1 : Date de début au plus **tôt** d'une tâche

Pour chaque étape c'est la ***longueur du plus long chemin pour y arriver***.



Le projet peut être réalisé en 14 jours.

Étape 3.2 : Date de début au plus **tard** d'une tâche

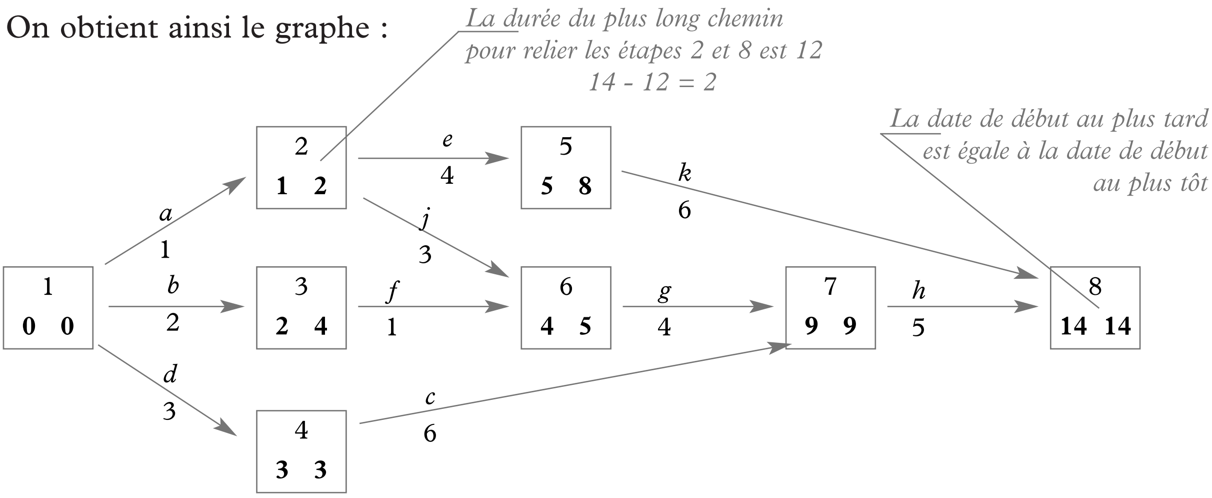
C'est la date au-delà de laquelle le projet ne peut avoir que du retard.

- Pour l'étape terminale la date de début au plus tard est égale à la date de début au plus tôt.
- Pour les autres étapes les dates se calculent en partant de la fin du réseau, de la manière suivante :

  Pour une étape quelconque i le début au plus **tard** est la différence :

durée de l'étape terminale – (durée du plus long chemin pour aller de l'étape i à l'étape finale).

On obtient ainsi le graphe :



Remarque

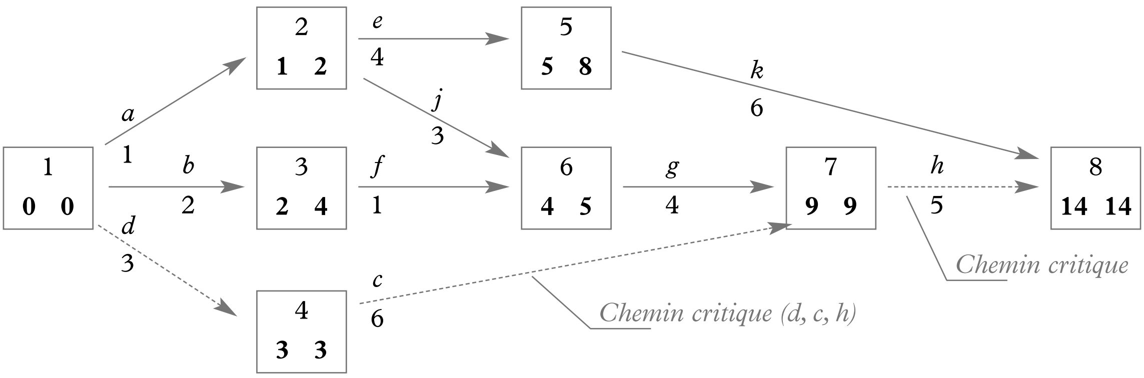
Dans le cas (fréquent) d'une étape i d'où ne part qu'une seule tâche de durée d :

début au plus tard de l'étape i = début au plus tard de la suivante d.

Étape 4 : Détermination du chemin critique

Le chemin critique est le chemin pour lequel tout retard pris sur l'une des tâches entraîne un retard dans la réalisation du projet.

C'est le chemin sur lequel les dates de début au plus tôt sont égales aux dates de début au plus tard.



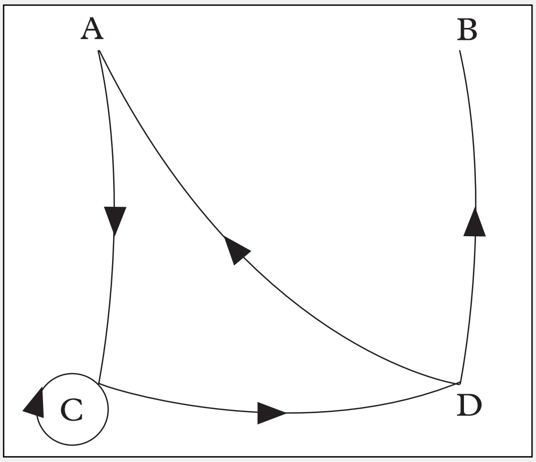
Application/Exercice 10

Exercices autocorrectifs

Applications

Exercice 1

On considère le graphe orienté G défini sur S = {A, B, C, D} par la représentation sagittale ci-dessous.



a) Définir G en extension.

b) Donner 2 chemins de longueur 3 partant de D.

c) Donner un chemin hamiltonien.

Prédécesseurs – Successeurs

Exercice 2

On considère le graphe de l'exercice 1.

Déterminer l'ensemble Γ^- des prédécesseurs de A, B, C et D et l'ensemble Γ^+ de leurs successeurs.

Matrices adjacentes

Exercice 3

1. Déterminer la matrice adjacente M du graphe de l'exercice 1.

2. On considère la matrice adjacente $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ associée au graphe G défini sur $S = \{A, B, C\}$.
Donner une représentation sagittale de G.

Niveaux des sommets

Exercice 4

Sur l'ensemble $S = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ on considère le graphe G défini par :

$G = \{(A, B); (A, C); (A, F); (B, D); (C, D); (C, F); (D, G); (D, E); (F, E); (F, G); (G, E)\}$

a) Ordonner ses sommets par niveaux.

b) Donner une représentation par niveaux de G.

Opérations sur les matrices adjacentes

Exercice 5

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice adjacente associée à un graphe G.

1. Déterminer le nombre de chemins de longueur 2 reliant deux points quelconques du graphe.
2. Combien existe-t-il de chemins de longueur 2 arrivant en C ?

Exercice 6

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Déterminer les matrices $M \oplus M'$, $M \otimes M'$, $M^{[2]}$ et $M'^{[3]}$.

Exercice 7

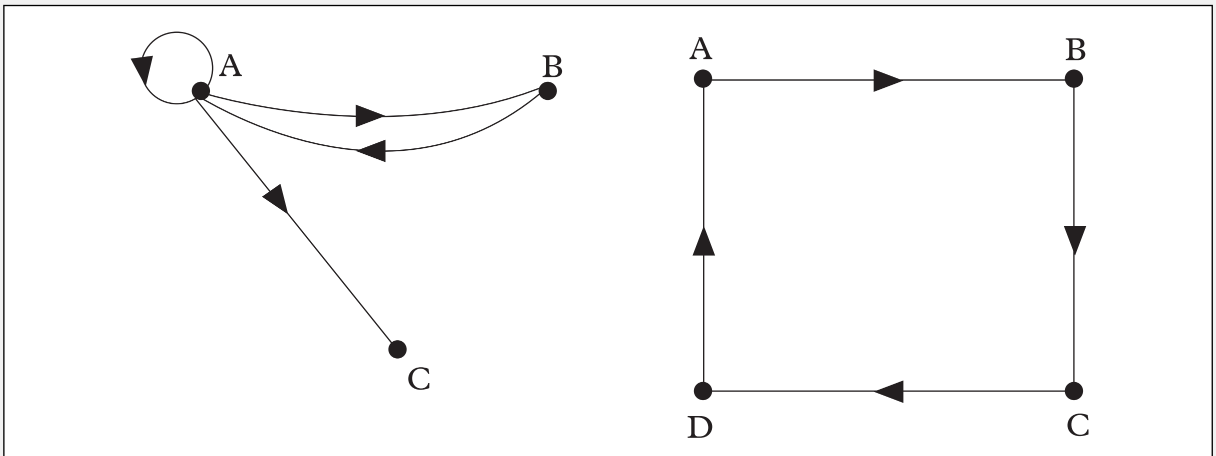
Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice adjacente associée à un graphe G.

Existe-t-il au moins un chemin de longueur 3 reliant deux points du graphe ?

Fermeture transitive

Exercice 8

Tracer la fermeture transitive des graphes ci-dessous :



Exercice 9

On considère le graphe G = {(A, B); (A, C); (B, C); (C, A)} défini sur S = {A, B, C}.

a) Donner sa représentation sagittale.

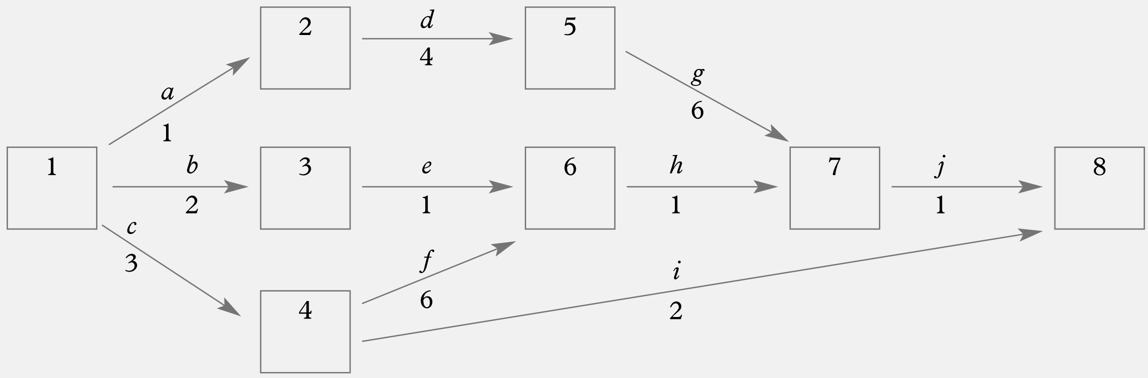
b) Déterminer sa fermeture transitive $\hat{G}$:
- graphiquement ;
- par le calcul.

Méthode PERT

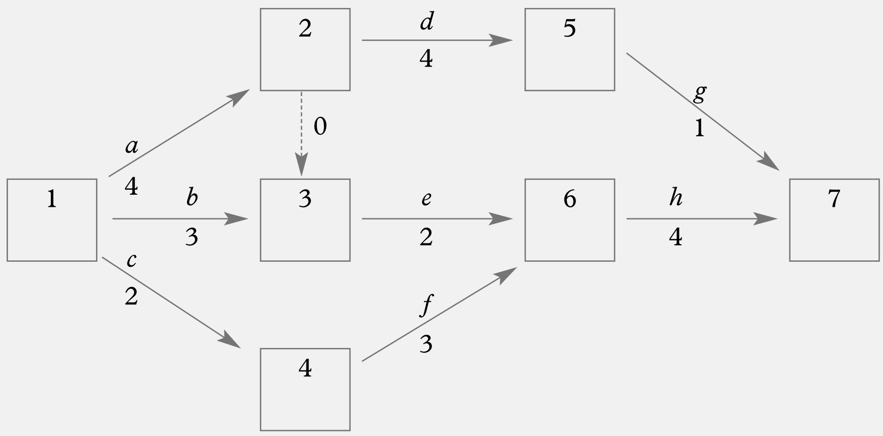
Exercice 10

Déterminer les dates de début au plus **tôt** et de début au plus **tard**, ainsi que le chemin critique pour les réseaux PERT ci-dessous :

1. Réseau 1



2. Réseau 2



Les étapes 2 et 3 sont reliées par une **tâche fictive** de durée nulle.

Approfondissements

Exercice 11

Soit G le graphe défini sur S = {A, B, C} par le tableau des successeurs :

Sommets	Successeurs
A	A, B
B	C
C	B

1. Représenter le graphe G et, ***pour les sommets dans l'ordre indiqué***, donner sa matrice adjacente M.
2. a) Calculer les matrices M^2 et M^3, ainsi que les matrices booléennes $M^{[2]}$ et $M^{[3]}$.
   b) Donner la liste des chemins de longueur 2 d'origine A.
   c) Quel est le nombre de chemins de longueur 3 d'origine B ?
   d) Quel est le nombre de chemins de longueur 3 arrivant en B ? Donner leur liste.
   e) Quel est le nombre de circuits de longueur 3 ? Donner leur liste.

Exercice 12

On considère l'ensemble S = {A, B, C, D, E} et G le graphe défini par le tableau suivant :

Prédécesseurs \ Successeurs	A	B	C	D	E
A	0	0	0	0	0
B	0	0	0	0	0
C	1	0	0	0	0
D	0	1	1	0	1
E	0	0	0	0	0

1. En lisant le tableau, dire si G comporte des boucles.
2. Représenter le graphe G.
3. Est-ce que G est une arborescence ? Quel est le sommet de niveau 0 ?
4. Donner la matrice d'adjacence M du graphe G.
5. Calculer les matrices $M^2 = M \times M$ et $M^3 = M^2 \times M$. Interpréter ce dernier résultat.

Exercice 13

(BTS Informatique de Gestion – Juin 1999)

1 - Soit G le graphe défini par le tableau des successeurs :

Sommets	Successeurs
A	A, B
B	C
C	C

a) Représenter le graphe G.

b) Donner la matrice d'adjacence du graphe G.

2 - Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Déterminer les matrices $M^2 = M \times M$ et $M^3 = M^2 \times M$.

b) Quel est le nombre situé à l'intersection de la première ligne et de la deuxième colonne de M^2 ? Que signifie-t-il par rapport au graphe G ? Donner la liste des chemins concernés.

c) Quel est le nombre de chemins de longueur 3 issus du sommet A dans le graphe G ?

Exercice 14

(BTS IG Juin 2000 Nouvelle Calédonie)

On considère le graphe défini par le tableau suivant :

Sommets	Successeurs
A	A, B, D
B	A, C
C	A
D	C

1. Déterminer la matrice adjacente M de ce graphe.

2. a) Calculer la matrice $M^2 = M \times M$, où $\times$ représente la multiplication des matrices.

   b) Utiliser le résultat précédent pour calculer le nombre total de chemins de longueur 2 du graphe, puis le nombre de chemins de longueur 2 partant de A.

   c) Citer tous les chemins de longueur 2 partant de A.

3. Citer tous les chemins de longueur 3 partant de D.

Travaux pratiques

TP 1

BTS Informatique de Gestion Juin 2000

Les questions 1 et 2 peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

1 - On considère l'ensemble E = $\{x_1; x_2; x_3\}$ et l'application f de E dans E définie par

$$f(x_1) = x_2, f(x_2) = x_3, f(x_3) = x_2.$$

a) Déterminer les antécédents par f de chacun des éléments de l'ensemble E.

b) L'application f est-elle une injection de E dans E ? (Justifier).

c) L'application f est-elle une surjection de E sur E ? (Justifier).

2 - On considère le graphe orienté G, de sommets $x_1; x_2; x_3$ tel que les successeurs de $x_1; x_2; x_3$ sont respectivement $f(x_1)$, $f(x_2)$ et $f(x_3)$.

a) Donner une représentation géométrique de ce graphe.

b) On note M la matrice d'adjacence de G.

On constate que $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Expliquer pourquoi la première ligne de M est 0 1 0.

c) On note $\hat{G}$ la fermeture transitive de G.

On rappelle que $\hat{G}$ est le graphe obtenu en conservant les sommets de G et en ajoutant, s'ils n'existent pas dans G, les arcs $(x_i; x_j)$ lorsqu'il existe un chemin d'origine x_i et d'extrémité x_j dans le graphe G.

Tracer une représentation géométrique de $\hat{G}$ et vérifier que la matrice $\hat{M}$ d'adjacence du graphe $\hat{G}$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

d) Calculer les matrices booléennes $M^{[2]}$ et $M^{[3]}$.

Vérifier que $\hat{M} = M \oplus M^{[2]} \oplus M^{[3]}$ où $\oplus$ représente l'addition booléenne des matrices.

TP 2

Recherche des chemins minimaux

Les liaisons entre différentes villes notées A, B, C, D, E, F et G constituent un réseau dont on extrait seulement celles permettant de se rendre de la ville A à la ville G.

Partie A

Dans cette première partie le tableau ci-dessous indique la ***durée*** en heures des trajets.

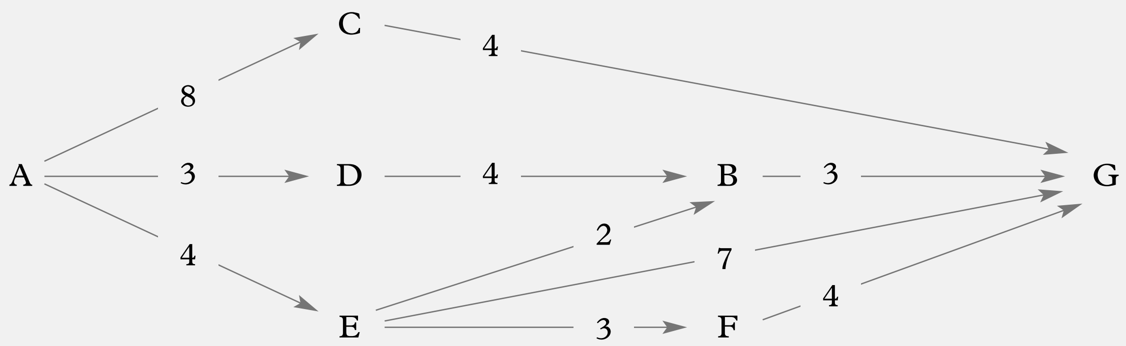
Départ \ Arrivée	A	B	C	D	E	F	G
A	-	-	8	3	4	-	-
B	-	-	-	-	-	-	4
C	-	-	-	-	-	-	4
D	-	4	-	-	-	-	-
E	-	2	-	-	-	3	7
F	-	-	-	-	-	-	4
G	-	-	-	-	-	-	-

On obtient ainsi un graphe valué G pour lequel on note S_n l'ensemble des sommets de niveau n.

1. Préliminaire

Vérifier que $S_0 = \{A\}$, $S_1 = \{C, D, E\}$, $S_2 = \{B, F\}$ et $S_3 = \{G\}$.

La représentation du graphe classé par niveaux ainsi que les durées des trajets est donnée ci-dessous.



L'algorithme permettant la recherche du chemin minimal entre deux étapes quelconques repose sur la propriété : « tout chemin optimal est composé de chemins eux-mêmes optimaux ».

On doit donc déterminer les sous-chemins minimaux de chemins quelconques, et pour cela on va indiquer pour chaque étape X une marque m(X).

X
m(X)

2. Recherche du chemin minimal :

On procède en complétant les marques niveau par niveau.

- Pour les sommets de niveau 0, par convention on pose : m(A) = 0.

A
0

- Pour les sommets de niveau 1, la marque « au plus tôt » est la valeur minimale des chemins venant du niveau 0. Par exemple m(D) = 3.

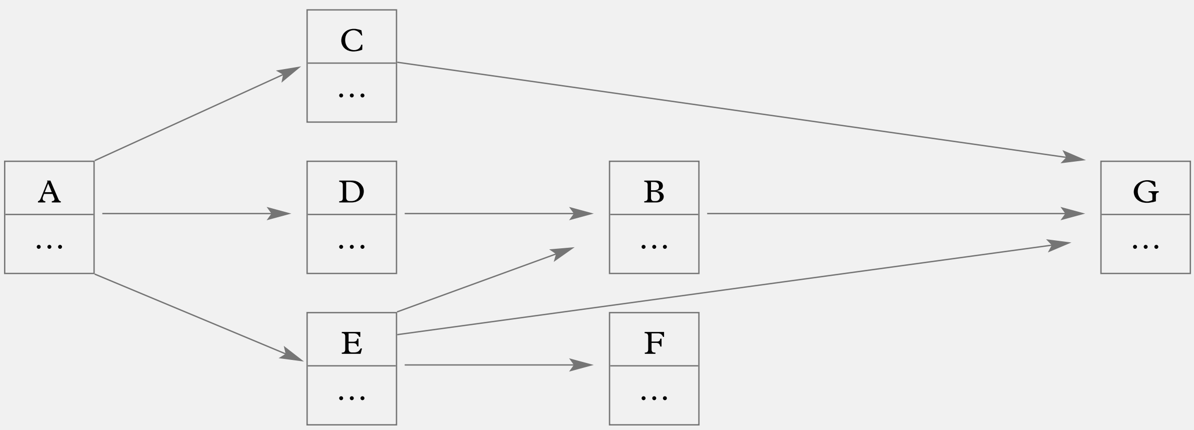
D
3

Pour les sommets des autres niveaux, la marque « au plus tôt » est la valeur minimale de tous les chemins venant des niveaux précédents.

Pour le sommet B : m(B) = min(3+4 ; 4+2) = 6.

B
6

Compléter avec les longueurs des chemins et les marques minimales la représentation graphique ci-dessous :



En déduire le chemin minimal c'est-à-dire ***la durée minimale*** du trajet entre A et G.

Partie B

Dans cette deuxième partie le tableau ci-dessous indique la distance en kilomètres des trajets.

Arrivée / Départ	A	B	C	D	E	F	G
A	-	-	500	200	210	-	-
B	-	-	-	-	-	-	250
C	-	-	-	-	-	-	200
D	-	250	-	-	-	-	-
E	-	130	-	-	-	200	450
F	-	-	-	-	-	-	210
G	-	-	-	-	-	-	-

1. Reprendre le graphe précédent ordonné par niveaux et indiquer les ***distances*** parcourues.

2. Recherche du chemin minimal :

Reprendre la démarche du A2. pour compléter avec les marques minimales la représentation graphique précédente.

En déduire le chemin minimal c'est-à-dire la ***distance minimale*** du trajet entre A et G.

TP 3

Méthode PERT

(D'après BTS comptabilité)

La construction d'un entrepôt peut se décomposer en 10 tâches reliées entre elles par des conditions d'antériorité.

L'entrepreneur chargé de cette construction vous communique le tableau des enchaînements des différentes activités, avec indication des durées respectives de chaque tâche :

Nomenclature	Désignation	Activités prérequises	Durée (jours)
a	Acceptation des plans	-	4
b	Préparation du terrain	-	2
c	Commande des matériaux	*a*	1
d	Creusage des fondations	*a, b*	1
e	Commande des portes et fenêtres	*a*	2
f	Livraison des matériaux	*c*	2
g	Coulage des fondations	*d, f*	2
h	Livraison des portes et fenêtres	*e*	10
i	Pose des murs, de la charpente, du toit	*g*	4
j	Mise en place des portes et fenêtres	*h, i*	1

Pour planifier son travail, il vous demande de représenter sur un graphe le chemin critique, indiquant le temps minimum nécessaire pour la réalisation de ce projet.

Unité 2

Séries statistiques

➤ Prérequis

- **Notions élémentaires de calcul algébrique**
- **Statistiques à une variable**

➤ Objectifs

- Consolider et approfondir les connaissances acquises les années antérieures

➤ Contenu

- Séquence 1 : séries statistiques à deux variables

Séries statistiques à deux variables

Séquence 1

➤ Prérequis

- Notions élémentaires de calcul algébrique
- Statistiques à une variable

➤ Objectifs

- Consolider et approfondir les connaissances acquises les années antérieures

Contenu

1. Rappels – Généralités

Le recueil et l'exploitation des données statistiques par des entreprises, des instituts de sondage, … et leur étude simultanée permettent de décrire des situations économiques, sociales pour établir des diagnostics conjoncturels ou construire des modèles prévisionnels. Ces méthodes sont entrevues dans cette séquence dans laquelle on étudie simultanément deux caractères quantitatifs.

Exemple

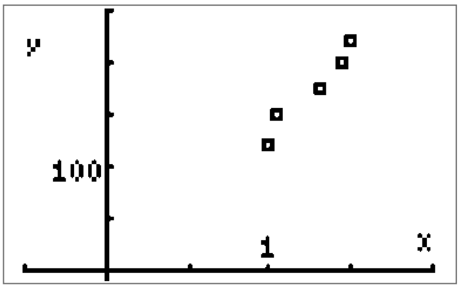
Une chaîne d'hypermarchés implantée dans le secteur S a effectué durant cinq années des relevés statistiques sur son chiffre d'affaires Y (exprimé en millions d'euros) et sur ses frais de publicité X (exprimés en millions d'euros).

Les résultats sont consignés dans le tableau suivant dans lequel figure aussi le nombre N d'hypermarchés de cette chaîne en activité dans le secteur S.

Rang de l'année t_i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Frais de publicité x_i	*1*	*1,05*	*1,3*	*1,45*	*1,5*
Nombres d'hypermarchés n_i	*5*	*7*	*8*	*10*	*12*
Chiffre d'Affaires y_i	*120*	*150*	*175*	*198*	*222*

Nous étudions simultanément les caractères quantitatifs : « *Frais de publicité et Chiffre d'Affaires* ».

Les 5 points M_i de coordonnées $(x_i\,;y_i)$ constituent dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ le **nuage** associé à la série que nous noterons $(x_i\,;y_i)$.



série $(x_i\,;y_i)$

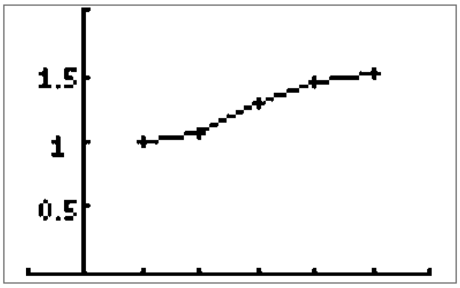
Définition

On appelle série chronologique (ou chronique) une série $(T_i\,;y_i)$ où le caractère T_i varie en fonction du temps (années, trimestres, mois, …).

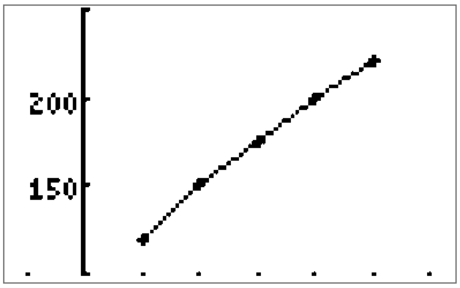
Dans la série $(T_i\,;y_i)$ Le caractère T_i est la plupart du temps remplacé par son rang t_i.

Exemple

Les séries statistiques *(Rang de l'année t_i ; Frais de publicité x_i)* et *(Rang de l'année t_i ; Chiffre d'Affaires y_i)* constituent 2 séries chronologiques :



série $(t_i\,;x_i)$



série $(t_i\,;y_i)$

Les points N_i de coordonnées $(t_i\,;x_i)$ et P_i de coordonnées $(t_i\,;y_i)$ constituent dans un second repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ des **nuages** associés aux séries que nous noterons $(t_i\,;x_i)$ et $(t_i\,;y_i)$.

La représentation de ces séries chronologiques des *5* couples dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ est constituée de *4* segments de droite reliant les points successifs $N_i(t_i\,;x_i)$ et $P_i(t_i\,;y_i)$. Ces segments indiquent une liaison dans le temps.

Définition

Dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, on appelle point moyen G du nuage de la série formée des n couples $(x_i\,;y_i)$ le point G de coordonnées :

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \quad ; \quad \bar{y}=\frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}.$$

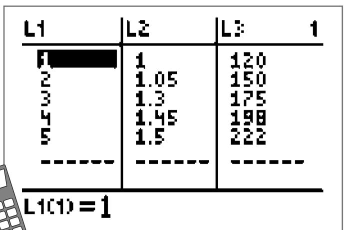
Exemple

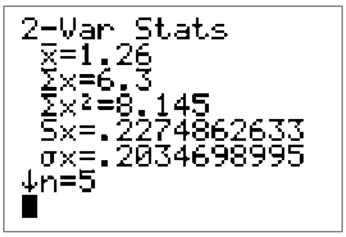
Pour la série $(x_i\,;y_i)$ *(Frais de publicité et Chiffre d'affaire)* on a :

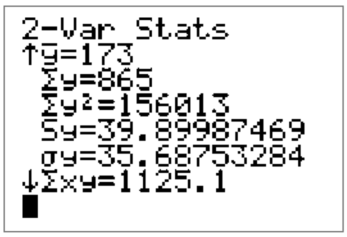
$$\bar{x}=\frac{1+1{,}05+1{,}3+1{,}45+1{,}5}{5}=1{,}26 \qquad \bar{y}=\frac{120+150+175+198+222}{5}=173$$

d'où G(1,26 ; 173) dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.

À l'aide d'une calculatrice, on saisit les données dans trois listes et l'on trouve :







Application/Exercice 1

Définitions

Soit $(x_i\,;y_i)$ la série double formée de n couples, de point moyen $G(\overline{x},\overline{y})$.

On appelle variance des séries x_i et y_i les réels respectivement notés σ_x^2 et σ_y^2 définis par :

$$\sigma_x^2=\frac{x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+\ldots+x_n^{\,2}}{n}-\overline{x}^2\ ;\ \sigma_y^2=\frac{y_1^{\,2}+y_2^{\,2}+\ldots+y_n^{\,2}}{n}-\overline{y}^2.$$

On appelle covariance de la série $(x_i\,;y_i)$ le réel noté σ_{xy} défini par :

$$\sigma_{xy}=\frac{x_1.y_1+x_2.y_2+\ldots+x_n.y_n}{n}-\overline{x}.\overline{y}\ .$$

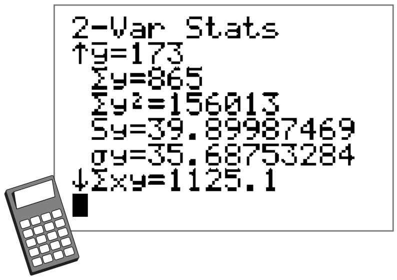
Exemple

Pour la série «*(Frais de publicité x_i, Chiffre d'Affaires y_i)*» on a :

$$\sigma_x^2=\frac{8,145}{5}-1,26^2=0,0414\quad \sigma_y^2=\frac{156013}{5}-173^2=1273,6$$

$$\sigma_{xy}=\frac{1125,1}{5}-1,26\times173=7,04$$

À l'aide de la calculatrice on trouve :



Application/Exercice 2

2. Ajustement linéaire

L'ajustement consiste à remplacer une série double par une série $(x_i\,;y_i)$ pour laquelle il existe une relation fonctionnelle liant x_i et y_i.

Si cette relation fonctionnelle est du type $y_i = a.x_i + b$ (a,b constantes réelles), on dira que l'ajustement est affine.

Il existe de nombreux types d'ajustement : ajustement parabolique $y_i = a.x_i^2 + b.\,x_i + c$, ajustement exponentiel $y_i = k.a^{x_i}$ etc.

On étudie ci-dessous trois types d'ajustement affine.

Notons que si les y_i ne sont pas tous égaux entre eux (auquel cas la droite (D) : $y = \overline{y}$ est la meilleure droite d'ajustement) l'ajustement affine consiste donc à déterminer les réels a et b tels que $y_i = a.x_i + b$.

2A. *Ajustement au jugé*

Principe : On trace « au jugé » sur le nuage une droite qui semble ajuster au mieux la série. La solution n'est donc pas unique mais on pourra imposer à cette droite de passer par le point moyen G.

Exemple

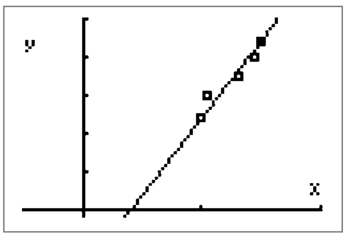
Pour la série « *(Frais de publicité x_i, Chiffre d'Affaires y_i)* » ajustons la série initiale par la série (x_i, y_i) pour laquelle, par exemple, les points M_i sont situés sur la droite (GM_1) : $y = ax + b$.

$G(1{,}26\,;173)$ et $M_1(1\,;120) \in (GM_1)$ donc $\begin{cases} 1{,}26.a + b = 173 \\ 1.a + b = 120 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} a = \dfrac{2650}{13} \\ b = -\dfrac{1090}{13} \end{cases}$

$$(GM_1) : \; y = \frac{2650}{13}x - \frac{1090}{13}$$

On pourra donc ajuster la série initiale par la série (x_i, y_i) pour laquelle

$$y_i \approx 203{,}85.x_i - 83{,}85.$$



Ajustement au jugé

Application/Exercice 3

2B. Méthode de MAYER

Principe : On partage le nuage initial en deux sous-nuages pour lesquels on calcule les points moyens respectifs *A* et *B* : la droite *(AB)* est appelée droite de MAYER.

La solution n'est pas unique. On établit cependant qu'elle passe toujours par le point moyen G.

Exemple

Pour la série « *(Frais de publicité* x_i*, Chiffre d'Affaires* y_i*)* » partageons le nuage initial en deux sous nuages de 2 et 3 points, on aura :

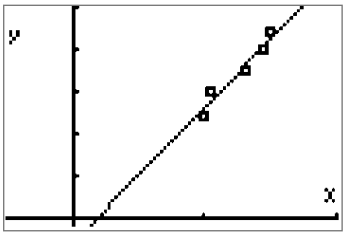
$$A\ (x_A, y_A) = (1{,}025\ ;\ 135) \text{ et } B\ (x_B, y_B) = (4{,}25/3\ ;\ 595/3)$$

Ajustons la série initiale par la série (x_i, y_i) pour laquelle les points *Mi* sont situés sur la droite *(AB)*.

A ∈ (AB) et B ∈ (AB) donc $\begin{cases} 1{,}025.a + b = 135 \\ \dfrac{4{,}25}{3}.a + b = \dfrac{595}{3} \end{cases}$ d'où $\begin{cases} a = \dfrac{7600}{47} \\ b = -\dfrac{1445}{47} \end{cases}$

La droite de MAYER a pour équation : $y = \dfrac{7600}{47}x - \dfrac{1445}{47}$

On pourra donc ajuster la série initiale par la série (x_i, y_i) pour laquelle $y_i \approx 161{,}70.x_i - 30{,}74$.



droite de MAYER

Propriété

Quelle que soit la répartition des deux sous-nuages la droite de Mayer *(AB)* passe par le point moyen G.

Remarque

Pour la série «*(Frais de publicité x_i, Chiffre d'Affaires y_i)*» on vérifie que $\frac{7600}{47}1,26-\frac{1445}{47}=173$

donc $G(1,26\ ;\ 173)$ est bien situé sur la droite (AB).

Application/Exercice 4

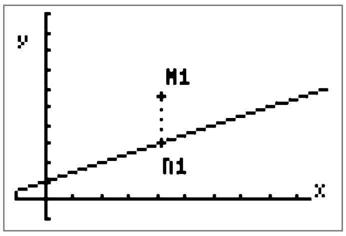
Remarques

1. En général, pour la répartition des deux sous-nuages on choisit deux sous-ensembles dont les effectifs sont égaux ou, à défaut, voisins.
2. La droite (AB) passant par $G(\overline{x}\ ;\overline{y})$, son équation peut s'écrire sous la forme : $y - \overline{y} = a(x - \overline{x})$.

2C. Méthode des Moindres Carrés

Principe : Dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, soient $M_i(x_i, y_i)$ les n points représentant la série double (x_i, y_i) de point moyen $G(\overline{x}\ ;\overline{y})$ et soit $(D_{a,b})$ une droite du plan d'équation $y = a.x + b$.

Notons $N_i(x_i, ax_i+b)$ le projeté de $M_i(x_i, y_i)$ sur $(D_{a,b})$ parallèlement à la droite (Oy).



Pour chaque position de la droite $(D_{a,b})$ on évalue la quantité :

$$S = M_1N_1^2 + M_2N_2^2 + \ldots M_nN_n^2 = (y_1 - ax_1 - b)^2 + (y_2 - ax_2 - b)^2 + \ldots (y_n - ax_n - b)^2$$

Définition

On appelle droite d'ajustement par la méthode des moindres carrés la droite qui rend minimale la somme

$$S = M_1N_1^2 + M_2N_2^2 + \dots M_nN_n^2 = (y_1 - ax_1 - b)^2 + (y_2 - ax_2 - b)^2 + \dots (y_n - ax_n - b)^2$$

c'est-à-dire qui minimise (rend « moindre ») la somme des carrés des longueurs des segments $[M_i \,;\, N_i]$.

Théorème

Soit (x_i, y_i) une série double formée de n couples et de point moyen $G(\overline{x}\,;\overline{y})$.

Alors la droite d'ajustement par la méthode des moindres carrés est unique et a pour équation $y - \overline{y} = a(x - \overline{x})$ avec $a = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$

En effet, on développe la somme

$$S = M_1N_1^2 + M_2N_2^2 + \dots M_nN_n^2 = (y_1 - ax_1 - b)^2 + (y_2 - ax_2 - b)^2 + \dots (y_n - ax_n - b)^2$$

que l'on considère successivement comme un trinôme du second degré en b et dont le minimum est atteint pour $b = \overline{y} - a\overline{x}$, puis comme un trinôme du second degré en a dont le minimum est atteint pour $a = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$

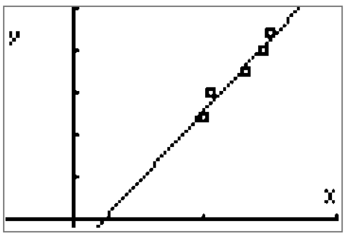
Exemple

Pour la série « *(Frais de publicité x_i, Chiffre d'Affaires y_i)* » on a : $a = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = \dfrac{7,04}{0,0414} = \dfrac{35200}{207}$

d'où $(D) : y - 173 = \dfrac{35200}{207}(x - 1,26)$ c'est-à-dire $(D) : y = \dfrac{35200}{207}.x - \dfrac{949}{23}$.

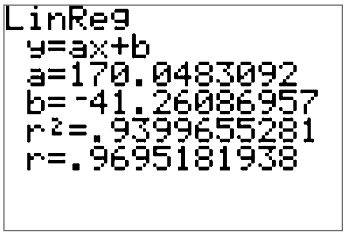
On pourra donc ajuster la série initiale par la série (x_i, y_i) pour laquelle

$$y_i \approx 170,048.x_i - 41,261.$$



droite des moindres carrés

À l'aide d'une calculatrice on effectue les calculs sur les listes L_2 et L_3 et l'on trouve :



Application/Exercice 5

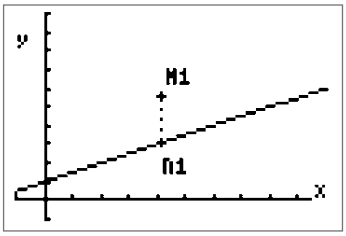
3. Droites de régression

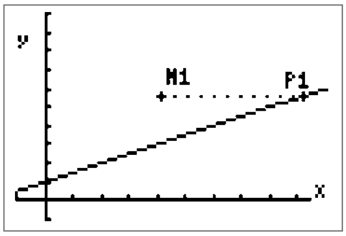
On considère désormais les séries pour lesquelles les x_i ou les y_i ne sont pas tous égaux entre eux, c'est-à-dire les séries pour lesquelles $\sigma x \neq 0$ et $\sigma y \neq 0$.

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soient $M_i(x_i, y_i)$ les n points représentant la série double (x_i, y_i) de point moyen $G(\overline{x}\ ;\overline{y})$ et soit $(D_{a,b})$ une droite du plan d'équation $y = a.x + b$.

Notons $N_i(x_i, ax_i+b)$ le projeté de $M_i(x_i, y_i)$ sur $(D_{a,b})$ parallèlement à la droite (Oy) et

$P_i = \left(\frac{y_i - b}{a} ; y_i\right)$ le projeté de $M_i(x_i, y_i)$ sur $(D_{a,b})$ parallèlement à la droite (Ox).





Pour chaque position de la droite $(D_{a,b})$ on évalue les quantités :

$$S = M_1N_1^2 + M_2N_2^2 + \ldots M_nN_n^2 = (y_1 - ax_1 - b)^2 + (y_2 - ax_2 - b)^2 + \ldots (y_n - ax_n - b)^2$$

$$S' = M_1P_1^2 + M_2P_2^2 + \ldots M_nP_n^2 = \left(x_1 - \frac{y_1 - b}{a}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{y_2 - b}{a}\right)^2 + \ldots \left(x_n - \frac{y_n - b}{a}\right)^2$$

Définitions et propriétés

1. On appelle droite de régression de y en x et l'on note $(D_{y/x})$ la droite d'ajustement par la méthode des moindres carrés qui rend minimale la somme

$$S = M_1N_1^2 + M_2N_2^2 + \ldots M_nN_n^2 = (y_1 - ax_1 - b)^2 + (y_2 - ax_2 - b)^2 + \ldots (y_n - ax_n - b)^2$$

Cette droite est unique et passe par G. (C'est la droite trouvée au § 2.*C*)

2.On appelle droite de régression de x en y et l'on note $(D_{x/y})$ la droite d'ajustement par la méthode des moindres carrés qui rend minimale la somme

$$S' = M_1P_1^2 + M_2P_2^2 + \ldots M_nP_n^2 = \left(x_1 - \frac{y_1 - b}{a}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{y_2 - b}{a}\right)^2 + \ldots \left(x_n - \frac{y_n - b}{a}\right)^2$$

Cette droite est également unique et passe par G.

Théorème

Soit (x_i, y_i) une série double formée de n couples et de point moyen $G(\overline{x}\ ;\overline{y})$.

Alors les droites de régression ont pour équation :

$$(D_{y/x}) : \ y - \overline{y} = a(x - \overline{x}) \ \text{ avec } a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$$

$$(D_{x/y}) : \ x - \overline{x} = a'(y - \overline{y}) \ \text{ avec } a' = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}$$

Pour $(D_{x/y})$ la démarche est similaire à celle du § 2.*C*.

Exemple

Pour la série « *(Frais de publicité* x_i*, Chiffre d'Affaires* y_i*)* » on a : $a' = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} = \frac{7,04}{1273,6} = \frac{11}{1990}$

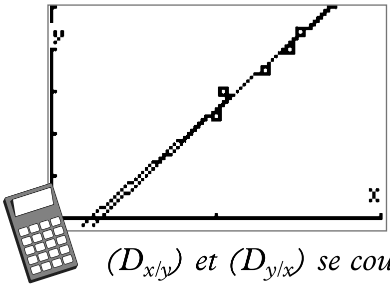
d'où $(Dx/y) : x - 1,26 = \frac{11}{1990}(y - 173)$ ou $(Dx/y) : y - 173 = \frac{1990}{11}(x - 1,26)$

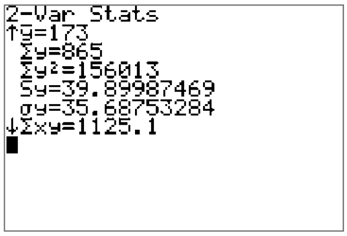
c'est-à-dire $(Dx/y) : y = \frac{1990}{11}.x - \frac{3022}{55}$

On pourra donc ajuster la série initiale par la série (x_i, y_i) pour laquelle

$$y_i \approx 180,91.x_i - 54,95.$$

À l'aide d'une calculatrice on peut obtenir la représentation suivante :





($D_{x/y}$) et ($D_{y/x}$) se coupent en G.

Application/Exercice 6

4. Corrélation linéaire

4A. Coefficient de corrélation linéaire

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soient $M_i(x_i, y_i)$ les n points représentant la série (x_i, y_i) de point moyen $G(\overline{x}\ ; \overline{y})$. de variances σ_x^2 et σ_y^2, et de covariance σ_{xy}.

Définition

On appelle coefficient de corrélation linéaire le réel : $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x . \sigma_y}$

Remarque

r, σ_{xy}, a et a' sont de même signe.

Exemple

Pour la série « *(Frais de publicité x_i, Chiffre d'Affaires y_i)* » :

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x . \sigma_y} = \frac{7{,}04}{\sqrt{0{,}0414} . . \sqrt{1273{,}6}} \approx 0{,}9695$$

Voir au § 2.C. la valeur de r donnée par la calculatrice.

Propriétés

a) $-1 \leq r \leq +1$; b) $r^2 = a.a'$ (ou $|r| = \sqrt{a.a'}$)

4B. *Interprétation graphique du coefficient de corrélation linéaire*

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On suppose que $\sigma_x \neq 0$ et $\sigma_y \neq 0$, et l'on rappelle que r, σ_{xy}, a et a' ont même signe.

• Si $|r| = 1$ alors $a.a' = 1$: a et a' ne sont pas nuls et $a' = \dfrac{1}{a}$:

$$(D_{x/y}) : \ x - \bar{x} = a'(y - \bar{y}) = \frac{1}{a}(y - \bar{y}) \ \text{ donc } (D_{y/x}) : y - \bar{y} = a(x - \bar{x})$$

$$(D_{x/y}) = (D_{y/x})$$

Les droites $(D_{y/x})$ et $(D_{x/y})$ sont donc confondues. Les points $M_i(x_i, y_i)$ de la série sont tous alignés (les fonctions affines correspondantes sont décroissantes si $r = -1$ et croissantes si $r = 1$).

• Si $-1 < r < 0$ alors $a < 0$ et $a' < 0$: les fonctions affines correspondantes sont décroissantes.

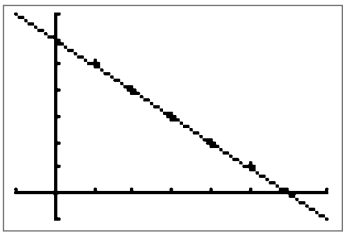
• Si $r = 0$ alors $a' = 0$ car $\sigma_{xy} = 0$.

$$(D_{y/x}) : y - \bar{y} = 0 \text{ et } (D_{x/y}) : x - \bar{x} = 0$$

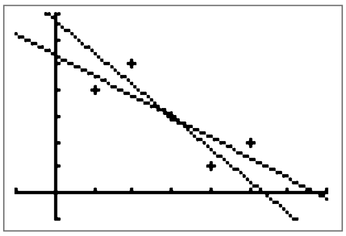
$(D_{x/y})$ et $(D_{y/x})$ sont donc orthogonales : $(D_{y/x})$ parallèle à (Ox) et $(D_{x/y})$ parallèle à (Oy).

• Si $0 < r < +1$ alors $a > 0$ et $a' > 0$: les fonctions affines correspondantes sont croissantes.

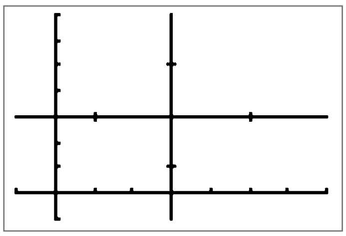
En résumé, dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on aura les représentations :



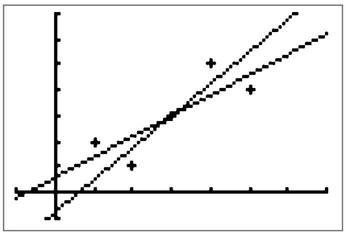
$r = -1$



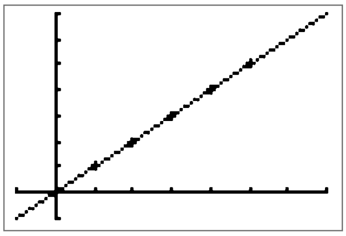
$-1 < r < 0$



$r = 0$



$0 < r < +1$



$r = +1$

Remarques

1. Le calcul du coefficient de corrélation permet de justifier la validité d'un ajustement affine : Plus $|r|$ sera proche 1 et mieux un ajustement affine pourra être effectué.

2. Il est cependant important de noter que l'étude de la corrélation statistique entre deux caractères n'est pas et ne sera jamais la preuve d'un lien direct de ***causalité***, mais seulement une mesure de dépendance linéaire de ces deux caractères.

Application/Exercice 7

5. La méthode des moyennes mobiles

La méthode des moyennes mobiles n'est pas une méthode d'ajustement affine, mais une méthode de lissage préalable à un ajustement affine. Sur les moyennes mobiles obtenues on procède ensuite à un ajustement affine par les méthodes vues précédemment.

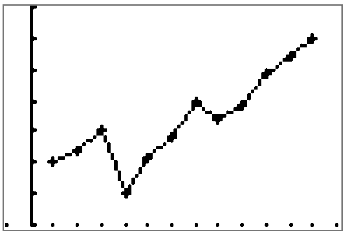
Exemple

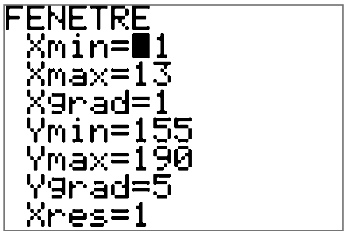
Le chiffre d'affaire, exprimé en milliers d'euros, réalisé entre 1992 et 2003 par une entreprise est donné dans le tableau ci-dessous :

Année	*Rang t_i*	y_i
1992	1	165
1993	2	167
1994	3	170
1995	4	160
1996	5	166
1997	6	169

Année	*Rang t_i*	y_i
1998	7	175
1999	8	172
2000	9	174
2001	10	179
2002	11	182
2003	12	185

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la représentation de la série $(t_i\ ; y_i)$ est la suivante :





On construit les **moyennes mobiles** sur k termes ($k \in \mathbb{N}^*$) de la série $(t_i\ ; y_i)$ en remplaçant les couples $(t_i\ ; y_i)$ par les couples $(u_i\ ; v_i)$ des moyennes de k observation successives de la série (moyennes sur 7 jours, 30 jours, …)

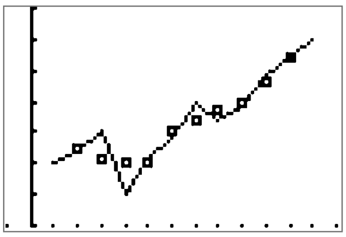
Si la série $(t_i\ ; y_i)$ est constituée de n couples la série des moyennes mobiles sur k termes $(k \in \mathbb{N}^*)$ est constituée de $n - k + 1$ couples.

Pour la série précédente les moyennes mobiles calculées sur trois mois $(k = 3)$ permettent de construire une série $(u_i\ ;v_i)$ de $12 - 3 + 1 = 10$ couples :

Rang u_i	v_i
…	…
2	$\dfrac{165+167+170}{3} = 167,3\ldots$
3	$\dfrac{167+170+160}{3} = 165,6\ldots$
4	$\dfrac{170+160+166}{3} = 165,3\ldots$
5	$\dfrac{160+166+169}{3} = 165$
6	$\dfrac{166+169+175}{3} = 170$

Rang u_i	v_i
7	$\dfrac{169+175+172}{3} = 172$
8	$\dfrac{175+172+174}{3} = 173,6\ldots$
9	$\dfrac{172+174+179}{3} = 175$
10	$\dfrac{174+179+182}{3} = 178,3\ldots$
11	$\dfrac{179+182+185}{3} = 182$
…	…

La série des moyennes mobiles est représentée par les « □ ».



Application/Exercice 8

Exercices autocorrectifs

Applications

Exercice 1

Sur les dix contrôles de ses deux années de BTS un étudiant a obtenu en Informatique et Mathématiques les résultats suivants :

Contrôle	*Informatique*	*Mathématiques*
1	*11*	*10*
2	*12*	*11*
3	*09*	*12*
4	*11*	*08*
5	*13*	*15*
6	*11*	*11*
7	*12*	*08*
8	*14*	*14*
9	*14*	*11*
10	*16*	*09*

1. Ordonner les couples de notes ainsi obtenus suivant les notes d'informatique croissantes, on note désormais cette série de 10 couples $(x_i\,;y_i)$.

2. Représentez le nuage associé à ces 10 couples dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
3. À l'aide de votre calculatrice déterminer les coordonnées du point moyen $G(\overline{x}\,;\overline{y})$. Le placer sur le nuage de la série.

Exercice 2

Avec les données de l'exercice 1 :
1. Calculer la variance σ_x^2 et σ_y^2 des séries (x_i) et (y_i) et la covariance σ_{xy} de la série $(x_i\,;y_i)$.
2. Vérifier le résultat à l'aide d'une calculatrice.

Ajustement au jugé

Exercice 3

Le tableau suivant donne le PNB ainsi que le nombre d'hôpitaux pour 1 million d'habitants dans quelques pays européens.

Pays	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
PNB x_i en euros par habitants	*5 100*	*7 800*	*11 200*	*15 800*	*20 100*	*26 230*	*28 910*	*31 910*
Nombre y_i d'hôpitaux par million d'habitants	*620*	*1 080*	*1 550*	*2 100*	*3 000*	*3 800*	*4 200*	*4 400*

1. Représenter le nuage de points associé à la série $(x_i\,;y_i)$.
Unités : en abscisse 1 cm pour 2 000 euros, en ordonnée 1 cm pour 400 hôpitaux. On prendra pour origine le point $M_0(5\,000\,;600)$. On appelle G le point moyen de ce nuage.

2. On admet qu'un ajustement affine est justifié.
   a) Représenter les points $M_1(5100\,;620)$ et G puis tracer la droite (GM_1), droite d'ajustement au jugé de la série $(x_i\,;y_i)$.
   b) Déterminer une équation de la droite (GM_1).
   c) Quelle estimation peut-on faire du nombre d'hôpitaux d'un pays dont le PNB est de 23 400 euros ?

Méthode de Mayer

Exercice 4

Avec les données de l'exercice 3.

On note G_1 le point moyen du sous-nuage formé par les quatre premiers points et G_2 le point moyen du sous-nuage formé par les quatre derniers.

1. Sur le graphique de l'exercice 3 placer les points G_1 et G_2. Tracer la droite de Mayer (G_1G_2).
2. Déterminer une équation de (G_1G_2).
3. Vérifier que le point moyen $G \in (G_1G_2)$.
4. Un pays a un PNB de 23 400 euros, quelle estimation peut-on faire du nombre d'hôpitaux de ce pays ?

Méthode des moindres carrés

Exercice 5

Avec les données de l'exercice 3.

1. Déterminer une équation de la droite (Δ) d'ajustement par la méthode des moindres carrés sous la forme $y = ax + b$ (a et b seront arrondis à 10^{-3} près).

2. Un pays a un PNB de 23 400 euros, quelle estimation peut-on faire du nombre d'hôpitaux de ce pays ?

Droites de régression

Exercice 6

Avec les données de l'exercice 3.

1. À l'aide d'une calculatrice déterminer une équation des droites de régression $(D_{y/x})$ et $(D_{x/y})$ sous la forme $y = ax + b$ (a et b seront arrondis à 10^{-3} près).

2. Représentez le point moyen G et les droites $(D_{y/x})$ et $(D_{x/y})$.

Coefficient de corrélation linéaire

Exercice 7

Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i\ ;\ y_i)$, avec les données des exercices 1 et 3.

Commenter les résultats.

Moyennes mobiles

Exercice 8

Une entreprise a réalisé sur 12 mois les chiffres d'affaire (en M€) ci-dessous :

Mois t_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Chiffre d'affaire y_i	11	14	16	19	23	21	20	24	27	26	23	25

1. Représentez la série des (t_i, y_i) relativement à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2. Représentez la série des moyennes mobiles (u_i, v_i) sur 5 termes dans le repère précédent.

On aura par exemple $$u_1 = \frac{t_1 + t_2 + \ldots + t_5}{5}$$

et $$v_1 = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_5}{5}$$

Approfondissements

Ajustement au jugé

Exercice 9

Effectuer les calculs à l'aide de la calculatrice. Aucun détail n'est demandé.

On considère la population formée par 20 étudiants et sur laquelle on étudie la série de $n = 20$ couples formée par les caractères quantitatifs « pointure des chaussures » et « taille » (en cm).

Après collecte et rangement des données on obtient les tableaux suivants :

x_i	y_i
38	165
39	169
39	169
40	167
40	169
40	171
41	169
41	170
41	171
41	172
Total = 400	Total = 1 692

x_i	y_i
41	173
42	172
42	173
43	175
43	176
43	177
43	179
44	179
44	181
45	185
Total = 430	Total = 1 770

1. Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, représentez le nuage associé à ces 20 couples.
2. Déterminer les coordonnées de son point moyen $G(\overline{x}\ ; \overline{y})$. Le placer sur le nuage de la série.
3. Calculer la variance σ_x^2 et σ_y^2 des séries (x_i) et (y_i) et la covariance σ_{xy} de la série $(x_i\ ; y_i)$.
4. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i\ ; y_i)$.
5. Déterminer une équation de la droite (GM_1), droite d'ajustement au jugé de la série $(x_i\ ; y_i)$.

Quelle pointure aurait un étudiant mesurant 1,90 m ?

Série chronologique

Exercice 10

Avec les données de l'exercice 8.

1. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série $(u_i\ ,\ v_i)$.
2. Déterminez pour la série $(u_i\ ;\ v_i)$ l'équation de (Δ) droite de régression de v en u.
3. Si l'évolution du chiffres d'affaire suit le modèle proposé :
   a) Donner une estimation du chiffre d'affaire pour *le 14ᵉ* mois.
   b) Au bout de combien de mois le chiffre d'affaire pourrait dépasser 35 M€ ?

Série statistique pondérée

Exercice 11

L'étude d'un caractère nous donne la série statistique **double** $(x_i; y_i)$ ci-dessous :

x_i	y_i	*effectifs* n_i
1	3	2
2	5	7
3	6	19
4	7	31
5	9	28
6	10	10
7	11	3

1. Dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, représentez le nuage associé à ces couples. (On portera à coté de chaque point l'effectif correspondant).

À l'aide de votre calculatrice :

2. Saisir dans 3 listes les valeurs de cette série.
3. Déterminer les coordonnées de son point moyen $G(\overline{x}\ ;\overline{y})$. Le placer sur le nuage de la série.
4. Calculer la variance σ_x^2 et σ_y^2 des séries $(x_i; n_i)$ et $(y_i; n_i)$ et la covariance σ_{xy} de la série $(x_i\ ; y_i; n_i)$.
5. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i\ ; y_i)$.

Ajustement non affine

Exercice 12

(Les calculs intermédiaires ne sont pas demandés.)

Le tableau suivant donne la production annuelle x d'une entreprise (en centaines de milliers d'unités produites) et son résultat net (en millions d'euros).

Production x_i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Résultat y_i	*1,22*	*1,48*	*1,92*	*2,23*	*2,8*

Un ajustement affine ne semblant pas le mieux approprié, on pose $z_i = \ln y_i$.

1. Compléter le tableau suivant en donnant des valeurs approchées à **10^{-3} près par défaut** :

x_i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
z_i					

2. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et z.

3. Déterminer une équation de la droite de régression de z en x, obtenue par la méthode des moindres carrés.

4. En déduire une expression de y en fonction de x.

Exercice 13

La distribution statistique suivante donne l'évolution des variations annuelles du taux d'inflation dans 7 pays ainsi que dans la zone euro.

(Source OCDE – Alternatives économiques Avril 2003)

	2000	2001	2002	2003	2004
(variation annuelle des prix à la consommation, en %)					
États-Unis	3,4	2,8	1,6	1,9	1,8
Zone euro	2,4	2,5	2,4	2,2	2,0
Japon	-0,7	-0,7	-1,1	-1,1	-1,1
France	1,8	1,8	1,9	1,8	1,8
Allemagne	2,1	2,4	1,6	1,4	1,1
Royaume-Uni	2,1	2,1	2,0	1,8	2,1
Italie	2,6	2,3	2,5	2,3	1,9

1. Dans un même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ représenter les nuages des points (n_i, x_i) et (n_i, y_i) associés à l'inflation x aux États-Unis et y dans la zone euro, l'année $1999 + n$.

À l'aide de votre calculatrice (les calculs intermédiaires ne sont pas demandés).

2. Pour la période considérée y a-t-il une forte corrélation linéaire entre l'inflation aux États-Unis et celle de la zone euro ?

3. Pour ces séries, déterminer une équation des droites (Δ_1) et (Δ_2) d'ajustement par la méthode des moindres carrés sous la forme $x = an + b$ et $y = an + b$.
Pour quelle année proposeriez-vous un taux l'inflation inférieur à 1 % aux États-Unis ?

4. De nombreux modèles de régression sont proposés sur votre calculatrice.

Avec les modèles LinReg (« Linear Regression » pour la régression affine), LnReg (régression logarithmique), ExpReg (régression exponentielle) et PwrReg (régression de puissance) on trouve pour l'inflation aux États-Unis :

```
LinReg
 y=ax+b
 a=-.41
 b=3.53
 r²=.7122881356
 r=-.8439716438
```

```
LnReg
 y=a+blnx
 a=3.356006501
 b=-1.102880754
 r²=.8326243643
 r=-.9124825282
```

```
ExpReg
 y=a*b^x
 a=3.627452913
 b=.8470679981
 r²=.6705616067
 r=-.8188782612
```

```
PwrReg
 y=a*x^b
 a=3.376613687
 b=-.4451867039
 r²=.7793729543
 r=-.8828210205
```

Avec le modèle le plus adéquat, proposer une estimation de l'inflation aux États-Unis pour 2007 et 2008.

Travaux pratiques

TP1

D'après BTS comptabilité et gestion – Juin 2000

Une entreprise envisage la fabrication d'un nouveau produit. Elle étudie la demande pour ce nouveau produit, afin d'essayer de déterminer le prix de vente qui lui permettra d'obtenir la plus grande recette possible.

Dans les questions 2 et 3 on utilisera les fonctions de la calculatrice. Le détail des calculs n'est pas demandé.

Dans le tableau suivant, figure une partie des résultats d'une enquête réalisée pour déterminer le nombre d'acheteurs potentiels de ce nouveau produit en fonction de son prix de vente.

Prix de vente en € : x_i	*200*	*250*	*300*	*350*	*450*	*500*
Nombre d'acheteurs potentiels : y_i	*632*	*475*	*305*	*275*	*266*	*234*

On renonce à un ajustement affine pour ce nuage de points.

On effectue le changement de variable $z_i = \ln y_i$.

1. Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous ; les valeurs de z_i seront arrondies à 10^{-3} près.

Prix en € : x_i	*200*	*250*	*300*	*350*	*450*	*500*
$z_i = \ln y_i$						

2. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près, du coefficient de corrélation linéaire de la série statistique (x_i, z_i).
Le résultat obtenu permet d'envisager un ajustement affine.

3. Donner par la méthode des moindres carrés une équation de la droite de régression de z en x, sous la forme $\boldsymbol{z = ax + b}$ (a sera arrondi à 10^{-4} près et b à 10^{-2} près).

4. En déduire une estimation du nombre d'acheteurs potentiels y, en fonction de x, sous la forme $y = k.e^{-\lambda x}$ où k et λ sont des constantes (k sera arrondi à l'entier le plus proche).

5. Utiliser cette estimation pour déterminer le nombre d'acheteurs potentiels, si le prix de vente est fixé à 400 €.

TP2

BTS informatique de gestion – Juin 1998

Dans une région touristique, une chaîne hôtelière offre une capacité de 12 200 nuitées par semaine, dont les prix varient entre 100 € et 400 €.

On désigne par x_i le prix d'une nuitée et par y_i le nombre de nuitées, en fonction du prix proposé.

Pour la première semaine de juillet, cette chaîne hôtelière enregistre le nombre, noté z, de demandes qui lui sont parvenues. Le résultat figure dans le tableau ci-dessous.

Prix d'une nuitée x_i	100	150	200	250	300	350	400
Nombre de nuitées offertes y_i	800	900	1 200	1 500	2 000	2 500	3 300
Nombre de nuitées demandées z_i	5 134	4 346	3 678	2 728	2 636	2 231	1 888
$t_i = ln(y_i)$	6,6846	6,8024	7,0901	7,3132	7,6009	7,8240	8,1017
$v_i = ln(z_i)$	8,5436	8,3770	8,2101	7,9113	7,8770	7,7102	7,5433

On considère alors les quatre séries (x_i, y_i), (x_i, t_i), (x_i, z_i) et (x_i, v_i), de coefficients de corrélation linéaire respectifs : r_1, r_2, r_3 et r_4.

1. Le tableau ci-dessous donne, à 10^{-4} près, trois des quatre coefficients de corrélation linéaire. Calculer r_2. Aucun calcul intermédiaire n'est exigé.

r_1	r_2	r_3	r_4
0,9703	…	-0,9744	-0,9905

2. Des deux séries (x_i, y_i) et (x_i, t_i), laquelle relève le mieux d'un ajustement affine ? Pourquoi ? Même question pour les deux séries (x_i, z_i) et (x_i, v_i).

3. Déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite d'ajustement de t en x.
Dans la réponse, les coefficients seront remplacés par leurs arrondis à 10^{-4} près. Aucun calcul intermédiaire n'est exigé.
On admettra qu'une équation de la droite d'ajustement de v en x est : $v = -0,0033x + 8,8581$.

4. En déduire les expressions de y et de z sous la forme : $y = a.e^{bx}$ et $z = c.e^{dx}$.
Dans les réponses, a et c seront remplacés par leurs arrondis à un près.

5. Le prix pour lequel l'offre est égale à la demande s'appelle le prix d'équilibre, on le note x_o. Calculer x_o en utilisant les résultats de la question précédente.

Unité 3

Calcul intégral

➤ Prérequis

- **Notion de dérivée**

➤ Objectifs

- Consolider et approfondir les connaissances acquises les années antérieures
- Calculer des aires et des volumes de révolution
- Acquérir des techniques de calcul intégral
- Connaître des méthodes d'approximation pour le calcul d'une intégrale
- Calculer l'intégrale d'une fonction sur un intervalle non borné

➤ Contenu

Calcul intégral (1)

Séquence 1

Prérequis

- Notion de dérivée

Objectifs

- Consolider et approfondir les connaissances acquises les années antérieures

Contenu

1. **Rappels sur les primitives**

2. **Définition d'une intégrale**

3. **Interprétation graphique de la notion d'intégrales**

4. **Théorèmes relatifs aux intégrales**

1. Rappels sur les primitives

On se rapportera à la *Séquence 3* **« Dérivées et primitives » de l'unité** 2.

Définition

Soient f et F deux fonctions définies sur un même intervalle I. On dira que F est ***une*** primitive de f sur I si :

a) F est dérivable sur I,

b) pour tout $x \in$ I alors $F'(x) = f(x)$.

Exemple

Soient f et F définies sur **R** par $f(x) = 2x - 1$ et $F(x) = x^2 - x$.
$F'(x) = 2x - 1 = f(x)$ donc F est ***une*** primitive de f sur **R**.

Théorème

Si f admet une primitive F sur I alors f admet une infinité de primitives sur I, et toutes les primitives de f sont de la forme F + *constante*.

Exemple

Une primitive de $f : x \mapsto 2x - 1$ est $F : x \mapsto x^2 - x$ donc toutes les primitives sur **R** sont de la forme $x \mapsto x^2 - x + c$ où c est une constante arbitraire.

Application/Exercice 1

Théorème

a) Toute **fonction dérivable** sur un intervalle $[a\,;b]$ admet des primitives sur $[a\,;b]$.

b) Parmi toutes les primitives de f il n'en existe **qu'une seule** qui prenne en $x = a$ une valeur donnée b.

Exemple

Soit $f : x \mapsto 2x - 1$. Déterminons son **unique** primitive F_0 vérifiant $F_0(2) = 0$.
Les primitives de f étant les fonctions $x \mapsto x^2 - x + c$, si $F_0(2) = 0$ alors

$$F_0(2) = 2^2 - 2 + c = 0 \text{ c'est-à-dire } c = -2.$$

L'unique primitive F_0 de la fonction f telle que $F_0(2) = 0$ est définie par $F_0(x) = x^2 - x - 2$.

Application/Exercice 2

2. Définition d’une intégrale

Exemple préliminaire

La fonction $f : x \mapsto 2x - 1$ admet pour primitives les fonctions $F : x \mapsto x^2 - x + c$ où c est une constante arbitrairement choisie. Pour toutes ces primitives :

$$F(2) - F(1) = (4 - 2 + c) - (1 - 1 + c) = +2$$

Le réel $F(2) - F(1)$ est ***indépendant*** de la valeur de la constante c choisie : $F(2) - F(1)$ est appelé l’intégrale de f entre 1 et 2. On le note $\int_1^2 f(x)\,dx$ (lire « *somme de 1 à 2 de f(x) dx* ».)

On a donc : $$\int_1^2 (2x + 1)\,dx = F(2) - F(1) = 2$$

Définition

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I, F une primitive de f sur I, a et b deux réels.

On appelle **intégrale de *a* à *b* de *f* le réel** $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

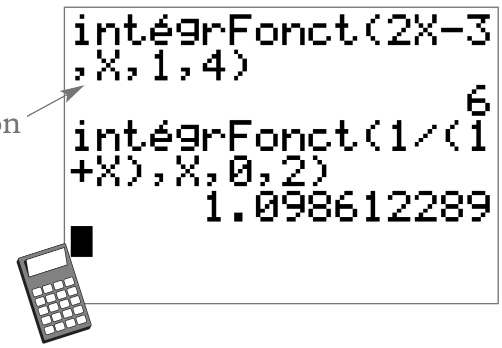
Par commodité dans les calculs on le note encore : $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b$.

Exemples

$$\int_1^4 (2x - 3)\,dx = \left[x^2 - 3x\right]_1^4 = F(4) - F(1) = (16 - 12) - (1 - 3) = 6$$

$$\int_0^2 \frac{1}{1 + x}\,dx = \left[ln(1 + x)\right]_0^2 = ln3 - ln1 = ln3$$

On peut retrouver le résultat ou une valeur approchée à l’aide de la plupart des calculatrices :



Remarques

1. Le résultat de l'intégrale est indépendant du réel x appelé **variable d'intégration**. Cette variable est dite « **muette** » et l'intégrale peut être indifféremment notée :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz = \ldots$$

2. On admettra que toute fonction dérivable est intégrable.

Définition

Si pour tous réels a et $b \in$ I, l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ existe on dira que f est ***intégrable sur I***.

Application/Exercice 3

Propriétés

Si f est intégrable sur l'intervalle I et si a et $b \in$ I, alors :

$$\int_a^a f(t)dt = 0 \qquad ; \qquad \int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt.$$

En effet $\int_a^a f(t)dt$ = F(a) - F(a) = 0 et $\int_b^a f(t)dt = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(t)dt$

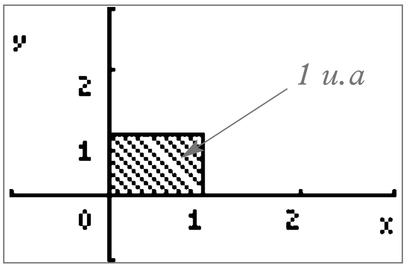
Théorème

Toute fonction f dérivable sur un intervalle I = [a, b], est intégrable sur I.

3. Interprétation graphique de la notion d'intégrale

On rappelle que l'**aire** d'un domaine plan est sa mesure ***dans une unité donnée***.

Dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, l'unité d'aire (on notera 1 *u.a*) est l'aire du rectangle dont les côtés ont pour mesure $\|\vec{i}\|$ et $\|\vec{j}\|$.



Exemples

a) Pour $(O,\vec{i},\vec{j})$, ***orthonormé*** avec $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ cm alors 1 *u.a* = 1 cm².

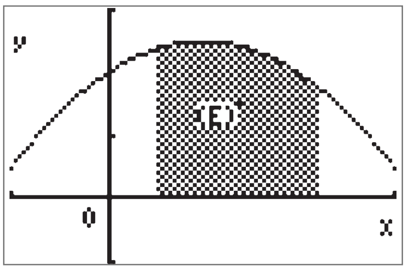
b) Pour $(O,\vec{i},\vec{j})$, ***orthonormé*** avec $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$ cm alors 1 *u.a* = 4 cm².

c) Pour $(O,\vec{i},\vec{j})$, ***orthogonal*** avec $\|\vec{i}\| = 2$ cm et $\|\vec{j}\| = 3$ cm alors 1 *u.a* = 6 cm².

Soit f fonction définie et positive sur $[a\,;b]$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Notons (D_1) et (D_2) les droites d'équation respective $x = a$ et $x = b$.

On considère alors l'ensemble (E) = $\{M(x\,;y)\ |\ a \le x \le b \text{ et } 0 \le y \le f(x)\}$:



(E) est le domaine plan délimité par (C), la droite (Ox), (D_1) et (D_2).

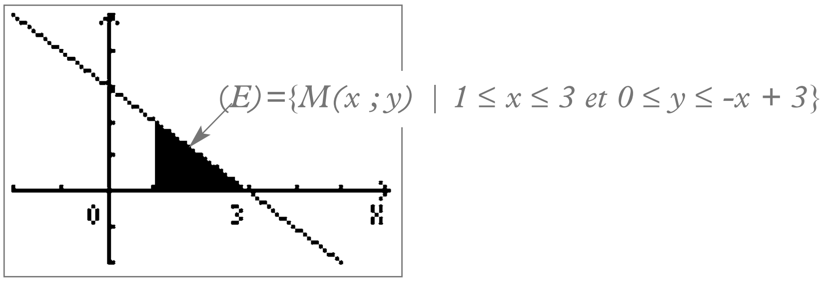
Théorème

Si pour tout $x \in [a\,;b]$ $\boldsymbol{f(x) \ge 0}$ et si (E) est le domaine précédemment défini d'aire $\mathscr{A}$(E), alors en ***unités d'aire*** :

$$\mathscr{A}(E) = \int_a^b f(t)\,dt$$

Exemple

Soit $f : x \mapsto -x + 3$. Considérons le domaine ombré (E) ci-dessous délimité par les droites (D) : $y = -x + 3$, (Ox), (D_1) : $x = 1$ et (D_2) : $x = 3$.



Sur [1 ; 3] $f \geq 0$ donc en ***unités d'aire*** :

$$\mathscr{A}(\mathrm{E}) = \int_1^3 (-t+3)\,dt = \left[\frac{-t^2}{2} + 3t\right]_1^3 = (-\frac{9}{2}+9) - (-\frac{1}{2}+3) = 2$$

Ce que l'on retrouve aisément car $\mathscr{A}$(E) est l'aire d'un triangle : $\mathscr{A}(\mathrm{E}) = \frac{2\times 2}{2}$ = 2 unités d'aire.

Application/Exercice 4

4. Théorèmes relatifs aux intégrales

Théorème 1

Relation entre intégrale et primitive

Soit f une fonction intégrable sur un intervalle I et soient $a, x \in$ I.

La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

En effet :

Notons $\Phi : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$.

Si F est une primitive de f sur I, on a $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$.

De plus $\Phi'(x) = (F(x) - F(a))' = f(x)$ et $\Phi(a) = F(a) - F(a) = 0$, donc Φ est bien l'unique primitive de f qui s'annule en $x = a$.

Exemple

L'unique primitive F de la fonction $f : x \mapsto 2x$ qui s'annule en 1 est définie par $F(x) = \int_1^x 2t\,dt = \left[t^2\right]_1^x = x^2 - 1$

Application/Exercice 5

Théorème 2

Relation de Chasles

Soit f une fonction intégrable sur un intervalle I et soient a, b et $c \in$ I. Alors :

$$\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt$$

En effet : si F est une primitive de f sur I

$$\int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(t)\,dt$$

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(t) = \begin{cases} -2t+1 & si\ t \le 0 \\ 1 & si\ t \ge 0 \end{cases}$

Calculons l'intégrale I = $\int_{-2}^2 f(t)\,dt$.

$$\int_{-2}^2 f(t)\,dt = \int_{-2}^0 f(t)\,dt + \int_0^2 f(t)\,dt = \int_{-2}^0 (-2t+1)\,dt + \int_0^2 1\,dt$$

$$= \left[-t^2 + t\right]_{-2}^0 + \left[t\right]_0^2 = (0) - (-4-2) + (2) - (0) = +8 .$$

Application/Exercice 6

Théorème 3

Linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions intégrables sur un intervalle I et soient a et $b \in$ I.

Alors pour tous réels α et β :

$$\int_a^b (\alpha.f + \beta.g)(t)dt = \alpha.\int_a^b f(t)dt + \beta.\int_a^b g(t)dt$$

En effet :

Soient F et G les primitives respectives de f et g sur I, alors $\alpha F + \beta G$ est une primitive de $\alpha f + \beta g$ sur I.

D'où
$$\begin{aligned}\int_a^b (\alpha.f + \beta.g)(t)dt &= (\alpha F + \beta G)(b) - (\alpha F + \beta G)(a)\\ &= \alpha.F(b) + \beta.G(b) - \alpha.F(a) - \beta.G(a)\\ &= \alpha.(F(b) - F(a)) + \beta.(G(b) - G(a))\\ &= \alpha\int_a^b f(t)dt + \beta\int_a^b g(t)dt\ .\end{aligned}$$

Application/Exercice 7

Théorème 4

Positivité de l'intégrale

Soit f une fonction intégrable sur $[a\ ;b]$ $(a < b)$. Si $f(t) \geq 0$ alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.

En effet :

Si F est une primitive de f sur I, pour tout $x \in$ I, $F'(x) = f(x) \geq 0$, donc F est croissante sur $[a\ ;b]$.

$a < b \Rightarrow F(a) \leq F(b)$ car F est croissante

d'où $F(b) - F(a) \geq 0$ et $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.

Théorème 5

Intégration d'une inégalité

Soient f et g deux fonctions intégrables sur un intervalle I et soient a et $b \in$ I, ($a < b$).

Si pour tout $t \in [a\ ;b] : f(t) \leq g(t)$, alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$

En effet :

Soient F et G les primitives respectives de f et g sur I.

Pour tout $x \in$ I : $(G - F)'(x) = (g - f)(x) \geq 0$, donc $G - F$ est croissante sur $[a\ ;b]$.

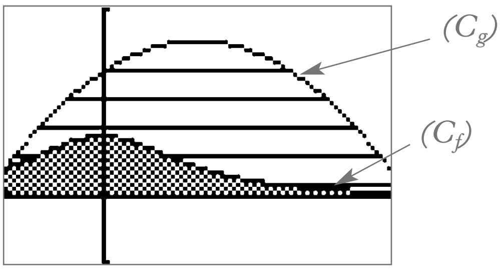
$a < b \Rightarrow (G - F)(a) \leq (G - F)(b)$ car $G - F$ est croissante,

d'où $F(b) - F(a) \leq G(b) - G(a)$ c'est-à-dire $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

Remarques

1. Soient deux fonctions f et g intégrables et ***positives*** sur un intervalle I et a et $b \in$ I ($a < b$), telles que f(t) $\leq g(t)$ pour tout t $\in [a\ ;b]$

L'inégalité $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$ indique que sur l'intervalle $[a\ ;b]$ le domaine plan délimité par (C_f) et la droite (Ox) possède une aire supérieure ou égale au domaine plan délimité par (C_g) et (Ox).



2. Le théorème se généralise évidemment au cas de trois fonctions $f \leq g \leq h$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur **R** par $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$.

La valeur de l'intégrale I = $\int_1^2 f(t)dt$ ne peut pas être calculée à l'aide des fonctions au programme du BTS.

Pour tout réel x : $0 < \dfrac{1}{1+t^2} < \dfrac{1}{t^2}$. On aura donc $0 \leq \int_1^2 f(t)\,dt \leq \int_1^2 \dfrac{1}{t^2}dt$

c'est-à-dire $0 \leq \int_1^2 f(t)\,dt \leq \left[-\dfrac{1}{t}\right]_1^2$ et finalement : $0 \leq \int_1^2 f(t)\,dt \leq \dfrac{1}{2}$

Application/Exercice 8

Définition

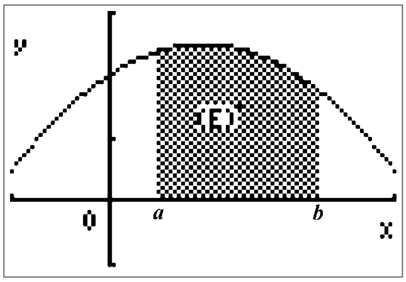
Valeur moyenne d'une fonction

Soit f une fonction intégrable sur l'intervalle $[a\,;b]$ $(a<b)$.

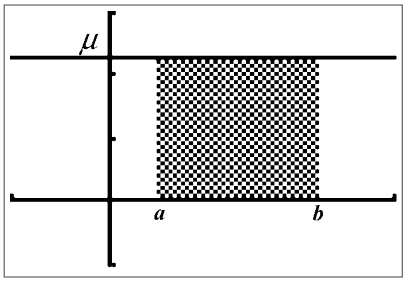
On appelle valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$ le réel μ défini par $\mu = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

Interprétation graphique :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \iff \int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)$$



Aire $= \int_a^b f(x)\,dx$



Aire $= \mu(b-a)$

μ est donc la hauteur du rectangle (dont un côté mesure $(b\text{-}a)$) dont l'aire $\mu(b\text{-}a)$ est égale à celle de (E).

Exemple

La valeur moyenne de $f : x \mapsto e^x$ sur $[0\,;1]$ est $\mu = \dfrac{1}{1-0}\int_0^1 e^x dx = \left[e^x\right]_0^1 = e-1$

Théorème 6

Inégalité de la moyenne

Soient I un intervalle, a et $b \in$ I ($a < b$) et f une fonction intégrable sur I.

Si pour tout $t \in [a\,;b]$: $m \leq f(t) \leq M$ alors $m \leq \frac{1}{b-a}.\int_a^b f(t)dt \leq M$

En effet :

si pour tout $t \in [a\,;b]$: $m \leq f(t) \leq M$ alors $\int_a^b m.dt \leq \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b M.dt$ (d'après le théorème 5)

d'où : $m.\int_a^b 1.dt \leq \int_a^b f(t)dt \leq M.\int_a^b 1.dt$.

c'est-à-dire $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$ d'où le résultat.

La valeur moyenne d'une fonction est nécessairement comprise entre son maximum et son minimum.

Exemple

Considérons à nouveau la fonction f définie par $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$.
f étant strictement décroissante sur [0 ; +∞[:

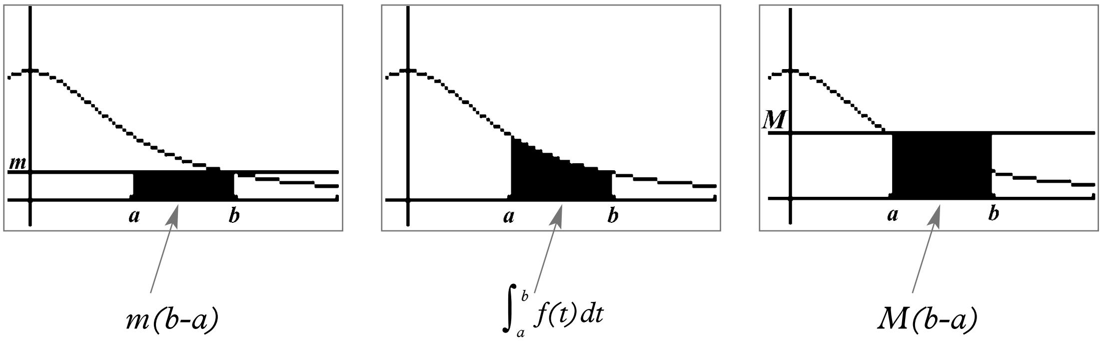
$$1 \leq t \leq 2 \Rightarrow f(2) \leq f(t) \leq f(1) \text{ c'est-à-dire } \frac{1}{5} \leq f(t) \leq \frac{1}{2}$$

On aura donc $\frac{1}{5}(2-1) \leq \int_1^2 f(t)dt \leq \frac{1}{2}(2-1)$ ou encore $\frac{1}{5} \leq \int_1^2 f(t)dt \leq \frac{1}{2}$

Application/Exercice 9

Remarque

L'inégalité $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a)$ indique que sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ l'aire du domaine plan délimité par (C_f) et la droite (Ox) est comprise entre l'aire de 2 rectangles.



Exercices autocorrectifs

Applications

Rappels sur les primitives

Exercice 1

Déterminer, sur les intervalles I indiqués, les primitives F des fonctions f définies par :

a) $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{1}{x^2}$ $\qquad I = \mathbf{R}^*$

b) $f(x) = 3(3x-1)^3$ $\qquad I = \mathbf{R}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{(x+3)^2}$ $\qquad I =]-3 ; +\infty[$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$ $\qquad I =]-3 ; +\infty[$

e) $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$ $\qquad I = \mathbf{R}$

Exercice 2

Soit f définie sur **R** par $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$.
Déterminer son unique primitive F_0 vérifiant $F_0(0) = 0$.

Calcul d'intégrales

Exercice 3

1. Calculer les intégrales

$$I_1 = \int_{-1}^{1} \frac{1}{(t+2)^2}\,dt \quad ; \quad I_2 = \int_{-1}^{1} \frac{1}{(u+2)}\,du \quad ; \quad I_3 = \int_{1}^{2} \frac{3}{z}(\ln(z))^2\,dz$$

2. Retrouver les résultats (ou leur valeur approchée) à l'aide d'une calculatrice.

Calcul d'aire

Exercice 4

Soit f définie sur $[-2\ ;\ 5]$ par $f(x) = -x^2 + 4x$

1. Représenter la courbe (C): $y = f(x)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm).
2. Étudier le signe de f.
3. Hachurer le domaine $(E) = \{M(x\ ;y)\ |\ 0 \leq x \leq 3 \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$ sur le graphique précédent.
4. Calculer en cm² l'aire de (E).

Relation entre intégrale et primitive

Exercice 5

Soit f définie sur **R** par $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, déterminer son ***unique*** primitive F_0 vérifiant $F_0(1) = 0$.

Relation de Chasles

Exercice 6

1. Calculer les intégrales $I = \int_{-2}^{0} -t.dt$ et $J = \int_{0}^{2} t.dt$
2. Complétez : $|t| = \begin{cases} \dots & \text{si } t \leq 0 \\ \dots & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$
3. En déduire la valeur de l'intégrale : $K = \int_{-2}^{2} |t| dt$
4. Représenter sur [-2 ; +2] la fonction $x \mapsto |x|$.
5. Retrouver graphiquement le résultat.

Linéarité de l'intégrale

Exercice 7

1. Calculer l'intégrale J = $\int_0^1 2x\,dx$
2. À l'aide d'une calculatrice donner une valeur approchée de l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{2x3 + 2x + 3}{1 + x^2}dx$$

3. Vérifier que $\frac{2x^3 + 2x + 3}{1 + x^2} = 2x + \frac{3}{1 + x^2}$
4. On admet que $\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}dx = \frac{\pi}{4}$. Déduire de ce résultat la valeur exacte de l'intégrale I.

Intégration d'une inégalité

Exercice 8

On considère la fonction f définie **R** par $f(x) = e^{-x^2}$: f n'a pas de primitive connue.

1. Pour $x \in [0 ; 1]$ représenter dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes (C_1) : $y = e^{-x^2}$ et (C_2) : $y = e^{-x}$.
2. Montrer que pour $x \in [0 ; 1]$, $e^{-x} \leq e^{-x^2}$
3. En déduire un minorant de la valeur de l'intégrale I = $\int_0^1 e^{-t^2}dt$

Inégalité de la moyenne

Exercice 9

On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = e^{-x^2}$.

1. Montrer que pour $x \in [0 ; 1]$ alors $\frac{1}{e} \leq e^{-x^2} \leq 1$
2. En déduire un encadrement de la valeur de l'intégrale : I = $\int_0^1 f(t)dt$.

Approfondissements

Calcul d'intégrales

Exercice 10

Calculer les intégrales

$I_1 = \int_1^3 (\frac{3+t}{t})dt$; $I_2 = \int_3^1 (\frac{t}{3+t})dt$; $I_3 = \int_0^2 \left(\frac{1}{\sqrt{t+1}}\right)dt$

$I_4 = \int_0^2 (z+1)^2 dz$; $I_5 = \int_0^2 (-2t - 2e^{-t})dt$; $I_6 = \int_{-1}^1 2t(t^2+1)^3 dt$

$I_7 = \int_0^2 \left(\frac{1}{t+1} + e^{t+1}\right)dt$; $I_8 = \int_1^e \frac{2}{t} \cdot ln(t)dt$; $I_9 = \int_0^1 \frac{2e^x}{e^x+2}dx$

Exercice 11

On considère les intégrales suivantes

$I = \int_{ln2}^{ln3} \frac{1}{e^x - 1}dx$; $J = \int_{ln2}^{ln3} \frac{e^x}{e^x - 1}dx$; $K = \int_{ln2}^{ln3} \frac{e^{2x}}{e^x - 1}dx$

1. Montrer que $J = ln\ 2$.
2. Calculer $J - I$, et en déduire la valeur de I.
(On donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie à 10^{-2}).
3. Calculer $K - J$ et en déduire la valeur de K.
(On donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie à 10^{-2}).

Valeur moyenne d'une fonction

Exercice 12

Soit $f : x \mapsto 3x^2 - 1$.
1. Calculer la valeur moyenne μ de f sur $[0 ; 2]$.
2. Pour quelle valeur de x la fonction f prend-elle sa valeur moyenne ?

Calcul d'aire

Exercice 13

On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = (x - 2)^2(x + 1)$

a) Etudier le signe de f.

b) Représenter la courbe (C): $y = f(x)$.

c) Calculer l'aire du domaine délimité par (C) et (Ox).

Intégration d'une inégalité

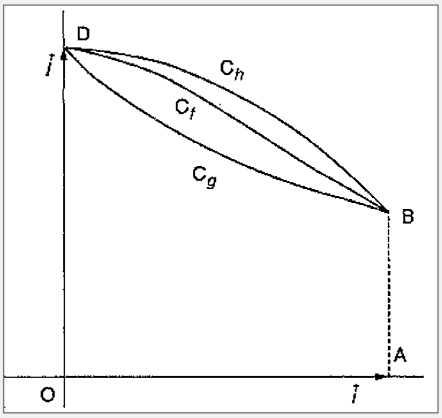
Exercice 14

f, g et h sont trois fonctions définies sur le même intervalle [0 ; l] par :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad ; \; g(x) = \frac{1}{1+x} \quad ; \; h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1$$

On note (C_f), (C_g) et (C_h) les courbes représentatives des fonctions f, g et h.

Ces courbes sont données ci-dessous dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



1. Pour tout $x \in$ [0 ;1], et à partir du graphique comparer $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$.

2. a) Calculer la valeur exacte de l'intégrale $J = \int_0^1 g(x)dx$.

   b) Calculer la valeur exacte de l'intégrale $K = \int_0^1 h(x)dx$.

3. Utiliser les résultats de la question 1. pour trouver un encadrement de l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)dx$. (On ne cherchera pas à calculer I.)
4. a) Calculer l'approximation à 10^{-3} près par défaut de la moyenne arithmétique I_1 des deux nombres J et K.
 b) Calculer l'aire T du trapèze OABD.
 c) La valeur exacte de I est $\pi/4$. Quelle est, de I_1 et de T, la meilleure approximation de I ?

Exercice 15

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$

On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

3. a) Démontrer que pour tout $x \in\ ]0\ ;+\infty[$ on a $f'(x) = \dfrac{-\ln x}{x^2}$
 b) Étudier le signe de $f'(x)$.
 En déduire le tableau de variations de f sur $]0\ ;+\infty[$.
4. Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de (C) avec l'axe des abscisses.
5. Tracer la courbe (C).

6. Soit F la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $F(x)=\ln(x)+\dfrac{1}{2}(\ln(x))^2$.
 a) Montrer que F est une primitive de f.
 b) Calculer I = $\int_1^4 f(t)dt$ (on donnera la valeur exacte de I en fonction de $\ln 2$).
 En déduire la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle [1 ; 4].

Exercice 16

Soient la fonction f définie sur **R** par $f(x) = \dfrac{2e^x - 2}{e^x + 2}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité graphique 2 cm).

1. Calculer la limite de f en $-\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe (C) ?
2. Montrer que $f(x) = 2 - \dfrac{6}{e^x + 2}$

   Calculer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.
3. Montrer que $f'(x) = \dfrac{6e^x}{(e^x + 2)^2}$

   En déduire son signe. Établir le tableau de variation de f.
4. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
5. Tracer (C) et ses asymptotes.
6. a) Calculer la dérivée g' de la fonction g définie par $g(x) = \ln(e^x + 2)$.

   b) Montrer que $f(x) = 3g'(x) - 1$ et en déduire une primitive F de f sur **R**.

   c) Calculer en cm^2 la valeur exacte de l'aire A de la partie du plan limitée par les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$, l'axe des abscisses et (C). En donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

Calcul intégral (2)

Séquence 2

➤ Prérequis

- Notions élémentaires de calcul intégral

➤ Objectifs

- Calculer des aires et des volumes de révolution
- Acquérir des techniques de calcul intégral
- Connaître des méthodes d'approximation pour le calcul d'une intégrale
- Calculer l'intégrale d'une fonction sur un intervalle non borné

➤ Contenu

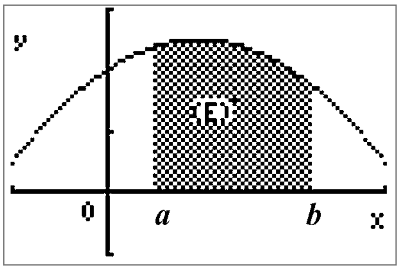
1. Théorèmes relatifs au calcul d'aires

1A. Rappel : cas des fonctions positives

Théorème

Soient f une fonction telle que $\boldsymbol{f(x) \geq 0}$ pour tout $x \in [a\ ;\ b]$ et le domaine $(E) = \{M(x\ ;y) \mid a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$ d'aire $\mathscr{A}(E)$.

Alors en ***unités d'aire*** : $\mathscr{A}(\mathrm{E}) = \int_a^b f(t)dt$



Application/Exercice 1

1B. Cas des fonctions négatives

Théorème

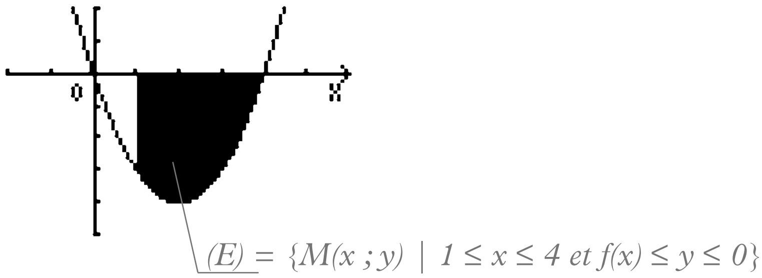
Soient f est une fonction telle que $\boldsymbol{f(x) \leq 0}$ pour tout $x \in [a\ ;\ b]$ et (E) le domaine $\{M(x\ ;y) \mid a \leq x \leq b \text{ et } \boldsymbol{f(x) \leq y \leq 0}\}$ d'aire $\mathscr{A}(\mathrm{E})$. Alors :

$$\mathscr{A}(\mathrm{E}) = -\int_a^b f(t)dt \text{ unités d'aire}$$

En effet, on applique le résultat du §1A. à la fonction $-f$.

Exemples

Soit f définie par $f(x) = x^2 - 4x$. On considère alors le domaine ombré (E) délimité par (C) : $y = x^2 - 4x$, la droite (Ox), et les droites (D_1) : $x = 1$ et (D_2) : $x = 4$.



On trouve, en unités d'aire :

$$\mathscr{A}(E) = \int_1^4 -(x^2-4x)dx = \int_1^4 (4x-x^2)dx = \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_1^4 = (32-\frac{64}{3})-(2-\frac{1}{3}) = 30-\frac{63}{3}$$

$\mathscr{A}$(E) = 9 unités d'aire.

Application/Exercice 2

1C. *Cas des fonctions de signe quelconque*

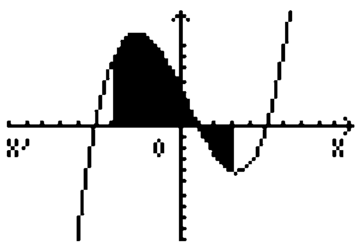
Théorème

Soient f est une fonction de signe quelconque sur $[a\ ;b]$ et (E) est le domaine délimité par (C) : $y = f(x)$, la droite (Ox), et les droites (D_1) : $x = a$ et (D_2) : $x = b$. Alors en unités d'aire :

$$\mathscr{A}(E) = \int_a^b |f(t)|dt\ .$$

Exemple

Considérons le domaine (E) délimité par (C) : $y = f(x)$, (Ox) et les droites (D_1): $x = -4$ et (D_2): $x = 3$.



$f \geq 0$ sur [-5 ;1] et $f \leq 0$ sur [1 ; 5] : on trouve, en unités d'aire :

$\mathscr{A}$(E) = $\int_{-4}^{+3}|f(t)|dt = \int_{-4}^{+1}|f(t)|dt + \int_{+1}^{+3}|f(t)|dt$ (relation de Chasles)

D'où $\mathscr{A}$(E) = $\int_{-4}^{+1} f(t)dt - \int_{1}^{3} f(t)dt$.

1D. Aire des domaines plans compris entre deux courbes

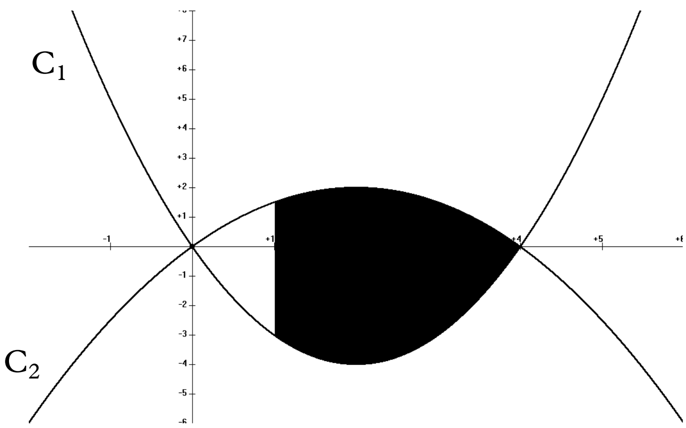
Théorème

Soient f et g sont deux fonctions telles que $\boldsymbol{f(x)} \leq \boldsymbol{g(x)}$ pour tout $x \in [a\,;\,b]$ et (E) = $\{M(x\,;y) \mid a \leq x \leq b$ et $\boldsymbol{f(x)} \leq \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{g(x)}\}$, alors $\mathscr{A}$(E) = $\int_a^b (g(t) - f(t))dt$ unités d'aire.

Exemple

Soient f et g définies par $f(x) = x^2 - 4x$ et $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$.

On considère le domaine (E) délimité par (C_1) : $y = x^2 - 4x$, (C_2) : $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ et les droites (D_1) : $x = 1$ et (D_2) : $x = 4$.



Pour tout $x \in [1\,;\,4]$ notons que $\boldsymbol{f(x)} \leq \boldsymbol{g(x)}$

On trouve, en unités d'aire :

$$\mathscr{A}(\mathrm{E}) = \int_1^4 ((-\frac{1}{2}x^2 + 2x) - (x^2 - 4x))dx = \int_1^4 (-\frac{3}{2}x^2 + 6x)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 \right]_1^4 = (-32 + 48) - (-\frac{1}{2} + 3) = \frac{27}{2} \text{ unités d'aire.}$$

Application/Exercice 3

2. Exemples d'intégration des fonctions rationnelles

Exemple préliminaire – définitions

Soit R la fraction rationnelle définie sur $]3\,;+\infty[$ par :

$$R(x) = x - 2 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-3} + \frac{2}{(x-3)^2} \quad (1)$$

Par réduction de l'expression au même dénominateur, on obtient :

$$R(x) = \frac{x^4 - 9x^3 + 29x^2 - 39x + 22}{(x-1)(x-3)^2} \quad (2)$$

L'expression (1) est appelée la décomposition de R en éléments simples. C'est sur cette expression que les primitives et les intégrales de R vont être plus aisément déterminées.

L'expression (1) est constituée par la somme de $x - 2$, appelée partie entière de R, et de $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-3} + \frac{2}{(x-3)^2}$ appelée sa partie fractionnaire.

Les réels 1 et 3 qui annulent le dénominateur de R sont appelés ses pôles : 1 est un pôle simple (car c'est une racine simple du dénominateur) et 3 est un pôle double.

L'intégration des fonctions rationnelles va se ramener à la décomposition des fractions en éléments simples dont les primitives nous sont connues dans la majorité des cas.

Nous proposons ci-dessous des exemples pour illustrer le principe de décomposition.

Principe de décomposition

Soient P, Q deux polynômes de la variable réelle x, et R la fonction rationnelle définie par $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

On note d°P et d°Q les degrés respectifs des polynômes P et Q.

• **Cas 1 : si d°*P* < d°*Q***

Il n'y a pas de partie entière. La décomposition dépendra du nombre et du degré des pôles.

Si par exemple $R(x)=\dfrac{P(x)}{(x-x_1)^m(x-x_2)^n}$ alors il existe des réels a_1, a_2,… et b_1, b_2,… tels que :

$$R(x)=\frac{a_1}{(x-x_1)}+\frac{a_2}{(x-x_1)^2}+\ldots+\frac{a_m}{(x-x_1)^m}+\frac{b_1}{(x-x_2)}+\frac{b_2}{(x-x_2)^2}+\ldots+\frac{b_n}{(x-x_2)^n}$$

Exemple 1 – Avec pôles simples

Calcul de l'intégrale $I=\int_4^5 \dfrac{t+1}{(t-1)(t-3)}dt$

Soit R la fonction définie par $R(x)=\dfrac{x+1}{(x-1)(x-3)}$ (1)

On va déterminer les réels α et β vérifiant : $R(x)=\dfrac{\alpha}{(x-1)}+\dfrac{\beta}{(x-3)}$

$$\frac{\alpha}{(x-1)}+\frac{\beta}{(x-3)}=\frac{\alpha(x-3)+\beta(x-1)}{(x-1)(x-3)}=\frac{(\alpha+\beta)x+(-3\alpha-\beta)}{(x-1)(x-3)}$$

Par identification avec l'expression (1) on obtient le système $\begin{cases}\alpha+\beta=1\\-3\alpha-\beta=1\end{cases}$

d'où α = *-1* et β = *2* et $R(x)=\dfrac{-1}{(x-1)}+\dfrac{2}{(x-3)}$

on aura ainsi pour $t\in$ [4 ; 5] : $\int_4^5 R(t)dt=\int_4^5 \dfrac{-1}{(t-1)}+\dfrac{2}{(t-3)}dt=\left[-ln(t-1)+2ln(t-3)\right]_4^5$

$$\int_4^5 R(t)dt=(-ln(4)+2ln(2))-(-ln(3)+2ln(1))=ln3$$

Exemple 2 – Avec pôles multiples

Calcul de l'intégrale $I=\int_0^1 \frac{4t+5}{(t+1)(t+2)^2}dt$

Soit f la fonction définie par $f(t)=\frac{4t+5}{(t+1)(t+2)^2}$ (1)

On va déterminer les 3 réels α, β et γ vérifiant : $\frac{4t+5}{(t+1)(t+2)^2}=\frac{\alpha}{(t+1)}+\frac{\beta}{(t+2)}+\frac{\gamma}{(t+2)^2}$

$$\frac{\alpha}{(t+1)}+\frac{\beta}{(t+2)}+\frac{\gamma}{(t+2)^2}=\frac{\alpha(t^2+4t+4)}{(t+1)(t+2)^2}+\frac{\beta(t^2+3t+2)}{(t+1)(t+2)^2}+\frac{\gamma(t+1)}{(t+1)(t+2)^2}=\frac{(\alpha+\beta)t^2+(4\alpha+3\beta+\gamma)t+(4\alpha+2\beta+\gamma)}{(t+1)(t+2)^2}$$

Par identification avec l'expression (1) on obtient le système $\begin{cases}\alpha+\beta=0\\4\alpha+3\beta+\gamma=4\\4\alpha+2\beta+\gamma=5\end{cases}$

d'où $\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = 3$

on aura ainsi $I=\int_0^1\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+2}+\frac{3}{(t+2)^2}\right)dt=\left[ln(t+1)-ln(t+2)-\frac{3}{t+2}\right]_0^1$

$$I=(ln2-ln3-1)-\left(ln1-ln2-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}+ln\frac{4}{3}$$

Application/Exercice 4

• **Cas 2 : si d°*P* ≥ d°*Q***

La partie entière de R est un polynôme P_1 dont le degré est : $d°P_1 = d°P - d°Q$.

La fonction rationnelle R s'écrit $R(x)=P_1(x)+\frac{P_2(x)}{Q(x)}$ (avec $d°\,P_2 < d°Q$)

c'est-à-dire comme la somme d'un polynôme P_1 (dont le degré est la différence des degrés du numérateur et du dénominateur) et de la fonction rationnelle $\frac{P_2}{Q}$ à laquelle on applique le cas 1.

Exemple 3

Recherche d'une primitive de la fonction R définie sur $]1\,;+\infty[$ par $R(x)=\frac{2x^3+3x^2-4x+5}{(x-1)(x+2)}$ (1)

$$d°P_1 = d°P - d°Q = 3 - 2 = 1.$$

La partie entière de R est de la forme $ax + b$.

Les pôles 1 et -2 sont simples. On applique à la partie fractionnaire le cas 1.

On cherchera donc 4 réels α, β, γ et δ vérifiant pour tout $x \in\ ]1;+\infty[$:

$$R(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{(x-1)} + \frac{\delta}{(x+2)}$$

$$\alpha x + \beta + \frac{\gamma}{(x-1)} + \frac{\delta}{(x+2)} = \frac{(\alpha x + \beta)(x-1)(x+2) + \gamma(x+2) + \delta(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

$$= \frac{(\alpha x + \beta)(x^2 + x - 2) + \gamma(x+2) + \delta(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{\alpha x^3 + (\alpha + \beta)x^2 + (-2\alpha + \beta)x - 2\beta + \gamma(x+2) + \delta(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

d'où $R(x) = \dfrac{\alpha x^3 + (\alpha + \beta)x^2 + (-2\alpha + \beta + \gamma + \delta)x - 2\beta + 2\gamma - \delta}{(x-1)(x+2)}$

Par identification avec l'expression (1) on obtient le système $\begin{cases} \alpha = 2 \\ \alpha + \beta = 3 \\ -2\alpha + \beta + \gamma + \delta = -4 \\ -2\beta + 2\gamma - \delta = 5 \end{cases}$

d'où $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$ et $\delta = -3$ et $R(x) = 2x + 1 + \dfrac{2}{(x-1)} - \dfrac{3}{(x+2)}$

Pour a et $x \in \,]1;+\infty[$ on aura ainsi :

$$\int_a^x R(t)dt = \int_a^x 2t + 1 + \frac{2}{(t-1)} - \frac{3}{(t+2)}dt = \left[t^2 + t + 2ln(t-1) - 3ln(t+2)\right]_a^x$$

$$\int_a^x R(t)dt = x^2 + x + 2ln(x-1) - 3ln(x+2) + cte$$

Application/Exercice 5

Remarque

Cas d'un pôle non réel

Soit R la fonction définie par $R(x) = \dfrac{(x+1)(x+2)}{x^2+1}$ (1)

Le dénominateur n'a pas de racine réelle et la décomposition de R en éléments simples est :

$$R(x) = 1 + \frac{3x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}$$

mais la primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ n'est pas au programme du BTS.

La décomposition en éléments simples ne pourra donc être étudiée que dans certains cas.

Exemple 4

Calcul de l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{(t-1)^2}{t^2+1}dt$

$$\frac{(t-1)^2}{t^2+1} = \frac{t^2-2t+1}{t^2+1} = 1 - \frac{2t}{t^2+1}$$

on aura ainsi $$I = \int_0^1 \left(1 - \frac{2t}{t^2+1}\right)dt = \left[t - \ln(t^2+1)\right]_0^1$$

$$I = (1 - \ln 2) - (0 - \ln 1) = 1 - \ln 2$$

3. Exemples d'approximation d'une intégrale

Pour de nombreuses fonctions la primitive ne peut être calculée. Aussi sommes-nous amenés à déterminer la valeur approchée d'une intégrale $\int_a^x f(t)\,dt$.

3A. Méthode des rectangles

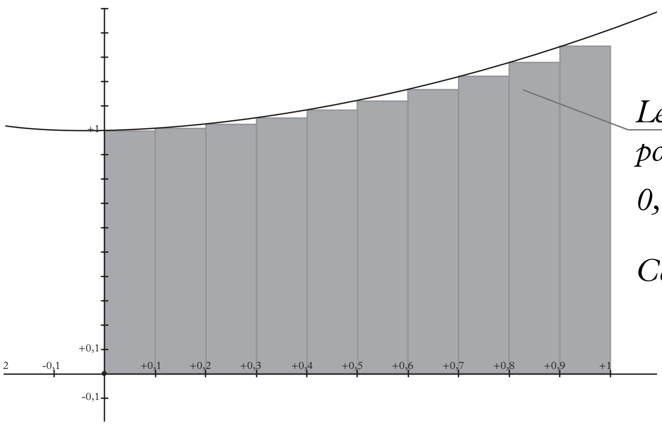
Soit $f \geq 0$ sur $[a\ ;\ b]$. En calculant la somme d'aires de rectangles on peut obtenir une valeur approchée d'une intégrale. On procède comme dans l'exemple ci-dessous :

Exemple 1 – Fonction positive et strictement croissante

Soit f la fonction définie par $f(t) = \sqrt{1+t^2}$: f est positive et strictement **croissante** sur $[0\ ;\ +\infty[$.

On se propose de calculer une valeur approchée de l'intégrale $\int_0^1 \sqrt{1+t^2}\,dt$ en l'encadrant par une somme d'aires de rectangles qui majore l'intégrale et une somme qui la minore.

Par exemple :



Les 10 rectangles en gris ont pour aire

$0{,}1 \times f(0) + \ldots + 0{,}1 \times f(0{,}9)$.

Cette aire minore $\int_0^1 \sqrt{1+t^2}\,dt$

Si l'on partage l'intervalle [0 ; 1] en deux parties égales, on observe que :

$$\frac{1}{2}f(0)+\frac{1}{2}f(0,5)\le\int_0^1\sqrt{1+t^2}\,dt\le\frac{1}{2}f(0,5)+\frac{1}{2}f(1)$$

c'est-à-dire : $$\frac{1}{2}.1+\frac{1}{2}\sqrt{1,25}\le\int_0^1\sqrt{1+t^2}\,dt\le\frac{1}{2}.\sqrt{1,25}+\frac{1}{2}.\sqrt{2}$$

d'où $$1,059\le\int_0^1\sqrt{1+t^2}\,dt\le 1,267\ .$$

Si l'on partage l'intervalle [0 ; 1] en ***n* parties** égales d'amplitude $\frac{1}{n}$, on aura :

$$\frac{1}{n}f(0)+\frac{1}{n}f(\frac{1}{n})+\ldots+\frac{1}{n}f(\frac{n-1}{n})\le\int_0^1\sqrt{1+t^2}\,dt\le\frac{1}{n}f(\frac{1}{n})+\frac{1}{n}f(\frac{2}{n})+\ldots+\frac{1}{n}f(\frac{n}{n})$$

$$\frac{1}{n}\left(f(0)+f(\frac{1}{n})+\ldots+f(\frac{n-1}{n})\right)\le\int_0^1\sqrt{1+t^2}\,dt\le\frac{1}{n}\left(f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\ldots+f(\frac{n}{n})\right)$$

d'où : $$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f\left(\frac{i}{n}\right)\le\int_0^1\sqrt{1+t^2}\,dt\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)$$

En particulier, pour $n = 10$ (voir figure page précédente), on obtient :

t	$\sqrt{1+t^2}$
0	1
0,1	1,004 9…
0,2	1,019 8…
0,3	1,044 0…
0,4	1,077 0…
0,5	1,118 0…
0,6	1,166 1…
0,7	1,220 6…
0,8	1,280 6…
0,9	1,345 3…
1	1,414 2…

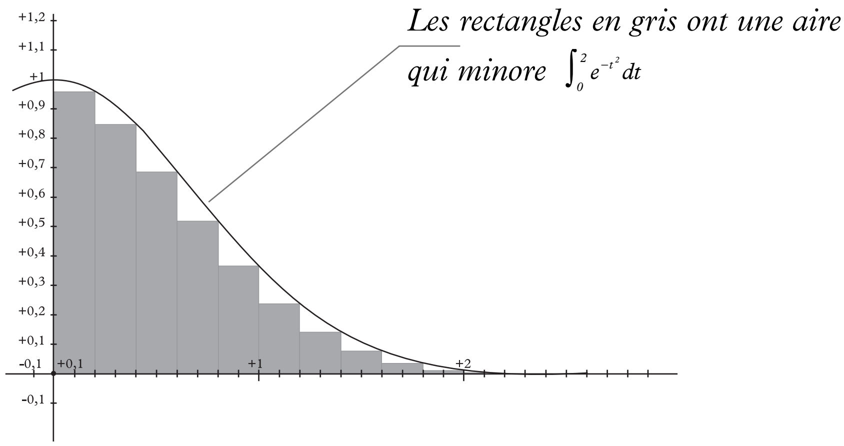
$$\frac{1}{10}\sum_{i=0}^{9}f\left(\frac{i}{10}\right)=1,127672\ldots\ \text{et}\ \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}f\left(\frac{i}{10}\right)=1,169093\ldots$$

d'où $$1,127\le\int_0^1\sqrt{1+t^2}\,dt\le 1,170$$

***Exemple 2 – Fonction positive et strictement* décroissante**

Soit f la fonction définie par $f(t)=e^{-t^2}$: f est positive et strictement ***décroissante*** sur $[0\ ;+\infty[$.

Déterminons une valeur approchée de l'intégrale $\int_0^2 e^{-t^2}\,dt$.
Exemple :



Si l'on partage l'intervalle [0 ; 2] en *n parties* égales d'amplitude $\frac{2}{n}$, f étant décroissante, on aura :

$$\frac{2}{n}\left(f(\frac{2}{n})+f(\frac{4}{n})+\ldots+f(\frac{2n}{n})\right)\leq\int_0^1 e^{-t^2}\,dt\leq\frac{2}{n}\left(f(0)+f(\frac{2}{n})+\ldots+f(2.\frac{n-1}{n})\right)$$

En particulier pour $n = 10$ (voir figure), on obtient :

t	e^{-t^2}
0	1
0,2	0,960 7…
0,4	0,852 1…
0,6	0,697 6…
0,8	0,527 2…
1	0,367 8…
1,2	0,236 9…
1,4	0,140 8…
1,6	0,077 3…
1,8	0,039 1…
2	0,018 3…

$$\frac{2}{10}\left(f(0{,}2)+f(0{,}4)\ldots+f(2)\right)=0{,}783670\ldots \quad et \quad \frac{2}{10}\left(f(0)+f(0{,}2)\ldots+f(1{,}8)\right)=0{,}980007\ldots$$

d'où
$$0{,}783 \leq \int_0^1 e^{-t^2}\,dt \leq 0{,}981$$

Définition

Soit f une fonction intégrable sur un intervalle $[a\ ;\ b]$. On appelle sommes de Riemann de f sur $[a\ ;\ b]$ les réels

$$S_n=\frac{(b-a)}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+i.\frac{b-a}{n}\right) \text{ et } S'_n=\frac{(b-a)}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i.\frac{b-a}{n}\right)$$

Propriété

Soit f une fonction intégrable et ***positive*** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.

Si f est croissante alors $S_n \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq S'_n$.

Si f est décroissante alors $S'_n \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq S_n$.

Remarques

1. L'écart entre S_n et S'_n est égal à $S'_n - S_n$:

$$S'_n-S_n=\frac{(b-a)}{n}\left[f\left(a+\frac{b-a}{n}\right)+f\left(a+2.\frac{b-a}{n}\right)+\ldots+f(b)-f(a)-f\left(a+\frac{b-a}{n}\right)-\ldots-f\left(a+(n-1)\frac{b-a}{n}\right)\right]$$

d'où
$$S'_n-S_n=\frac{(b-a)}{n}\left(f(b)-f(a)\right)$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(b-a)}{n}\left(f(b)-f(a)\right)=0$: la valeur de I sera donc d'autant mieux encadrée que l'on partagera l'intervalle $[a\ ;\ b]$ en un plus grand nombre n d'intervalles.

2. La méthode des rectangles peut s'appliquer à toute fonction f intégrable positive en partageant $[a\ ;\ b]$ en intervalles sur lesquels f est monotone.

Application/Exercice 6

Propriété

Soit f une fonction intégrable sur l'intervalle $[a\ ;b]$. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} S'_n = \int_a^b f(t)\,dt$$

En effet, notons $I = \int_a^b f(t)\,dt$

a) Si f est **croissante** et positive : $0 \le S_n \le I \le S'_n \Rightarrow 0 \le I - S_n \le S'_n - S_n$

Si f est **décroissante** et positive : $0 \le S'_n \le I \le S_n \Rightarrow S'_n - S_n \le I - S_n \le 0$

On a ainsi dans tous les cas : $|I - S_n| \le |S'_n - S_n|$ d'où

$$\left|I - S_n\right| \le \frac{(b-a)}{n}\left|f(b) - f(a)\right|$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|I - S_n\right| = 0$$

On procède de façon analogue pour S'_n et l'on obtient $\lim_{n\to+\infty}\left|I - S'_n\right| = 0$.

b) Si f est positive on établit un résultat similaire en partageant $[a\ ;b]$ en intervalles sur lesquels f est monotone.

Notons que le résultat demeure vrai pour toute fonction dérivable sur $[a\ ;b]$.

Exemple

On considère la suite de nombres réels $(u_n)_n$ définie sur $\mathbf{N}^*$ par

$$u_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \ldots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$$

En posant $f(x) = \frac{1}{1+x}$ on obtient $u_n = \frac{1}{n}\left(f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + \ldots + f(\frac{n}{n})\right)$ c'est-à-dire avec les notations précédentes $u_n = S'_n$ avec $a = 0$ et $b = 1$.

On a donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \ldots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right) = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \left[\ln(1+t)\right]_0^1 = \ln 2 - \ln 1$$

d'où

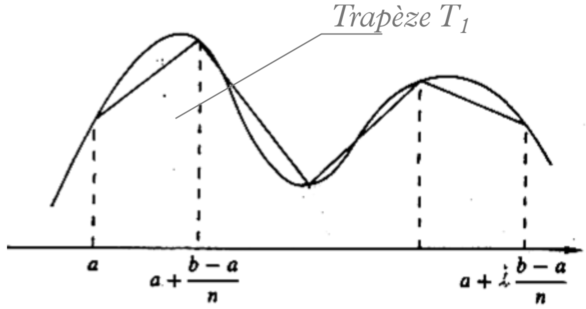
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \ldots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right) = \ln 2\ .$$

Application/Exercice 7

3B. Méthode des trapèzes

Soit $f \geq 0$ sur $[a\ ;\ b]$. En calculant la somme d'aires de trapèzes on peut obtenir une valeur approchée d'une l'intégrale. On procède comme dans l'exemple ci-dessous :

On partage l'intervalle $[a\ ;\ b]$ en ***n* parties** égales d'amplitude $\dfrac{b-a}{n}$, et sur chaque intervalle $\left[a+i\dfrac{(b-a)}{n}\ ;\ a+(i+1)\dfrac{(b-a)}{n}\right]$ on calcule l'aire des trapèzes T_1, T_2, … de hauteur $\dfrac{b-a}{n}$:



Le trapèze T_1 a pour aire $\dfrac{(\text{Petite base } + \text{ grande base}) \times \text{hauteur}}{2} = \dfrac{\left(f(a)+f(a+\dfrac{b-a}{n})\right)\times\dfrac{b-a}{n}}{2}$

La somme S''_n des aires des trapèzes T_1, T_2, … est égale à

$$S''_n = \frac{(b-a)}{n}\left[\frac{f(a)+f\left(a+\dfrac{b-a}{n}\right)}{2}+\frac{f\left(a+\dfrac{b-a}{n}\right)+f\left(a+2.\dfrac{b-a}{n}\right)}{2}+\ldots+\frac{f\left(a+(n-1).\dfrac{b-a}{n}\right)+f\left(a+n.\dfrac{b-a}{n}\right)}{2}\right]$$

$$S''_n = \frac{(b-a)}{n}\left[\frac{f(a)}{2}+f\left(a+\frac{b-a}{n}\right)+f\left(a+2.\frac{b-a}{n}\right)+\ldots+f\left(a+(n-1).\frac{b-a}{n}\right)+\frac{f(b)}{2}\right]$$

$$S''_n = \frac{S_n + S'_n}{2}$$

où S_n et S'_n sont les sommes de Riemann définies au § 3A. S''_n donne une valeur approchée de I.

Exemple – Fonction positive et strictement croissante

Calcul d'une valeur approchée de l'intégrale $\int_0^1 \sqrt{1+t^2}\,dt$. On reprend les résultats du § 3A. Pour $n = 10$, on obtient ainsi :

$$S''_n = \frac{1}{10}\left[\frac{f(0)}{2}+f(0{,}1)+f(0{,}2)+\ldots+f(0{,}9)+\frac{f(1)}{2}\right] \text{ d'où } \int_0^1 \sqrt{1+t^2}\,dt \approx 1{,}148382\ldots$$

Remarques

On considère la fonction *f* intégrable sur *[a ; b]*, ***positive*** et ***strictement monotone***. Notons S_n et S'_n ses sommes de Riemann.

On sait que l'erreur commise en remplaçant *I* par S''_n est $|I - S''_n|$:

1. Si *f* est ***strictement croissante*** sur *[a ; b]*, on sait de plus que $S_n < I < S'_n$ et que

$$S_n \leq \frac{S_n + S'_n}{2} \leq S'_n$$

a) Si $S_n \leq I \leq \dfrac{S_n + S'_n}{2}$ alors $S_n - S''_n \leq I - S''_n \leq \dfrac{S_n + S'_n}{2} - S''_n$

c'est-à-dire $S_n - \dfrac{S_n + S'_n}{2} \leq I - S''_n \leq 0$ ou encore $\dfrac{S_n - S'_n}{2} \leq I - S''_n \leq 0$

d'où $\left|I - S''_n\right| \leq \dfrac{\left|S_n - S'_n\right|}{2}$

b) Si $\dfrac{S_n + S'_n}{2} \leq I \leq S'_n$ alors $\dfrac{S_n + S'_n}{2} - S''_n \leq I - S''_n \leq S'_n - S''_n$

c'est-à-dire $0 \leq I - S''_n \leq S'_n - \dfrac{S_n + S'_n}{2}$ ou encore $0 \leq I - S''_n \leq \dfrac{S'_n - S_n}{2}$

d'où $\left|I - S''_n\right| \leq \dfrac{\left|S_n - S'_n\right|}{2}$

2. Si *f* est ***strictement décroissante*** sur [*a ; b*], la démonstration est similaire.

Conclusion : $\left|I - S''_n\right| \leq \dfrac{(b-a)}{2n}\left|f(b) - f(a)\right|$

Pour les fonctions strictement monotones la méthode des trapèzes est au moins 2 fois plus précise que la méthode des rectangles.

Ce résultat peut être appliqué à toute fonction en considérant les intervalles sur lesquels elle est monotone.

Application/Exercice 8

4. Exemples d'intégrales généralisées

Comment calculer l'intégrale d'une fonction sur un intervalle non borné ?

À l'aide d'exemples nous allons observer que des expressions du type $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt, \int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt, \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ n'ont pas nécessairement de sens. Ces intégrales, comportant au moins une borne infinie, sont appelées **intégrales impropres ou intégrales généralisées**.

Nous ne traitons ici que le cas des fonctions continues sur un intervalle.

En probabilités, « on sera amené à utiliser les notations $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt, \int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt, \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$, mais aucune connaissance sur les intégrales impropres n'est exigible. » (Programme officiel du BTS)

Définition

Soit f définie et continue sur $[a\,;+\infty[$. Pour tout réel x, $x > a$, on considère l'intégrale : $\int_a^x f(t)\,dt$.

Si le réel $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt$ existe alors on dit que l'intégrale de f sur $[a\,;+\infty[$ est **convergente**.

Cette intégrale est notée $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ et est appelée **intégrale généralisée** de f sur $[a\,;+\infty[$.
Si cette limite n'existe pas, on dit que l'intégrale de f sur $[a\,;+\infty[$ est **divergente**.

Exemple 1

Soit f la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$.

$$\int_1^x f(t)\,dt = \int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = 1-\frac{1}{x}.$$

Or $1-\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ d'où $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt = 1$. Cette intégrale est convergente.

Exemple 2

Soit f la fonction définie sur [1 ; +∞[par $f(x)=\dfrac{1}{x}$. $\int_1^x f(t)dt=\int_1^x \dfrac{1}{t}dt=\left[ln(t)\right]_1^x=ln(x)$

Or $ln(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ donc l'intégrale $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{t}dt$ est divergente car elle n'a pas de limite finie quand $x\to+\infty$.

Application/Exercice 9

Exercices autocorrectifs

Applications

Dans les exercices 1 à 3 le plan est rapporté à un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Calcul d'aires

Exercice 1

Tracer la courbe (C): $y = f(x)$ puis calculer l'aire du domaine
$(E) = \{M(x\,;y)\ |\ a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$ dans les cas ci-dessous :

a) $f(x) = -x^2 + 2x + 3 \qquad a = 0 \text{ et } b = 3$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x+1} \qquad a = 0 \text{ et } b = 2$

Exercice 2

Tracer la courbe (C) : $y = f(x)$ puis calculer l'aire du domaine
$(E) = \{\ M(x\,;y)\ |\ a \leq x \leq b \text{ et } f(x) \leq y \leq 0\}$ dans les cas ci-dessous :

a) $f(x) = x^2 - 4 \qquad a = -1 \text{ et } b = 2$

b) $f(x) = (x - 1)^3 \qquad a = 0 \text{ et } b = 1$

Exercice 3

Soient f et g définies par $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = x + 1$.

1. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.
2. Tracer les courbes (C) : $y = f(x)$ et (C') : $y = g(x)$.
3. Calculer l'aire du domaine $(E) = \{M(x\,;y)\ |\ -1 \leq x \leq +2 \text{ et } f(x) \leq y \leq g(x)\}$

Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur]2 ; +∞[par $f(x)=\dfrac{-x+14}{(x-2)(x+4)}$

1. Déterminer les réels α et β vérifiant : $f(x)=\dfrac{\alpha}{(x-2)}+\dfrac{\beta}{(x+4)}$.
2. En déduire une primitive de f sur]2 ; +∞[.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur]-2 ; +∞[par $f(x)=\dfrac{x^2-2}{(x+2)(x+3)}$.

Calculer l'intégrale $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$

Approximation de la valeur d'une intégrale

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur D = [0 ; 0,5] par $f(x)=2x.ln(x+1)$ (1)

On se propose de calculer une valeur approchée de l'intégrale $I=\int_0^{0,5} f(t)\,dt$.

1. Montrer que f est strictement croissante sur D.
2. En partageant l'intervalle D en cinq parties égales et en appliquant la méthode des rectangles donner un encadrement de la valeur de I.

Exercice 7

On considère la suite de nombres réels $(u_n)n$ définie sur $\mathbf{N}^*$ par

$$u_n=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2.\sqrt{1+\frac{1}{n}}}+\frac{1}{2.\sqrt{1+\frac{2}{n}}}+\ldots+\frac{1}{2.\sqrt{1+\frac{n}{n}}}\right)$$

À l'aide d'une fonction convenablement choisie, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 8

On reprend les données de l'exercice 6. En appliquant la méthode des trapèzes donner une valeur approchée de I.

Intégrales généralisées

Exercice 9

Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes :

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}}\,dt$$

$$J = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$$

Approfondissements

Calcul d'aires

Exercice 10

1. Dans un repère orthonormé du plan (unité : 2 cm) soit (C) la courbe représentative de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$.

   a) Calculer $f(x)$ pour $x \in \{1 \,;\, e \,;\, 3\}$.

   b) Étudier les variations de f sur $]0, +\infty[$.

   c) Pour $x \in [0 \,;\, 5]$ représenter graphiquement f.

2. a) Soit G la fonction définie par $G(x) = x.\ln(x) - x$. Montrer que $G'(x) = \ln(x)$.

   b) En déduire, en cm², l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Exercice 11

Dans un repère **orthogonal** du plan (unités : 4 cm sur *(Ox)*, 1 cm sur *(Oy)*) soit (C) la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = e^{2x} - 5e^{x} - 6$ pour $x \in [1/2 ; 2]$.

1. Étudier les variations de f.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
3. Construire (C). On précisera les coordonnées du point d'intersection de (C) avec la droite (*Ox*).
4. Donner une primitive de f sur $[\frac{1}{2} ; 2]$.
5. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0{,}5$ et $x = \ln 6$.

Intégrales de fonctions rationnelles

Exercice 12

Calculer les intégrales

$$I_1 = \int_0^1 \frac{t-1}{t+1}dt \quad ; \quad I_2 = \int_0^1 \frac{2t+3}{t-4}dt \quad ; \quad I_3 = \int_0^1 \frac{t-1}{(t+1)^2}dt$$

$$I_4 = \int_0^1 \frac{1}{(t+1)(t+2)}dt \quad ; \quad I_5 = \int_0^1 \frac{t^2}{t+1}dt \quad ; \quad I_6 = \int_0^1 \frac{2}{(t+1)(t+2)(t+3)}dt$$

Exercice 13

Soient f une fonction intégrable sur un intervalle I et $a, x \in$ I.

On considère alors les fonctions $\varphi : x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ et $\psi : x \mapsto \int_{-x}^x f(t)dt$.

1. a) Calculer $\psi(0)$.
   b) Montrez que $\psi(x) = \varphi(x) - \varphi(-x)$
   c) Montrez que $\psi'(x) = f(x) + f(-x)$.

2. On suppose que f est paire. On a donc $\psi'(x) = 2.f(x)$.

   a) Montrez que $\int_{-x}^x f(t)dt = 2\int_0^x f(t)dt$.

   b) Pour $f \geq 0$ et $x > 0$ interpréter graphiquement le résultat.

3. On suppose que f est impaire. On a donc $\psi'(x) = 0$.
   a) Montrez que ψ est la fonction nulle.
   b) En déduire la valeur de $\int_{-x}^{x} f(t)dt$.
   c) Pour $x > 0$ et $f \geq 0$ sur $\mathbb{R}^+$ interpréter graphiquement le résultat.
   d) Calculer $\int_{-2}^{2} \frac{t}{t^4 + t^2 + 1} dt$.

Solides de révolution

Exercice 14

Soient f une fonction intégrable et positive sur $[a\ ; b]$ et (E) l'ensemble des points $M(x\ ; y)$ vérifiant :

$$a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x).$$

On admettra que le volume engendré par la rotation de (E) autour de (Ox) est (en unités de volume)

$$V = \int_a^b \pi \left(f(t)\right)^2 dt$$

1. Soit f définie sur [0 ; 8] par $f(x) = -\frac{1}{2}x + 4$.

   a) Tracer la droite (D) : $y = f(x)$ dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).
   Hachurer le domaine $(E) = \{M(x\ ; y) \mid 0 \leq x \leq 8 \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$
   b) Calculer le volume engendré par la rotation de (E) autour de (Ox).
   c) Retrouver le résultat à l'aide de la formule donnant le volume du cône.

2. Soit f définie sur $[-R\ ; +R]$ $(R > 0)$ par $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$.

Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm) la courbe (C) : $y = f(x)$ est un demi-cercle de rayon R.
   a) Représenter (C) (On prendra pour l'exemple $R = 2{,}5$)
   b) L'ensemble (E) des points $M(x\ ; y)$ vérifiant $-R \leq x \leq +R$ et $0 \leq y \leq f(x)$ est un demi-disque dont la rotation autour de (Ox) engendre une boule.
   Retrouver la formule donnant le volume d'une boule.

Suites et intégrales

Exercice 15

On considère la suite de nombres réels $(u_n)_n$ définie sur $\mathbf{N}^\star$ par $u_n = \int_1^n \frac{1}{1+t^2}\,dt$

1. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante.
2. Montrer que pour n fixé, $n \geq 2$ on a $\int_1^n \frac{1}{1+t^2}\,dt \leq \int_1^n \frac{1}{t^2}\,dt$.
3. En déduire que la suite $(u_n)_n$ est majorée et qu'elle converge.

Exercice 16

On considère la suite de nombres réels $(u_n)_n$ définie pour $n \geq 2$ par $u_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$

1. Dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$ représenter la courbe $(C): y=\frac{1}{x}$
   On prendra 1 cm pour unité sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.
2. À l'aide de la méthode des rectangles montrer que pour un entier n fixé, $n \geq 2$

$$\int_1^n \frac{1}{t}\,dt \leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}$$

3. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=+\infty$.

Exercice 17

La constante d'Euler

On considère la suite de nombres réels $(u_n)_n$ définie pour $n \geq 2$ par

$$u_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln(n).$$

1. Dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$ représenter la courbe $(C): y=\frac{1}{x}$.

   On prendra 1 cm pour unité sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.
2. À l'aide de la méthode des rectangles montrer que pour un entier n fixé, $n \geq 2$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} \leq \int_1^n \frac{1}{t}\,dt \leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}$$

3. En déduire que pour un entier n fixé, $n \geq 2$, $0 \leq u_n \leq 1$.

4. a) Montrer que pour tout n fixé, $n \geq 2$, on a $\dfrac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \dfrac{1}{t}dt \leq \dfrac{1}{n}$

b) En déduire que pour n entier $\dfrac{1}{n+1} \leq ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) \leq \dfrac{1}{n}$

c) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est décroissante et converge vers un nombre C de l'intervalle [0 ; 1] (ce nombre est appelé la constante d'Euler).

5. À l'aide d'une calculatrice donner une valeur approchée de C à10^{-2} près.

Unité 4

Calcul de probabilité

➤ Prérequis

- **Notions élémentaires de probabilités**
- **Calcul des intégrales**
- **Notion d'intégrale généralisée**

➤ Objectifs

- Initiation aux variables aléatoires continues
- Définition de la densité de probabilité, de la courbe de densité et de la fonction de répartition
- Savoir traiter des problèmes utilisant une loi continue classique
- Utilisation de la table d'une loi continue
- Étudier simultanément plusieurs variables aléatoires
- Définir leur somme, leur différence et leur produit
- Approcher la loi d'une somme de variables aléatoires
- Étude du comportement d'échantillons aléatoires extraits d'une population aux caractéristiques connues

➤ Contenu

Variables aléatoires réelles continues

Séquence 1

➤ Prérequis

- Notions élémentaires de probabilités
- Calcul des intégrales
- Notion d'intégrale généralisée

➤ Objectifs

- Initiation aux variables aléatoires continues
- Définition de la densité de probabilité, de la courbe de densité et de la fonction de répartition

➤ Contenu

1. Densité de probabilité – Courbe de densité – Loi de probabilité

Exemple préliminaire

Dans une entreprise, on enregistre chaque mois la durée des appels téléphoniques nationaux et on a établi une statistique relative aux appels qui n'excédent pas 2 heures.

Pour un mois quelconque à venir, on considère la variable aléatoire X « durée d'un appel (en heures) » :

X est une variable aléatoire réelle **continue** définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$, c'est-à-dire $0 \leq X \leq 2$ et X peut prendre n'importe quelle valeur entre 0 et 2.

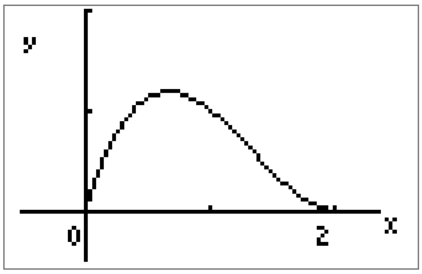
Soit P la probabilité de durée d'un appel à enregistrer : $P(0 \leq X \leq 2) = 1$.

Si d est un réel, la probabilité pour qu'un appel dure exactement d minutes est nulle : $P(X = d) = 0$

En fait, on ne peut calculer que la probabilité d'événements du type $x_1 \leq X \leq x_2$.

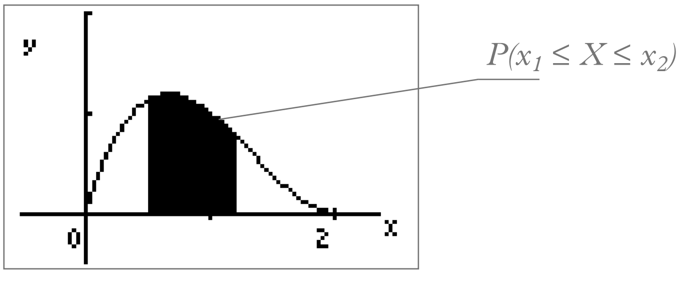
À la variable aléatoire précédente X est associée une fonction f définie sur $[0\ ;\ 2]$ appelée sa « **densité de probabilité ».**

On supposera pour notre exemple que $f(x) = \frac{3}{4}x(2-x)^2$. Sa représentation est :



La courbe représentative (C) est appelée **courbe de densité.**

Si la surface délimitée par (C) et (Ox) possède une aire égale à 1, $P(x_1 \leq X \leq x_2)$ sera égale à l'aire $\int_{x1}^{x2} f(t)dt$ du domaine délimité par (C), (Ox) et les droites d'équation $x = x_1$ et $x = x_2$.



$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x1}^{x2} f(t)dt \qquad x_1 \text{ et } x_2 \in [a\ ;\ b]$$

C'est cette formule qui définit la **loi de probabilité** de la variable aléatoire réelle continue X.

Réciproquement toute fonction f définie sur $[a\ ;b]$ positive délimitant une aire égale à 1 peut être associée à une variable aléatoire réelle **continue** définie sur un intervalle $[a\ ;b]$.

Définition

On appelle **densité de probabilité** associée à une variable aléatoire continue X définie sur $[a\ ;b]$ toute fonction f vérifiant : a) Pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geq 0$

b) $\int_a^b f(t)dt = 1$

Exemple

Soit f définie sur $[0\ ;2]$ par $f(x) = \frac{3}{4}x(2-x)^2$.

• Pour tout $x \in [0\ ;2]$, $f(x) \geq 0$

• $\int_0^2 f(t)dt = \frac{3}{4}.\int_0^2 t(2-t)^2\,dt = \frac{3}{4}.\int_0^2 (t^3 - 4t^2 + 4t)\,dt = \frac{3}{4}.\left[\frac{t^4}{4} - \frac{4}{3}t^3 + 2t^2\right]_0^2$

$$\int_0^2 f(t)dt = \frac{3}{4}.\left(\frac{2^4}{4} - \frac{4}{3}.2^3 + 8\right) = 1$$

On a bien $\int_a^b f(t)dt = 1$ donc f est une **densité de probabilité.**

Application/Exercice 1

2. Espérance mathématique et variance d'une variable aléatoire réelle continue

Définition

On appelle **espérance mathématique** de la variable aléatoire ***continue*** X définie sur $[a\ ;b]$, $]a\ ;b[$, … et de densité de probabilité f, le réel noté $E(X)$ défini, ***lorsqu'il existe***, par :

$$E(X) = \int_a^b t.f(t)dt$$

Exemple

Soit X la variable aléatoire de densité de probabilité f définie sur $[0\ ;\ 2]$ par $f(x)=\frac{3}{4}x(2-x)^2$.

On a : $E(X)=\int_0^2 t.f(t)dt=\frac{3}{4}.\int_0^2 t^2(2-t)^2dt=\frac{3}{4}.\int_0^2(t^4-4t^3+4t^2)dt=\frac{3}{4}\left[\frac{t^5}{5}-t^4+\frac{4}{3}t^3\right]_0^2$

D'où $E(X)=0{,}8$.

Application/Exercice 2

Définition

On appelle **variance** de la variable aléatoire ***continue*** X définie sur $[a\ ;b]$, ou $]a\ ;b[$, …, de densité de probabilité f et d'espérance $E(X)$, le réel noté $V(X)$ défini, ***lorsqu'il existe***, par :

$$V(X)=E((X-E(X))^2)=\int_a^b(t-E(X))^2.f(t)dt$$

Exemple

Soit X la variable de densité de probabilité $x\mapsto f(x)=\frac{3}{4}x(2-x)^2 \quad si\ x\in[0;2]$

on aura : $V(X)=\int_0^2(t-E(X))^2.f(t)dt=\frac{3}{4}.\int_0^2(t-0{,}8)^2.t(2-t)^2dt$

On obtient à l'aide d'une calculatrice $V(X)=0{,}16$.

La propriété qui suit sera cependant plus pratique pour calculer $V(X)$.

Propriété

Soit X une variable aléatoire continue définie sur $[a\ ;b]$, ou $]a\ ;b[$, … ; d'espérance mathématique $E(X)$ et de variance $V(X)$, alors :

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$$

où $E(X^2)=\int_a^b t^2.f(t)dt$.

Exemple

Avec la variable aléatoire X précédemment définie, on aura :

$$E(X^2) = \int_0^2 t^2.\frac{3}{4}t(2-t)^2\,dt = \frac{3}{4}\int_0^2 t^3(2-t)^2\,dt = \frac{3}{4}.\int_0^2 (t^5-4t^4+4t^3)\,dt$$

$$E(X^2) = \frac{3}{4}\left[\frac{t^6}{6}-\frac{4}{5}t^5+t^4\right]_0^2 = 0,8$$

d'où $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 0,8 - 0,8^2 = 0,16$

Remarque

Une variable aléatoire ***continue*** peut n'avoir ni espérance mathématique ni variance (cf. exercice 8).

Application/Exercice 3

Propriété

Soit X une variable aléatoire ***continue*** d'espérance mathématique $E(X)$, de variance $V(X)$, d'écart type $\sigma(X)$ et soit a un réel.

Comme pour les variables aléatoires discrètes (et lorsque ces valeurs sont définies) :

$E(X + a) = E(X) + a$ $\qquad$ $E(a.X) = a.E(X)$

$V(X + a) = V(X)$ $\qquad$ $V(a.X) = a^2.V(X)$

$\sigma(X + a) = \sigma(X)$ $\qquad$ $\sigma(a.X) = |a|.\,\sigma(X)$

Exemple

Reprenons l'exemple du § 1.

Les appels téléphoniques nationaux sont facturés à la seconde au prix de 2,28 €/h TTC plus un abonnement mensuel de 10 euros. L'entreprise effectue en moyenne 1 000 appels par mois.

X étant la variable aléatoire « durée d'un appel (en heure) », on a $E(X) = 0,8$ et $V(X) = 0,16$.

La variable aléatoire « dépenses mensuelles » est :

$$D = 1\,000 \times 2,28.X + 10 = 2280.X + 10.$$

D'où l'espérance mathématique $E(D)$ de la dépense mensuelle :

$$E(D) = E(2280.X + 10) = 2280.E(X) + 10$$

$$E(D) = 1834\ €.$$

La variance $V(D)$ et l'écart type de la dépense mensuelle sont :

$$V(D) = V(2280.X + 10) = 2280^2.V(X) \text{ d'où } V(D) = 831\ 744$$

$$\sigma(D) = \sqrt{V(D)} \text{ d'où } \sigma(D) = 912\ €.$$

3. Fonction de répartition

Deux situations sont envisagées :
la variable aléatoire X est définie sur un intervalle borné de type $[a\ ;b]$, $]a\ ;b[$, ou sur un intervalle de type $[a\ ;+\infty[$, $]-\infty\ ;b[$ ou $]-\infty\ ;+\infty[$.

Définition 1 – Variable aléatoire définie sur [a; b]

On appelle **fonction de répartition** de la variable aléatoire ***continue*** X, de densité f définie sur $[a\ ;b]$ l'application F définie sur **R** par :

$$F(x) = 0 \text{ si } x \in]-\infty\ ;a[$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_a^x f(t)dt \text{ si } x \in [a\ ;b]$$

$$F(x) = 1 \text{ si } x \in]b\ ;+\infty[$$

Exemple

Considérons la variable aléatoire X définie sur $[0\ ;4]$ et dont la densité de probabilité est définie par $f(x)=\frac{3}{32}x(4-x)$

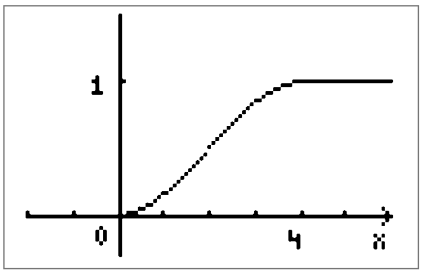
- si $x \in]-\infty\ ;0[$ alors $F(x) = 0$
- si $x \in [0\ ;4]$ alors $F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x f(t)dt$

$$F(x)=\int_0^x\left(\frac{3}{8}t-\frac{3}{32}t^2\right)dt=\left[\frac{3}{16}t^2-\frac{1}{32}t^3\right]_0^x$$

$$F(x)=\frac{3}{16}x^2-\frac{1}{32}x^3$$

- si $x \in]4\ ;+\infty[$ alors $F(x) = 1$.

D'où la représentation de F :



Application/Exercice 4

Propriété

$$P(x_1 \le X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

En effet : $P(x_1 \le X \le x_2) = P(X \le x_2) - P(X < x_1)$ or $P(X \le a) = P(X < a)$ car $P(X = a) = 0$.

$$\text{D'où} \quad P(x_1 \le X \le x_2) = P(X \le x_2) - P(X \le x_1)$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad P(x_1 \le X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Exemple

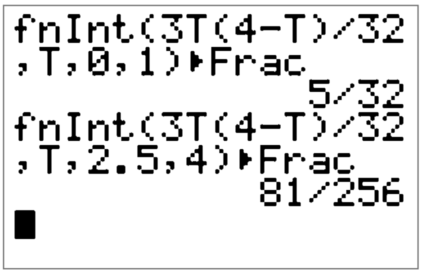
Soit X la variable aléatoire dont la densité de probabilité est définie sur $[0\ ;\ 4]$ par $f(x) = \frac{3}{32}x(4-x)$

On a : $F(x) = \frac{3}{16}x^2 - \frac{1}{32}x^3$

$$P(0 \le X \le 1) = F(1) - F(0) = \frac{3}{16} - \frac{1}{32} = \frac{5}{32}$$

et pour $X > 2{,}5$: $P(X > 2{,}5) = 1 - F(2{,}5) = 1 - \left(\frac{3}{16}.2{,}5^2 - \frac{1}{32}.2{,}5^3\right) = \frac{81}{256}$

Valeurs que l'on peut retrouver à l'aide d'une calculatrice :



Définition 2 – Variable aléatoire définie sur]-∞ ; +∞[

On appelle **fonction de répartition** de la variable aléatoire ***continue*** X, de densité f définie sur]-∞ ; +∞[l'application F ***définie de R*** sur [0 ; 1] par :

$$x \mapsto F(x) = p(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \quad si\ x \in IR$$

Cette deuxième définition généralise la précédente.

Application/Exercice 5

Rappels

1. L'intégrale $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ dont une borne est infinie est une intégrale ***généralisée***. Par définition :

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{x} f(t)dt \text{ (lorsque cette limite existe).}$$

2. Pour une variable aléatoire ***continue***

$P(X \leq a) = P(X < a)$ car $P(X = a) = \int_{a}^{a} f(t)dt = 0$.

Exercices autocorrectifs

Applications

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur [0 ; 2] par : $f : x \mapsto \frac{x}{2}$.

1. Représenter f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2. Montrer que f est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
3. Calculer la probabilité des événements $0 \leq X \leq 1$ *et* $X > 1$.

Exercice 2

Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ avec les données de l'exercice 1.

Exercice 3

Calculer $E(X^2)$ puis la variance $V(X)$ avec les données de l'exercice 1.

Exercice 4

Avec les données de l'exercice 1 :

1. Déterminer la fonction de répartition de X.
2. La représenter dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 5

La variable aléatoire X a pour densité de probabilité l'application f définie sur **R** par :

$$f(x) = 0 \text{ si } x \in]-\infty ; 0[\quad \text{et} \quad f(x) = e^{-x} \text{ si } x \in [0 ; +\infty[$$

1. Représenter f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2. Déterminer sa fonction de répartition F. Représenter F dans un second repère.
3. Calculer la probabilité des événements $0 \leq X \leq 1$ *et* $X > 2,5$.

Approfondissements

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur [-1 ; 3] par $f(x) = a(x + 1)(3 - x)$.
Déterminer le réel a afin que f soit la densité d'une variable aléatoire X.

Exercice 7

1. a) Pour a réel, $a > 0$, calculer l'intégrale $I_a = \int_0^a \frac{2t}{1+t^2} dt$.

   b) En déduire la valeur de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{2t}{1+t^2} dt$.

2. Soit X la variable aléatoire de densité de probabilité $f : x \mapsto \frac{2}{\pi}.\frac{1}{1+x^2}$ si $x \in [0 ; +\infty[$.

   Montrer que X n'a pas d'espérance mathématique.

Exercice 8 – Loi uniforme

La variable aléatoire X, définie sur $[a ; b]$ ($a < b$) suit une ***loi uniforme*** si sa densité de probabilité est la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{b-a}$.

1. Représenter la courbe de densité dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$.
3. Déterminer la fonction de répartition de X. La représenter.
4. Pour x_1 et $x_2 \in [a ; b]$ calculer la probabilité de l'événement $x_1 \leq X \leq x_2$.

Exercice 9 – Loi exponentielle

A. On considère les fonctions F et G définies par $F(x) = (- x - 1)e^{-x}$ et $G(x) = (- x^2 - 2x - 2)e^{-x}$.

1. Calculer $F'(x)$ et $G'(x)$.
2. Montrer que $\int_0^{+\infty} t.e^{-t} dt = 1$ et $\int_0^{+\infty} t^2.e^{-t} dt = 2$.

B. La variable aléatoire X suit une ***loi exponentielle*** de paramètre 1 lorsque sa densité de probabilité est la fonction f définie par :

$$f(x) = 0 \text{ si } x \in]-\infty ; 0[\quad \text{et} \quad f(x) = e^{-x} \text{ si } x \in [0 ;+\infty[$$

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2. Calculer son espérance mathématique $E(X)$ et sa variance $V(X)$.
3. Déterminer sa fonction de répartition. La représenter.

Exercice 10

Soit F la fonction de répartition de la variable aléatoire ***continue*** X.

On appelle **médiane** m_e, **quartile** $\boldsymbol{Q_1}$ et **quartile** $\boldsymbol{Q_3}$ les réels respectivement définis par :

$$F(Q_1) = 0,25 \qquad ; \qquad F(m_e) = 0,5 \qquad ; \qquad F(Q_3) = 0,75$$

(L'existence des réels Q_1, m_e, *et* Q_3 est assurée par la continuité de F. Leur unicité est assurée par la croissance stricte de F).

1. Calculer la médiane et les quartiles de X avec les données de l'exercice 1.
2. Déterminer la médiane de la loi uniforme.
3. Calculer la médiane de la loi exponentielle.

La loi normale

Séquence 2

➤ Prérequis

• Notion de variable aléatoire continue

➤ Objectifs

• Savoir traiter des problèmes utilisant une loi continue classique
• Utilisation de la table d'une loi continue

➤ Contenu

1. La loi normale centrée et réduite

1A. Définition – Propriétés

Définition

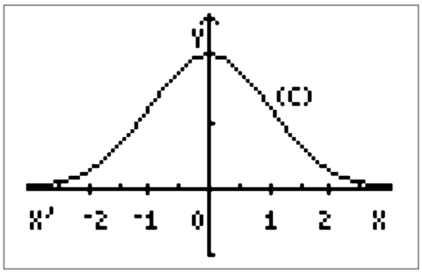
Une variable aléatoire continue T suit une **loi normale centrée et réduite** si :

a) T prend n'importe quelle valeur sur **R**

b) sa densité de probabilité est définie par $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$.

La loi normale centrée et réduite, également appelée **loi de Laplace-Gauss** centrée et réduite, est notée $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.

La **courbe de densité** correspondante, appelée **courbe de Gauss**, symétrique par rapport à (Oy), a pour représentation dans $(O,\vec{i},\vec{j})$:

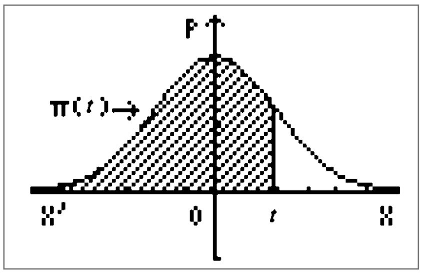


On montre, et nous l'admettrons, que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$; $E(T) = 0$ et $V(T) = 1$: ces deux résultats justifient l'appellation de « loi centrée » (c'est-à-dire d'espérance nulle) et « réduite » (c'est-à-dire dont la variance égale à 1).

La fonction de répartition de T, notée π, est définie par :

$$\pi(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx \quad (t \in \mathbf{R}).$$

Graphiquement c'est l'aire du domaine délimité par (C), la droite (Ox) et inclus dans le demi plan d'équation $x \leq t$.



Mais cette intégrale ne peut être calculée car f ne possède pas de primitive connue : ses valeurs sont indiquées dans une table.

1B. Usage de la table de la loi de Laplace-Gauss $\mathcal{N}$ (0 ; 1)

Soit T une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}$ (0 ; 1).

Les valeurs de $P(T \leq t) = \Pi(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$ sont recherchées parmi les valeurs croissantes de la table dont un extrait est donné ci-dessous.

(cf. la table complète en annexe à la fin du cours)

Lecture directe de la table

a) Pour les valeurs décimales de $t \in [0 ; 2{,}99]$, appelés **fractiles,** la probabilité se lit directement dans la table de la loi $\mathcal{N}$ (0 ; 1).

Exemples

$P(T \leq 0{,}05) = \pi(0{,}05) = 0{,}519\,9\ldots$

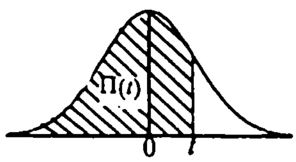
$P(T \leq 0{,}79) = \pi(0{,}79) = 0{,}785\,2\ldots$

$P(T \leq 1) = \pi(1) = 0{,}841\,3\ldots$

$P(1 < T < 2) = \pi(2) - \pi(1) = 0{,}977\,2 - 0{,}841\,3 = 0{,}135\,9.$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE N(0,1)

$\Pi(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5

Π(0,05)=0,519 9…

Π(0,79)=0,785 2…

Π(1)=0,841 3…

Application/Exercice 1

b) Pour les valeurs de $t < 0$, on utilise la symétrie de (C) par rapport à (Oy) :
$\Pi(-a) = 1 - \Pi(a)$.

Exemples

$\Pi(-0{,}5) = 1 - \Pi(0{,}5) = 1 - 0{,}691\,5\ldots = 0{,}308\,4\ldots$

$\Pi(-1) = 1 - \Pi(1) = 1 - 0{,}841\,3\ldots = 0{,}158\,6\ldots$

Application/Exercice 2

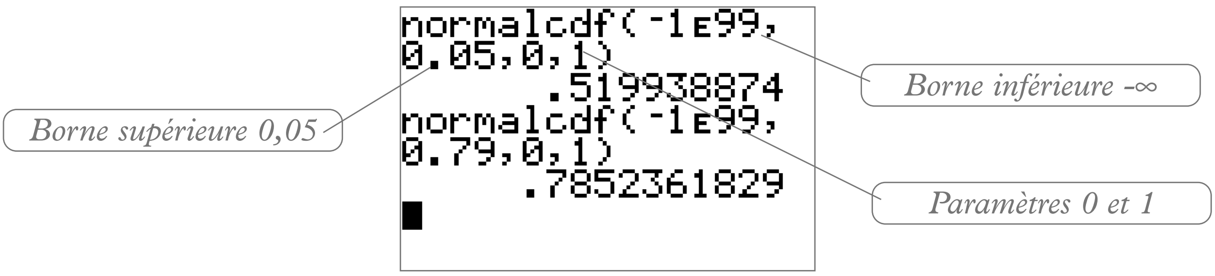
Remarques

1. Pour des valeurs de t plus précises on procède par interpolation linéaire.

2. La plupart des calculatrices scientifiques permettent cependant de calculer $\Pi(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$
.

Exemples

$\Pi(0{,}05) = 0{,}519\,9\ \ldots$; $\Pi(0{,}79) = 0{,}785\,2\ \ldots$



Application/Exercice 3

Propriété

Soit T une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$. Alors pour $a > 0$:

$$P(|T| \leq a) = P(-a \leq T \leq a) = 2.\,\Pi(a) - 1$$

En effet $P(|T| \leq a) = P(-a \leq T \leq a) = \Pi(a) - \Pi(-a) = \Pi(a) - (1 - \Pi(a)) = 2.\,\Pi(a) - 1$

Exemple

$P(-1 \leq T \leq 1) = 2.\,\Pi(1) - 1 \approx 2 \times 0{,}8413 - 1$ d'où $P(-1 \leq T \leq 1) \approx 0{,}682\,6$

Application/Exercice 4

Lecture inverse de la table

On cherche le fractile t pour une valeur $\Pi(t)$ donnée dans le tableau.

a) Il n'y a aucune difficulté si la valeur de t est présente dans la table : $\Pi(t) = 0{,}8944$ pour $t = 1{,}25$ ou proche d'une valeur de la table : $\Pi(t) = 0{,}89$ pour $t \approx 1{,}23$.

b) Pour les autres valeurs de $\Pi(t) \in [0{,}5\ ;\ 1[$ on procède par interpolation.

Exemple

Cherchons t pour $\Pi(t) = 0{,}75$. On a $\Pi(0{,}67) < \Pi(t) < \Pi(0{,}68)$

(Sur la table $\Pi(0{,}67) = 0{,}748\,6\ldots$ et $\Pi(0{,}68) = 0{,}751\,7\ldots$)

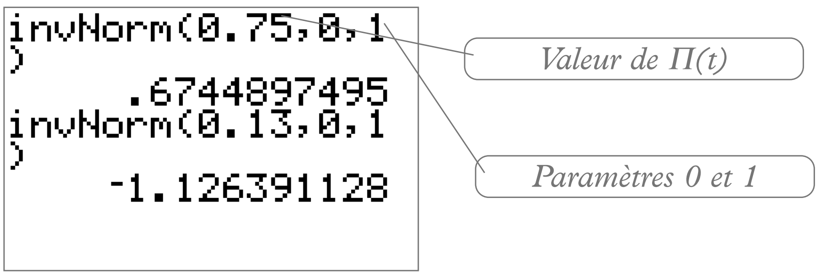
$$\frac{t-0{,}67}{0{,}75-0{,}7486}=\frac{0{,}68-0{,}67}{0{,}7517-0{,}7486}\ \text{d'où}\ t\approx 0{,}6745$$

Application/Exercice 5

Remarques

1. Pour les valeurs de $\Pi(t) \in]0\ ;\ 0{,}5[$ on utilise la symétrie de (C) par rapport à (Oy) : on revient au cas précédent à l'aide de l'égalité $\Pi(t) = 1 - \Pi(-t)$ et la table permet d'obtenir $-t$.

2. Certaines calculatrices scientifiques permettent de retrouver directement les fractiles.



$\Pi(t) = 0{,}75$ pour $t = 0{,}674\ldots$ $\Pi(t) = 0{,}13$ pour $t = -1{,}126\ldots$

Applications/Exercices 6 et 7

2. La loi normale $\mathcal{N}$ (m ; σ)

Définition

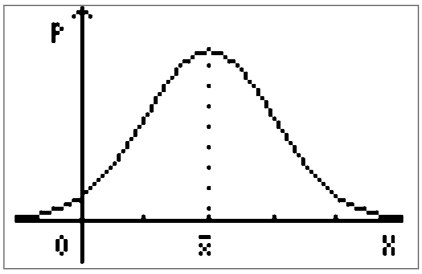
La variable aléatoire continue X suit une **loi normale** de paramètres m et σ si :

a) X prend n'importe quelle valeur sur **R**

b) sa densité de probabilité est définie par $g(t) = \dfrac{1}{\sigma.\sqrt{2\pi}} e^{-(t-m)^2/2\sigma^2}$

La loi normale (ou **loi de Laplace-Gauss**) de paramètres m et σ, est notée $\mathcal{N}(m, \sigma)$.

La courbe de densité correspondante a pour représentation dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$



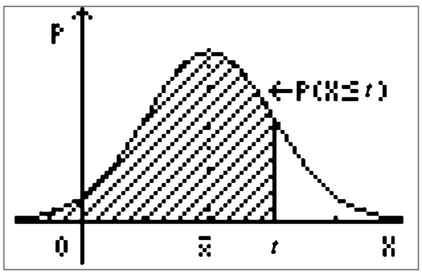
Application/Exercice 8

On montre, et nous l'admettrons, que $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 1$ et que $E(X) = m$ et $V(X) = \sigma^2$
Les paramètres de la loi sont donc son espérance mathématique et son ***écart type***.

La fonction de répartition de X, de loi $\mathcal{N}(m ; \sigma)$, est définie par

$$P(X \leq t) = \frac{1}{\sigma.\sqrt{2\Pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} dx \quad (t \in \mathbf{R})$$

Graphiquement c'est l'aire du domaine délimité par (C), la droite (Ox) et inclus dans le demi-plan d'équation $x \leq t$:



On calcule la valeur de $P(X \leq t)$ à l'aide d'un changement de variable.

Théorème

Soient X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(m\ ;\sigma)$ et T la variable aléatoire définie par :

$$\boxed{T=\frac{X-m}{\sigma}}$$

alors T est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0\ ;1)$.

Exemple 1

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(5\ ;0{,}2)$.

a) $P(X\leq 5{,}12)\ =\ P\left(\frac{X-5}{0{,}2}\leq\frac{5{,}12-5}{0{,}2}\right)=P\left(\frac{X-5}{0{,}2}\leq 0{,}6\right)$

or la variable aléatoire $T=\frac{X-5}{0{,}2}$ suit la loi $\mathcal{N}(0\ ;1)$, donc $P(X\leq 5{,}12)\ =\Pi(0{,}6)\ =0{,}725$ 7…

$P(|X-5|\leq 0{,}2)\ =\ P\left(\left|\frac{X-5}{0{,}2}\right|\leq 1\right)\ =P(|T|\leq 1)\ =2.\ \Pi(1)\ -\ 1\ =0{,}682$ 6…

Application/Exercice 9

Exemple 2

Soit X une variable aléatoire réelle de loi $\mathcal{N}(5\ ;0{,}8)$. Calculons la valeur de t vérifiant $P(X\leq t)\ =0{,}695$

$P(X\leq t)\ =0{,}695\Leftrightarrow\ P\left(\frac{X-5}{0{,}8}\leq\frac{t-5}{0{,}8}\right)=0{,}695$ c'est-à-dire $\Pi\left(\frac{t-5}{0{,}8}\right)=0{,}695$

D'où $\frac{t-5}{0{,}8}=0{,}51$ soit $t=5{,}408$

Application/Exercice 10

Remarque

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(m\ ;\sigma)$.

$P(|X-m|\leq\sigma)\ =\ P\left(\left|\frac{X-m}{\sigma}\right|\leq 1\right)\ =P(|T|\leq 1)\ =2.\ \Pi(1)\ -\ 1\ =0{,}682$ 6…

68,26 % de la population est située sur l'intervalle $[m-\sigma\ ;m+\sigma]$

$P(|X-m|\leq 3\sigma)\ =\ P\left(\left|\frac{X-m}{\sigma}\right|\leq 3\right)\ =2.\ \Pi(3)\ -\ 1\ =0{,}997$ 3…

Environ *100 %* d'une population distribuée suivant une loi normale est située sur $[m-3\sigma\ ;m+3\sigma]$ c'est-à-dire sur un intervalle d'amplitude 6σ.

3. Approximation de la loi binomiale par la loi de LAPLACE-GAUSS

Soient X une variable aléatoire de loi $\mathscr{B}(N, p)$ et Y une variable aléatoire de loi $\mathscr{N}(m, \sigma)$ avec $m = Np$ et $\sigma = \sqrt{Np(1-p)}$.

On admettra que si $Np > 15$ et $Nq > 15$ avec q=1- p alors pour $k \in \{0 ; 1, \ldots, N\}$

$$\boldsymbol{P(X = k) \approx P(k-1/2 < Y < k+1/2)}$$

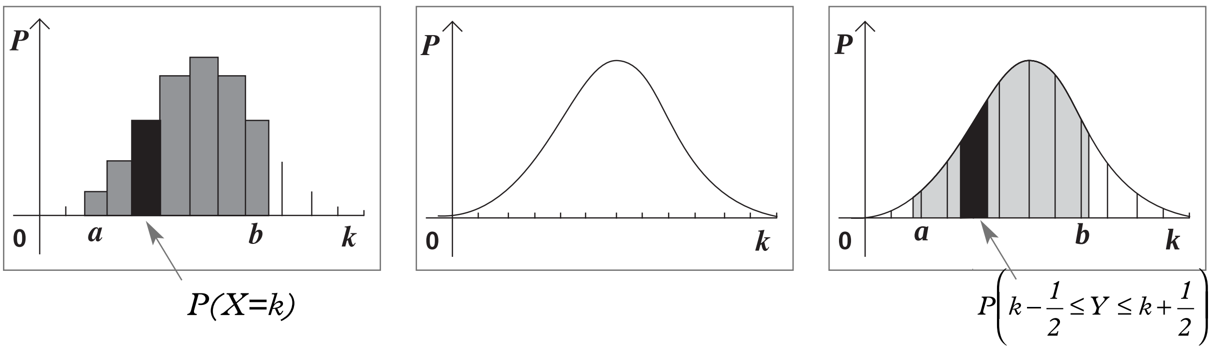
et si l'on cumule les valeurs de X sur $[a ; b]$:

$$\boldsymbol{P(a \leq X \leq b) \approx P(a-1/2 \leq Y \leq b+1/2)}$$

Théorème

On effectue une approximation de la loi $\mathscr{B}(\mathrm{N}, p)$ par la loi $\mathscr{N}\left(m, \sqrt{Np(1-p)}\right)$ si $Np > 15$ et $N(1-p) > 15$

Interprétation graphique



Notons que X est une variable aléatoire **discrète** et Y est une variable aléatoire **continue**. Le remplacement de l'événement $(X = k)$ par l'événement $(k - 1/2 \leq Y \leq k + 1/2)$ est appelé la ***correction de continuité***.

Exemple

Pour $N = 72$ et $p = 1/3$ alors $m = 24$ et $\sigma = 4$ $Np = 24 > 15$ et $Nq = 48 > 15$

k	$P(X=k)$	$P(k - 1/2 \leq Y \leq k + 1/2)$
…	…	…
22	0,089 52	0,087 84
23	0,097 31	0,096 43
24	0,099 33	0,099 48
25	0,095 36	0,096 43
26	0,086 19	0,087 84
27	0,072 42	0,075 20
…	…	…

Remarque

Pour deux entiers a et b ($a < b$), le calcul de $P(a \leq X \leq b)$ est en général facilité par celui de $P(a - 1/2 \leq Y \leq b + 1/2)$.

Par exemple calculons $P(15 \leq X \leq 35)$ pour X variable aléatoire de loi $\mathscr{B}(72, 1/3)$.

• 1re méthode :

$$P(15 \leq X \leq 35) = C_{72}^{15}.\left(\frac{1}{3}\right)^{15}.\left(\frac{2}{3}\right)^{57} + C_{72}^{16}.\left(\frac{1}{3}\right)^{16}.\left(\frac{2}{3}\right)^{56} + \ldots + C_{72}^{35}.\left(\frac{1}{3}\right)^{35}.\left(\frac{2}{3}\right)^{37} = \ldots$$

• 2e méthode : $Np = 24$ et $N(1-p) = 48$: les conditions de l'approximation sont réalisées.

$$m = Np = 24 \quad \text{et} \quad \sigma^2 = Np(1-p) = 16$$

$$P(15 \leq X \leq 35) \approx P(14{,}5 \leq Y \leq 35{,}5)$$

$$= P\left(-2{,}375 \leq \frac{Y-24}{4} \leq 2{,}875\right)$$

$= \Pi(2{,}875) - \Pi(-2{,}375)$ car $\frac{Y-24}{4}$ est une variable aléatoire de loi $\mathscr{N}(0, 1)$.

d'où $P(15 \leq X \leq 35) \approx 0{,}989\ 2$.

Application/Exercice 11

Exercices autocorrectifs

Applications

Lecture directe de la table de la loi normale

T est une variable aléatoire réelle continue de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Exercice 1

À l'aide de la table déterminez les probabilités suivantes :

$P(T < 0{,}02)$; $P(T \leq 0{,}20)$; $P(T < 2{,}28)$; $P(1 < T < 2{,}28)$

Exercice 2

À l'aide de la table calculez les probabilités suivantes :

$P(T < -0{,}75)$; $P(T > 2{,}4)$; $P(T \geq -0{,}82)$

Exercice 3

1. À l'aide de la table et d'une interpolation linéaire calculez $P(T \leq 0{,}825)$ *et* $P(T < 0{,}823)$.
2. Retrouver les résultats à l'aide d'une calculatrice.

Exercice 4

1. À l'aide de la table calculez les probabilités suivantes :

$P(-1{,}5 \leq T \leq 1{,}5)$; $P(|T| < 1{,}1)$; $P((|T| \leq 1{,}1)$

2. Retrouver les résultats à l'aide d'une calculatrice.

Lecture inverse de la table de la loi normale

T est une variable aléatoire réelle continue de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Exercice 5

À l'aide de la table déterminez le réel t vérifiant :

a) $P(T < t) = 0{,}9842$; b) $P(T > t) = 0{,}1515$; c) $P(-t < T < t) = 0{,}34$

Exercice 6

À l'aide de la table calculez le réel t vérifiant :

a) $P(T < t) = 0{,}1515$; b) $P(T > t) = 0{,}6$

Exercice 7

1. Calculez les quartiles Q_1 et Q_3 de T.
2. Retrouver les résultats à l'aide d'une calculatrice.

Loi normale $\mathcal{N}(m\ ;\ \sigma)$

Exercice 8

Représenter la courbe de Gauss des lois $\mathcal{N}(-3\ ;\ 0{,}5)$, $\mathcal{N}(-3\ ;\ 2)$, $\mathcal{N}(1\ ;\ 0{,}6)$ et $\mathcal{N}(1\ ;\ 2)$.

Exercice 9

Soit X une variable aléatoire réelle continue de loi $\mathcal{N}(10\ ;\ 2{,}5)$. Calculez les probabilités :

a) $P(X \leq 15)$ b) $P(7 < X < 11)$ c) $P(X > 12)$ d) $P(9 < X)$ e) $P(8 \leq X \leq 12)$

Exercice 10

Soit X une variable aléatoire réelle continue de loi $\mathcal{N}(3\ ;\ 0{,}5)$:

1. Calculez la valeur du réel t vérifiant :

   a) $P(X \leq t) = 0{,}985$ b) $P(X < t) = 0{,}123$ c) $P(X > t) = 0{,}61$
2. Retrouver les résultats à l'aide d'une calculatrice.

Approximation de la loi binomiale par la loi de Laplace-Gauss

Exercice 11

1. La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{B}(100\ ;\ 0{,}2)$.
   a) Donner l'expression de la probabilité $P(20 \leq X \leq 30)$.
   b) Calculer une valeur approchée de cette probabilité.
2. a) Par quelle loi normale peut-on approcher la loi $\mathcal{B}(100\ ;\ 0{,}2)$?
   b) En utilisant l'approximation précédente, et à l'aide de table de la loi normale, donner une valeur approchée de $P(20 \leq X \leq 30)$.

Approfondissements

Loi normale

Exercice 12

Soit X une variable aléatoire réelle continue de loi $\mathcal{N}$ $(m\ ;\sigma)$. On pose $T=\dfrac{X-m}{\sigma}$.

On rappelle que T est une variable aléatoire réelle normale. Calculer $E(T)$ et $V(T)$.

Exercice 13

Soit X une variable aléatoire réelle continue de loi $\mathcal{N}$ (5 ; 0,8).

a) Calculez le quartile Q_3 de X.

b) En déduire la valeur de Q_1.

Exercice 14

Les poids de 2 524 nouveau-nés d'une maternité au cours d'une année, se répartissent suivant la loi normale autour de la valeur moyenne 3 420 g avec un écart-type de 240 g.

1. Trouver le nombre des nouveau-nés dont le poids dépasse 3 500 g et le nombre de ceux dont le poids est inférieur à 3 000 g.

2. Quelle est la probabilité d'avoir un nouveau-né dont le poids dépasse 4 000 g et quel est le nombre présumé de ces nouveau-nés ?

Exercice 15

Sur les 1 500 élèves d'un lycée il y en a 238 dont la taille est inférieure à 1,60 m et 463 dont la taille est supérieure à 1,75 m.

1. En admettant que les tailles des élèves obéissent à une loi normale, déterminer la moyenne et l'écart type de cette loi.

2. Combien d'élèves dont la taille est comprise entre 1,60 m et 1,80 m peut-on prévoir ?

Approximation de la loi binomiale par la loi de Laplace-Gauss

Exercice 16

On lance 20 paquets de 500 pièces de monnaie que l'on suppose parfaitement équilibrées.

1. Soit X la variable aléatoire réelle « nombre de piles obtenues ». Déterminer la loi de X.
2. Par quelle loi peut-on approcher la loi de X ?
3. Calculer une valeur approchée de la probabilité pour que le nombre de piles soit :
   a) compris entre 4 900 et 5 100 ;
   b) supérieur à 5 200.

Travaux pratiques

TP1

Sujet BTS informatique de gestion – Juin 2000

Dans une compagnie d'assurance, on a pu constater que sur les 1 200 assurés, 60 avaient envoyé au moins une déclaration de sinistre dans l'année.

On dira dans tout cet exercice que ces 60 dossiers sont de *« type DS »*.

On prélève au hasard et avec remise n dossiers parmi les 1 200 dossiers des assurés.

X est la variable aléatoire donnant, parmi les n dossiers prélevés, le nombre de dossiers de *« type DS »*.

Les probabilités demandées seront données sous forme décimale, arrondies à 10^{-2}.

1. Quelle est la loi suivie par X ? Donner les paramètres de cette loi.

2. Dans cette question, on prend $n = 10$. Calculer les probabilités :
   a) pour qu'un seul dossier soit de *« type DS »* ;
   b) pour qu'il y ait, parmi ces 10 dossiers, au moins un dossier de *« type DS »*.

3. Dans cette question, on prend n = 60.

On admet que la loi de probabilité X peut être approchée par une loi de Poisson. Soit Y une variable aléatoire suivant cette loi de Poisson.

   a) Déterminer le paramètre de la loi de Poisson suivie par Y.
   b) Quelle est la probabilité $P(Y \geq 2)$?

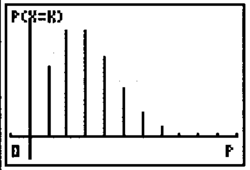
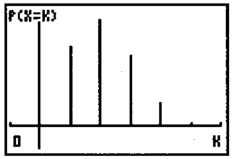
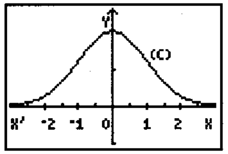
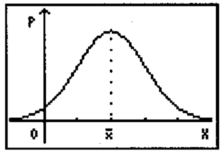
4. Dans cette question, on prend n = 200.

On admet que la loi de probabilité de X peut être approchée par une loi normale. Soit Z une variable aléatoire suivant cette loi normale.

   a) Déterminer les paramètres de la loi normale suivie par Z.
   b) Calculer les probabilités suivantes $P(Z \leq 9)$ et $P(Z \geq 15)$.
   c) Calculer une valeur approchée de $P(X = k)$ revient à calculer $P(k - 0,5 \leq Z \leq k + 0,5)$, où intervient la correction de continuité.

À l'aide de ce renseignement, calculer une valeur approchée de la probabilité $P(X = m)$, où m est l'espérance mathématique de la variable X.

Tableau résumé des lois discrètes et continues et de leurs approximations

	LOI DE POISSON $\mathcal{P}(\lambda)$	LOI BINOMIALE $\mathcal{B}(N,p)$	LOI NORMALE CENTREE ET REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$	LOI NORMALE $\mathcal{N}(m,\sigma)$
TYPE DE VARIABLE ALEATOIRE	*Variable aléatoire réelle discrète*	*Variable aléatoire réelle discrète*	*Variable aléatoire réelle continue*	*Variable aléatoire réelle continue*
UNIVERS	*Ensemble dénombrable de valeurs* $X(\Omega) = \mathbf{N}$	*Ensemble fini de valeurs* $X(\Omega) = \{0,1,\dots,N\}$	*Ensemble infini de valeurs* $X(\Omega) = \mathbf{R}$	*Ensemble infini de valeurs* $X(\Omega) = \mathbf{R}$
DENSITE DE PROBABILITE	-	-	$f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$	$g(t) = \dfrac{1}{\sigma.\sqrt{2\pi}} e^{-(t-m)^2/2\sigma^2}$
LOI DE PROBABILITE	$P(X=k) = e^{-\lambda}.\dfrac{\lambda^k}{k!}$	$P(X=k) = C_N^k.p^k.(1-p)^{N-k}$	$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(t)\,dt$	$P(a \le X \le b) = \int_a^b g(t)\,dt$
FONCTION DE REPARTITION	$F(t) = P(X \le t)$	$F(t) = P(X \le t)$	$\Pi(t) = P(X \le t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$ *Usage de la table*	$F(t) = P(X \le t) = \int_{-\infty}^{t} g(x)\,dx$.
REPRESENTATION GRAPHIQUE				
ESPÉRANCE E(X) *VARIANCE V(X)*	λ λ	*Np* *Np(1-p)*	*0 (loi centrée)* *1 (loi réduite)*	m σ^2
REMARQUES	*Evénements de probabilité faible*	*Epreuves indépendantes répétées N fois dans les mêmes conditions*	*Changement de variable* $T = \dfrac{X-m}{\sigma}$ *avec X v.a.r de loi* $\mathcal{N}(m,\sigma)$ *et T v.a.r de loi* $\mathcal{N}(0\,;1)$	
	Si $\begin{cases} N \ge 50 \\ p \le 0,1 \\ Np \le 10 \end{cases}$ *alors* $\mathcal{P}(\lambda) \approx \mathcal{B}(N,p)$ *avec* $\lambda = Np$	**correction de continuité**	*Si* $\begin{cases} Np > 15 \\ N(1-p) > 15 \end{cases}$ *alors* $\mathcal{B}(N,p) \approx \mathcal{N}(m,\sigma)$ *avec* $\begin{cases} m = Np \\ \sigma^2 = Np(1-p) \end{cases}$	

Opérations sur les variables aléatoires

Séquence 3

➤ Prérequis

- Probabilités
- Événements indépendants
- Variables aléatoires discrètes et continues
- Loi normale

➤ Objectifs

- Étudier simultanément plusieurs variables aléatoires
- Définir leur somme, leur différence et leur produit
- Approcher la loi d'une somme de variables aléatoires

➤ Contenu

1. Exemple préliminaire

Exemple

On jette deux dés à six faces. Les faces du dé D_1 sont numérotées de 1 à 6 et on définit la variable aléatoire X « gain en euros » par :

si la face 1 apparaît : $X = 0$ et on ne gagne rien ;

si 2, 3 ou 4 apparaît : $X = 1$ et on gagne 1 euro ;

si 5 ou 6 apparaît : $X = 2$ et on gagne 2 euros.

Le dé D_2 possède 2 faces rouges et 4 faces vertes et on définit la variable aléatoire Y « gain supplémentaire en euros » par :

si une face rouge apparaît : $Y = 1$ et on gagne 1 euro supplémentaire ;

si une face verte apparaît : $Y = 2$ et on gagne 2 euros supplémentaires.

On a donc $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et $Y(\Omega) = \{1, 2\}$.

Les dés sont parfaitement équilibrés et les probabilités de gains sont indiquées ci-dessous :

	$Y = 1$	$Y = 2$	
$X = 0$	$1/18$	$1/9$	$1/6$
$X = 1$	$1/6$	$1/3$	$1/2$
$X = 2$	$1/9$	$2/9$	$1/3$
	$1/3$	$2/3$	1

Ce tableau définit la ***loi conjointe du couple*** de variables aléatoires X *et* Y « gains possibles réalisés en euros ».

2. Couple de variables aléatoires discrètes

2A. Généralités – Lois marginales

Soient X *et* Y deux variables aléatoires définies sur l'univers Ω, et prenant respectivement n et m valeurs réelles : $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *et* $Y(\Omega) = \{y_1, \ldots, y_m\}$.

La donnée d'un tableau de $m \times n$ réels positifs notés p_{ij} tels que $\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=m} p_{ij} = 1$ (cumul de toutes les valeurs du tableau) permet, en posant $p_{ij} = P(X = x_i \cap Y = y_j)$ de définir la loi de probabilité d'un couple $(X\,;Y)$ de variables aléatoires.

Cette loi est appelée **loi conjointe** de X et de Y.

	$Y = y_1$	…	$Y = y_j$	…	$Y = y_m$	
$X = x_1$	p_{11}	…	p_{1j}	…	p_{1m}	$p_{1.}$
…	…		…		…	…
$X = x_i$	p_{i1}	…	p_{ij}	…	p_{im}	$p_{j.}$
…	…		…		…	…
$X = x_n$	p_{n1}	…	p_{nj}	…	p_{nm}	$p_{n.}$
	$p_{.1}$	…	$p_{.j}$	…	$p_{.m}$	1

Application/Exercice 1

Les lois de X et de Y dans les marges du tableau précédent, sont appelées **lois marginales**. Elles sont définies par :

k	$P(X = k)$
x_1	$p_{1.}$
…	…
x_i	$p_{i.}$
…	…
x_n	$p_{n.}$
total	1

k	y_1	…	y_j	…	y_m	*total*
$P(Y = k)$	$p_{.1}$		$p_{.j}$		$p_{.m}$	1

Exemple

Avec les données du § 1 les lois marginales du couple $(X\,;Y)$ sont définies par :

k	0	1	2	*total*
$P(X = k)$	1/6	1/2	1/3	1
$P(Y = k)$		1/3	2/3	1

Remarque

Si la donnée de la loi du couple $(X\,;Y)$ permet de retrouver les lois marginales, en général la donnée seule de ces dernières ne suffit pas pour définir la loi du couple $(X\,;Y)$.

Application/Exercice 2

2B. Variables aléatoires discrètes indépendantes

Définition

Les variables aléatoires X et Y sont dites **indépendantes** (pour la probabilité P) si pour tout couple d'indices (i, j) on a :

$$P(X = x_i \cap Y = y_j) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j)$$

Exemple 1

La loi d'un couple (X, Y) de variables aléatoires définies sur un même univers Ω est donnée par le tableau :

	$Y = 1$	$Y = 2$	total
$X = 1$	1/18	1/9	1/6
$X = 2$	1/6	1/3	1/2
$X = 3$	1/9	2/9	1/3
total	1/3	2/3	1

Dans cet exemple les variables aléatoires X et Y ***sont indépendantes*** : chaque case du tableau est le produit du total de la ligne par le total de la colonne sur laquelle elle se trouve.

Exemple 2

La loi d'un couple $(X ; Y)$ de variables aléatoires réelles définies sur un même univers Ω est donnée par le tableau :

	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$	total
$X = 1$	0,2	0,1	0,3	0,6
$X = 2$	0,1	0,2	0,1	0,4
total	0,3	0,3	0,4	1

Dans cet exemple les variables aléatoires X et Y ***ne sont pas indépendantes*** car, par exemple,

$$P(X = 1 \cap Y = 1) \neq P(X = 1) \times P(Y = 1)$$

Application/Exercice 3

3. Opérations sur les variables aléatoires

Dans ce paragraphe X *et* Y sont deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω et telles que :

$$X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\} \text{ et } Y(\Omega) = \{y_1, \ldots, y_m\}.$$

Définition

On appelle variable aléatoire **somme** S de X et de Y, et l'on note $S = X + Y$, la variable aléatoire définie sur $S(\Omega) = \{s_1 ; \ldots ; s_n\}$ par :

$$P(S = s_i) = P(\{ w_i \in \Omega \mid X(w_i) + Y(w_i) = s_i \}).$$

Remarque

$(S = s_i)$ est ainsi composé de tous les événements dont la somme donne s_i.

Exemple

Avec les données du § 1, considérons la variable aléatoire S « gain total réalisé en euros ».
On a $S(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$, et la loi de S est définie par :

$S = X+Y$	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 0$	$1/18$ $S = 1$	$1/9$ $S = 2$
$X = 1$	$1/6$ $S = 2$	$1/3$ $S = 3$
$X = 2$	$1/9$ $S = 3$	$2/9$ $S = 4$

c'est-à-dire en regroupant les valeurs des probabilités pour $S = 2$ et $S = 3$:

k	1	2	3	4	total
$P(S = k)$	$1/18$	$5/18$	$4/9$	$2/9$	1

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{5}{18}$$

Application/Exercice 4

Définition

On appelle variable aléatoire **différence** D de X et de Y, et l'on note $D = X - Y$ la variable aléatoire définie sur $D(\Omega) = \{d_1 ; \dots ; d_n\}$ par :

$$P(D = d_i) = P(\{w_i \in \Omega \mid X(w_i) - Y(w_i) = d_i\}).$$

On appelle variable aléatoire **produit** Z de X et de Y, et l'on note $Z = XY$ la variable aléatoire définie sur $Z(\Omega) = \{q_1, \dots ; q_n\}$ par :

$$P(Z = q_i) = P(\{w_i \in \Omega \mid X(w_i).Y(w_i) = q_i\}).$$

Exemple

$D = X - Y$	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 0$	$1/18$ $D = -1$	$1/9$ $D = -2$
$X = 1$	$1/6$ $D = 0$	$1/3$ $D = -1$
$X = 2$	$1/9$ $D = 1$	$2/9$ $D = 0$

$Z = XY$	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 0$	$1/18$ $Z = 0$	$1/9$ $Z = 0$
$X = 1$	$1/6$ $Z = 1$	$1/3$ $Z = 2$
$X = 2$	$1/9$ $Z = 2$	$2/9$ $Z = 4$

$D(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1\}$ *et* $Z(\Omega) = \{0, 1, 2, 4\}$ et les lois des variables aléatoires réelles D et Z sont définies par :

k	-2	-1	0	1	*total*
$P(D = k)$	$1/9$	$7/18$	$7/18$	$1/9$	1

$$\frac{1}{18} + \frac{1}{3} = \frac{7}{18}$$

k	0	1	2	4	*total*
$P(Z = k)$	$1/6$	$1/6$	$4/9$	$2/9$	1

$$\frac{1}{18} + \frac{1}{9} = \frac{1}{6}$$

Application/Exercice 5

> *Propriété*
>
> Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω alors :
>
> $$E(X+Y) = E(X) + E(Y) \qquad E(X-Y) = E(X) - E(Y)$$
>
> Si de plus X et Y sont **indépendantes** alors $E(XY) = E(X).E(Y)$

Exemple

Avec les données du § 1 on a :

$$E(X)=\frac{1}{6}.0+\frac{1}{2}.1+\frac{1}{3}.2=\frac{7}{6} \qquad E(Y)=\frac{1}{3}.1+\frac{2}{3}.2=\frac{5}{3}$$

Par ailleurs :

$E(X+Y)=\frac{1}{18}.1+\frac{5}{18}.2+\frac{4}{9}.3+\frac{2}{9}.4=\frac{17}{6}$ On a bien $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.

$E(X-Y)=\frac{1}{9}.(-2)+\frac{7}{18}.(-1)+\frac{7}{18}.0+\frac{1}{9}.1=-\frac{1}{2}$ On a bien $E(X-Y) = E(X) - E(Y)$.

De même :

$E(X.Y)=\frac{1}{6}.0+\frac{1}{6}.1+\frac{4}{9}.2+\frac{2}{9}.4=\frac{35}{18}$ et on a bien $E(X.Y) = E(X) \times E(Y)$ avec X et Y indépendantes

Application/Exercice 6

> *Propriété*
>
> Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles **indépendantes** définies sur un même univers W alors :
>
> $$V(X+Y) = V(X) + V(Y) \qquad V(X-Y) = V(X) + V(Y)$$

Exemple

Avec les données du § 1 on a :

$$E(X^2) = \frac{1}{6}.0^2 + \frac{1}{2}.1^2 + \frac{1}{3}.2^2 = \frac{11}{6}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{11}{6} - \left(\frac{7}{6}\right)^2 = \frac{17}{36} \qquad V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 3 - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

Par ailleurs, pour les variables aléatoires $X + Y$ et $X - Y$:

k	1	2	3	4	total
$P(X+Y=k)$	1/18	5/18	4/9	2/9	1

k	-2	-1	0	1	total
$P(X-Y=k)$	1/9	7/18	7/18	1/9	1

$$E((X+Y)^2) = \frac{1}{18}.1^2 + \frac{5}{18}.2^2 + \frac{4}{9}.3^2 + \frac{2}{9}.4^2 = \frac{157}{18}$$

$$V(X+Y) = E((X+Y)^2) - E((X+Y))^2 = \frac{157}{18} - \left(\frac{17}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$$

On a bien $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

$$E((X-Y)^2) = \frac{1}{9}.(-2)^2 + \frac{7}{18}.(-1)^2 + \frac{7}{18}.0^2 + \frac{1}{9}.1^2 = \frac{17}{18}$$

$$V(X-Y) = E((X-Y)^2) - E((X-Y))^2 = \frac{17}{18} - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{36}$$

On a bien $V(X-Y) = V(X) + V(Y)$.

Application/Exercice 7

Propriété

Si $X_1, X_2, \ldots. X_n$ sont n variables aléatoires définies sur un même univers W alors :

$$E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = E(X_1) + \ldots + E(X_n)$$

Si de plus $X_1, X_2, \ldots X_n$ sont **deux à deux indépendantes** alors :

$$V(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = V(X_1) + \ldots + V(X_n)$$

$$E(X_1 . X_2 . \ldots X_n) = E(X_1) \ldots . E(X_n)$$

4. Stabilité de la loi normale

Théorème

Si X et Y sont deux variables aléatoires ***indépendantes*** qui suivent des lois normales alors les variables aléatoires $aX + b$, $X + Y$ et $X - Y$ suivent une loi normale.

En particulier :

Si X et Y sont ***indépendantes*** et suivent les lois normales $\mathcal{N}(m_1 ; \sigma_1)$ et $\mathcal{N}(m_2 ; \sigma_2)$, alors :

$$X + Y \text{ suit la loi } \mathcal{N}(m_1 + m_2 ; \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$$

$$X - Y \text{ suit la loi } \mathcal{N}(m_1 - m_2 ; \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$$

Exemples

1. Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(10 ; 3)$, alors la variable aléatoire $2X - 20$ suit une loi normale et a pour paramètres :

$$E(2X - 20) = 2.E(X) - 20 = 20 - 20 = 0 \text{ elle est centrée.}$$

$$V(2X - 10) = 4.V(X) = 12 \text{ et } \sigma = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ elle n'est pas réduite.}$$

$$2X - 20 \text{ suit la loi normale } \mathcal{N}(0 ; 2\sqrt{3})$$

2. Si X et Y sont ***indépendantes*** et suivent les lois normales $\mathcal{N}(20 ; 3)$ et $\mathcal{N}(10 ; 4)$, alors :

$X + Y$ suit la loi $\mathcal{N}(20+10 ; \sqrt{3^2 + 4^2})$ c'est-à-dire la loi $\mathcal{N}(30 ; 5)$

$X - Y$ suit la loi $\mathcal{N}(20-10 ; \sqrt{3^2 + 4^2})$ c'est-à-dire la loi $\mathcal{N}(10 ; 5)$

Remarque

Le théorème se généralise au cas de n variables aléatoires normales indépendantes.

Application/Exercice 8

5. Le théorème de la limite centrée

Théorème

On considère n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ **deux à deux indépendantes,** définies sur un même univers Ω, de même espérance m et de variance σ^2.
Si n est « suffisamment grand » alors :

La variable aléatoire $X_1 + \ldots + X_n$ suit approximativement la loi normale $\mathcal{N}(n.m\ ;\ \sigma\sqrt{n})$

Remarques

1. Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$, (dont la loi peut ne pas être connue), ne suivent pas nécessairement une loi normale, mais leur somme, pour n suffisamment grand, suit approximativement une loi normale.
2. On considère que n est « suffisamment grand » pour $n \geq 30$.

Exemple

Une étude statistique a permis d'établir que la dépense moyenne des clients d'un grand magasin était de 40 € avec un écart type de 5 €. En moyenne, trois cent clients se présentent un jour donné dans ce magasin. Leurs achats sont supposés indépendants.
Notons X_i la dépense du client i, avec $i \in \{1, 2, \ldots, 300\}$: $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_{300}$ représente alors le chiffre d'affaire attendu par le magasin.
$n \geq 30$: on peut donc appliquer le théorème de la limite centrée à la variable aléatoire S qui suit approximativement la loi normale $\mathcal{N}(300 \times 40\ ;\ 5\sqrt{300})$ c'est-à-dire la loi $\mathcal{N}(12\,000\ ;\ 50\sqrt{3})$
La probabilité pour que le chiffre d'affaire dépasse par exemple 12 100 € sera donc

$$P(S > 12\,100) = 1 - P(S \leq 12\,100) = 1 - P\left(\frac{S - 12000}{50\sqrt{3}} \leq \frac{12100 - 12000}{50\sqrt{3}}\right)$$

$$P(S > 12\,100) \approx 1 - \Pi(1{,}15) \approx 0{,}12$$

Application/Exercice 9

Exercices autocorrectifs

Applications

Loi d'un couple

Exercice 1

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes indiscernables, et l'on considère les variables aléatoires réelles X *et* Y définies par :

$X = 0$ si la carte tirée est un carreau, $X = 1$ sinon.

$Y = 0$ si la carte tirée est une figure, $Y = 1$ sinon.

Déterminer la loi conjointe du couple $(X ; Y)$.

Exercice 2

La loi conjointe d'un couple de variables aléatoires X *et* Y est définie par le tableau :

	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$
$X = 1$	0,2	0,1	0,3
$X = 2$	0,1	0,2	0,1

Déterminer ses lois marginales.

Exercice 3

1. La loi du couple $(X ; Y)$ est définie par le tableau :

	$Y = -1$	$Y = 0$	$Y = 1$	*total*
$X = -1$	0,15	0,15	0,3	0,6
$X = 1$	0,1	0,2	0,1	0,4
total	0,3	0,3	0,4	1

Est-ce que X et Y sont indépendantes ?

2. X et Y étant des variables aléatoires indépendantes, retrouver la loi du couple $(X\,;Y)$:

	$Y = 1$	$Y = 2$	total
$X = 1$			0,1
$X = 2$			0,6
$X = 3$			0,3
total	0,7	0,3	1

Exercice 4

On reprend les données de l'exercice 2.

1. Compléter le tableau :

$S = X+Y$	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$
$X = 1$	$S = \ldots$	$S = \ldots$	$S \ldots$
$X = 2$	$S = \ldots$	$S = \ldots$	$S \ldots$

2. En déduire le tableau définissant la loi de la variable aléatoire $S = X + Y$:

k	2	3	4	5	total
$P(D = k)$					1

Exercice 5

On reprend les données de l'exercice 2.

1. Compléter le tableau :

$D=X-Y$	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$
$X = 1$			
$X = 2$			

$Z=X.Y$	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$
$X = 1$			
$X = 2$			

2. En déduire le tableau définissant les lois des variables aléatoires réelles $D = X - Y$ et $Z = X.Y$:

k	-2	-1	0	1	total
$P(D = k)$					1

k	1	2	3	4	6	total
$P(Z = k)$						1

Exercice 6

On reprend les données de l'exercice 2.

1. Calculer $E(X)$, $E(Y)$.
2. Calculer $E(X+Y)$ et vérifier que $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.
3. Calculer $E(X-Y)$ et vérifier que $E(X-Y) = E(X) - E(Y)$.
4. Calculer $E(X.Y)$. A-t-on $E(XY) = E(X).E(Y)$? Pourquoi ?

Exercice 7

On reprend les données de l'exercice 2.

1. Calculer $V(X)$, $V(Y)$ et $V(X+Y)$.
2. A-t-on $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$? Pourquoi ?

Stabilité de la loi normale

Exercice 8

X et Y sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent les lois normales $\mathcal{N}(1\,;\,1)$ et $\mathcal{N}(2\,;\,2)$, alors :

1. Quelles lois suivent les variables aléatoires $X+Y$ et $X-Y$?
2. Calculer la probabilité des événements $2 < X+Y < 4$ et $X-Y < 0$.

Théorème de la limite centrée

Exercice 9

On considère 60 variables aléatoires deux à deux indépendantes, définies sur un même univers Ω, de même espérance $m = 20$ et de variance $\sigma^2 = 16$.

On note $S_{60} = X_1 + X_2 + \ldots + X_{60}$ et $f_{60} = \dfrac{X_1 + \ldots + X_{60}}{60}$

1. Montrer que: $E(S_{60}) = 1\,200, V(S_{60}) = 960$ et $\sigma(S_{60}) = 8.\sqrt{15}$

2. Calculer $E(f_{60}), V(f_{60})$ et $\sigma(f_{60})$.

3. Par quelle loi peut-on approcher la loi de S_{60} ? la loi de f_{60} ?

4. En déduire une valeur approchée de la probabilité des événements $S_{60} > 1\,280$ et $19 \leq f_{60} \leq 21$.

Approfondissements

Exercice 10

Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules rouges. On tire successivement avec remise 2 boules de cette urne, et l'on considère les variables aléatoires réelles X et Y définies par :

$X = 1$ si la première boule tirée est blanche, $X = 0$ sinon.

$Y = 1$ si la deuxième boule tirée est blanche, $Y = 0$ sinon.

1. Déterminer la loi du couple (X,Y) ainsi que les lois marginales.

2. Calculer les espérances mathématiques $E(X), E(Y)$, et les variances $V(X), V(Y)$.

3. Est-ce que les variables aléatoires sont indépendantes ?

4. Calculer l'espérance mathématique et la variance $X + Y$.

Exercice 11

Des statistiques établies sur la fréquentation d'un supermarché le samedi, permettent d'assimiler le nombre de clients un samedi donné à une variable aléatoire X de loi $\mathcal{N}(350\,;\,25)$ et leurs dépenses à une suite de variables aléatoires normales Y_i de moyenne 120 € et d'écart type 20 €.

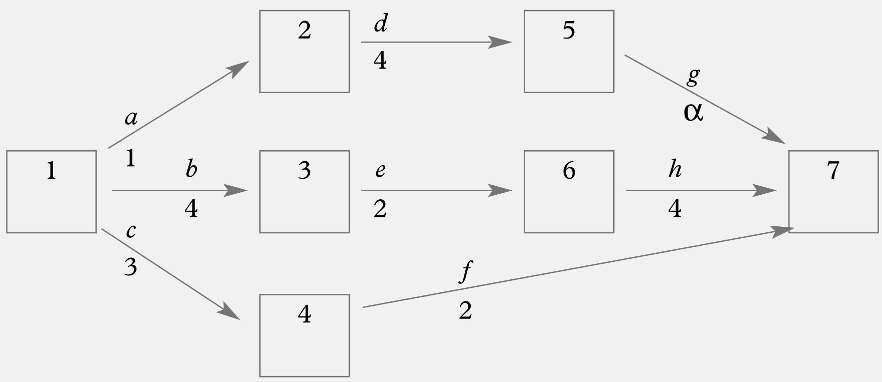
1. Calculer la probabilité pour que le supermarché ait un samedi donné plus de 422 clients ?

2. Que représente la variable aléatoire $Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{350}$? Quelle est sa loi ?

3. Calculer la probabilité pour que 350 clients permettent au supermarché de ne réaliser qu'un chiffre d'affaire inférieur à 41 000 € le samedi.
4. a) Quel devrait être le nombre minimum n_0 de clients pour que le chiffre d'affaire du supermarché dépasse le samedi 50 000 € avec une probabilité supérieure ou égale à 0,9 ?
b) Est-ce qu'une telle éventualité est envisageable plus de 1 fois sur 100 ?
5. Peut on déterminer n_0 si les variables aléatoires Y_i ont pour espérance 120 € et écart type 20 € mais ne sont plus nécessairement normales ?

Exercice 12

Pour la réalisation d'un nouveau projet une entreprise estime qu'elle doit réaliser les 8 tâches *a, b, c, d, e, f, g et h* en tenant compte de l'ordre et des durées moyennes (exprimées en jours) indiquées ci-dessous :



L'étape *g* dure en moyenne α jours.
1. Déterminer la valeur minimale de α afin que (*a, d, g*) soit l'unique chemin critique.

On prend désormais $\alpha = 6$.

2. Quelle est la durée moyenne de (*a, d, g*) ?
3. On admet que les durées des tâches *b, e et h* sont 3 variables aléatoires indépendantes X, Y et Z qui suivent respectivement les lois $\mathcal{N}(4\,;\,0{,}5)$, $\mathcal{N}(2\,;\,0{,}5)$ et $\mathcal{N}(4\,;\,0{,}5)$.
a) Que représente la variable aléatoire $X + Y + Z$? Quelle loi suit-elle ?
b) Calculer la probabilité $P(X + Y + Z > 11)$.

Exercice 13

Une étude statistique a permis d'établir que la fréquence moyenne des réclamations des clients après la vente d'un produit A représentait 5 % des ventes.
Deux cent clients ont acheté le produit A. On suppose que leurs achats sont indépendants.
Quelle la probabilité pour que l'on observe plus de 16 réclamations ? Moins de 5 réclamations ?

Travaux pratiques

TP1

D'après sujet BTS informatique de gestion 1993

Les parties A et B de l'exercice sont indépendantes.

Dans un parking d'un centre ville, les différents niveaux sont desservis par deux ascenseurs A et B qui fonctionnent indépendamment l'un de l'autre.

Partie A

On s'intéresse dans cette partie au fonctionnement de ces ascenseurs. Pour chaque ascenseur la probabilité de tomber en panne au cours d'une année est 0,1.

On considère les événements suivants :

E_1 «aucun des deux ascenseurs ne tombe en panne»

E_2 «au moins un ascenseur tombe en panne»

Calculer les probabilités respectives p_1 *et* p_2 des événements E_1 et E_2.

Partie B

On s'intéresse maintenant à l'utilisation des ascenseurs pendant une période donnée T.

On considère les variables aléatoires X et Y mesurant le nombre de personnes qui prennent respectivement les ascenseurs A et B durant une telle période T.

Ces variables aléatoires X et Y sont ***indépendantes*** et suivent respectivement les lois normales :

$$\mathcal{N}(22\ ;\ 4) \text{ et } \mathcal{N}(18\ ;\ 3).$$

Soit la variable aléatoire $Z = X + Y$. On admet que Z suit une loi normale.

1. Justifiez que l'espérance mathématique et l'écart type de Z sont respectivement 40 et 5.

2. Calculer la probabilité de l'événement $34 \leq Z \leq 48$.

3. Déterminer α réel positif, tel que la probabilité de l'événement « $40 - \alpha \leq Z \leq 40 + \alpha$ » soit égale à 0,95.

TP2

Sujet BTS informatique de gestion 2002

Toutes les probabilités demandées dans cet exercice seront données sous leur forme décimale arrondie à 10^{-3} près.

La partie C peut être traitée indépendamment des deux autres.

Une entreprise vend 2 types de meubles : M_1, M_2 respectivement 419 euros et 509 euros l'unité.

La demande mensuelle en meubles M_1 est une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(85\ ;15)$.
La demande mensuelle en meubles M_2 est une variable aléatoire Y qui suit la loi normale $\mathcal{N}(52\ ;\ 8)$.
On suppose que X et Y sont indépendantes.

Partie A

Dans cette question, on suppose que le stock est suffisant pour satisfaire la demande. Ainsi, l'entreprise vend mensuellement X meubles M_1 et Y meubles M_2.

Calculer les probabilités (un mois donné) d'avoir les évènements suivants :

V_1 : on vendra au plus 80 meubles M_1.
V_2 : on vendra au plus 70 meubles M_2.

Partie B

Dans cette question, le stock n'est pas obligatoirement suffisant pour satisfaire la demande. L'entreprise dispose en début de mois d'un stock de 80 meubles M_1 et 70 meubles M_2.

Quelles sont les probabilités des événements suivants :

S_1 : il y aura rupture de stock en meubles M_1 ;
S_2 : il y aura rupture de stock en meubles M_2 ;
S : il y aura rupture de stock (en meubles M_1 ou M_2) ?

(La rupture de stock concerne la fin du mois, et signifie que la demande est supérieure au stock).

Partie C

Un mois donné est dit rentable si le chiffre d'affaires de ce mois dépasse 70 000 euros.

1. Exprimer (en euros) le chiffre d'affaires Z du mois en fonction de X *et* Y.
2. Calculer l'espérance mathématique de Z.
3. On admet que Z suit la loi normale $\mathcal{N}(62083\ ;\ 7400)$.
Quelle est la probabilité qu'un mois donné soit rentable ?
4. On note R le nombre de mois rentables d'un semestre, et on suppose l'indépendance entre les événements « rentable ou non rentable » des mois successifs.
Justifier le résultat suivant : R suit la loi binomiale $\mathcal{B}(6\ ;\ 0{,}142)$.
5. Quelle est la probabilité que sur les 6 mois d'un semestre, on en ait au moins deux rentables ?

Échantillonnage

Séquence 4

➤ Prérequis

- Loi binomiale
- Opérations sur les variables aléatoires
- Théorème de la limite centrée

➤ Objectifs

- Étude du comportement d'échantillons aléatoires extraits d'une population aux caractéristiques connues

➤ Contenu

1. Généralités – Exemple préliminaire

L'échantillonnage consiste à étudier les propriétés de sous-ensembles aléatoires d'individus (les échantillons aléatoires), dans une population dont les caractéristiques (moyenne et écart type) sont connues.

Exemple

Dans une population de lycéens le poids a pour moyenne $m = 75$ kg et pour écart type $\sigma = 8$ kg.

Nous allons prélever dans cette population n individus **avec** remise.

Soit X_1 la variable aléatoire « poids du premier individu qui sera choisi »

$$E(X_1) = 75 \quad \text{et} \quad \sigma(X_1) = 8$$

Soit X_n la variable aléatoire « poids du $n^{ième}$ individu qui sera choisi »

$$E(X_n) = 75 \quad \text{et} \quad \sigma(X_n) = 8$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ constituent un échantillon aléatoire de taille n.

Considérons $\overline{X_n} = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$

$\overline{X_n}$ est la variable aléatoire « poids moyen dans l'échantillon aléatoire de taille n ».

- $E(\overline{X_n}) = E\left(\dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = \dfrac{E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n)}{n} = 75$

- $V(\overline{X_n}) = V\left(\dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = \dfrac{V(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)}{n^2}$

$V(\overline{X_n}) = \dfrac{V(X_1) + V(X_2) + \ldots + V(X_n)}{n^2}$ (car les tirages sont indépendants.)

$V(\overline{X_n}) = \dfrac{n \times 8^2}{n^2} = \dfrac{64}{n}$

$\overline{X_n}$ a donc pour paramètres $E(\overline{X_n}) = 75$; $V(\overline{X_n}) = \dfrac{64}{n}$ et $\sigma(\overline{X_n}) = \dfrac{8}{\sqrt{n}}$

En particulier pour les échantillons de taille 100 on a :

$$E\left(\overline{X_{100}}\right) = 75$$

$$V\left(\overline{X_{100}}\right) = 0,64$$

$$\text{et } \sigma\left(\overline{X_{100}}\right) = 0,8$$

Si les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ suivent une loi normale (ici la loi $\mathcal{N}(75\ ;\ 8)$) alors $\overline{X}_{100}$ suit la loi $\mathcal{N}(75\ ;\ 0{,}8)$ et $\dfrac{\overline{X}_{100} - 75}{0{,}8}$ suit la loi $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.

Or d'après la table de la loi normale $P\left(-1{,}96 < \dfrac{\overline{X}_{100} - 75}{0{,}8} < 1{,}96\right) = 0{,}95$

d'où $P\left(75 - 1{,}96 \times 0{,}8 < \overline{X_{100}} < 75 + 1{,}96 \times 0{,}8\right) = 0{,}95$

c'est-à-dire $P\left(73{,}432 < \overline{X_{100}} < 76{,}568\right) = 0{,}95$.

Interprétations :

1. Il y a 95 % de chances pour que la moyenne des poids de cet échantillon aléatoire de taille $n = 100$ se situe entre 73,4 kg et 76,6 kg.
2. Pour 95 % des échantillons aléatoires de taille $n = 100$ on doit trouver une moyenne comprise entre 73,4 kg et 76,6 kg.

Remarque

Pour constituer des échantillons on procède de 2 façons :

- Les prélèvements se font ***avec*** remise après tirage de l'individu : la population n'est pas modifiée après chaque tirage et ces derniers sont indépendants.

  On parle alors **d'échantillons non exhaustifs**.
- Les prélèvements se font ***sans*** remise après tirage de l'individu : la population est modifiée après chaque tirage et ces derniers ne sont pas indépendants.

  On parle alors **d'échantillons exhaustifs**.

Application/Exercice 1

2. Distribution d'échantillonnage des moyennes

2A. Pour les échantillons extraits avec remise (échantillons non exhaustifs)

On étudie sur une population un caractère aléatoire pour lequel la moyenne m et l'écart type σ sont connus.

On va tirer au hasard un individu dans la population.

Soit X_i la variable aléatoire « valeur de caractère du $i^{ième}$ individu ». On a $E(X_i) = m$ et $V(X_i) = \sigma^2$.

Un échantillon aléatoire de taille n est obtenu en répétant l'opération n fois, et l'on pose alors

$$\overline{X_n} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$$

La variable aléatoire $\overline{X_n}$ est la valeur moyenne de l'échantillon de taille n étudié.

$$E(\overline{X_n}) = E\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) = m$$

Si le tirage des individus de l'échantillon est fait avec remise alors les variables aléatoires X_i sont indépendantes et $V(\overline{X_n}) = \dfrac{n.V(X_i)}{n^2} = \dfrac{\sigma^2}{n}$.

Propriété 1

La moyenne $\overline{X_n}$ de tout échantillon aléatoire de taille n, extrait *avec remise* d'une population de moyenne m et d'écart type σ, suit une loi d'espérance $E(\overline{X_n}) = m$ et d'écart type $\sigma(\overline{X_n}) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Remarques

1. Lorsque n est «grand» (et l'on admet que cela est vrai pour $n > 30$), le théorème Central-Limite s'applique à la variable aléatoire $\dfrac{\overline{X_n} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ qui suit approximativement la loi normale $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

2. Si n est quelconque on ne pourra conclure que si les X_i suivent une loi normale.

Exemple 1

Une machine produit un très grand nombre de pièces de poids moyen m = 150 g avec un écart type σ = 5 g. La moyenne des poids $\overline{X_{100}}$ de tout échantillon aléatoire de n = 100 pièces extrait avec remise de cette population a pour paramètres : $E\left(\overline{X_{100}}\right)$ = 150 et $\sigma\left(\overline{X_{100}}\right) = \dfrac{5}{\sqrt{100}} = 0{,}5$.

Si T est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0 ; 1)$ on sait que $P(-1{,}96 < T < 1{,}96) = 0{,}95$ (cf. exercice 1)

$$\text{On a donc } P\left(-1{,}96 < \dfrac{\overline{X_{100}} - m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} < 1{,}96\right) = 0{,}95$$

$$\text{c'est-à-dire } P\left(m - 1{,}96.\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} < \overline{X_{100}} < m + 1{,}96.\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0{,}95$$

$$P\left(150 - 1{,}96.\dfrac{1}{2} < \overline{X_{100}} < 150 + 1{,}96.\dfrac{1}{2}\right) = 0{,}95$$

$$P\,(149{,}02 < \overline{X_{100}} < 150{,}98) = 0{,}95$$

Dans 95 % des cas le poids moyen des échantillons aléatoires de 100 pièces devrait être compris entre 149,02 g et 150,98 g.

Application/Exercice 2

2B. Pour les échantillons extraits sans remise (échantillons exhaustifs)

Propriété 2

La moyenne $\overline{X_n}$ de tout échantillon aléatoire de taille n, extrait ***sans remise*** d'une population d'effectif N, suit une loi de paramètres $E(\overline{X_n}) = m$ et $\sigma(\overline{X_n}) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \times \sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}$.

Exemple 2

Une machine produit N = 1 000 pièces de poids moyen m = 150 g avec un écart type σ = 5 g.

La moyenne des poids $\overline{X_{100}}$ de tout échantillon aléatoire de n = 100 pièces extrait *sans remise* de cette population a pour paramètres

$$E(\overline{X_{100}})=150 \text{ et } \sigma(\overline{X_{100}})=\frac{5}{\sqrt{100}}\times\sqrt{\frac{N-100}{N-1}}=\frac{5}{\sqrt{100}}\times\sqrt{\frac{900}{999}}\approx 0,4746$$

Si $n > 30$ on applique le théorème de la limite centrée à $\overline{X_{100}}$ et

$$P\,(150 - 1,96\times0,4746 < \overline{X_{100}} < 150 + 1,96\times0,4746) = 0,95$$

$$P\,(149,07 < \overline{X_{100}} < 150,93) = 0,95$$

Dans 95 % des cas le poids moyen des échantillons aléatoires de 100 pièces devrait être compris entre 149,07 g et 150,93 g.

Remarques

1. Si la population totale est très grande comparée à l'échantillon, c'est-à-dire si N est très grand comparé à n alors $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\approx 1$, un échantillon exhaustif se comporte approximativement comme un échantillon non exhaustif.
2. Lorsque n est grand ($n > 30$) le théorème de la limite centrée s'applique.

Application/Exercice 3

3. Distribution d'échantillonnage des fréquences

3A. *Pour les échantillons extraits avec remise (échantillons non exhaustifs)*

On étudie sur une population un caractère pour lequel la proportion p des éléments vérifiant une propriété est connue.

On tire au hasard et **avec remise** n individus dans la population : on obtient ainsi un échantillon aléatoire de taille n.

Si l'on note X_n la variable aléatoire « **nombre** d'individus vérifiant la propriété » alors X_i est une variable aléatoire binomiale de loi $\mathscr{B}(n\,;p)$ (épreuve répétée dans les mêmes conditions et de façon indépendante avec une probabilité p de « succès »).

$$E(X_n) = np \text{ et } V(X_n) = np(1-p)$$

Propriété 3

La **nombre** X_n d'individus vérifiant une propriété dans tout échantillon aléatoire de taille n, extrait ***avec remise***, suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;p)$.

La **fréquence** $f_n = \dfrac{X_n}{n}$ d'un caractère dans tout échantillon aléatoire de taille n, extrait ***avec remise***, a pour espérance $E(f_n) = p$ et pour écart type $\sigma(f_n) = \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$.

Notons $f_n = \dfrac{X_n}{n}$ la variable aléatoire « **fréquence** du caractère dans les échantillons de taille n étudiés ».

On a : $E(f_n) = E\left(\dfrac{X_n}{n}\right) = p$ et $V(f_n) = V\left(\dfrac{X_n}{n}\right) = \dfrac{V(X_n)}{n^2} = \dfrac{p(1-p)}{n}$

Exemple 1

Une machine produit des pièces en grande quantité avec 5 pièces défectueuses sur 100. *(p = 0,05)*

On prélève des échantillons de 20 pièces avec remise et l'on note :

X_{20} la variable aléatoire « nombre de pièces défectueuses dans les échantillons de taille 20. »

f_{20} la variable aléatoire « fréquence d'une pièce défectueuse dans les échantillons de taille 20. » $f_{20} = \dfrac{X_{20}}{20}$

La variable aléatoire X_{20} suit la loi binomiale $\mathscr{B}(20\,;0{,}05)$.

Dans un échantillon de 20 pièces la probabilité pour que la fréquence de présence d'une pièce défectueuse soit :

a) inférieure à 0,06 est :

$$P(f_{20} < 0{,}06) = P(X_{20} < 1{,}2) = C_{20}^{0}0{,}05^{0}.0{,}95^{20} + C_{20}^{1}0{,}05^{1}.0{,}95^{19} \approx 0{,}736.$$

b) comprise entre à 0,04 et 0,06 est :

$$P(0{,}04 \le f_{20} \le 0{,}06) = P(0{,}8 \le X_{20} \le 1{,}2) = C_{20}^{1}0{,}05^{1} \times 0{,}95^{19} \approx 0{,}377.$$

Application/Exercice 4

Remarques

1. X_n suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n\ ;p)$ et on utilise cette loi lorsque n est faible.

2. Lorsque n est « grand » (et l'on admet que cela est vrai pour $n > 30$), le théorème Central-Limite s'applique à la variable aléatoire $\dfrac{f_n - p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}$ qui suit approximativement la loi normale $\mathscr{N}(0\ ;1)$.

Exemple 2

On prélève des échantillons de 625 pièces avec remise et l'on note :

X_{625} la variable aléatoire « nombre de pièces défectueuses dans les échantillons de taille 625. »

f_{625} la variable aléatoire « fréquence d'une pièce défectueuse dans les échantillons de taille 625. »

La variable aléatoire X_{625} suit la loi binomiale $\mathscr{B}(625\ ;\ 0{,}05)$ et f_{625} suit approximativement la loi normale d'espérance $E(f_{625}) = 0{,}05$ et d'écart type $\sigma(f_{625}) = \sqrt{\dfrac{0{,}05 \times 0{,}95}{625}} = 0{,}0087$.

Dans un échantillon de 625 pièces la probabilité pour que la fréquence de présence d'une pièce défectueuse soit :

a) inférieure à 0,06 est :

$$P\left(f_{625} < 0{,}06\right) = P\left(\frac{f_{625} - 0{,}05}{0{,}0087} < \frac{0{,}06 - 0{,}05}{0{,}0087}\right) \approx P\left(\frac{f_{625} - 0{,}05}{0{,}0087} < 1{,}149\right)$$

$$P(f_{625} < 0{,}06) \approx \Pi(1{,}149) = 0{,}87\ldots$$

b) comprise entre à 0,04 et 0,06 est :

$$P\left(0{,}04 < f_{625} < 0{,}06\right) = P\left(\frac{0{,}04 - 0{,}05}{0{,}0087} < \frac{f_{625} - 0{,}05}{0{,}0087} < \frac{0{,}06 - 0{,}05}{0{,}0087}\right) \approx P\left(-1{,}49 < \frac{f_{625} - 0{,}05}{0{,}0087} < 1{,}149\right)$$

$$P(0{,}04 < f_{625} < 0{,}06) \approx 2.\Pi(1{,}149) - 1 = 0{,}749\ldots$$

Application/Exercice 5

3B. Pour les échantillons extraits sans remise (échantillons exhaustifs)

Propriété 4

La **fréquence** f_n d'un caractère dans tout échantillon aléatoire de taille n, extrait ***sans remise d'une population d'effectif N***, suit une loi d'espérance $E(f_n) = p$ et d'écart type $\sigma(f_n) = \sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}} \times \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$.

Remarques

1. Lorsque n est « grand » (et l'on admet que cela est vrai pour $n > 30$), le théorème Central-Limite s'applique à la variable aléatoire $\dfrac{f_n - p}{\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}} \times \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}$ qui suit approximativement la loi $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.

2. Si la population totale est très grande comparée à l'échantillon, c'est-à-dire si N est très grand comparé à n alors $\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}} \approx 1$, un échantillon **exhaustif** se comporte approximativement comme un échantillon **non exhaustif.**

Application/Exercice 6

Exercices autocorrectifs

Applications

Des résultats simples et importants pour l'échantillonnage

Exercice 1

T est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

On appelle intervalle de pari (symétrique) de T au seuil de confiance α $(0 \leq \alpha \leq 1)$, ou au seuil de risque $1 - \alpha$, l' intervalle $[-a ; a]$ pour lequel $P(-a < T < a) = \alpha$.

1. Déterminer le réel $a > 0$ vérifiant $P(-a < T < a) = 0,95$ c'est-à-dire l'intervalle de pari (symétrique) de T au seuil de confiance 95 % (ou au seuil de risque 5 %).

2. Calculez les probabilités $P(-2,58 < T < 2,58)$ et $P(-3,29 < T < 3,29)$. Qu'en concluez-vous ?

Distribution des moyennes

Exercice 2

Une usine fabrique des ampoules dont la durée de vie est de 1 000 heures avec un écart type de 50 heures. On prélève des échantillons de 200 ampoules avec remise.

1. Que peut-on dire de la moyenne $\overline{X_{200}}$ de ces échantillons ?

2. Sur 100 échantillons de 200 ampoules combien en trouverait-on dont la moyenne de durée de vie serait inférieure à 995 heures ?

Exercice 3

Reprendre l'exercice 2 dans le cas d'un tirage exhaustif si l'usine fabrique un lot spécial de 2 000 ampoules aux mêmes caractéristiques et prélève des échantillons de 200 ampoules.

Distribution des fréquences

Exercice 4

Un sondage sur les clients fréquentant un supermarché a permis de déterminer que 40 % d'entre eux utilisent régulièrement le produit A.

On propose à un échantillon aléatoire **non exhaustif** (avec remise) de 30 personnes un bon de réduction sur le produit A. Les clients utilisant le produit A, utiliseront le bon de réduction.

Quelle est la probabilité pour que plus de 50 % des personnes de l'échantillon utilisent ce bon ?

On notera X_{30} la variable aléatoire « nombre de personnes qui utiliseront le bon ».

Exercice 5

La population française contient 15 % de gauchers. On prélève des échantillons de 1 000 personnes avec remise et on note f_{1000} la variable aléatoire «fréquence d'un gaucher dans les échantillons de taille 1 000.».

1. Quelle loi suit approximativement $f_{1\,000}$?

2. Quelle est la probabilité pour que de tels échantillons vérifient $f_{1\,000} > 0,16$?

3. Sur 200 échantillons non exhaustifs de 1 000 personnes combien auraient une fréquence de présence d'un gaucher supérieure à 16 % ?

Exercice 6

Reprendre l'exercice 5 dans le cas d'un tirage exhaustif si l'on prélève les 1 000 personnes dans une ville de 5 000 habitants comportant le même pourcentage de gauchers.

Approfondissements

Exercice 7

Une machine produit des pièces en grande quantité avec 5 pièces défectueuses sur 100.

On prélève des échantillons de 20 pièces avec remise et l'on note :

X_{20} la variable aléatoire « nombre de pièces défectueuses dans les échantillons de taille 20. »

f_{20} la variable aléatoire « fréquence d'une pièce défectueuse dans les échantillons de taille 20. »

1. Quelle loi suit la variable aléatoire X_{20} ?

2. Sur 100 échantillons de 20 pièces combien en trouverait-on dont la fréquence de présence d'une pièce défectueuse est supérieure à 0,1 ?

Exercice 8

Au cours des dernières élections dans une grande ville le candidat A a été élu avec 55 % des voix.

On note f_{500} la variable aléatoire «fréquence d'un électeur du candidat A dans les échantillons de taille 500. ».

La population est suffisamment importante pour que les tirages soient assimilés à des tirages avec remise.

1. Quelle loi suit approximativement f_{500} ?

2. Quelle est la probabilité pour que dans de tels échantillons on ait moins de 50 % d'électeurs du candidat A ?

3. Combien faudrait-il prélever d'individus pour que 95 % des échantillons étudiés aient une fréquence de présence d'électeurs du candidat A proche de 0,55 à 10^{-2} près ?

Exercice 9

La population d'une grande ville comporte 20 % d'abonnés à un réseau de téléphones portables.

On interroge un échantillon de n personnes extrait avec remise et l'on note f_n la variable aléatoire «fréquence de présence de ces abonnés ».

Combien de personnes faudrait-il interroger pour que 90 % des échantillons étudiés aient une fréquence de présence de ces abonnés supérieure à 19,5 % ?

Exercice 10

(d'après sujet BTS)

Les Parties I et II de l'exercice sont indépendantes.

Chaque résultat sera donné avec trois décimales.

Une machine fabrique en grande série des disques de verre dont le diamètre doit être de 30 millimètres.

On appelle X la variable aléatoire qui à chaque disque, pris au hasard, associe son diamètre exprimé en millimètres.

Cette variable aléatoire suit la loi normale d'espérance mathématique $m = 30$ et d'écart type $\sigma = 0{,}18$.

Partie 1

On considère les événements suivants :

A « le diamètre est supérieur à 29,76 mm » ;

B « le diamètre est inférieur à 30,14 mm ».

1. Calculer $P(A)$ probabilité de l'événement A. Calculer $P(A \cap B)$ probabilité de l'événement « A et B ».
2. En déduire $P_A(B)$ probabilité conditionnelle de B sachant que A est réalisé.

Partie 2

On considère des échantillons de 60 disques prélevés avec remise, dans l'ensemble de la production. Soit M la variable aléatoire qui à tout échantillon de taille 60, associe la moyenne des diamètres des disques de cet échantillon. Cette variable aléatoire suit la loi normale d'espérance mathématique $m = 30$ et d'écart type μ.

1. Donner la valeur de μ.
2. Soit r un réel positif. On appelle E l'événement « $m - r < M < m + r$ »
   Calculer r pour que la probabilité de l'événement E soit égale à 0,98.

Exercice 11

On considère 2 échantillons non exhaustifs (avec remise) indépendants de taille n extraits d'une population distribuée suivant une loi normale de moyenne m et d'écart type $\sigma = \sqrt{2}$.

Soient $\overline{X_n}$ et $\overline{Y_n}$ leurs moyennes respectives.

1. Déterminez les paramètres des variables aléatoires $\overline{X_n}$, $\overline{Y_n}$ et $\overline{X_n} - \overline{Y_n}$.
2. On considère les échantillons de taille $n = 100$.

a) Quelles lois suivent $\overline{X_{100}}$, $\overline{Y_{100}}$ et $\overline{X_{100}} - \overline{Y_{100}}$?

b) Calculer $P(\left|\overline{X_{100}} - \overline{Y_{100}}\right| < 0{,}5)$ c'est-à-dire la probabilité pour que les moyennes d'échantillons qui seraient observées ne diffèrent pas de plus de 0,5.

Programme officiel de mathématiques

(extrait de référentiel)

BTS INFORMATIQUE DE GESTION

Programme de mathématiques

L'enseignement des mathématiques dans les sections de techniciens supérieurs Informatique de gestion se réfère aux dispositions de l'arrêté du 8 juin 2001 fixant les objectifs, les contenus de l'enseignement et le référentiel des capacités du domaine des mathématiques pour les brevets de technicien supérieur.
Les dispositions de cet arrêté sont précisées pour ce BTS de la façon suivante :

I – Lignes directrices

2. Objectifs spécifiques à la section

L'étude de *phénomènes économiques* décrits mathématiquement par des suites ou des fonctions suivant qu'ils sont discrets ou continus, constitue un objectif essentiel de la formation des techniciens supérieurs en informatique de gestion.
On est ainsi amené à résoudre des problèmes numériques nécessitant la mise en œuvre d'*algorithmes* qu'il s'agit de construire, de mettre en forme et dont on comparera éventuellement les performances. En outre, certains problèmes doivent être placés dans un contexte *aléatoire*.
D'une manière générale, *la recherche et la mise en œuvre d'algorithmes* en utilisant les *moyens informatiques* propres à la section sont au centre de cette formation.

3. Organisation des contenus

C'est en fonction de ces objectifs que l'enseignement des mathématiques est conçu ; il peut s'organiser autour de *six pôles* :

- Une valorisation des *aspects numériques et graphiques* pour l'ensemble du programme et l'utilisation à cet effet des *moyens informatiques* appropriés : calculatrice programmable à écran graphique, ordinateur muni d'un tableur, de logiciels de calcul formel ou d'application (modélisation, simulation,…). On habituera les étudiants à la recherche et à la mise en œuvre des algorithmes signalés dans le programme ; aucune connaissance théorique sur ces algorithmes n'est exigible en mathématiques.
- Une initiation aux *opérations logiques* nécessaires à l'enseignement de l'informatique.
- Une étude du comportement global et asymptotique des *suites* et des *fonctions usuelles*, et une exploitation du *calcul différentiel et intégral* pour la résolution *de problèmes numériques*.
- Une initiation au *calcul matriciel*.
- Une initiation au *calcul des probabilités*, centrée sur la description des lois fondamentales, permettant de saisir l'importance des phénomènes aléatoires dans les sciences et techniques économiques ;
- Une initiation à la modélisation et à la résolution de problèmes à l'aide des *graphes*, à mener en étroite collaboration avec les enseignements de l'informatique et de la gestion.

5. Organisation des études

Pour favoriser l'entrée dans la vie professionnelle tout en veillant à l'adaptation aux évolutions scientifiques et technologiques et en permettant d'éventuelles poursuites d'études, l'enseignement des mathématiques comporte une partie obligatoire et une partie facultative.

Pour la partie *obligatoire*, l'horaire hebdomadaire est de 1 heure + 2 heures en première année et de 2 heures + 1 heure en seconde année.

Pour la partie *facultative*, l'horaire hebdomadaire est de 1 heure en première année et de 2 heures en seconde année.

II - Programme

1. Programme obligatoire

Le programme *obligatoire* de mathématiques est constitué des modules suivants :

Calcul des propositions et des prédicats, langage ensembliste, calcul booléen : cf. ci-après.

Suites numériques 1.

Fonction d'une variable réelle, à l'exception des fonctions circulaires et des paragraphes b) et c).

Calcul différentiel et intégral 1, où le TP 3 ne concerne que les calculs d'aires et de valeurs moyennes.

Calcul matriciel.

Graphes.

Statistique descriptive.

Calcul des probabilités 2.

2. Programme facultatif

Le programme *facultatif* de mathématiques est constitué des modules suivants :

Calcul différentiel et intégral 2, en se plaçant dans le cas de fonctions à valeurs *réelles* définies sur un intervalle I de **R** et à l'exception du TP 2.

Dans le TP 1 les exemples seront issus, le plus souvent possible, de phénomènes rencontrés en économie.

Dans le TP 7 le nombre a est réel.

Le TP 9 ne concerne que des calculs d'aires et de valeurs moyennes.

Equations différentielles, à l'exception du paragraphe b) et du TP2 et du TP 3.

Le bandeau est remplacé par :

On s'attachera à relier les exemples étudiés à l'enseignement de l'économie en faisant sentir l'importance de l'étude de phénomènes continus définis par une *loi d'évolution* et une *condition initiale.*

Statistique inférentielle, à l'exception du TP 5.

Fiabilité, à l'exception du paragraphe c) et du TP 2.

CALCUL DES PROPOSITIONS ET DES PRÉDICATS,

LANGAGE ENSEMBLISTE, CALCUL BOOLÉEN

1. Calcul des propositions et des prédicats

L'objectif est d'introduire quelques éléments de logique en liaison avec l'enseignement de l'informatique. Il s'agit d'une brève étude destinée à familiariser les élèves à une pratique élémentaire du calcul portant sur des énoncés. On n'abordera que l'aspect sémantique du calcul logique, l'aspect syntaxique n'est pas au programme.

a) Calcul propositionnel. Proposition, valeur de vérité. Connecteurs logiques : négation (non P, $\neg$P, $\overline{\text{P}}$), conjonction (P et Q, P$\wedge$Q), disjonction (P ou Q, P$\vee$Q), implication, équivalence.	On dégagera les propriétés fondamentales des opérations ainsi introduites, de manière à déboucher ensuite sur un exemple d'algèbre de Boole.
b) Calcul des prédicats. Variable, constante. Quantificateurs $\forall$, $\exists$. Négation de $\forall x$, $p(x)$; négation de $\exists x$, $p(x)$.	On se limitera à des cas simples de prédicats portant sur une, deux ou trois variables. On signalera l'importance de l'ordre dans lequel deux quantificateurs interviennent.

2. Langage ensembliste

Sans développer une théorie générale des ensembles, l'objectif est de consolider et de prolonger les acquis des élèves sur les ensembles et les applications, en liaison avec le calcul des probabilités et l'étude des fonctions d'une part et, d'autre part, avec l'enseignement de l'informatique et de la gestion.

a) Ensemble, appartenance, inclusion. Ensemble *P* (E) des parties d'un ensemble E. Complémentaire d'une partie, intersection et réunion de deux parties.	
Les éléments x d'un ensemble E satisfaisant à une relation $p(x)$ constituent une partie de E.	Cela permet d'interpréter en termes ensemblistes l'implication, la conjonction et la disjonction de deux relations, ainsi que la négation d'une relation. On dégagera les propriétés fondamentales des opérations introduites dans *P* (E), de manière à déboucher ensuite sur un exemple d'algèbre de Boole.
b) Produit cartésien de deux ensembles. Cardinal de E$\times$F dans le cas où E et F sont finis.	On généralisera au cas du produit cartésien de n ensembles finis.
c) Application f d'un ensemble E dans un ensemble F. Image d'une partie A de E ; image réciproque d'une partie B de F. Injection, surjection, bijection. Composition d'applications.	Il n'y a pas lieu de s'attarder sur ces notions qui sont exploitées dans d'autres parties du programme de mathématiques. Les exemples illustrant ce paragraphe seront choisis en liaison avec l'enseignement de l'informatique. On soulignera l'importance de la notion d'injection pour coder des informations et de la notion d'image réciproque pour effectuer des tris.

3. Calcul booléen

Cette brève étude est à mener en coordination étroite avec l'enseignement de l'informatique.
Il convient d'introduire la notion d'algèbre de Boole à partir des deux exemples précédents. Il s'agit essentiellement d'effectuer des calculs permettant de simplifier des expressions booléennes.

Définition d'une algèbre de Boole. Propriétés des opérations, lois de Morgan.	On adoptera les notations usuelles $\overline{a}$, a + b, ab.

Travaux pratiques

1° Exemples simples de calculs portant sur des énoncés.	On se limitera à des cas simples où l'utilisation des tables de vérité ou de propriétés élémentaires permet de conclure sans excès de technicité.
2° Traduire une instruction de boucle à l'aide de connecteurs logiques.	L'évaluation de cette activité relève de l'enseignement de l'informatique.
3° Exemples simples de calculs portant sur des variables booléennes.	On se limitera à des cas simples, comportant au plus trois variables booléennes, où l'utilisation de tableaux de Karnaugh ou de propriétés algébriques élémentaires permet de conclure sans excès de technicité. On signalera l'intérêt des connecteurs non-ou (nor), non-et (nand).

GRAPHES

Cette initiation aux graphes orientés doit être menée en étroite concertation avec les enseignements de l'informatique et de la gestion où cette étude est poursuivie.
L'objectif est d'introduire et de mettre en œuvre, dans des situations concrètes très élémentaires et sans théorie générale, des algorithmes permettant de résoudre les problèmes figurant dans la rubrique de travaux pratiques.

Modes de représentation d'un graphe orienté : représentation géométrique, tableau des successeurs ou des prédécesseurs, matrice adjacente (booléenne).	La définition d'un graphe orienté n'est pas au programme.
Chemin, circuit, boucle, chemin hamiltonien.	
Arborescence.	La notion de connexité étant hors programme, on se limitera à la présentation d'exemples simples d'arborescences à partir de leur représentation géométrique, sans recherche d'une caractérisation générale.
Longueur d'un chemin, chemin optimal.	On observera l'importance du résultat : tout sous-chemin d'un chemin optimal est optimal.

<u>Travaux pratiques</u>

1° Exemples de mise en œuvre d'algorithmes permettant d'obtenir pour un graphe : - les chemins de longueur p, - la fermeture transitive, - les niveaux, dans le cas d'un graphe sans circuit, - les chemins de valeur minimale (ou le cas échéant de valeur maximale).	À partir d'exemples très élémentaires et sans introduire une théorie générale, on montrera l'intérêt des méthodes matricielles mettant en œuvre l'addition et la multiplication booléennes des matrices adjacentes. Dans une évaluation en mathématiques, tout énoncé relatif à ces algorithmes doit comporter des indications sur la méthode à suivre.
2° Exemples de résolution de problèmes d'ordonnancement par la méthode des potentiels ou la méthode PERT.	Il s'agit d'un premier contact avec des méthodes largement utilisées en gestion ; ces méthodes ne peuvent faire l'objet d'*aucune évaluation en mathématiques*.

SUITES NUMERIQUES 1

Les suites sont un outil indispensable pour l'étude des "phénomènes discrets", et c'est à ce titre qu'elles font l'objet d'une initiation. Aucune difficulté théorique ne doit être soulevée à leur propos.
Le programme se place dans le cadre des suites définies pour tout entier naturel ou pour tout entier naturel non nul.

a) Comportement global : suites croissantes, suites décroissantes.

b) Langage des limites :

Limite des suites de terme général $n, n^2, n^3, \sqrt{n}$.

Limite des suites de terme général $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^3}, \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Introduction du symbole $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Si une fonction f admet une limite ℓ en $+\infty$, alors la suite $u_n = f(n)$ converge vers ℓ.

Énoncés usuels sur les limites (admis).
Comparaison, compatibilité avec l'ordre.
Somme, produit, quotient.

Limite et comportements asymptotiques comparés des suites $(\ln n)$; (a^n), a réel strictement positif ; (n^p), p entier.

L'étude des limites par (A, N) et par (ε, N) est hors programme.
L'étude des suites de référence ci-contre et, plus largement, des suites $u_n = f(n)$ est à mener en liaison étroite avec celle des fonctions correspondantes.

Ces énoncés sont calqués sur ceux relatifs aux fonctions. Il n'y a pas lieu de s'attarder à leur présentation : l'objectif est d'apprendre aux étudiants à les mettre en œuvre sur des exemples simples.

Travaux pratiques

1° Exemples d'étude de situations relevant de suites arithmétiques ou géométriques.

On privilégiera les situations issues de la vie économique et sociale ou de la technologie.
Mis à part le cas des suites arithmétiques ou géométriques, l'étude d'une suite définie par son premier terme et une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ est hors programme.

2° Exemples d'étude du comportement de suites de la forme $u_n = f(n)$ (encadrement, monotonie, limite).

On se limitera à des cas simples.
Il s'agit notamment de pouvoir étudier et comparer, sur certains modèles mathématiques, la tendance à long terme d'un phénomène.

FONCTIONS D'UNE VARIABLE REELLE

On se place dans le cadre des fonctions à valeurs réelles ou complexes, définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$, qui servent à modéliser mathématiquement des "phénomènes continus". Les étudiants devront savoir traiter les situations qui se prêtent à une telle modélisation.

On consolidera les acquis sur les fonctions en tenant compte, notamment sur les limites, des programmes de mathématiques suivis antérieurement par les étudiants.

Ce module de programme énumère les fonctions intervenant dans les autres modules d'analyse, modules où figurent les rubriques de travaux pratiques concernant ces fonctions.

En particulier dans l'ensemble de ces modules, on utilisera largement les moyens informatiques (calculatrice, ordinateur), qui permettent notamment de faciliter la compréhension d'un concept ou d'une méthode en l'illustrant graphiquement, numériquement ou dans un contexte lié à la spécialité considérée, sans être limité par d'éventuelles difficultés techniques.

Les calculs à la main, nécessaires pour développer la maîtrise des méthodes figurant au programme, ont leur cadre défini dans les rubriques de travaux pratiques, le plus souvent dans la colonne de commentaires.

Le champ des fonctions étudiées se limite aux fonctions usuelles suivantes :	Les représentations graphiques doivent jouer un rôle important.
a) Fonctions en escalier, fonctions affines par morceaux, fonction exponentielle $t \mapsto \exp t$ ou $t \mapsto e^t$, fonction logarithme népérien $t \mapsto \ln t$, fonctions puissances $t \mapsto t^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, fonctions circulaires, fonctions qui se déduisent de façon simple des précédentes par opérations algébriques ou par composition.	Selon les besoins des autres disciplines (chimie, acoustique,...), on pourra mentionner la fonction logarithme décimal $x \mapsto \log x$, mais aucune connaissance à ce sujet n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.
Comparaison des fonctions exponentielle, puissances et logarithme au voisinage de $+\infty$.	
b) Fonctions circulaires réciproques ; on donnera leurs dérivées.	La dérivabilité de ces fonctions sera admise.
c) Fonctions $t \mapsto e^{it}$ et $t \mapsto e^{at}$ avec $a \in \mathbb{C}$.	

CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL 1

Le programme se place dans le cadre de fonctions à valeurs réelles définies et régulières (c'est-à-dire admettant des dérivées à un ordre quelconque) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Il n'y a pas lieu de reprendre la présentation du concept de dérivée. On s'assurera que les étudiants connaissent les interprétations géométrique et cinématique de la dérivée en un point.
On consolidera et on approfondira les acquis de terminale technologique sur la pratique du calcul des dérivées.
Dans le cas de deux variables t et x liées par une relation fonctionnelle $x = f(t)$, on introduira la notation différentielle $\mathrm{d}f = f'(t)\,\mathrm{d}t$; on donnera son interprétation graphique et on montrera l'intérêt de la différentielle pour les problèmes d'approximation. Aucune difficulté ne doit être soulevée sur le statut mathématique de la notion de différentielle.
Le concept d'intégrale sera introduit sans soulever de problème théorique.

a) Primitives

Définition. Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.
Primitives des fonctions usuelles par lecture inverse du tableau des dérivées ; primitives des fonctions de la forme $x \mapsto g'(ax+b)$, $(\exp g)\,g'$ et $g^{\alpha} g'$, où $\alpha \neq -1$, $\dfrac{g'}{g}$ où g est à valeurs strictement positives.

L'existence des primitives est admise.

b) Intégrale

Étant donné f et un couple (a,b) de points de I, le nombre $F(b) - F(a)$, où F est une primitive de f, est indépendant du choix de F. On l'appelle intégrale de a à b de f et on le note $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Dans le cadre de fonctions positives, interprétation graphique de l'intégrale à l'aide d'une aire.
Étant donné un point a de I, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I prenant la valeur zéro au point a.

Aucune théorie sur la notion d'aire n'est au programme. On admettra son existence et ses propriétés élémentaires.
Les étudiants doivent connaître l'aire des domaines usuels : rectangle, triangle, trapèze.

Propriétés de l'intégrale :
- Relation de Chasles.
- Linéarité.
- Positivité : si $a \leq b$ et $f \geq 0$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$;

intégration d'une inégalité.
- Inégalité de la moyenne : si $a \leq b$ et $m \leq f \leq M$,

alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq M(b-a)$.

Il conviendra d'interpréter, chaque fois qu'il est possible, les propriétés de l'intégrale en termes d'aire.

Travaux pratiques

1° Exemples d'emploi du calcul différentiel pour la recherche d'extremums, l'étude du sens de variation et le tracé des représentations graphiques des fonctions.	Les exemples seront issus, le plus souvent possible, de l'étude de phénomènes rencontrés en sciences physiques, en biologie, en économie ou en technologie. On se limitera aux situations qui se ramènent au cas des fonctions d'une seule variable. Pour la détermination d'une fonction, on pourra être amené à résoudre un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss. Il convient de ne pas abuser des problèmes centrés sur l'étude traditionnelle de fonctions définies par une formule donnée *a priori*, dont on demande de tracer la courbe représentative. Toute étude de branche infinie, notamment la mise en évidence d'asymptote, devra comporter des indications sur la méthode à suivre.
2° Exemples de calcul d'intégrales à l'aide de primitives.	Les étudiants doivent savoir reconnaître si un exemple donné de fonction est de l'une des formes figurant au programme. Mis à part le cas de primitives de la forme précédente, tout calcul de primitive devra comporter des indications sur la méthode à suivre. On pourra montrer l'intérêt d'exploiter les propriétés des fonctions périodiques, des fonctions paires et des fonctions impaires, mais toute formule de changement de variable est hors programme.
3° Exemples de calcul d'aires, de volumes, de valeurs moyennes.	On pourra aussi, selon la spécialité, proposer des exemples de détermination de centres d'inertie, de calcul de moments d'inertie et de calcul de valeurs efficaces.
4° Exemples de mise en œuvre d'algorithmes d'approximation d'une intégrale.	L'objectif est de familiariser les étudiants à un certain savoir-faire concernant quelques méthodes élémentaires (point-milieu, trapèzes), mais aucune connaissance sur ces méthodes n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.

CALCUL MATRICIEL

Il s'agit d'une initiation au langage matriciel, s'appuyant sur l'observation de certains phénomènes issus de la vie courante o u de l'économie. On cherche principalement à introduire un mode de représentation facilitant l'étude de tels phénomènes, sans qu'il soit utile de faire intervenir le concept d'application linéaire. On utilisera largement les moyens informatiques, les calculs à la main étant limités aux cas les plus élémentaires servant à introduire les opérations sur les matrices.

Matrices.	Une matrice est introduite comme un tableau de nombres permettant de représenter une situation comportant plusieurs "entrées" et "sorties".
Calcul matriciel élémentaire : addition, multiplication par un nombre, multiplication.	Le choix de la définition de chaque opération portant sur les matrices s'appuie sur l'observation de la signification du tableau de nombres ainsi obtenu.

Travaux pratiques

1° Calcul de sommes et de produits de matrices.	La notion de matrice inverse est hors programme.

Formulaire officiel de mathématiques

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

BTS : INFORMATIQUE DE GESTION

1. *RELATIONS FONCTIONNELLES :*

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

2. *CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL*

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

b) Dérivées et primitives :

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\dfrac{1}{t}$
e^t	e^t
t^α $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$\alpha t^{\alpha-1}$

Opérations

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$\left(e^u\right)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$\left(u^\alpha\right)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a\,,\,b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Intégration par parties (PROGRAMME FACULTATIF) :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t$$

d) Développements limités (PROGRAMME FACULTATIF)

$$\mathrm{e}^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + t^n\,\varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^n t^n + t^n\,\varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n} + t^n\,\varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + (-1)^p\,\frac{t^{2p+1}}{(2p+1)\,!} + t^{2p+1}\,\varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + (-1)^p\,\frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p}\,\varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}t^n + t^n\,\varepsilon(t)$$

e) Équations différentielles (PROGRAMME FACULTATIF)

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)\,x' + b(t)\,x = 0$	$f(t) = k\mathrm{e}^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \dfrac{b(t)}{a(t)}$

3. PROBABILITES :

a) Loi binomiale $P(X=k)=\mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k}$ où $\mathrm{C}_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$;

$E(X)=np$ $\qquad\sigma(X)=\sqrt{npq}$

b) Loi de Poisson

$$P(X=k)=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\,\lambda^k}{k!}$$

$$E(X)=\lambda$$

$$V(X)=\lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0003
6			0,0000	0,0000	0,0000

k \ λ	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0.000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0.000	0.001
22											0.000

c) Loi exponentielle (PROGRAMME FACULTATIF)

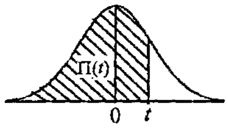
Fonction de fiabilité : $R(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}$ $\qquad E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$ (M.T.B.F.) $\qquad\sigma(X)=\dfrac{1}{\lambda}$

d) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$\Pi(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$