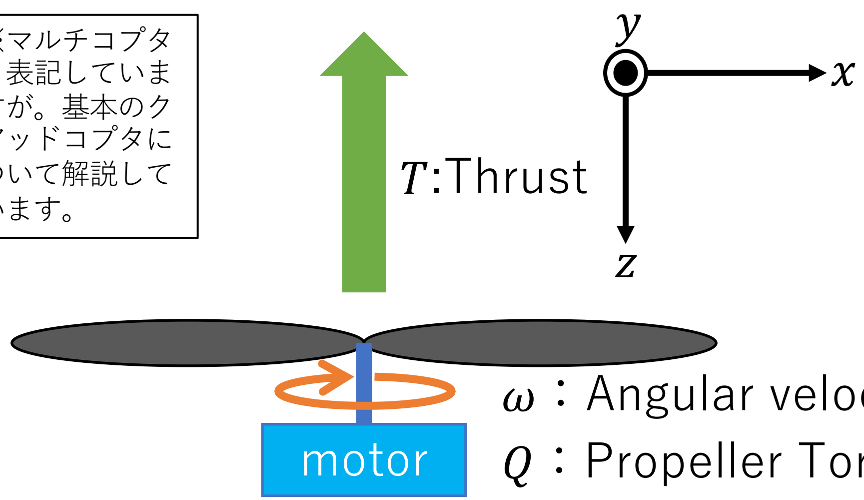
2021.7.18こうへい

「マルチコプタの運動と制御」基礎のきそ ver 0.15

※マルチコプタと表記していますが。基本のクアッドコプタについて解説しています。



ω ：Angular velocity
Q ：Propeller Torque

推力・トルクと角速度の関係

$$T = C_T \omega^2$$
$$Q = C_Q \omega^2 \qquad (1)$$

C_T ：推力係数
C_Q ：トルク係数

推力とトルクは角速度の２乗に比例します。

モータ+プロペラ系の運動方程式と回路の微分方程式

$$J\dot{\omega} + D\omega + C_Q\omega^2 + Q_f = Ki$$
$$L\dot{i} + Ri + K\omega = e$$

マルチコプタのモータはBLDCモータが一般的ですがブラシ付きモータと見做します。

J:慣性モーメント[kgm²]
D ：動粘性抵抗係数[Nms/rad]
Q_f ：摩擦トルク[Nm]
K ：トルク定数・逆起電圧定数[Nm/A][Vs/rad]
L ：コイルインダクタンス[H]
R ：コイル抵抗[Ω]
e ：印加電圧[V]

Lは非常に小さいので無視すると。

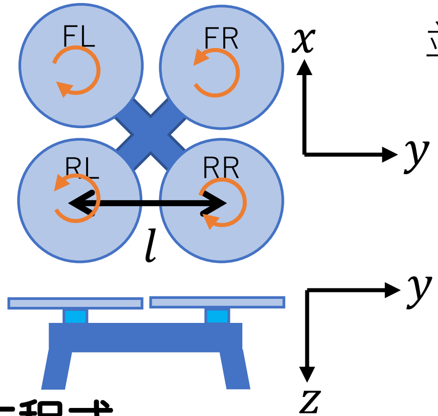
$$i = \frac{e - K\omega}{R} \qquad (2)$$

よって、モータ＋プロペラ系の回転の運動方程式は次になります

$$J\dot{\omega} + \left(D + \frac{K^2}{R}\right)\omega + C_Q\omega^2 + Q_f = \frac{K}{R}e \qquad (3)$$

剛体としての機体の運動方程式

※機体座標についてです。ホバリング時を想定して移動時の空力は考慮していません



前後、左右対称なため慣性乗積は０とします。

並進運動

$$m(\dot{u} + qw - rv) = -mg\sin\theta$$
$$m(\dot{v} + ru - pw) = mg\cos\theta\sin\phi \qquad (4)$$
$$m(\dot{w} + pv - qu) = mg\cos\theta\cos\phi - T_{FR} - T_{FL} - T_{RR} - T_{RL}$$

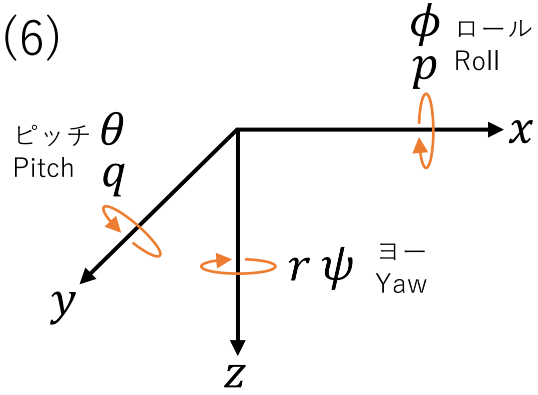
回転運動 (5)

$$I_x\dot{p} + (I_z - I_y)qr = 0.5l(T_{FR} + T_{RR} - T_{FL} - T_{RL})$$
$$I_y\dot{q} + (I_x - I_z)rp = 0.5l(T_{RR} + T_{RL} - T_{FR} - T_{FL})$$
$$I_z\dot{r} + (I_y - I_x)pq = Q_{FR} + Q_{RL} - Q_{FL} - Q_{RR}$$

I_x, I_y, I_z :慣性モーメント[kgm²]
u, v, w ：機体の速度[m/s]
p, q, r ：機体の角速度[Nm]
m ：機体の質量[kg]
g ：重力加速度 [m/s²]
$T_{FR}, T_{FL}, T_{RR}, T_{RL}$ ：推力[N]※下向き正
$Q_{FR}, Q_{FL}, Q_{RR}, Q_{RL}$ ：トルク[Nm]
ϕ, θ, ψ ：オイラー角[rad]

オイラー角の微分

$$\dot{\phi} = p + q\sin\phi\tan\theta + r\cos\phi\tan\theta$$
$$\dot{\theta} = q\cos\phi - r\sin\phi \qquad (6)$$
$$\dot{\psi} = (q\sin\phi + r\cos\phi)/\cos\theta$$



クォータニオンの微分

$$\dot{q}_1 = 0.5(rq_2 - qq_3 + pq_4)$$
$$\dot{q}_2 = 0.5(-rq_1 + pq_3 + qq_4)$$
$$\dot{q}_3 = 0.5(qq_1 - pq_2 + rq_4) \qquad (7)$$
$$\dot{q}_4 = 0.5(-pq_1 - qq_2 - rq_3)$$

慣性座標系→機体座標系の座標変換行列$\boldsymbol{E}$（方向余弦行列:DCM）とオイラー角　(8)

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta\cos\psi - \cos\phi\sin\psi & \sin\phi\sin\theta\sin\psi + \cos\phi\cos\psi & \sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\psi & \cos\phi\sin\theta\sin\psi - \sin\phi\cos\psi & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\phi = \tan^{-1} E_{23}/E_{33}$$
$$\theta = \tan^{-1} -E_{13}/\sqrt{E_{23}^2 + E_{33}^2} \qquad (9)$$
$$\psi = \tan^{-1} E_{12}/E_{11}$$

方向余弦行列とクォータニオン（10)

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_2 + q_3q_4) & 2(q_1q_3 - q_2q_4) \\ 2(q_1q_2 - q_3q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_2q_3 + q_1q_4) \\ 2(q_1q_3 + q_2q_4) & 2(q_2q_3 - q_1q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix}$$

方向余弦行列からクォータニオン (11)

(10)の対角項どうしの和差でクォータニオンを一つ特定できる。その際、０にならないものを選択する。実際は、対角項の全ての組み合わせを試して、求められた物の中から最大のものを選んだのち、他のクォータニオンを以下のように算出する。

先にq_1を求めた場合

$$q_1 = 0.5\sqrt{1 + E_{11} - E_{22} - E_{33}}$$
$$q_2 = (E_{12}+E_{21})/4q_1$$
$$q_3 = (E_{13}+E_{31})/4q_1$$
$$q_4 = (E_{23}+E_{32})/4q_1$$

先にq_2を求めた場合

$$q_2 = 0.5\sqrt{1 - E_{11} + E_{22} - E_{33}}$$
$$q_1 = (E_{12}+E_{21})/4q_2$$
$$q_3 = (E_{13}+E_{31})/4q_2$$
$$q_4 = (E_{23}-E_{32})/4q_2$$

先にq_3を求めた場合

$$q_3 = 0.5\sqrt{1 - E_{11} - E_{22} + E_{33}}$$
$$q_1 = (E_{13}+E_{31})/4q_1$$
$$q_2 = (E_{23}+E_{32})/4q_1$$
$$q_4 = (E_{12}-E_{21})/4q_1$$

先にq_4を求めた場合

$$q_4 = 0.5\sqrt{1 + E_{11} + E_{22} + E_{33}}$$
$$q_1 = (E_{23}-E_{32})/4q_1$$
$$q_2 = (-E_{13}+E_{31})/4q_1$$
$$q_3 = (E_{12}+E_{21})/4q_1$$

速度の慣性空間への座標変換(オイラー角表現)

$$\dot{X} = u\cos\theta\cos\psi + v(\sin\phi\sin\theta\cos\psi - \cos\phi\sin\psi) + w(\cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\psi)$$
$$\dot{Y} = u\cos\theta\sin\psi + v(\sin\phi\sin\theta\sin\psi + \cos\phi\cos\psi) + w(\cos\phi\sin\theta\sin\psi - \sin\phi\cos\psi) \qquad (12)$$
$$\dot{Z} = -u\sin\theta + v\sin\phi\cos\theta + w\cos\phi\cos\theta$$

速度の慣性空間への座標変換(クォータニオン表現)

$$\dot{X} = (q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2)u + 2(q_1q_2 - q_3q_4)v + 2(q_1q_3 + q_2q_4)w$$
$$\dot{Y} = 2(q_1q_2 + q_3q_4)u + (-q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2)v + 2(q_2q_3 - q_1q_4)w \qquad (13)$$
$$\dot{Z} = 2(q_1q_3 - q_2q_4)u + 2(q_2q_3 + q_1q_4)v + (-q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)w$$

※(12)(13)は方向余弦行列の逆行列（方向余弦行列の場合転置で済む）と速度ベクトルの積という形で簡単に記述できますが、実際にコーディングするときは展開形式が使いやすいと思い上記のように記述しました。

微小擾乱法による運動方程式等の線形化

本資料では定常状態（平衡状態）の状態量（定常値）に添字０をつけて表現します。マルチコプタのホバリングを想定しているので、多くの定常値は０になります。そうすると、以下のように、各状態量は定常値に微小な変化（擾乱）が増えたものと表現できます。微小な変化にはΔをつけて表記します。

$$
\begin{array}{l|l|l|l}
e = e_0 + \Delta e & u = u_0 + \Delta u & p = p_0 + \Delta p & \phi = \phi_0 + \Delta\phi \\
\omega = \omega_0 + \Delta\omega & v = v_0 + \Delta v & q = q_0 + \Delta q & \theta = \theta_0 + \Delta\theta \\
 & w = w_0 + \Delta w & r = r_0 + \Delta r & \psi = \psi_0 + \Delta\psi
\end{array}
\quad (14)
$$

定常状態では微分値は０となるので各運動方程式から次の釣り合いの方程式が導かれる。

モータ＋プロペラ

$$\left(D + \frac{K^2}{R}\right)\omega_0 + C_Q{\omega_0}^2 + Q_f = \frac{K}{R}e_0$$

※モータ＋プロペラは四組ありますが、ここでは１本だけ示します。以降、必要に応じて場所を示す添字FR,FL,RR,RLをつけ区別します。

機体並進運動

$$q_0 w_0 - r_0 v_0 = -g\sin\theta_0$$
$$r_0 u_0 - p_0 w_0 = g\cos\theta_0\sin\phi_0$$
$$m(p_0 v_0 - q_0 u_0) = mg\cos\theta_0\cos\phi_0 - C_T(\omega_{FR0}^2 + \omega_{FL0}^2 + \omega_{RR0}^2 + \omega_{RL0}^2)$$

機体回転運動

$$(I_z - I_y)q_0 r_0 = 0.5lC_T(\omega_{FR0}^2 + \omega_{RR0}^2 - \omega_{FL0}^2 - \omega_{RL0}^2)$$
$$(I_x - I_z)r_0 p_0 = 0.5lC_T(\omega_{RR0}^2 + \omega_{RL0}^2 - \omega_{FR0}^2 - \omega_{FL0}^2)$$
$$(I_y - I_x)p_0 q_0 = C_Q(\omega_{FR0}^2 + \omega_{RL0}^2 - \omega_{FL0}^2 - \omega_{RR0}^2)$$

オイラー角

$$p_0 + q_0\sin\phi_0\tan\theta_0 + r_0\cos\phi_0\tan\theta_0 = 0$$
$$q_0\cos\phi_0 - r_0\sin\phi_0 = 0$$
$$(q_0\sin\phi_0 + r_0\cos\phi_0)/\cos\theta_0 = 0$$

ホバリング状態では

$$u_0 = v_0 = w_0 = p_0 = q_0 = r_0 = \phi_0 = \theta_0 = \psi_0 = 0$$

となり、以上の式から次の関係式が導かれる。

$$\omega_{FR0}^2 + \omega_{FL0}^2 + \omega_{RR0}^2 + \omega_{RL0}^2 = mg/C_T$$
$$\omega_{FR0}^2 - \omega_{FL0}^2 + \omega_{RR0}^2 - \omega_{RL0}^2 = 0$$
$$-\omega_{FR0}^2 - \omega_{FL0}^2 + \omega_{RR0}^2 + \omega_{RL0}^2 = 0$$
$$\omega_{FR0}^2 - \omega_{FL0}^2 - \omega_{RR0}^2 + \omega_{RL0}^2 = 0$$

よって、これらを連立して、ホバリング時のプロペラ角速度は以下となる。

$$\omega_0 = \omega_{FR0} = \omega_{FL0} = \omega_{RR0} = \omega_{RL0} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{mg}{C_T}}$$

したがって、ホバリング時のモータへの入力電圧は以下となる。

$$e_0 = \frac{DR + K^2}{2K}\sqrt{\frac{mg}{C_T}} + \frac{C_Q Rmg}{4KC_T} + \frac{R}{K}Q_f$$

※この値は全てのモータで同一となる

これまで明らかになった運動方程式等に(14)を代入する。例えばモータ＋プロペラであれば、次のようになる。

$$J\dot{\Delta\omega} + \left(D + \frac{K^2}{R}\right)(\omega_0 + \Delta\omega) + C_Q(\omega_0 + \Delta\omega)^2 + Q_f = \frac{K}{R}(e_0 + \Delta e)$$

上式に、釣り合いの式を適用すると

$$J\dot{\Delta\omega} + \left(D + \frac{K^2}{R}\right)\Delta\omega + C_Q(2\omega_0\Delta\omega + \Delta\omega^2) = \frac{K}{R}\Delta e$$

更に、変化量の積や２乗は他の項に比して微小であるので無視すると

$$J\Delta\dot{\omega} + \left(D + \frac{K^2}{R} + 2C_Q\omega_0\right)\Delta\omega = \frac{K}{R}\Delta$$

※モータ＋プロペラは四組ありますが、ここでは１本だけ示します。必要に応じて場所を示す添字FR,FL,RR,RLをつけ区別します。

以上が、**線形化されたモータ＋プロペラの運動方程式**になります。同様にして他の運動方程式等も線形化します。

並進運動の線形化運動方程式

$$\Delta\dot{u} = -g\Delta\theta$$

$$\Delta\dot{v} = g\Delta\phi$$

$$\Delta\dot{w} = -2C_T\omega_0(\Delta\omega_{FR} + \Delta\omega_{FL} + \Delta\omega_{RR} + \Delta\omega_{RL})/m$$

回転運動の線形化運動方程式

$$I_x\Delta\dot{p} = lC_T\omega_0(\Delta\omega_{FR} + \Delta\omega_{RR} - \Delta\omega_{FL} - \Delta\omega_{RL})$$

$$I_y\Delta\dot{q} = lC_T\omega_0(\Delta\omega_{RR} + \Delta\omega_{RL} - \Delta\omega_{FR} - \Delta\omega_{FL})$$

$$I_z\Delta\dot{r} = 2C_Q\omega_0(\Delta\omega_{FR} + \Delta\omega_{RL} - \Delta\omega_{FL} - \Delta\omega_{RR})$$

オイラー角の線形化微分方程式

$$\Delta\dot{\phi} = \Delta p$$

$$\Delta\dot{\theta} = \Delta q$$

$$\Delta\dot{\psi} = \Delta r$$

位置に関する線形化微分方程式

$$\Delta\dot{X} = \Delta u$$

$$\Delta\dot{Y} = \Delta v$$

$$\Delta\dot{Z} = \Delta w$$

マルチコプタの伝達関数

求めた線形化された運動方程式等を変動量の初期値０でラプラス変換して伝達関数を求めます。通常変数は大文字で表しますが、元の小文字をそのまま使用します。

モータ＋プロペラ系

$$\Delta\omega = \frac{K}{JRs + DR + K^2 + 2RC_Q\omega_0}\Delta e$$

前後運動

$$\Delta u = -\frac{g}{s}\Delta\theta$$

左右運動

$$\Delta v = \frac{g}{s}\Delta\phi$$

上下運動

$$\Delta w = -\frac{2C_T\omega_0/m}{s}(\Delta\omega_{FR} + \Delta\omega_{FL} + \Delta\omega_{RR} + \Delta\omega_{RL})$$

ロールレート

$$\Delta p = \frac{lC_T\omega_0/I_x}{s}(\Delta\omega_{FR} + \Delta\omega_{RR} - \Delta\omega_{FL} - \Delta\omega_{RL})$$

ピッチレート

$$\Delta q = \frac{lC_T\omega_0/I_y}{s}((\Delta\omega_{RR} + \Delta\omega_{RL} - \Delta\omega_{FR} - \Delta\omega_{FL})$$

ヨーレート

$$\Delta r = \frac{2C_Q\omega_0/I_z}{s}(\Delta\omega_{FR} + \Delta\omega_{RL} - \Delta\omega_{FL} - \Delta\omega_{RR})$$

さらに運動の伝達モデルにモータ＋プロペラ系の伝達モデルを代入して、伝達モデルをまとめていきます。

上下運動

※前後左右は変更が無いので省略

$$\Delta w=-\frac{2C_T\omega_0K/m}{s\left(JRs+DR+K^2+2RC_Q\omega_0\right)}(\Delta e_{FR}+\Delta e_{FL}+\Delta e_{RR}+\Delta e_{RL})$$

ロールレート

$$\Delta p=\frac{lC_T\omega_0K/I_x}{s\left(JRs+DR+K^2+2RC_Q\omega_0\right)}(\Delta e_{FR}-\Delta e_{FL}+\Delta e_{RR}-\Delta e_{RL})$$

ピッチレート

$$\Delta q=\frac{lC_T\omega_0K/I_y}{s\left(JRs+DR+K^2+2RC_Q\omega_0\right)}(-\Delta e_{FR}-\Delta e_{FL}+\Delta e_{RR}+\Delta e_{RL})$$

ヨーレート

$$\Delta r=\frac{2C_Q\omega_0K/I_z}{s\left(JRs+DR+K^2+2RC_Q\omega_0\right)}(\Delta e_{FR}-\Delta e_{FL}-\Delta e_{RR}+\Delta e_{RL})$$

伝達関数の分母分子を$DR+K^2+2RC_Q\omega_0$で割り、新たな記号を以下のように定義すると、これらの伝達モデルが少し見やすくなります。

$$\tau=\frac{JR}{DR+K^2+2RC_Q\omega_0}$$

$$K_w=\frac{2C_T\omega_0K}{\left(DR+K^2+2RC_Q\omega_0\right)m}$$

$$K_p=\frac{lC_T\omega_0K}{\left(DR+K^2+2RC_Q\omega_0\right)I_x}$$

$$K_q=\frac{lC_T\omega_0K}{\left(DR+K^2+2RC_Q\omega_0\right)I_y}$$

$$K_r=\frac{2C_Q\omega_0K}{\left(DR+K^2+2RC_Q\omega_0\right)I_z}$$

以上から、伝達モデルを書き換えると以下になります。

上下運動

$$\Delta w=-\frac{K_w}{s(\tau s+1)}(\Delta e_{FR}+\Delta e_{FL}+\Delta e_{RR}+\Delta e_{RL})$$

ロールレート

$$\Delta p=\frac{K_p}{s(\tau s+1)}(\Delta e_{FR}-\Delta e_{FL}+\Delta e_{RR}-\Delta e_{RL})$$

ピッチレート

$$\Delta q=\frac{K_q}{s(\tau s+1)}(-\Delta e_{FR}-\Delta e_{FL}+\Delta e_{RR}+\Delta e_{RL})$$

ヨーレート

$$\Delta r=\frac{K_r}{s(\tau s+1)}(\Delta e_{FR}-\Delta e_{FL}-\Delta e_{RR}+\Delta e_{RL})$$

４つの舵面（入力）

以上まで見てきたモデルについては４入力１出力システムに見えますが、以下のように入力として航空機の舵面に見立てた、スロットル、ロール舵、ピッチ舵、ヨー舵を導入すると１入力１出力システムとなり古典制御理論で扱えます。またこれら４つの入力からモータへの入力は一意に決定できます。

スロットル	$\delta_T=\Delta e_{FR}+\Delta e_{FL}+\Delta e_{RR}+\Delta e_{RL}$
ロール舵	$\delta_a=\Delta e_{FR}-\Delta e_{FL}+\Delta e_{RR}-\Delta e_{RL}$
ピッチ舵	$\delta_e=-\Delta e_{FR}-\Delta e_{FL}+\Delta e_{RR}+\Delta e_{RL}$
ヨー舵	$\delta_r=\Delta e_{FR}-\Delta e_{FL}-\Delta e_{RR}+\Delta e_{RL}$

※スロットルは舵ではありませんが、話の流れ上舵として話させてもらいます。T,a,e,rの添字記号はスロットル、エルロン、エレベータ、ラダーを表しています

各舵面から各モータ入力算出

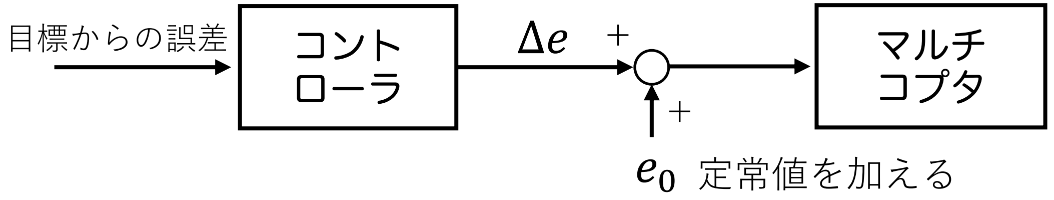
右前モータ　$\Delta e_{FR} = (\delta_T + \delta_a - \delta_e + \delta_r)/4$

左前モータ　$\Delta e_{FL} = (\delta_T - \delta_a - \delta_e - \delta_r)/4$

右後モータ　$\Delta e_{RR} = (\delta_T + \delta_a + \delta_e - \delta_r)/4$

左後モータ　$\Delta e_{RL} = (\delta_T - \delta_a + \delta_e + \delta_r)/4$

※これをミキシングと言います。



マルチコプタの伝達関数（最終）

前後運動

$$\Delta u = -\frac{g}{s}\Delta\theta$$

左右運動

$$\Delta v = \frac{g}{s}\Delta\phi$$

上下運動

$$\Delta w = -\frac{K_w}{s(\tau s + 1)}\delta_T$$

ロールレート

$$\Delta p = \frac{K_p}{s(\tau s + 1)}\delta_a$$

ピッチレート

$$\Delta q = \frac{K_q}{s(\tau s + 1)}\delta_e$$

ヨーレート

$$\Delta r = \frac{K_r}{s(\tau s + 1)}\delta_r$$

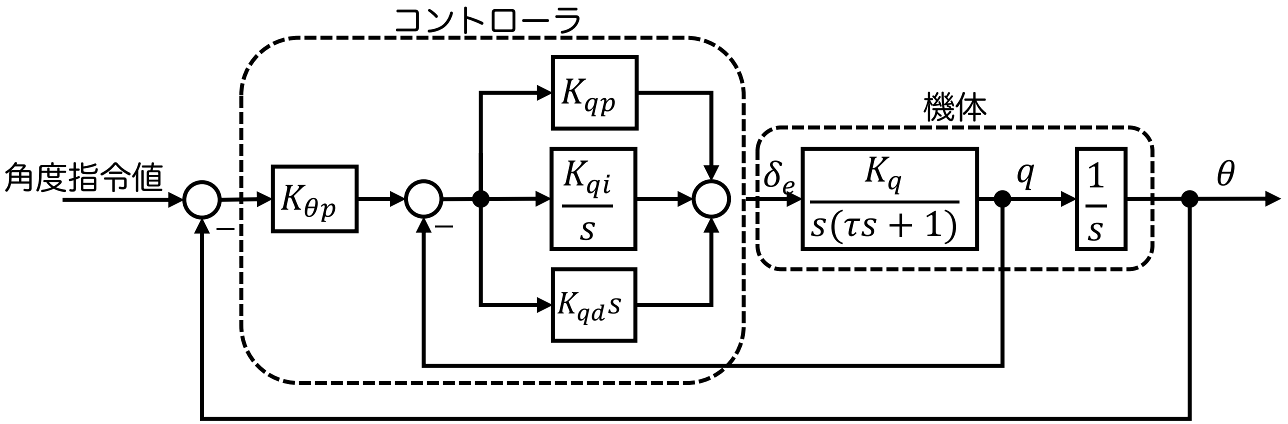
ホバリング状態で線形化しているので、平衡点が違う場合（例えば直進中）などを考える際には並進速度や０角速度は０では無いので線形化された運動方程式の姿も変わり伝達関数の姿も変わってきます。ただし、平衡状態において並進速度のみで角速度が０の場合は角速度に関する伝達関数は上記と同じになります。

制御システム構築の際の注意点

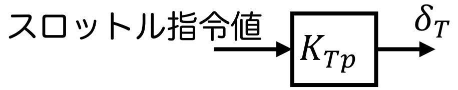
線形化する際に微小擾乱法を用いていますが、以上のモデルで制御系を設計した場合制御される量は変化量になることに注意してください。操作量として得られる量も平衡状態を生み出す定常値からの変化量が算出されます。実際にマルチコプタに入力する際は定常値との和を加える必要があります。通常制御系設計の際に描かれるブロック線図ではこれは示されていないかもしれません。

簡単な姿勢制御システムの一例

姿勢制御システムの簡単な例を以下に示します。インナーループで角速度をPID制御で安定化し、さらにアウターループは比例制御で姿勢角を制御します。以下はピッチ制御のみですが、他の姿勢の制御も基本的には同じです。**制御入力は最終的にはミキシングして各モータに分配します。**スロットルに関しては操縦装置からの信号に適当にゲインをかけてδ_Tとします。



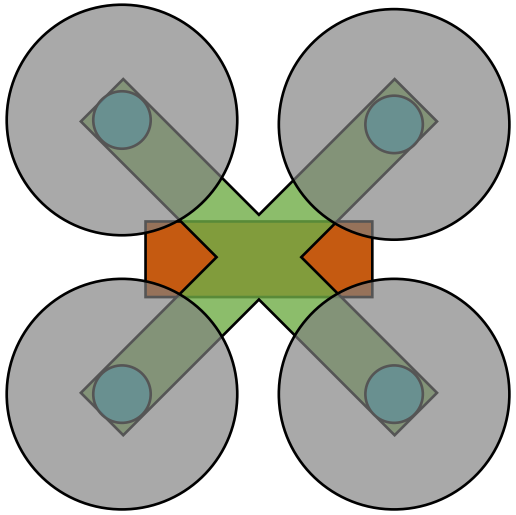
ピッチ角制御系（ロール、ヨーも同様）



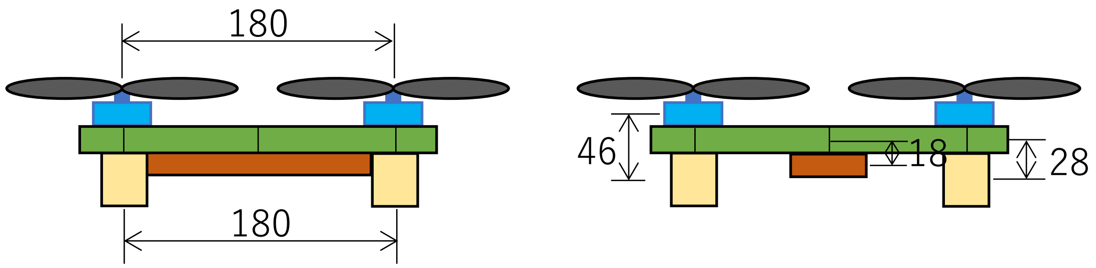
スラスト制御系

マルチコプタの数値例（ノミナルモデル）

以下に、机上で検討するため、実機を想定して（自分のマルチコプタを測定して）モデルとなる数値例を示したいと思います。



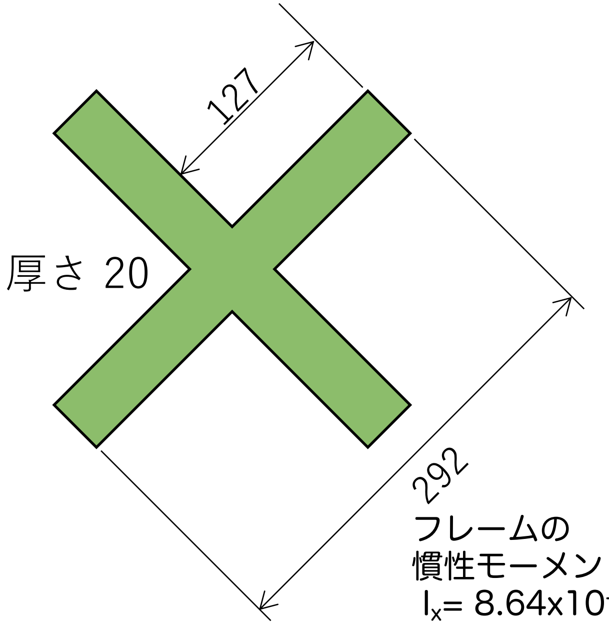
質量
モータ　0.035×4=0.140kg
プロペラ　0.01×4=0.040kg
フレーム　0.190kg
脚　0.02×4=0.080kg
機体総質量　0.450kg
バッテリー　0.260kg
全備重量　0.710kg



マルチコプタのレイアウト

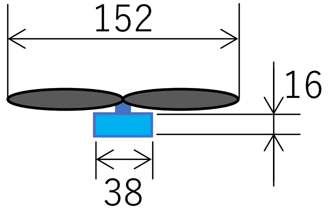
マルチコプタの慣性モーメント
I_x= 6.10x10^{-3} kgm^2
I_y= 6.53x10^{-3} kgm^2
I_z= 1.16x10^{-2} kgm^2

※Githubに計算のためのスクリプトを公開してます。
https://github.com/kouhei1970/fundamental_of_multicopter_control/blob/main/Numerical_sample.ipynb



フレーム

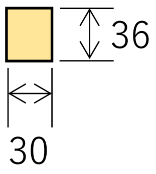
フレームの慣性モーメント
I_x= 8.64x10^{-4} kgm^2
I_y= 8.64x10^{-4} kgm^2
I_z= 1.47x10^{-3} kgm^2



プロペラとモータ

プロペラとモータの慣性モーメント
I_x= 5.02x10^{-6} kgm^2
I_y= 5.02x10^{-6} kgm^2
I_z= 8.12x10^{-6} kgm^2

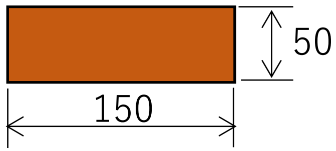
※プロペラの大きさは無視してます



脚（円柱）

脚の慣性モーメント
I_x= 1.14x10^{-5} kgm^2
I_y= 1.14x10^{-5} kgm^2
I_z= 1.67x10^{-5} kgm^2

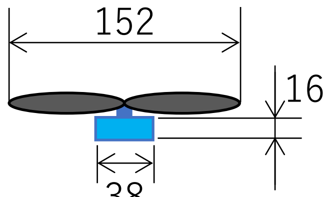
厚さ　16



バッテリー

バッテリーの慣性モーメント
I_x= 5.97x10^{-5} kgm^2
I_y= 4.93x10^{-4} kgm^2
I_z= 5.24x10^{-4} kgm^2

慣性モーメント計算に関するメモ
一様な長方形の慣性モーメント　$\frac{1}{12}m(a^2+b^2)$
一様な円柱の慣性モーメント　円の中心周り　$\frac{1}{2}mr^2$
一様な円柱の慣性モーメント　長手方向の中心周り　$\frac{1}{4}mr^2+\frac{1}{12}mL^2$
平行軸の定理　$I=I_{cg}+md^2$



プロペラとモータ

モータのパラメータ

巻線インダクタンス　L：3.7μH
巻線抵抗　R：0.12Ω
トルク定数　K：3.28x10^{-3} Nm/A
動粘性抵抗係数　D：0.0
摩擦トルク　Q_f：0.0

プロペラのパラメータ

推力係数　C_T：8.3x10-7 Ns^2/ rad^2
トルク係数　C_Q：3.0x10-8 Nms^2/rad^2

モータ＋プロペラ系の時定数

τ ：1.93x10^{-2} s

上下運動のゲイン

Kw：0.524

ロール運動のゲイン

Kroll(Kp)：10.3

ピッチ運動のゲイン

Kpitch(Kq)：9.11

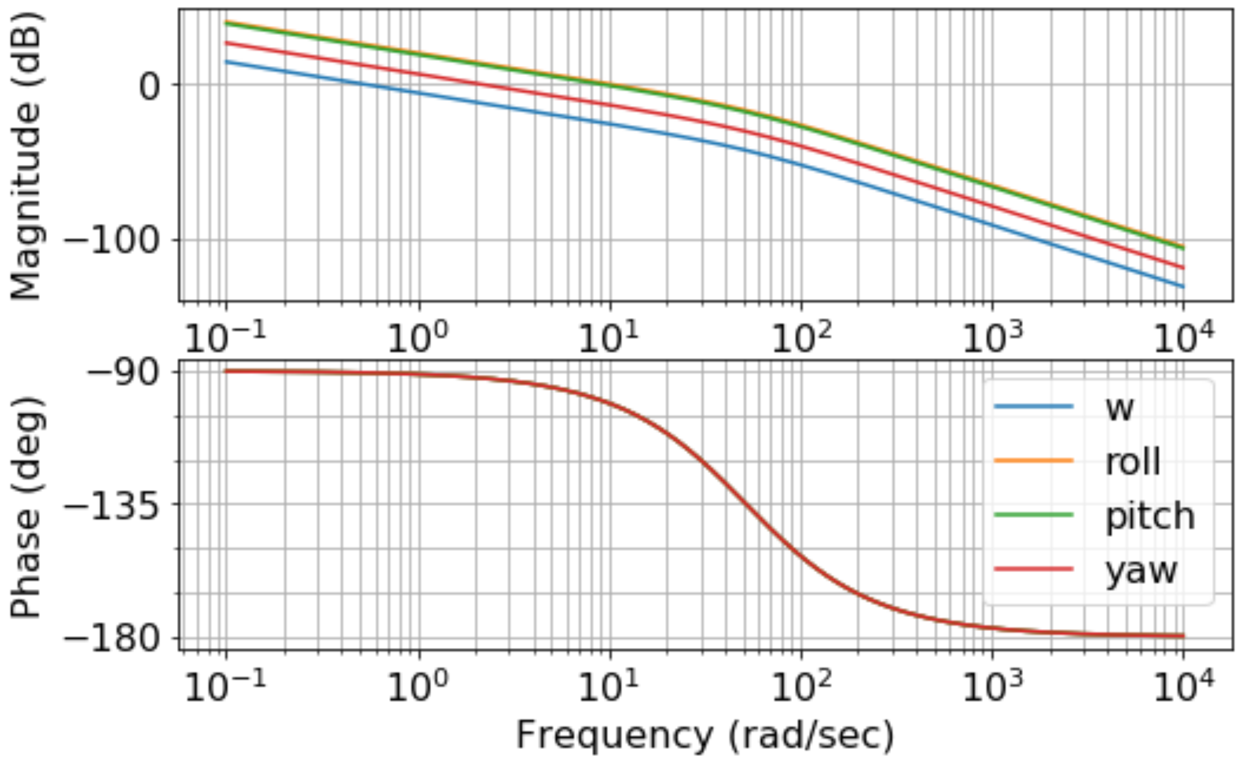
ヨー運動のゲイン

Kyaw(Kr)：2.15

以上の数値例から、マルチコプタの伝達関数のパラメータを算出すると左の値が求まります。
モータとプロペラのトルク応答に関する時定数が約0.02sとなり、その逆数は５０Hzなので、少なくともその10倍の周波数５００Hzぐらいで制御は回したいところです。
各ゲインは、質量や各運動の軸に関する慣性モーメントが大きくなると小さくなる値です。
それぞれの値が小さいほど、速度が大きくなるので応答が早いように感じられます。

マルチコプタの速度と角速度のボード線図

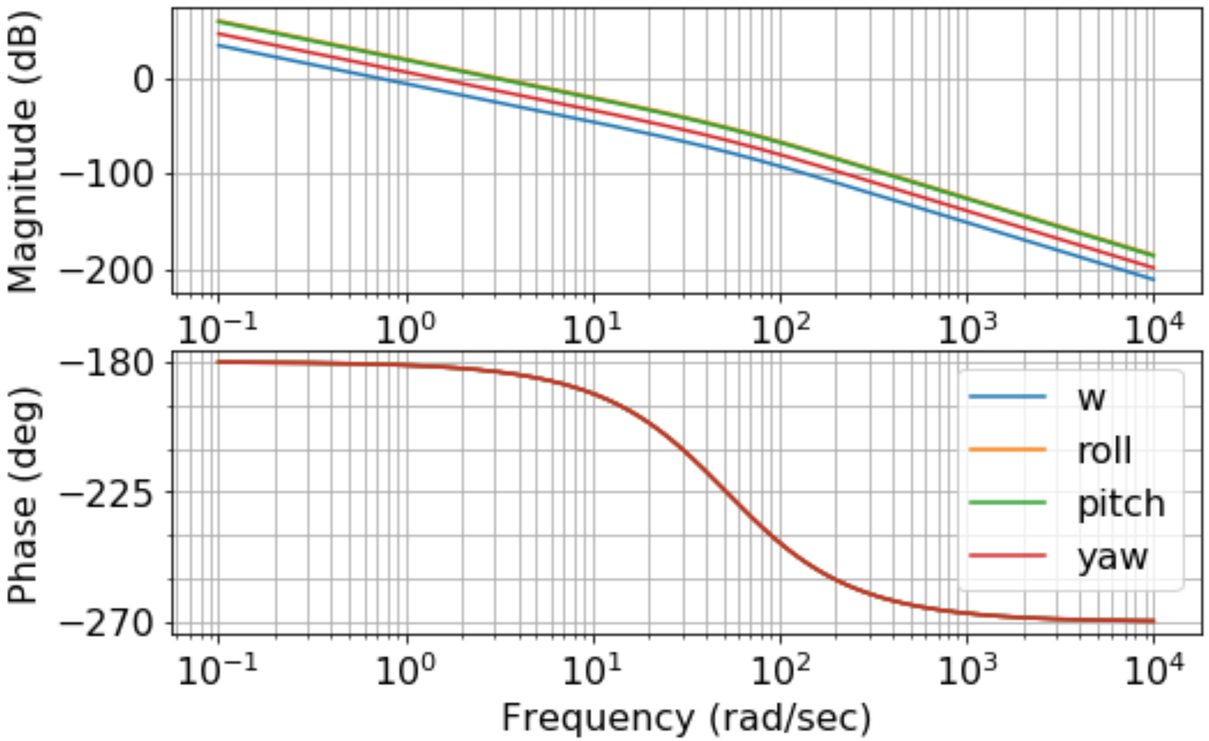
伝達関数のパラメータが決定されたので、それぞれの伝達関数のボード線図を描いてみます。各伝達関数の分母多項式は同一なので、分子は定数ですので、位相曲線は同一のものになっています。ゲインの大きさのみ違うので、ゲイン曲線が上下に平行移動した形です。それぞれのシステムには０の極が存在するので、自ら平衡状態に戻ることはないため、フィードバックによる安定化が必要です。



マルチコプタの速度・角速度系のボード線図

マルチコプタの上下位置と角度のボード線図

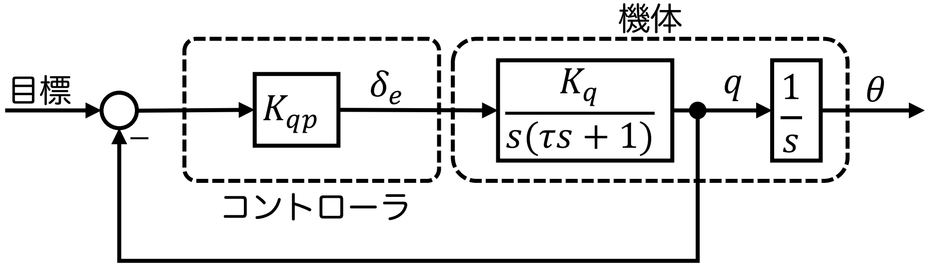
角度に関するボード線図は積分器が二つ入ってくるので、位相余裕は全くなく。単純に角度フィードバックしても、マルチコプタは不安定になってしまいます。PID補償などで、位相を進めてやって、位相余裕を確保して、安定化を図りたいところです。前に示したように、角速度制御ループと角度制御ループの２重ループが有効です。



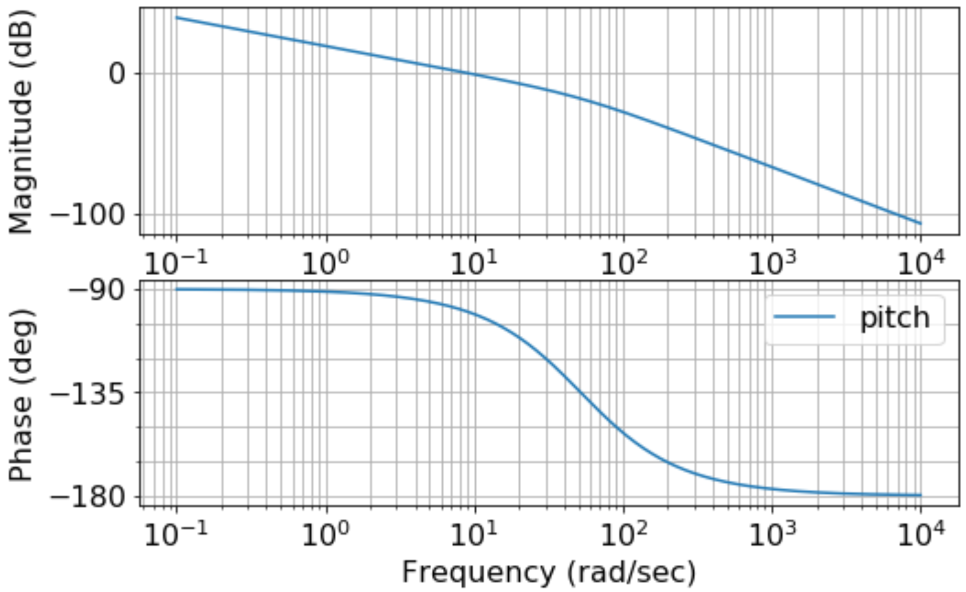
数値例も整ったので、ここから机上制御実験をやっていこうと思います。比例制御からはじまり、PID制御等々について検討と設計のあらましなどについて触れていこうと思います。陽にロバスト制御は扱わない予定ですが、平衡点からズレた場合の挙動や無駄時間を考えた場合の挙動などのノミナルモデルとの比較もしてみます。

角速度制御：比例制御のみ

ピッチレート制御系を例にとって、マルチコプタの制御を考え始めてみます。最初は最も単純な比例制御だけを施してみます。後々、問題があることがわかってきますが簡単なものからです。ボード線図を見ると、位相余裕が大変大きく、比例制御だけだとゲイン線図が上に上がるだけなので比例ゲインは相当な大きさまで行けそうです。



比例制御によるピッチレート制御系



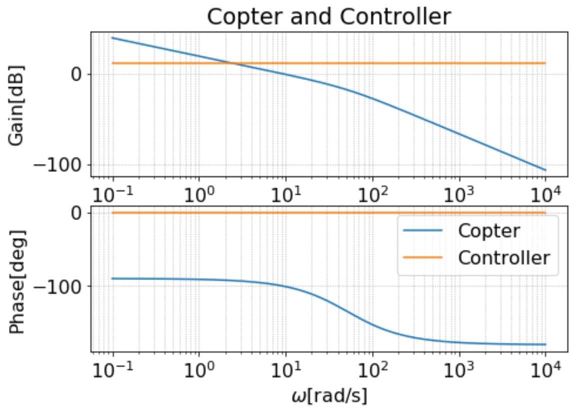
ピッチレート伝達関数のボード線図

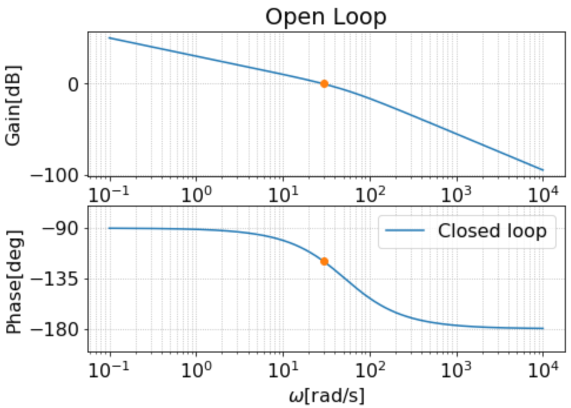
比例制御の開ループ伝達関数

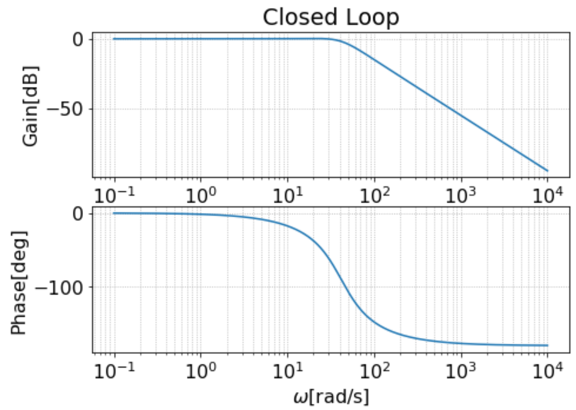
$$L(s) = \frac{K_{qp}K_q}{s(\tau s + 1)}$$

以上の様な開ループ伝達関数となります。一見、１型（積分器が一個ある）なので、目標値追随性も良さそうです。比例制御（以下、P制御）だけでも良いかも！と期待させてくれます。まあ、実際はそう簡単には進まないのが残念なところです。

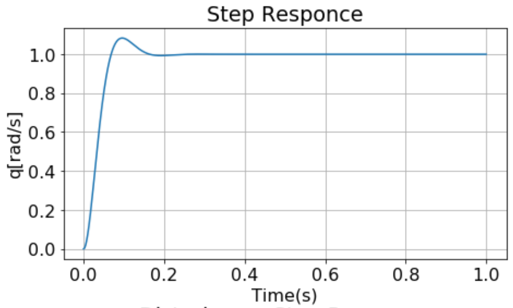
比例制御の設計

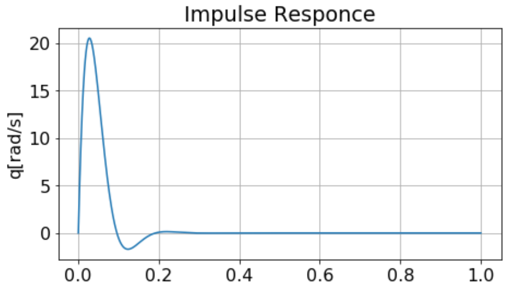


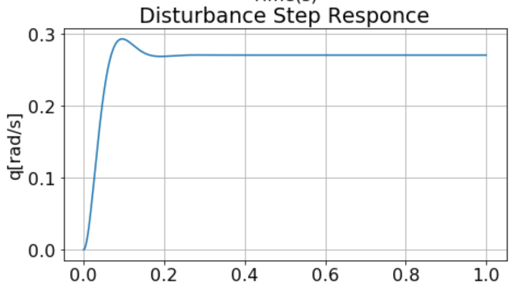




マルチコプターと比例制御器のボード線図を重ねたものが左上の図です。比例制御の一巡伝達関数はオレンジ色の制御器のゲイン分だけ制御対象のゲイン線図が上にスライドするだけで位相線図は変化しません。従って一巡伝達関数のボード線図は右上のようになります。左下は閉ループのボード線図を示しています。この例はゲインが3.7の場合で。位相余裕60.5deg、ゲイン交差周波数29.3rad です。

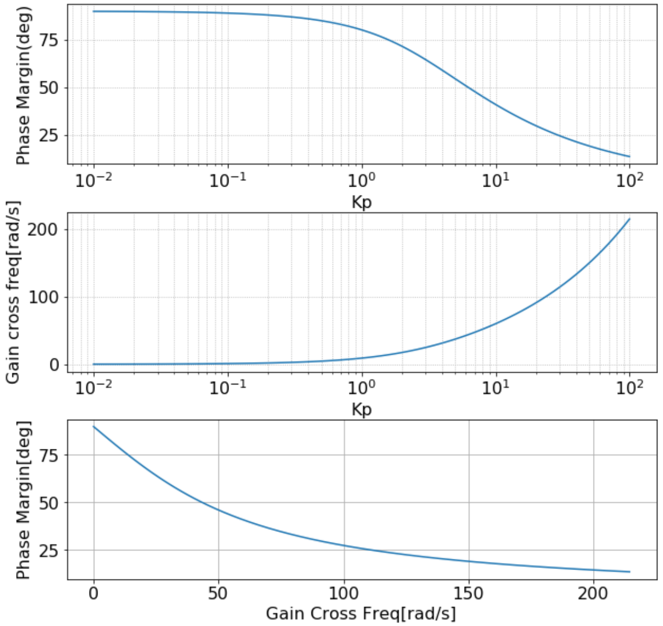






比例制御の場合の、過渡応答をみてみます。左上が単位ステップ応答です。元々のマルチコプタの伝達関数が１型ですので、定常偏差なく追随します。右上はインパルス応答を示していますが、０に素早く戻っていることが確認できます。

しかし、左下の定常外乱に対する応答は０に収束せず**比例制御では外乱を抑制することはできていません。**



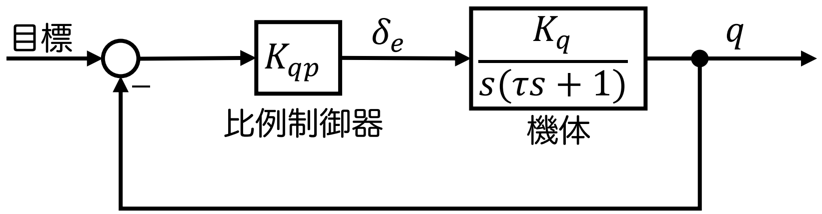
左の３つのグラフのうち1番上のグラフは比例ゲインの変化に対しての位相余裕の変化です。２番目のグラフは比例ゲインの変化に対してのゲイン交差周波数の変化です。ゲインを大きくすると位相余裕は減少し、ゲイン交差周波数は増大します。

3番目はゲイン交差周波数と位相余裕の関係を示しています。位相余裕を大きくしたいときはゲイン交差周波数が小さくなるため、両方を同時に大きくすることはできません。これらのグラフから位相余裕などの仕様が決まれば比例ゲインの大きさを決められます。

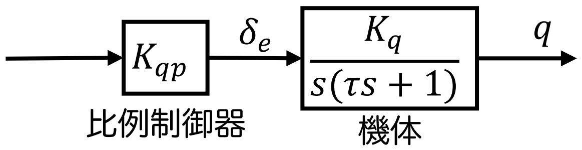
古典制御での設計の勘所

ゲインを調整しながら、時間応答を見て良さそうな値を探しても良いのですが、それだと良い値を見つけるための試行錯誤時間が割と長くなることが多いです。その方法でも、経験を積むと割と勘が働くようになりますが、古典制御では周波数応答の世界であたりをつけてから微修正するというのが良い方法だと思います。

制御対象と制御器を含めた開ループ伝達関数（これを一巡伝達関数と呼びます。）この一巡伝達関数の周波数応答をボード線図で確認して図★の様になる様に形を整えます。これをループ整形と呼びます。各種の制御器とそのゲインの調整で形がどの様に変化するかは法則性がある程度あるので、それを基にループ整形します。

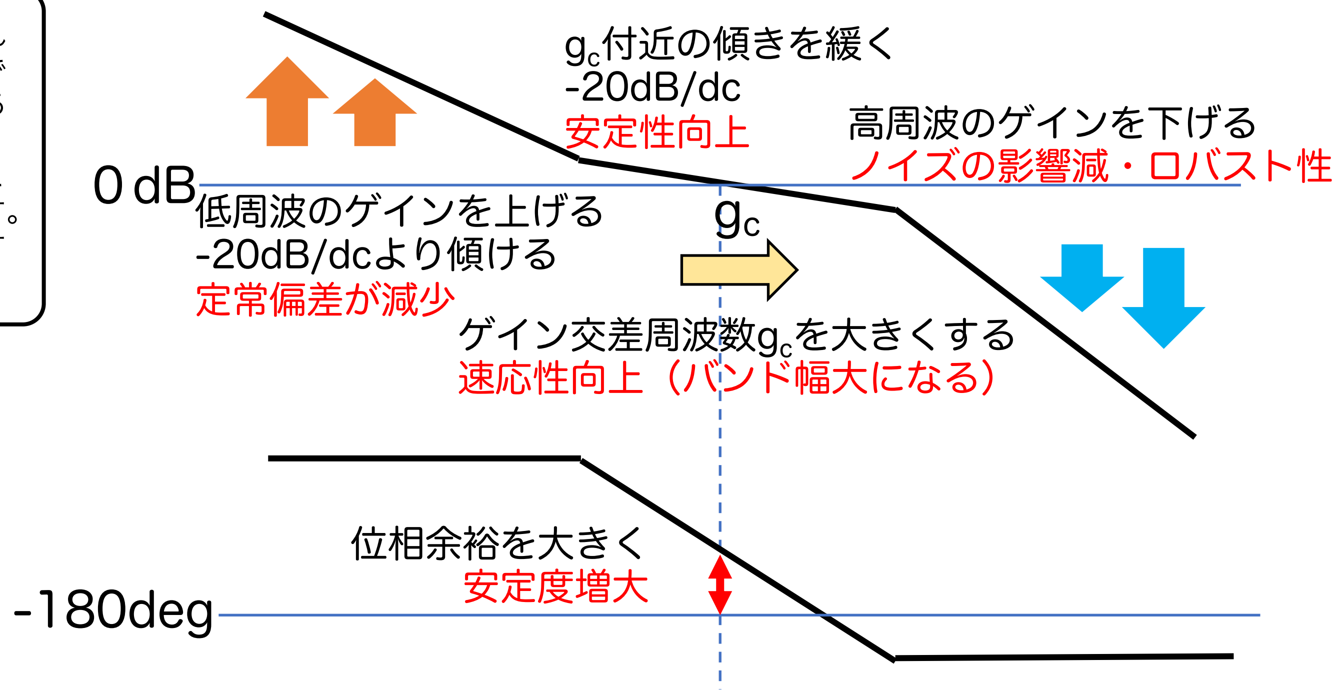


フィードバックを切る



これが一巡伝達関数（開ループ伝達関数）

$$L(s) = \frac{K_{qp}K_q}{s(\tau s+1)}$$



図★　望ましいボード線図の形

大雑把にまとめると以下の様になるかと思います

安定性：位相余裕を大きくする

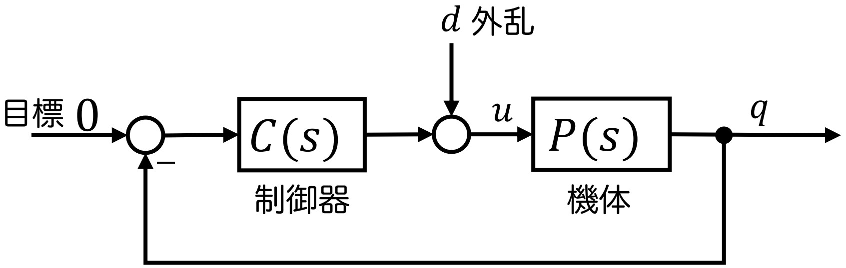
速応性：ゲイン交差周波数を大きくする

定常性：低周波のゲインを上げる

ロバスト性・対ノイズ性：高周波のゲインを下げる

フィードバック制御における外乱の影響

マルチコプタの制御において比例制御では外乱の影響が残る結果となりましたが、フィードバック制御における外乱の影響について簡単におさらいします。



外乱から出力までの伝達関数

$$G_{qd}(s)=\frac{P(s)}{1+C(s)P(s)}$$

マルチコプタの比例制御の場合

コプタ： $P(s)=\dfrac{K_q}{s(\tau s+1)}$

比例制御器：$C(s)=K_{qp}$

$$G_{qd}(s)=\frac{\dfrac{K_q}{s(\tau s+1)}}{1+\dfrac{K_{qp}K_q}{s(\tau s+1)}}$$

$$G_{qd}(s)=\frac{K_q}{s(\tau s+1)+K_{qp}K_q}$$

$$q(s)=\frac{K_q}{s(\tau s+1)+K_{qp}K_q}d(s)$$

外乱が定常外乱の場合

$$q(s)=\frac{K_q}{s(\tau s+1)+K_{qp}K_q}\frac{1}{s}$$

最終値の定理を用いると

$$q(\infty)=\lim_{s\to0}s\frac{K_q}{s(\tau s+1)+K_{qp}K_q}\frac{1}{s}$$

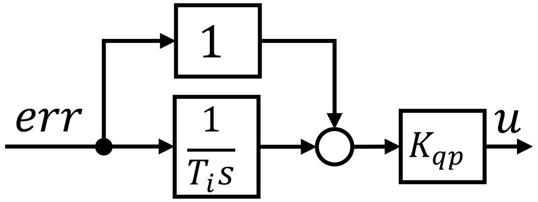
$$=\lim_{s\to0}\frac{K_q}{s(\tau s+1)+K_{qp}K_q}$$

$$=\frac{1}{K_{qp}}$$

外乱の影響が残る

マルチコプタの比例積分（PI）制御の場合

制御器に積分器が入るPI制御の場合の外乱の影響



PI制御器

PI制御器： $C(s)=K_{qp}\left(1+\dfrac{1}{T_i s}\right)$

比例ゲイン： K_{qp}

積分時間：T_i

外乱から出力までの応答

$$q(s)=\frac{K_q s}{T_i s^2(\tau s+1)+K_{qp}K_q(\tau s+1)}d(s)$$

外乱が定常外乱の場合

$$q(s)=\frac{K_q s}{T_i s^2(\tau s+1)+K_{qp}K_q(\tau s+1)}\frac{1}{s}$$

$$=\frac{K_q}{T_i s^2(\tau s+1)+K_{qp}K_q(\tau s+1)}$$

最終値の定理を用いると

$$q(\infty)=\lim_{s\to0}s\frac{K_q}{T_i s^2(\tau s+1)+K_{qp}K_q(\tau s+1)}$$

$$=0$$

PI制御では外乱の影響は０となる

一見すると、マルチコプタの伝達関数には積分器が含まれているので、定常外乱をも抑制してくれると勘違いしそうですが、比例制御ではステップ入力には定常偏差なく追随してくれますが、定常外乱を０にする効果はありません。ただし、比例ゲインを大きくすることで外乱の影響を小さくする事はできますが、ハイゲインにすることにより制御入力が飽和したりノイズの影響が大きくなったりと限界があります。

そこで、この様に制御器に積分器を含ませてることによって、外乱を抑制する効果が現れることがわかります。

2021.7.18 こうへい

角速度制御：比例積分（PI）制御

PI制御の開ループ伝達関数

$$L(s)=\frac{K_{qp}K_q(T_i s+1)}{T_i s^2(\tau s+1)}$$

比例ゲイン： K_{qp}

積分時間：T_i

PI制御の設計

安定の条件を調べる

　一巡伝達関数（開ループ伝達関数）$L(s)$から、閉ループの伝達関数$W(s)$を求め、閉ループの特性方程式を求め、フルビッツの安定判別法から、安定の条件が明らかになるか見てみます。

閉ループ伝達関数

$$W(s)=\frac{L(s)}{1+L(s)}=\frac{K_{qp}K_q(T_i s+1)}{T_i\tau s^3+T_i s^2+K_{qp}K_q T_i s+K_{qp}K_q}$$

特性方程式

$$T_i\tau s^3+T_i s^2+K_{qp}K_q T_i s+K_{qp}K_q=0$$

フルビッツ行列

$$\begin{bmatrix} T_i & K_{qp}K_q & 0 \\ T_i\tau & K_{qp}K_q T_i & 0 \\ 0 & T_i & K_{qp}K_q \end{bmatrix}$$

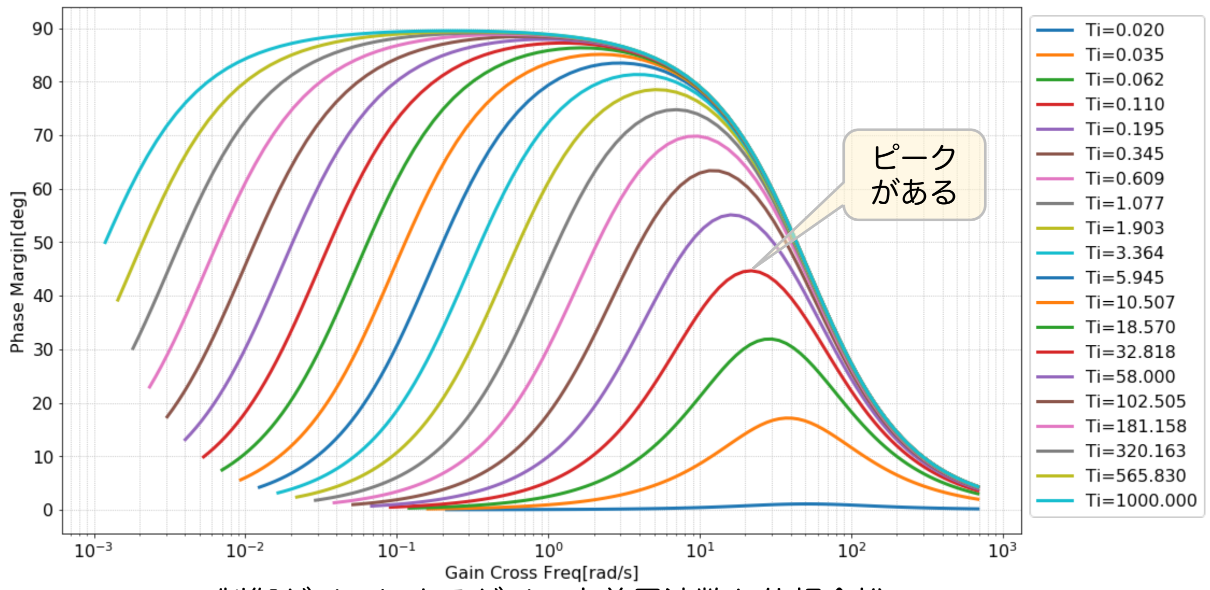
フルビッツの安定判別法を適用していくと、特性方程式の各係数は全て正でなければならないのですが、それは満たされます。次にフルビッツ行列の**小行列式**を求めていくと次の安定の条件についての結論が得られます。

安定の条件: $T_i>\tau$

PI制御の積分時間はモータ＋プロペラ系の時定数より大きくなければならない

積分時間・比例ゲインとゲイン交差周波数と位相余裕

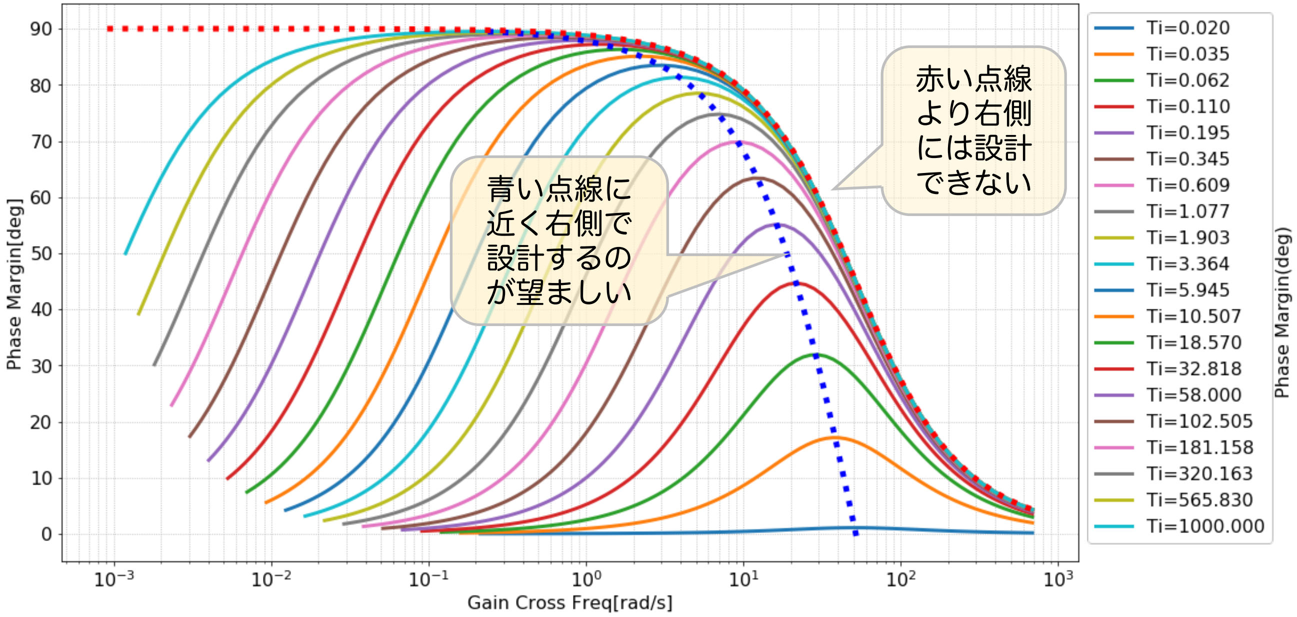
　総当たり的で手計算では不可能でありますが、積分ゲインを決めて、比例ゲインを変えていくとゲイン交差周波数と位相余裕がどの様になるかみていきます。ゲイン交差周波数と位相余裕がどちらも大きくなると速応性と安定性が増しますが、どちらも同時に確実に大きくするのは難しく、当てずっぽうではかなりくたびれるので、実際にグラフ化して確認します



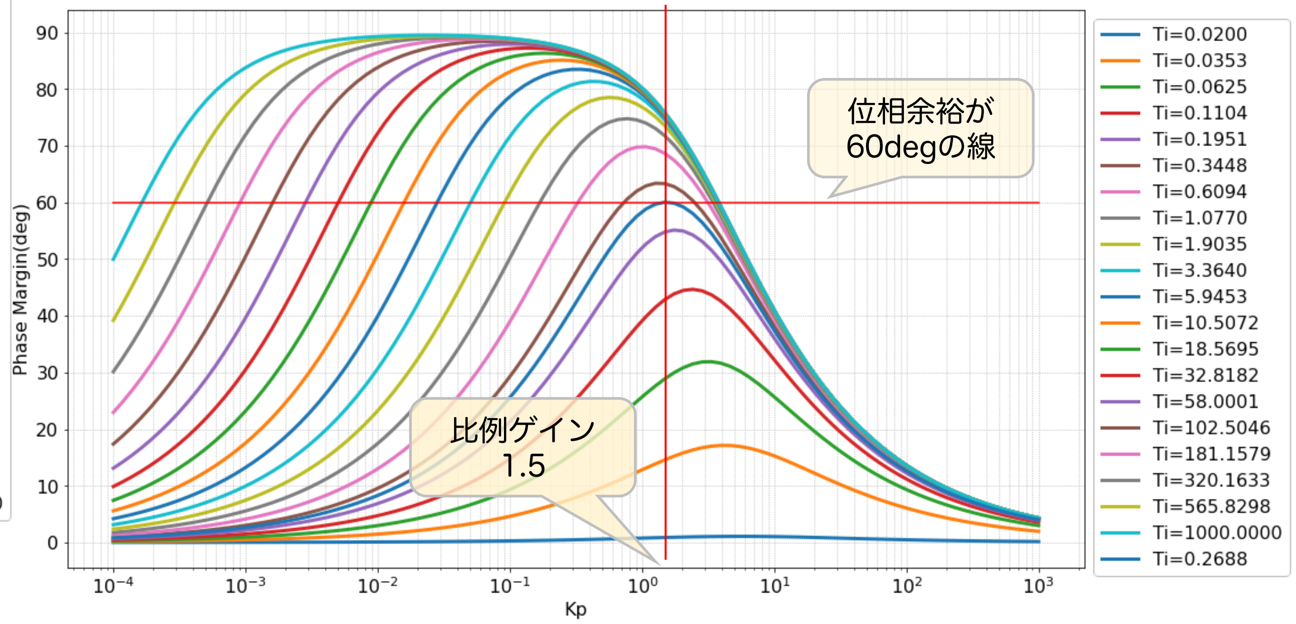
制御ゲインによるゲイン交差周波数と位相余裕

　積分時間を固定して、比例ゲインを変えていき、その時のゲイン交差周波数と位相余裕を横軸ゲイン交差周波数、縦軸位相余裕でプロットすると、位相余裕の値にピークがある曲線が得られます。ざっくりいうと、ゲイン交差周波数と位相余裕はどちらも大きくとりたいのでピークのところが位相余裕の最適値と言うことになります。ピークのゲイン交差周波数と位相余裕を連ねた線が、将に制御設計の分水嶺と言えそうです。

制御器のゲインの決定



図A ゲイン交差周波数と位相余裕
位相余裕の最適線と比例制御の場合を重ねた図



図B 横軸が比例ゲイン縦軸が位相余裕のグラフ

　図Aにおいて、各積分時間における位相余裕のピークを連ねた曲線が**太い青い点線**です。また比例制御においてゲインを変化させた際に、ゲイン交差周波数と位相余裕は**太い赤い点線**の上を移動します。
　PI制御において、青い点線よりも左側は、速応性も安定性ももっとよくできる点があることを意味するので選択する事は合理的ではありません。一方の、青い点線よりも右側は安定性が小さくなることを許容して速応性を上げるということになりそうです。また、赤い点線に近いところでは比例制御に性質が似たものとなるためわざわざPI制御をかけて定常性や外乱抑制を期待しているのに、その効果はあまり無いことになりそちらも選択する合理的な理由はありません。
　結論的には青い点線に近くかつその右側の領域で、ゲイン交差周波数と位相余裕を満足する比例ゲインと積分時間を見つけることになります。

　制御器の比例ゲインと積分時間を決定してみましょう。
　図Aから青い点線の上からゲイン交差周波数と位相余裕の設計値を選びます。ここでは位相余裕を60degとします。そうすると青い点線からゲイン交差周波数は13.9rad/sとグラフから読み取れます。また、積分ゲインは0.27s程度とも分かります。
次に、図Bから位相余裕60degの時の比例ゲインを読み取ります。図Bは図Aと同じ様に見えますが、横軸は比例ゲインになっています。縦軸は図Aと同じ位相余裕です。図Bからは比例ゲインが1.5程度である事が読み取れます。
　設計値が以下の様に決まりました。

ゲイン交差周波数：13.9rad/s
位相余裕：60deg
比例ゲイン：1.5
積分時間：0.27s

図Aと図Bの描画について

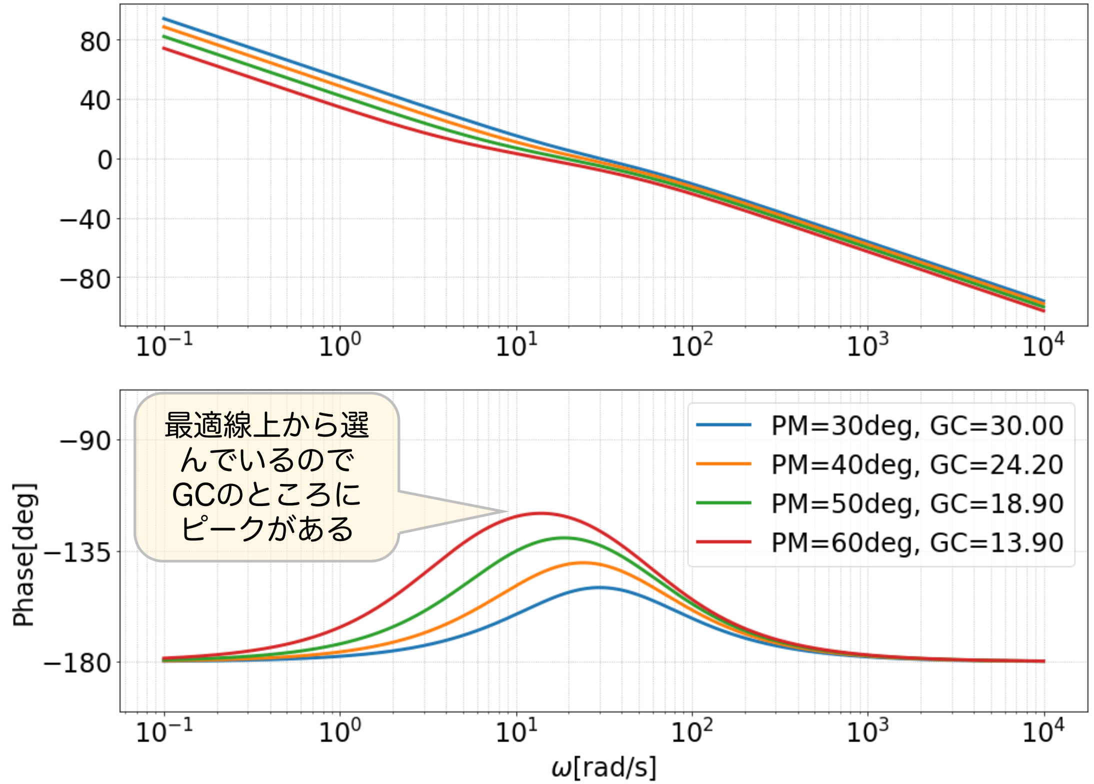
図Aや図Bについては積分時間を決めて比例ゲインを決めるとゲイン交差周波数と位相余裕は求める事ができます。比例ゲインを少しずつ変えると図Aや図Bの１本の曲線が描けます。積分時間を変えて、数本の曲線を引くと最適曲線（青い点線）も見えてくるので、グラフから設計値を見出せる様になります。この方法は逆計算や求解アルゴリズムがいらない方法です。

以上から、位相余裕（PM）を30deg、40deg、50deg、60degと決めた際の最適線上の対応するゲイン交差周波数を求め、それに対応する比例ゲインと積分時間を決定し、それぞれの場合の開ループ伝達関数の周波数特性と過渡応答を比較のため重ねてグラフにしてみました。減衰の速さや、オーバーシュートの大きさなどから、PMが40degから50deg程度が妥当なところだと思われます。

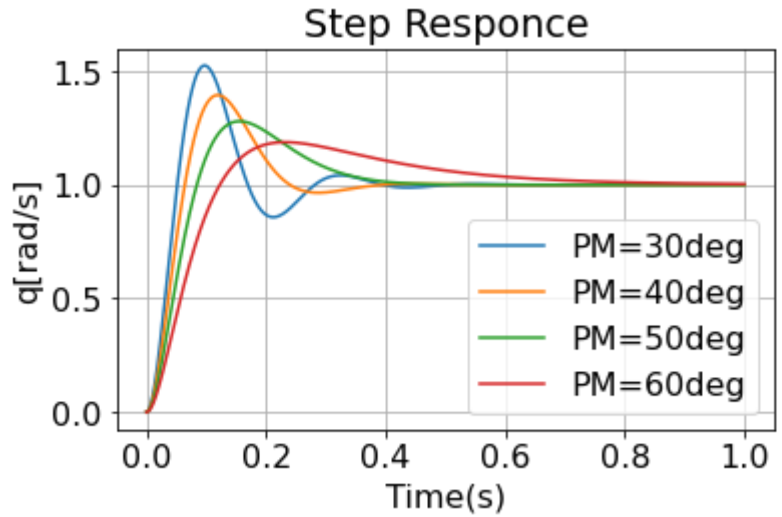
位相余裕が大きくなるとオーバッシュートが減少しますが、ゲイン交差周波数は減少し速応性が失われていうのが過渡応答から判ります。

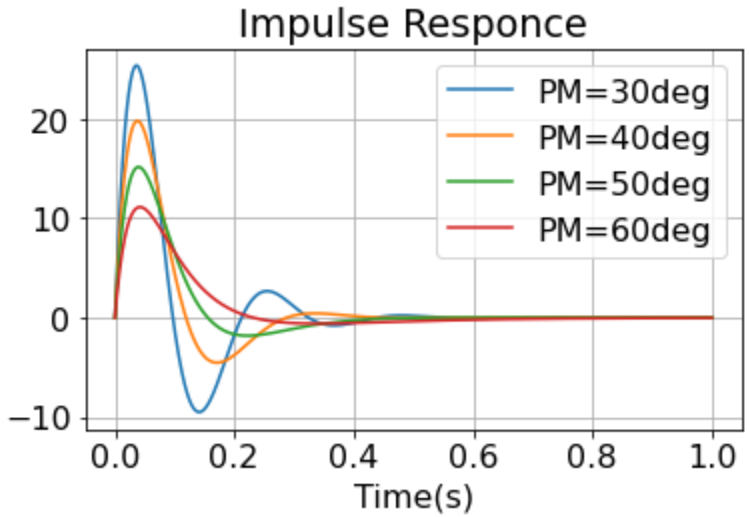
また、比例制御と比較すると、外乱を抑制できている事が確認できます。外乱抑制効果は積分時間が小さいほど効果があります。

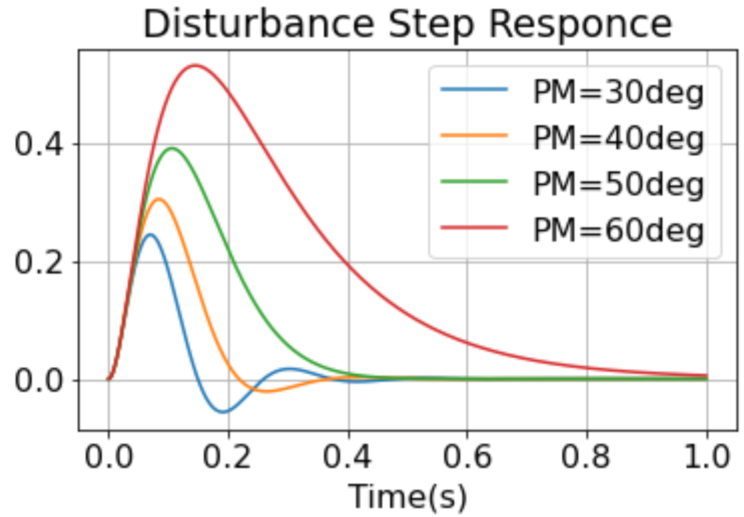
	位相余裕 deg	ゲイン交差周波数 rad/s	比例ゲイン	積分時間 s
ケース１	30	30	3.3	0.058
ケース２	40	24.2	2.7	0.090
ケース３	50	18.9	2.1	0.15
ケース４	60	13.9	1.5	0.27



異なるゲインの開ループの周波数特性の比較







角速度制御：PID制御

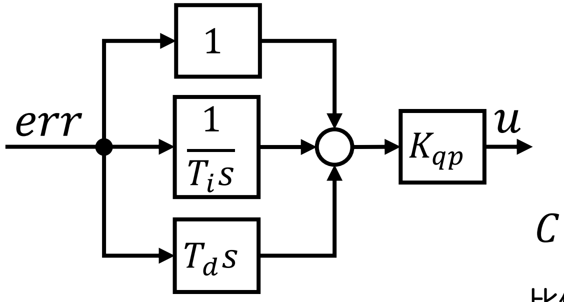


図　PID制御器

PID制御器をブロック線図で表現すると図の様になります。この図から伝達関数を求めてみると次の式になります。

$$C(s) = \frac{K_{qp}(T_d s^2 + s + 1/T_i)}{s}$$

比例ゲイン：　K_{qp}　　微分時間：　T_d

積分時間：T_i

開ループ伝達関数

$$L(s) = \frac{K_q K_{qp}(T_d s^2 + s + 1/T_i)}{s^2(\tau s + 1)}$$

閉ループ伝達関数

$$W(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{K_q K_{qp}(T_d s^2 + s + 1/T_i)}{\tau s^3 + (1 + K_q K_{qp} K_d)s^2 + K_{qp} K_q s + K_{qp} K_q / T_i}$$

安定の条件を調べる

特性方程式

$$\tau s^3 + \left(1 + K_q K_{qp} K_d\right) s^2 + K_{qp} K_q s + K_{qp} K_q / T_i = 0$$

フルビッツ行列

$$\begin{bmatrix} 1 + K_q K_{qp} T_d & K_{qp} K_q / T_i & 0 \\ \tau & K_q K_{qp} & 0 \\ 0 & 1 + K_q K_{qp} T_d & K_{qp} K_q / T_i \end{bmatrix}$$

フルビッツの安定条件を求めると次の様になります

安定の条件:

$$T_d > \frac{\tau - T_i}{K_q K_{qp} T_i}$$

各ゲインは正の値となるので、$T_i > \tau$の場合はどんな微分時間をとってもマルチコプタの角速度制御系は安定となります。PI制御では$T_i > \tau$としなければ安定化できませんでしたが、PID制御では $T_i < \tau$ でも **T_d が安定条件を満たせば、安定化できることになります。**

前述のPI制御において位相余裕を40degにした場合のゲイン設定をそのまま用いて、微分時間を0（微分制御なし）、0.001、0.01、0.1にして計算をしてみた結果を以下に示します。

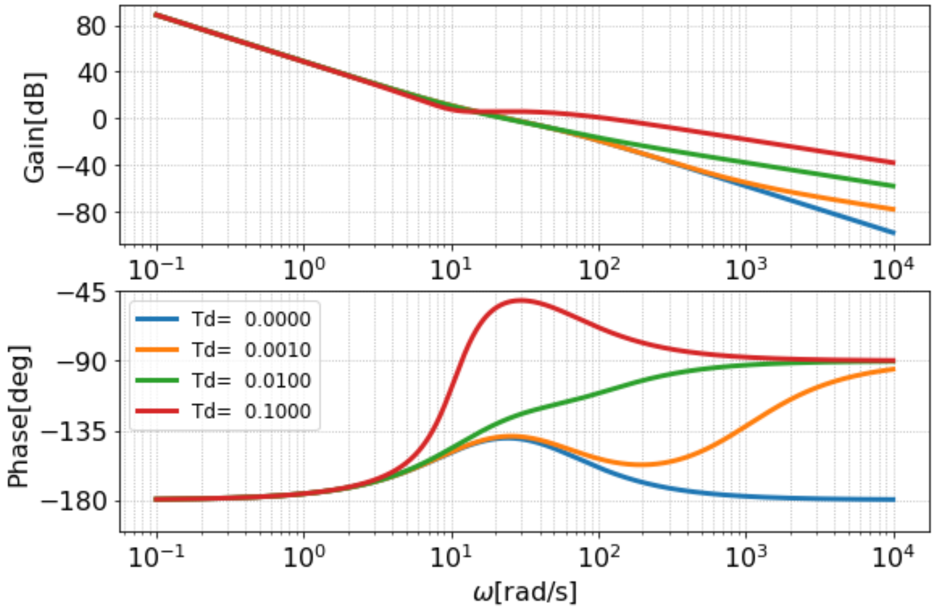


図 PID制御における一巡伝達関数の周波数特性（微分時間変化時）

微分制御を付け加えることで、位相余裕が大きくなります。場合のよりますがゲイン交差周波数が大きくなります。目標値の突然の増大には大きな応答を返します。外乱抑制に関しては積分の効果を減少させます。

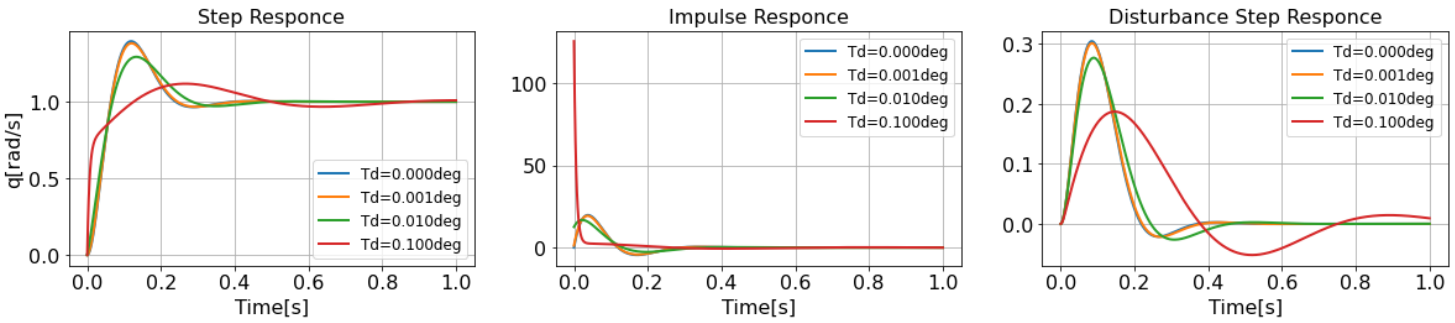


図 PID制御における過渡応答（微分時間変化時）

位相余裕とゲイン交差周波数を使ったPID制御系設計

位相余裕（Phase margine）とゲイン交差周波数（Gain crossover frequency）に基づいてマルチコプタのPID制御系の設計を見ていきたいと思います。
位相余裕というのはボード線図で見るとゲイン曲線が0dBを横切る周波数の時の位相が-180degまであとどのくらい余裕があるかを表したものです。

位相余裕とゲイン交差周波数のおさらい

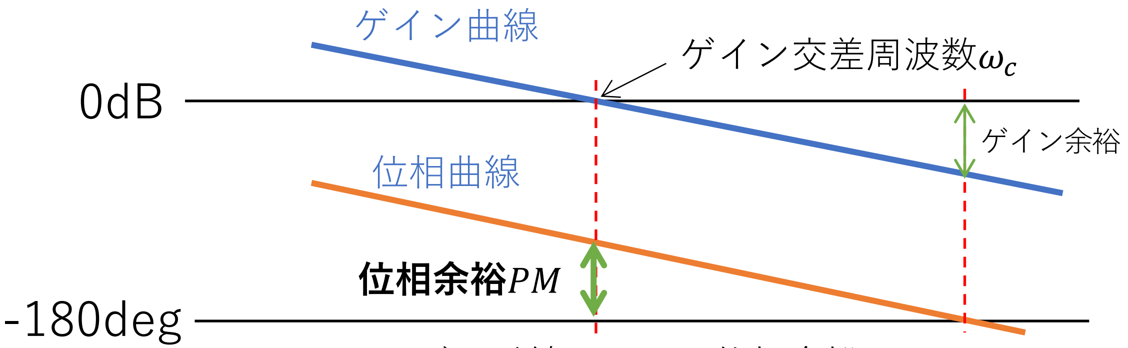


図　ボード線図で見る位相余裕

PID制御の一巡伝達関数（開ループ伝達関数）

$$L(s) = \frac{K_q K_{qp}(T_d s^2 + s + 1/T_i)}{s^2(\tau s + 1)}$$

※数ページ前のおさらいですが

位相余裕：安定性の目安
ゲイン交差周波数：速応性の目安

となります。

一巡伝達関数の周波数伝達関数

$$L(j\omega) = \Delta K_{qp}(u + vj)$$ ここで

$$u = (T_d - \tau)\omega^2 - 1/T_i \qquad v = \{(1/T_i - T_d\omega^2)\tau - 1\}\omega$$

$$\Delta = \frac{K_q}{\omega^2(1 + \omega^2\tau^2)}$$ となります。

※伝達関数に$j\omega$を代入して整理するのは結構大変ですが、するとこうなります。

一巡伝達関数のゲイン

$$|L(j\omega)| = \Delta K_{qp}\sqrt{u^2 + v^2}$$

一巡伝達関数の位相

$$\angle L(j\omega) = \tan^{-1} v/u$$

※比例ゲインK_{qp}については後でそれについて解きたいと思っているのでわざと出しています。

位相余裕はゲイン曲線がボード線図の0dbを横切る周波数の位相を求めるとわかるので、まずゲインが1（ボード線図はゲインの20logをとったものなので0dBはゲイン１です。）の時の周波数をω_cとします。
位相余裕はをPMとすると、一巡伝達関数の位相は$PM - \pi$に等しいことになります

$$\angle L(j\omega_c) = \tan^{-1} v/u = PM - \pi \longrightarrow v/u = \tan(PM - \pi)$$

ここで　$\alpha = \tan(PM - \pi)$　としておくと　$v = u\alpha$

この式にu,vを入れ直して整理すると次の関係が得られます

$$T_d = \frac{(\omega_c\tau + \alpha)/T_i + \omega_c{}^2\tau\alpha - \omega_c}{\omega_c{}^2(\omega_c\tau + \alpha)}$$

ゲインについては　$|L(j\omega_c)| = \Delta K_{qp}\sqrt{u^2 + v^2} = 1$

この式にu,vを入れ直して比例ゲインK_{qp}について整理すると次の関係が得られます

$$K_{qp} = \frac{\omega_c(\omega_c\tau + \alpha)}{K_q\sqrt{1 + \alpha^2}}$$

以上から、設計者が位相余裕とゲイン交差周波数を決めると、そこから比例ゲインが一意に決められる事がわかります。またそれとは別に、積分時間を決めると微分時間も決まります。これは逆でもいいですが、定常特性や外乱応答などに積分時間が大きな影響を与えるので積分時間を決めて応答を確かめる方が良いと思われます。

今は、これが精一杯 

つづく