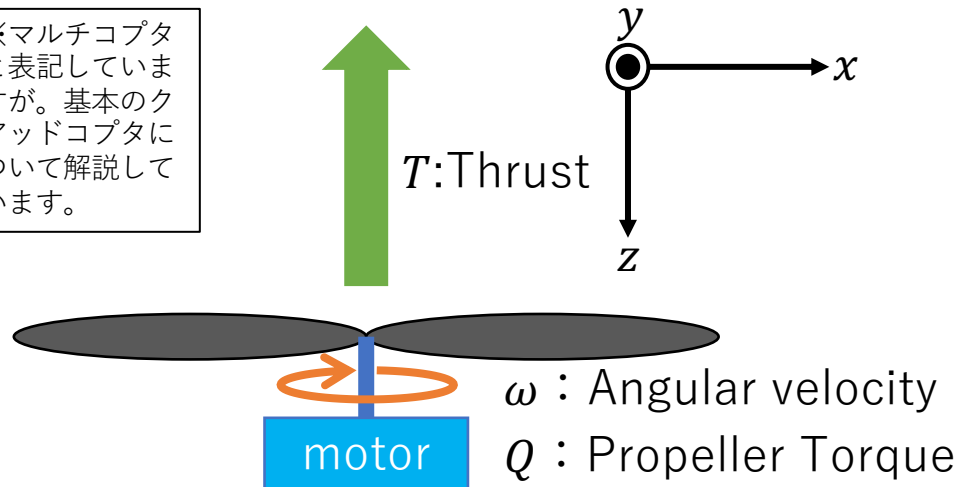


「マルチコプタの運動と制御」基礎のきそ ver 0.6

※マルチコプタと表記していますが。基本のクアドコプタについて解説しています。



L は非常に小さいので無視すると。

$$i = \frac{e - K\omega}{R} \quad (2)$$

よって、モータ+プロペラ系の回転の運動方程式は次になります

$$J\dot{\omega} + \left(D + \frac{K^2}{R}\right)\omega + C_Q\omega^2 + Q_f = \frac{K}{R}e \quad (3)$$

※機体座標についてです。ホバリング時を想定して移動時の空力は考慮していません

推力・トルクと角速度の関係

$$\begin{aligned} T &= C_T \omega^2 \\ Q &= C_Q \omega^2 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} C_T: \text{推力係数} \\ C_Q: \text{トルク係数} \end{array} \quad (1)$$

推力とトルクは角速度の2乗に比例します。

モータ+プロペラ系の運動方程式と回路の微分方程式

$$\begin{aligned} J\dot{\omega} + D\omega + C_Q\omega^2 + Q_f &= Ki \\ Li + Ri + K\omega &= e \end{aligned}$$

マルチコプタのモータはBLDCモータが一般的ですがブラシ付きモータと見做します。

J : 慣性モーメント [kgm²]

D : 動粘性抵抗係数 [Nms/rad]

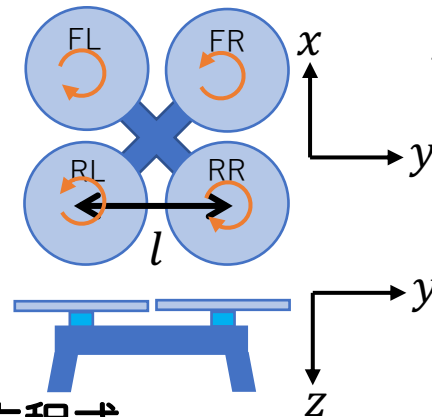
Q_f : 摩擦トルク [Nm]

K : トルク定数・逆起電圧定数 [Nm/A][Vs/rad]

L : コイルインダクタンス [H]

R : コイル抵抗 [Ω]

e : 印加電圧 [V]



前後、左右対称なため慣性乗積は0とします。

剛体としての機体の運動方程式

並進運動

$$\begin{aligned} m(\dot{u} + qw - rv) &= -mg \sin \theta \\ m(\dot{v} + ru - pw) &= mg \cos \theta \sin \phi \\ m(\dot{w} + pv - qu) &= mg \cos \theta \cos \phi - T_{FR} - T_{FL} - T_{RR} - T_{RL} \end{aligned} \quad (4)$$

回転運動 (5)

$$\begin{aligned} I_x \dot{p} + (I_z - I_y)qr &= 0.5l(T_{FR} + T_{RR} - T_{FL} - T_{RL}) \\ I_y \dot{q} + (I_x - I_z)rp &= 0.5l(T_{RR} + T_{RL} - T_{FR} - T_{FL}) \\ I_z \dot{r} + (I_y - I_x)pq &= Q_{FR} + Q_{RL} - Q_{FL} - Q_{RR} \end{aligned}$$

I_x, I_y, I_z : 慣性モーメント [kgm²]

u, v, w : 機体の速度 [m/s]

p, q, r : 機体の角速度 [Nm]

m : 機体の質量 [kg]

g : 重力加速度 [m/s²]

$T_{FR}, T_{FL}, T_{RR}, T_{RL}$: 推力 [N] ※下向き正

$Q_{FR}, Q_{FL}, Q_{RR}, Q_{RL}$: トルク [Nm]

ϕ, θ, ψ : オイラー角 [rad]

オイラー角の微分

$$\dot{\phi} = p + q \sin \phi \tan \theta + r \cos \phi \tan \theta$$

$$\dot{\theta} = q \cos \phi - r \sin \phi$$

$$\dot{\psi} = (q \sin \phi + r \cos \phi) / \cos \theta$$

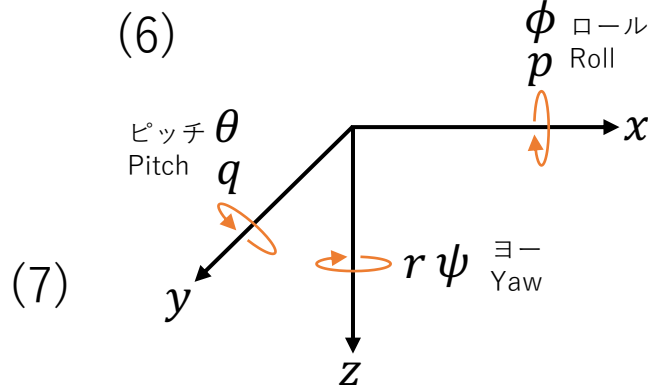
クォータニオンの微分

$$\dot{q}_1 = 0.5(rq_2 - qq_3 + pq_4)$$

$$\dot{q}_2 = 0.5(-rq_1 + pq_3 + qq_4)$$

$$\dot{q}_3 = 0.5(qq_1 - pq_2 + rq_4)$$

$$\dot{q}_4 = 0.5(-pq_1 - qq_2 - rq_3)$$



(7)

慣性座標系→機体座標系の座標変換行列E

(方向余弦行列:DCM) とオイラー角 (8)

$$E = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\phi = \tan^{-1} E_{23}/E_{33}$$

$$\theta = \tan^{-1} -E_{13}/\sqrt{E_{23}^2 + E_{33}^2}$$

$$\psi = \tan^{-1} E_{12}/E_{11}$$

方向余弦行列とクォータニオン (10)

$$E = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_2 + q_3q_4) & 2(q_1q_3 - q_2q_4) \\ 2(q_1q_2 - q_3q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_2q_3 + q_1q_4) \\ 2(q_1q_3 + q_2q_4) & 2(q_2q_3 - q_1q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix}$$

方向余弦行列からクォータニオン (11)

(10)の対角項どうしの和差でクォータニオンを一つ特定できる。その際、0にならないものを選択する。実際は、対角項の全ての組み合わせを試して、求められた物の中から最大のものを選んだのち、他のクォータニオンを以下のように算出する。

先に q_1 を求めた場合

$$q_1 = 0.5\sqrt{1 + E_{11} - E_{22} - E_{33}}$$

$$q_2 = (E_{12} + E_{21})/4q_1$$

$$q_3 = (E_{13} + E_{31})/4q_1$$

$$q_4 = (E_{23} + E_{32})/4q_1$$

先に q_3 を求めた場合

$$q_3 = 0.5\sqrt{1 - E_{11} - E_{22} + E_{33}}$$

$$q_1 = (E_{13} + E_{31})/4q_3$$

$$q_2 = (E_{23} + E_{32})/4q_3$$

$$q_4 = (E_{12} - E_{21})/4q_3$$

先に q_2 を求めた場合

$$q_2 = 0.5\sqrt{1 - E_{11} + E_{22} - E_{33}}$$

$$q_1 = (E_{12} + E_{21})/4q_2$$

$$q_3 = (E_{13} + E_{31})/4q_2$$

$$q_4 = (E_{23} - E_{32})/4q_2$$

先に q_4 を求めた場合

$$q_4 = 0.5\sqrt{1 + E_{11} + E_{22} + E_{33}}$$

$$q_1 = (E_{23} - E_{32})/4q_4$$

$$q_2 = (-E_{13} + E_{31})/4q_4$$

$$q_3 = (E_{12} + E_{21})/4q_4$$

速度の慣性空間への座標変換(オイラー角表現)

$$\begin{aligned} \dot{X} &= u \cos \theta \cos \psi + v(\sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi) \\ &\quad + w(\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) \\ \dot{Y} &= u \cos \theta \sin \psi + v(\sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi) \\ &\quad + w(\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi) \\ \dot{Z} &= -u \sin \theta + v \sin \phi \cos \theta + w \cos \phi \cos \theta \end{aligned} \quad (12)$$

速度の慣性空間への座標変換(クォータニオン表現)

$$\begin{aligned} \dot{X} &= (q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2)u + 2(q_1q_2 - q_3q_4)v + 2(q_1q_3 + q_2q_4)w \\ \dot{Y} &= 2(q_1q_2 + q_3q_4)u + (-q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2)v + 2(q_2q_3 - q_1q_4)w \\ \dot{Z} &= 2(q_1q_3 - q_2q_4)u + 2(q_2q_3 + q_1q_4)v + (-q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)w \end{aligned} \quad (13)$$

※(12)(13)は方向余弦行列の逆行列(方向余弦行列の場合転置で済む)と速度ベクトルの積という形で簡単に記述できますが、実際にコーディングするときは展開形式が使いやすいと思い上記のように記述しました。

微小擾乱法による運動方程式等の線形化

本資料では定常状態（平衡状態）の状態量（定常値）に添字0をつけて表現します。マルチコプタのホバリングを想定しているので、多くの定常値は0になります。そうすると、以下のように、各状態量は定常値に微小な変化（擾乱）が増えたものと表現できます。微小な変化には Δ をつけて表記します。

$$\begin{array}{llll} e = e_0 + \Delta e & u = u_0 + \Delta u & p = p_0 + \Delta p & \phi = \phi_0 + \Delta \phi \\ \omega = \omega_0 + \Delta \omega & v = v_0 + \Delta v & q = q_0 + \Delta q & \theta = \theta_0 + \Delta \theta \\ & w = w_0 + \Delta w & r = r_0 + \Delta r & \psi = \psi_0 + \Delta \psi \end{array} \quad (14)$$

定常状態では微分値は0となるので各運動方程式から次の釣り合いの方程式が導かれる。

モータ + プロペラ

$$\left(D + \frac{K^2}{R}\right) \omega_0 + C_Q \omega_0^2 + Q_f = \frac{K}{R} e_0$$

※モータ + プロペラは四組ありますが、ここでは1本だけ示します。以降、必要に応じて場所を示す添字FR,FL,RR,RLをつけ区別します。

機体並進運動

$$\begin{aligned} q_0 w_0 - r_0 v_0 &= -g \sin \theta_0 \\ r_0 u_0 - p_0 w_0 &= g \cos \theta_0 \sin \phi_0 \\ m(p_0 v_0 - q_0 u_0) &= mg \cos \theta_0 \cos \phi_0 \\ &\quad - C_T (\omega_{FR0}^2 + \omega_{FL0}^2 + \omega_{RR0}^2 + \omega_{RL0}^2) \end{aligned}$$

機体回転運動

$$\begin{aligned} (I_z - I_y) q_0 r_0 &= 0.5 l C_T (\omega_{FR0}^2 + \omega_{RR0}^2 - \omega_{FL0}^2 - \omega_{RL0}^2) \\ (I_x - I_z) r_0 p_0 &= 0.5 l C_T (\omega_{RR0}^2 + \omega_{RL0}^2 - \omega_{FR0}^2 - \omega_{FL0}^2) \\ (I_y - I_x) p_0 q_0 &= C_Q (\omega_{FR0}^2 + \omega_{RL0}^2 - \omega_{FL0}^2 - \omega_{RR0}^2) \end{aligned}$$

オイラー角

$$\begin{aligned} p_0 + q_0 \sin \phi_0 \tan \theta_0 + r_0 \cos \phi_0 \tan \theta_0 &= 0 \\ q_0 \cos \phi_0 - r_0 \sin \phi_0 &= 0 \\ (q_0 \sin \phi_0 + r_0 \cos \phi_0) / \cos \theta_0 &= 0 \end{aligned}$$

ホバリング状態では

$u_0 = v_0 = w_0 = p_0 = q_0 = r_0 = \phi_0 = \theta_0 = \psi_0 = 0$
となり、以上の式から次の関係式が導かれる。

$$\begin{aligned} \omega_{FR0}^2 + \omega_{FL0}^2 + \omega_{RR0}^2 + \omega_{RL0}^2 &= mg / C_T \\ \omega_{FR0}^2 - \omega_{FL0}^2 + \omega_{RR0}^2 - \omega_{RL0}^2 &= 0 \\ -\omega_{FR0}^2 - \omega_{FL0}^2 + \omega_{RR0}^2 + \omega_{RL0}^2 &= 0 \\ \omega_{FR0}^2 - \omega_{FL0}^2 - \omega_{RR0}^2 + \omega_{RL0}^2 &= 0 \end{aligned}$$

よって、これらを連立して、ホバリング時のプロペラ角速度は以下となる。

$$\omega_0 = \omega_{FR0} = \omega_{FL0} = \omega_{RR0} = \omega_{RL0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{mg}{C_T}}$$

したがって、ホバリング時のモータへの入力電圧は以下となる。

$$e_0 = \frac{DR + K^2}{2K} \sqrt{\frac{mg}{C_T}} + \frac{C_Q R mg}{4KC_T} + \frac{R}{K} Q_f$$

※この値は全てのモータで同一となる

これまで明らかになった運動方程式等に(14)を代入する。例えばモータ + プロペラであれば、次のようになる。

$$J \Delta \dot{\omega} + \left(D + \frac{K^2}{R}\right) (\omega_0 + \Delta \omega) + C_Q (\omega_0 + \Delta \omega)^2 + Q_f = \frac{K}{R} (e_0 + \Delta e)$$

上式に、釣り合いの式を適用すると

$$J \Delta \dot{\omega} + \left(D + \frac{K^2}{R}\right) \Delta \omega + C_Q (2\omega_0 \Delta \omega + \Delta \omega^2) = \frac{K}{R} \Delta e$$

更に、変化量の積や2乗は他の項に比して微小であるので無視すると

$$J\Delta\dot{\omega} + \left(D + \frac{K^2}{R} + 2C_Q\omega_0\right)\Delta\omega = \frac{K}{R}\Delta$$

※モータ+プロペラは四組ありますが、ここでは1本だけ示します。
必要に応じて場所を示す添字
FR,FL,RR,RLをつけ区別します。

以上が、線形化されたモータ+プロペラの運動方程式になります。同様にして他の運動方程式等も線形化します。

並進運動の線形化運動方程式

$$\Delta\dot{u} = -g\Delta\theta$$

$$\Delta\dot{v} = g\Delta\phi$$

$$\Delta\dot{w} = -2C_T\omega_0(\Delta\omega_{FR} + \Delta\omega_{FL} + \Delta\omega_{RR} + \Delta\omega_{RL})/m$$

回転運動の線形化運動方程式

$$I_x\Delta\dot{p} = lC_T\omega_0(\Delta\omega_{FR} + \Delta\omega_{RR} - \Delta\omega_{FL} - \Delta\omega_{RL})$$

$$I_y\Delta\dot{q} = lC_T\omega_0(\Delta\omega_{RR} + \Delta\omega_{RL} - \Delta\omega_{FR} - \Delta\omega_{FL})$$

$$I_z\Delta\dot{r} = 2C_Q\omega_0(\Delta\omega_{FR} + \Delta\omega_{RL} - \Delta\omega_{FL} - \Delta\omega_{RR})$$

オイラー角の線形化微分方程式

$$\Delta\dot{\phi} = \Delta p$$

$$\Delta\dot{\theta} = \Delta q$$

$$\Delta\dot{\psi} = \Delta r$$

位置に関する線形化微分方程式

$$\Delta\dot{X} = \Delta u$$

$$\Delta\dot{Y} = \Delta v$$

$$\Delta\dot{Z} = \Delta w$$



マルチコプタの伝達関数

求めた線形化された運動方程式等を変動量の初期値0でラプラス変換して伝達関数を求めます。通常変数は大文字で表しますが、元の小文字をそのまま使用します。

モータ+プロペラ系

$$\Delta\omega = \frac{K}{JR s + DR + K^2 + 2RC_Q\omega_0}\Delta e$$

前後運動

$$\Delta u = -\frac{g}{s}\Delta\theta$$

左右運動

$$\Delta v = \frac{g}{s}\Delta\phi$$

上下運動

$$\Delta w = -\frac{2C_T\omega_0/m}{s}(\Delta\omega_{FR} + \Delta\omega_{FL} + \Delta\omega_{RR} + \Delta\omega_{RL})$$

ロールレート

$$\Delta p = \frac{lC_T\omega_0/I_x}{s}(\Delta\omega_{FR} + \Delta\omega_{RR} - \Delta\omega_{FL} - \Delta\omega_{RL})$$

ピッチレート

$$\Delta q = \frac{lC_T\omega_0/I_y}{s}((\Delta\omega_{RR} + \Delta\omega_{RL} - \Delta\omega_{FR} - \Delta\omega_{FL}))$$

ヨーレート

$$\Delta r = \frac{2C_Q\omega_0/I_z}{s}(\Delta\omega_{FR} + \Delta\omega_{RL} - \Delta\omega_{FL} - \Delta\omega_{RR})$$

さらに運動の伝達モデルにモータ+プロペラ系の伝達モデルを代入して、伝達モデルをまとめていきます。

上下運動

※前後左右は変更が無いので省略

$$\Delta w = -\frac{2C_T\omega_0 K/m}{s(JRs + DR + K^2 + 2RC_Q\omega_0)}(\Delta e_{FR} + \Delta e_{FL} + \Delta e_{RR} + \Delta e_{RL})$$

ロールレート

$$\Delta p = \frac{lC_T\omega_0 K/I_x}{s(JRs + DR + K^2 + 2RC_Q\omega_0)}(\Delta e_{FR} - \Delta e_{FL} + \Delta e_{RR} - \Delta e_{RL})$$

ピッチレート

$$\Delta q = \frac{lC_T\omega_0 K/I_y}{s(JRs + DR + K^2 + 2RC_Q\omega_0)}(-\Delta e_{FR} - \Delta e_{FL} + \Delta e_{RR} + \Delta e_{RL})$$

ヨーレート

$$\Delta r = \frac{2C_Q\omega_0 K/I_z}{s(JRs + DR + K^2 + 2RC_Q\omega_0)}(\Delta e_{FR} - \Delta e_{FL} - \Delta e_{RR} + \Delta e_{RL})$$

伝達関数の分母分子を $DR + K^2 + 2RC_Q\omega_0$ で割り、新たな記号を以下のように定義すると、これらの伝達モデルが少し見やすくなります。

$$\tau = \frac{JR}{DR + K^2 + 2RC_Q\omega_0}$$

$$K_w = \frac{2C_T\omega_0 K}{(DR + K^2 + 2RC_Q\omega_0)m}$$

$$K_p = \frac{lC_T\omega_0 K}{(DR + K^2 + 2RC_Q\omega_0)I_x}$$

$$K_q = \frac{lC_T\omega_0 K}{(DR + K^2 + 2RC_Q\omega_0)I_y}$$

$$K_r = \frac{2C_Q\omega_0 K}{(DR + K^2 + 2RC_Q\omega_0)I_z}$$

以上から、伝達モデルを書き換えると以下になります。

上下運動

$$\Delta w = -\frac{K_w}{s(\tau s + 1)}(\Delta e_{FR} + \Delta e_{FL} + \Delta e_{RR} + \Delta e_{RL})$$

ロールレート

$$\Delta p = \frac{K_p}{s(\tau s + 1)}(\Delta e_{FR} - \Delta e_{FL} + \Delta e_{RR} - \Delta e_{RL})$$

ピッチレート

$$\Delta q = \frac{K_q}{s(\tau s + 1)}(-\Delta e_{FR} - \Delta e_{FL} + \Delta e_{RR} + \Delta e_{RL})$$

ヨーレート

$$\Delta r = \frac{K_r}{s(\tau s + 1)}(\Delta e_{FR} - \Delta e_{FL} - \Delta e_{RR} + \Delta e_{RL})$$

4つの舵面（入力）

以上まで見てきたモデルについては4入力1出力システムに見えますが、以下のように入力として航空機の舵面に見立てた、スロットル、ロール舵、ピッチ舵、ヨー舵を導入すると1入力1出力システムとなり古典制御理論で扱えます。またこれら4つの入力からモータへの入力は一意に決定できます。

$$\text{スロットル} \quad \delta_T = \Delta e_{FR} + \Delta e_{FL} + \Delta e_{RR} + \Delta e_{RL}$$

$$\text{ロール舵} \quad \delta_a = \Delta e_{FR} - \Delta e_{FL} + \Delta e_{RR} - \Delta e_{RL}$$

$$\text{ピッチ舵} \quad \delta_e = -\Delta e_{FR} - \Delta e_{FL} + \Delta e_{RR} + \Delta e_{RL}$$

$$\text{ヨー舵} \quad \delta_r = \Delta e_{FR} - \Delta e_{FL} - \Delta e_{RR} + \Delta e_{RL}$$

※スロットルは舵ではありませんが、話の流れ上舵として話させてもらいます。T,a,e,rの添字記号はスロットル、エルロン、エレベータ、ラダーを表しています

各舵面から各モータ入力算出

$$\text{右前モータ } \Delta e_{FR} = (\delta_T + \delta_a - \delta_e + \delta_r)/4$$

$$\text{左前モータ } \Delta e_{FL} = (\delta_T - \delta_a - \delta_e - \delta_r)/4$$

$$\text{右後モータ } \Delta e_{RR} = (\delta_T + \delta_a + \delta_e - \delta_r)/4$$

$$\text{左後モータ } \Delta e_{RL} = (\delta_T - \delta_a + \delta_e + \delta_r)/4$$

※これをミキシングと言います。

マルチコプタの伝達関数（最終）

前後運動

$$\Delta u = -\frac{g}{s} \Delta \theta$$

ロールレート

$$\Delta p = \frac{K_p}{s(\tau s + 1)} \delta_a$$

左右運動

$$\Delta v = \frac{g}{s} \Delta \phi$$

ピッチレート

$$\Delta q = \frac{K_q}{s(\tau s + 1)} \delta_e$$

上下運動

$$\Delta w = -\frac{K_w}{s(\tau s + 1)} \delta_T$$

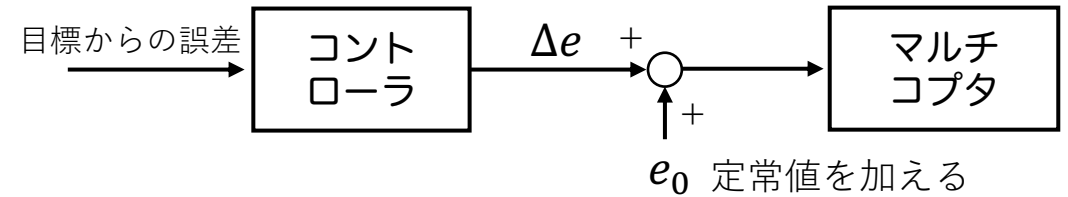
ヨーレート

$$\Delta r = \frac{K_r}{s(\tau s + 1)} \delta_r$$

ホバリング状態で線形化しているので、平衡点が違う場合（例えば直進中）などを考える際には並進速度や0角速度は0では無いので線形化された運動方程式の姿も変わり伝達関数の姿も変わってきます。ただし、平衡状態において並進速度のみで角速度が0の場合は角速度に関する伝達関数は上記と同じになります。

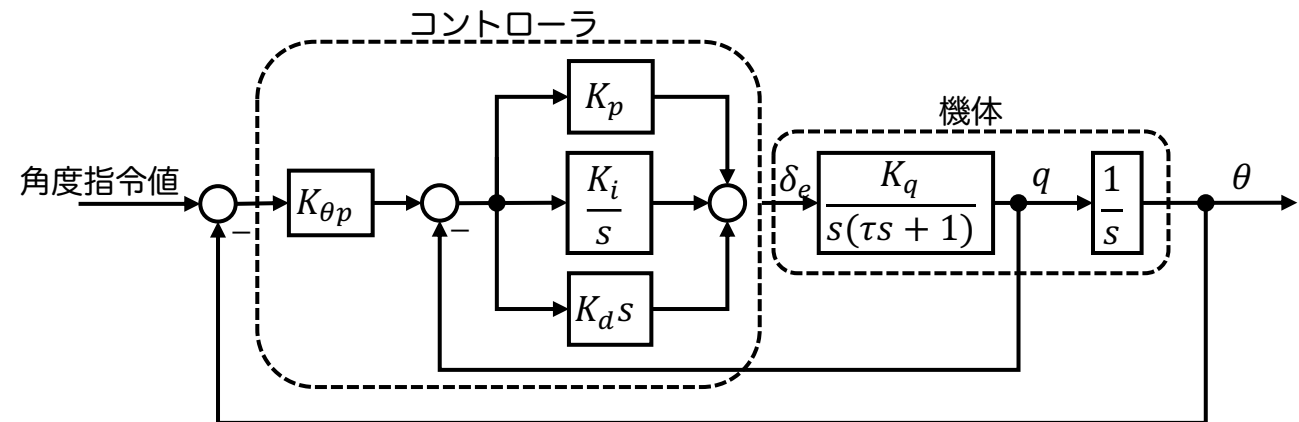
制御システム構築の際の注意点

線形化する際に微小擾乱法を用いていますが、以上のモデルで制御系を設計した場合制御される量は変化量になることに注意してください。操作量として得られる量も平衡状態を生み出す定常値からの変化量が算出されます。実際にマルチコプタに入力する際は定常値との和を加える必要があります。通常制御系設計の際に描かれるブロック線図ではこれは示されていないかもしれません。

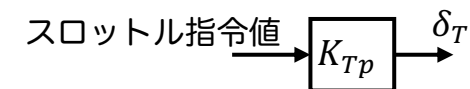


簡単な姿勢制御システムの一例

姿勢制御システムの簡単な例を以下に示します。インナーラップで角速度をPID制御で安定化し、さらにアウターラップは比例制御で姿勢角を制御します。以下はピッチ制御のみですが、他の姿勢の制御も基本的には同じです。**制御入力**は最終的にはミキシングして各モータに分配します。スロットルに関しては操縦装置からの信号に適当にゲインをかけて δ_T とします。



ピッチ角制御系（ロール、ヨーも同様）



スラスト制御系