Université Paris 13 — Sup Galilée INFO2
Institut Galilée — Année 2011-2012

Algorithmique de Graphes

TD3 : Quelques preuves dans les graphes

Exercice 1

Pour un graphe $G = (V, E)$, montrer que :

1. $\sum_{v \in V} d_v = 2|E|$, où d_v est le degré du sommet v.
2. Le nombre de sommets de degré impair est pair.
3. Si $m = |E|$ et $n = |V|$ et G est simple, $m \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

Exercice 2

Existe-t-il

1. un graphe dont la suite des degrés est
   a) 1, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 7 ?
   b) 2, 3, 4, 5 ? Si $(d_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une suite d'entiers non décroissante, démontrer que l'on peut lui associer un graphe si et seulement si la somme des d_i est paire.
2. un graphe simple dont la suite des degrés est 1, 1, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 8, 9 ?

Exercice 3

Soit $G = (V, A)$ le graphe orienté défini par :
$V = \{a, b, c, d, e\}$
$A = \{(a, b), (a, c), (b, d), (c, b), (c, d), (d, a), (d, e), (e, c)\}$

1. On note $d^+(x)$ le degré sortant de x, c'est-à-dire le nombre d'arcs (x, y), $x \neq y$.
   On note de façon analogue $d^-(x)$ le degré entrant.
   Calculer $d^+(x)$ et $d^-(x)$ pour chaque sommet $x \in V$.
2. Trouver dans G un cycle de longueur 4, un circuit de longueur 3.
3. On appelle *chemin* (resp. *circuit*) *eulérien* un chemin (resp. circuit) qui passe une fois et une seule sur chaque arc du graphe.
   On a les propriétés suivantes :
   Propriété 1 : Un graphe orienté connexe admet un chemin eulérien de a à b ssi
   $d^+(a) - d^-(a) = d^-(b) - d^+(b) = 1$
   et $\forall x$, $x \neq a$, $x \neq b$, $d^+(x) = d^-(x)$.
   Propriété 2 : Un graphe orienté connexe admet un circuit eulérien ssi
   $\forall x$, $d^+(x) = d^-(x)$.
   G admet-il un chemin eulérien ? Un circuit eulérien ? Si oui, en trouver un.

Exercice 4

Peut-il exister un groupe de 15 personnes au sein duquel chacun a exactement 3 amis ?

Exercice 5

Les arêtes d'un graphe complet à $n \geq 6$ sommets ont été colorées en rouge et en vert au hasard. Montrer que le graphe contient au moins un triangle unicolore.

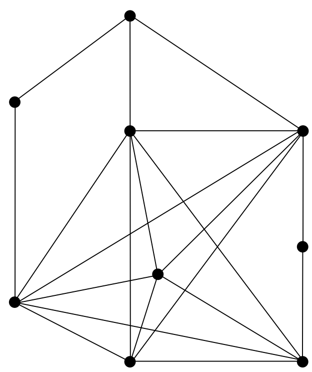
Exercice 6

Le professeur Mongraf et sa femme ont organisé une soirée avec quatre autres couples. Certaines personnes, issues de couples différents, se sont serrées la main. A la fin de la soirée, Mongraf demande à chacun combien de mains il a serré. Il reçoit neuf réponses différentes. Combien sa femme a-t-elle serré de mains ?

Exercice 7

$G = (V, E)$ est un graphe simple non orienté. Soit $\epsilon(G) = \frac{\sum_{v \in V} d(v)}{2|V|}$.

1. Quelle interprétation peut-on donner à $\epsilon(G)$?
2. On suppose qu'il existe v_1 de V tel que $d(v_1) \leq \epsilon(G)$. Posons
   $\begin{cases} V_1 = V \backslash \{v_1\} \\ E_1 = E \backslash \{[v_1, v]; v \in V\} \end{cases}$
   Considérons le graphe $G_1 = (V_1, E_1)$. Quelle relation a-t-on entre $\epsilon(G)$ et $\epsilon(G_1)$?
3. En déduire un algorithme qui permet d'extraire un sous-graphe H d'un graphe non orienté simple G, vérifiant : $min\{d_H(v); v \in H\} > \epsilon(H) \geq \epsilon(G)$.



Exercice 8

Le conseil général d'un département comprend 7 commissions. On sait que :
- tout conseiller général fait partie de 2 commissions exactement,
- 2 commissions quelconques ont exactement un conseiller général en commun.

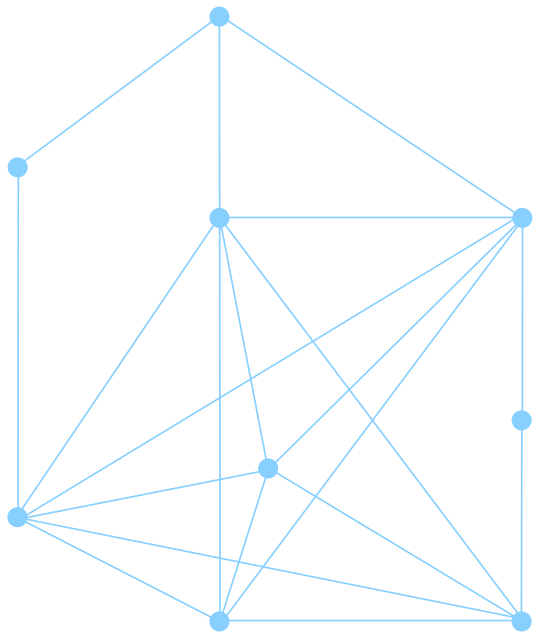
Combien y a-t-il de conseillers généraux ? (Justifier clairement la réponse en utilisant un graphe.)

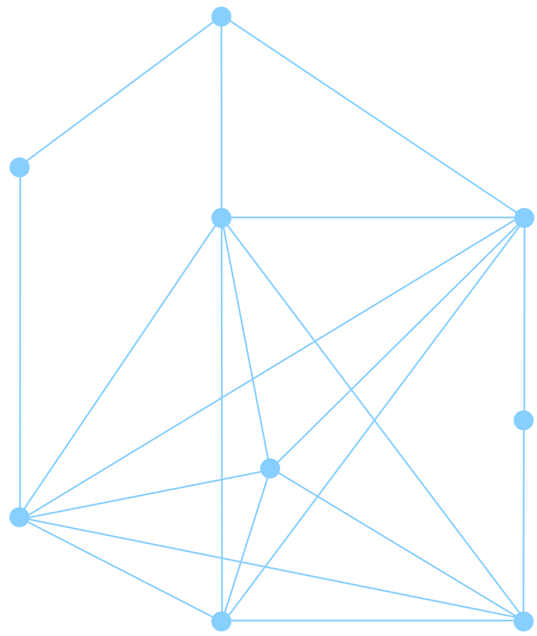
Université Paris 13
Institut Galilée

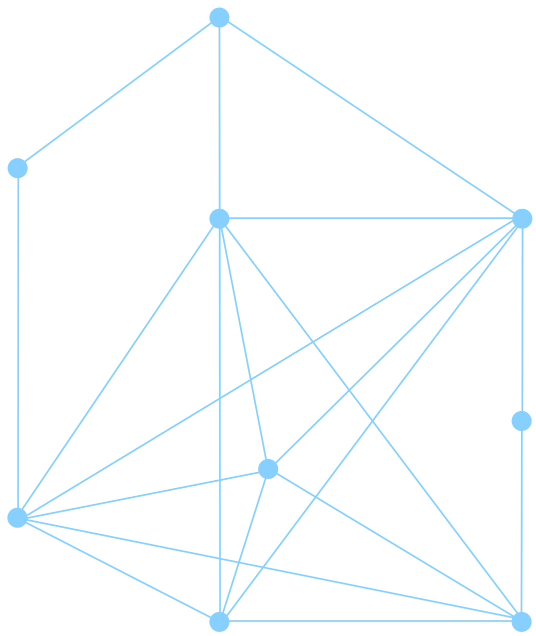
Sup Galilée INFO2
Année 2011-2012

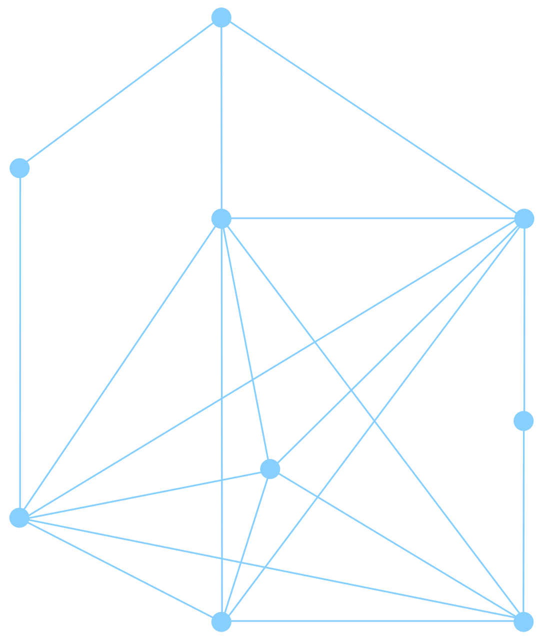
Algorithmique de Graphes

TD3 : Quelques preuves dans les graphes









Université Paris 13
Institut Galilée

Sup Galilée INFO2
Année 2011-2012

Algorithmique de Graphes

TD3 : Quelques preuves dans les graphes