# La méthode du simplexe sur un exemple.

## 1 Mise en place du cadre.

On étudie le programme linéaire suivant écrit sous forme canonique :

$$\max z = 5x + y$$
$$\text{sous contraintes} \left\{ \begin{array}{ccccc} x & & & \leq & 4 \\ 30x & + & y & \leq & 150 \\ & & y & \leq & 60 \\ x & & & \geq & 0 \\ & & y & \geq & 0 \end{array} \right.$$

**Définition 1.1** *On appelle **variable d'écart** la quantité **positive** qui permet de transformer une contrainte d'inégalité en contrainte d'égalité.*

Ici, on a trois contraintes donc on ajoute trois variables d'écart $x_3, x_4, x_5$.

$$\max z = 5x_1 + x_2$$
$$\text{sous contraintes} \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & & & x_3 & = & 4 \\ 30x_1 & + & x_2 & + & x_4 & = & 150 \\ & & x_2 & + & x_5 & = & 60 \\ & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0 \end{array} \right.$$

L'écriture matricielle est la suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 30 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 150 \\ 60 \end{pmatrix}$$

## 2 Base, solution de base, solution de base réalisable

**Définition 2.1** *On dit que $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m})$ est une **base** si la sous-matrice construite sur les colonnes $(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ est inversible.*

*On dit alors que les $m$ variables $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m})$ sont les **variables de base** et que les $n$ variables restantes sont les **variables hors base**.*

Ici, $m = 3$ et il y a 5 variables au total. Un base aura donc 3 variables et il y aura systématiquement 2 variables hors base. Donnons quelques exemples :

1. La famille $\{x_2, x_4, x_5\}$ ne forme pas une base car la sous matrice associée $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.
2. La famille $\{x_2, x_3, x_5\}$ forme une base car la sous matrice associée $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible. Ici, $\{x_1, x_4\}$ sont hors base.
3. La famille $\{x_1, x_2, x_3\}$ forme une base car la sous matrice associée $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 30 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible. Ici, $\{x_4, x_5\}$ sont hors base.

**Définition 2.2** 1. *On appelle **solution de base** une solution du système $Ax = b$ où les $n$ variables hors bases sont nulles et les valeurs des $m$ variables de base sont solution du système $Bx^* = b$ où les $x^*$ est le vecteur $m \times 1$ contenant les variables de base.*

2. *On appelle **solution de base réalisable** une solution de base qui vérifie les contraintes de positivité, c.à.d dont toutes les composantes sont positives ou nulles.*

Voyons ce que cela donne sur les exemples précédents.

1. Considérons la base $\{x_2, x_3, x_5\}$.
   La solution de base correspondante est $(0, 150, 4, 0, -90)$. Ce n'est donc pas une solution de base réalisable ($x_5 = -90 < 0$).
2. Considérons la base $\{x_1, x_2, x_3\}$.
   La solution de base correspondante est $(3, 60, 1, 0, 0)$ et c'est une solution de base réalisable.

**Remarque 2.3** ***(Importante)*** *Lorsque les coefficients $b_i$ sont positifs ou nuls, on obtient systématiquement une solution de base réalisable en mettant les variables du problème initial hors base (donc nulles) et les variables d'écart dans la base et égales aux $b_i$.*

D'après la remarque **??**, la base $\{x_3, x_4, x_5\}$ donne la solution de base réalisable suivante : $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} = \{0, 0, 4, 150, 60\}$

**Définition 2.4** *Lorsqu'un problème écrit sous forme standard vérifie en plus les deux propriétés suivantes :*

1. *Les coefficients de la fonction objectif associés aux variables de base sont nuls,*
2. *La matrice associée aux variables de base est la matrice identité (à une permutation près),*

*on dit qu'il est écrit sous **forme canonique par rapport à la base** $B$ correspondante.*

Ici par exemple, le programme suivant est écrit sous forme canonique par rapport à la base $\{x_3, x_4, x_5\}$.

$$\max z = 5x_1 + x_2$$

$$\text{sous contraintes} \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & & & x_3 & & & = & 4 \\ 30x_1 & + & x_2 & + & & x_4 & & = & 150 \\ & & x_2 & + & & & x_5 & = & 60 \\ & & & & \multicolumn{3}{c}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5} & \geq & 0 \end{array} \right.$$

Cette écriture est le point de départ de l'algorithme du simplexe.

# 3 Les étapes du simplexe.

## 3.1 Point de départ

Dans le cas des $b_i \geq 0$, il s'agit d'écrire le programme linéaire sous forme canonique par rapport à la base réalisable donnée par la remarque **??**.

Ici, il s'agit du programme donné ci-dessus, écrit sous forme canonique par rapport à la base $\{x_3, x_4, x_5\}$.

Partant de là, on va réaliser une suite de changement de base en suivant le schéma :

1. Choix de la variable entrante.
2. Choix de la variable sortante.
3. Changement de base.

## 3.2 Choix de la variable entrante

**Proposition 3.1** *Si tous les coefficients des variables hors base courantes sont négatifs, on ne peut augmenter la fonction objectif et la solution courante est optimale.*

*Sinon, la variable hors base qui va entrer dans la nouvelle base est celle dont le coefficient est le plus élevé dans l'expression de la fonction objectif.*

Ici, $5 > 1$ donc la variable entrante est $x_1$.

## 3.3 Choix de la variable sortante

On exprime les variables de base en fonction de la variable entrante.

**Proposition 3.2** *La variable qui sort de la base est la première à s'annuler quand la variable entrante augmente.*

Ici, c'est la variable $x_3$ qui sort car les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3 = 4 - x_1 \geq 0 \\ x_4 = 150 - 30x_1 \geq 0 \end{array} \right.$$

montrent que $x_3$ s'annule en premier pour $x_1 = 4$ .

Donnons également le critère mathématique suivant pour déterminer la variable sortante :

**Proposition 3.3** *Soit $s$ l'indice de la variable entrante.*

*Si il existe un indice $r$ pour lequel le min $\left\{ \frac{b_k}{a_{k,s}}, a_{k,s} > 0 \right\}$ est atteint, alors $x_r$ est la variable sortante.*

*Sinon, le problème est non borné. Il faut donc le reformuler.*

## 3.4 Changement de base

On va écrire le problème **sous forme canonique** par rapport à la nouvelle base choisie en utilisant le pivot de Gauss.

Ici, la nouvelle base est $\{x_1, x_4, x_5\}$.

Il est plus commode de travailler sur le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} z & -5x_1 & -x_2 & & & & = & 0 & (0) \\ & x_1 & & +x_3 & & & = & 4 & (1) \\ & 30x_1 & +x_2 & & +x_4 & & = & 150 & (2) \\ & & x_2 & & & +x_5 & = & 60 & (3) \end{array} \right.$$

On identifie la ligne qui permet d'échanger les rôles de la variable entrante $x_1$ et de la variable sortante $x_3$. A l'aide du pivot de Gauss, on met un 1 devant $x_1$ sur cette ligne et des 0 devant $x_1$ sur les autres lignes. Ce qui donne :

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} z & & -x_2 & +5x_3 & & & = & 20 & (0') \\ & x_1 & & +x_3 & & & = & 4 & (1') \\ & & x_2 & -30x_3 & +x_4 & & = & 30 & (2') \\ & & x_2 & & & +x_5 & = & 60 & (3') \end{array} \right.$$

## 3.5 Test d'arrêt

**Proposition 3.4** *Si dans l'expression de la fonction objectif $z = d_{i_1}x_{i_1} + d_{i_2}x_{i_2} + \cdots + d_{i_n}x_{i_n}$ exprimée en fonction des variables hors base, tous les coefficients des variables hors base sont négatifs ou nuls, alors la solution de base réalisable courante est la solution optimale. L'algorithme du simplexe est alors terminé.*

Sinon, on recommence les opérations de changement de base.

# 4 Le simplexe en tableaux

Le simplexe en tableaux permet de rendre les étapes du simplexe plus rapides.

Voici l'écriture sous forme de tableau pour notre exemple (attention, on a changé l'ordre des équations et des variables d'écart).

On applique les critères vu plus haut pour déterminer les variables entrantes et sortantes. Puis on effectue le pivot de Gauss sur le tableau directement.

| | $z$ | $\downarrow$ $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 0 | 30 | 1 | 1 | 0 | 0 | 150 |
| $x_4$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 60 |
| $\leftarrow$ $x_5$ | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 |
| $z$ | 1 | $-5$ | $-1$ | 0 | 0 | 0 | 0 |

**Remarque 4.1**

1. *La flèche vers le bas signifie que $x_1$ entre en base et la flèche vers la gauche signifie que $x_3$ sort de la base. Le pivot se trouve à l'intersection.*
2. *La dernière ligne représente l'objectif avec toutes les variables mises du côté gauche. Il faut donc faire attention en appliquant le critère d'entrée en base (on cherche le coefficient le plus négatif) et le test d'arrêt (tous les coefficients doivent être positifs pour s'arrêter).*
3. *La première colonne donne le nom des variables de la base courante. Il faur penser à la modifier à chaque changement de base.*
4. *La dernière colonne donne les valeurs courantes des variables de base ainsi que la valeur courante de la fonction objectif (en bas à droite).*

Voici le nouveau tableau après une itération.

| | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | $-30$ | 30 |
| $x_4$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 60 |
| $x_1$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 |
| $z$ | 1 | 0 | $-1$ | 0 | 0 | 5 | 20 |