K: n回コインを投げて表が出た回数

n回コインを投げてK回表が出る確率は.

$$P(k) = {}_nC_k\, \theta^k (1-\theta)^{n-k}$$

その期待値は.

$$E(k) = \sum_{k=1}^{n} {}_nC_k\, \theta^k (1-\theta)^{n-k} \cdot k$$

ここで

$$
\begin{aligned}
{}_nC_k &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n\cdot(n-1)!}{k\cdot(k-1)!((n-1)-(k-1))!} \\
&= \frac{n}{k}\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} \\
&= \frac{n}{k}\cdot {}_{n-1}C_{k-1}
\end{aligned}
$$

であるので

$$
\begin{aligned}
E(k) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k}\cdot {}_{n-1}C_{k-1}\, \theta^k (1-\theta)^{n-k} \cdot k \\
&= n \sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}C_{k-1}\, \theta^k (1-\theta)^{n-k} \\
&= n\theta \sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}C_{k-1}\, \theta^{k-1} (1-\theta)^{n-k}
\end{aligned}
$$

ここでK-1をmとおくと.

$$E(k) = n\theta \sum_{m=0}^{n} {}_{n-1}C_m\, \theta^m (1-\theta)^{(n-1)-m}$$

右辺の級数は2項展開の形なので.

$$
\begin{aligned}
E(k) &= n\theta\cdot(\theta+(1-\theta))^{n-1} \\
&= n\theta
\end{aligned}
$$

ちなみにθはコインを1回投げたときに

表が出る確率らしいよ!!

N: n回コインを投げて初めて表が出た回数.

n回コインを投げてn回目に表がでる確率は.

$$P(N) = (1-\theta)^{n-1}\theta$$

その期待値は.

$$
\begin{aligned}
E(N) &= \sum_{n=1}^{\infty} (1-\theta)^{n-1}\cdot\theta\cdot n \\
&= \theta \sum_{n=1}^{\infty} n(1-\theta)^{n-1} \\
&= \theta\left[1\cdot(1-\theta)^0 + 2\cdot(1-\theta)^1 + 3(1-\theta)^2 + \cdots + k(1-\theta)^{k-1} + \cdots\right]
\end{aligned}
$$

$$(1-\theta)E(N) = \theta\left[1\cdot(1-\theta)^1 + 2\cdot(1-\theta)^2 + 3(1-\theta)^3 + \cdots + k(1-\theta)^k + \cdots\right]$$

$$E(N)-(1-\theta)E(N) = \theta\left[(1-\theta)^0 + (1-\theta)^1 + (1-\theta)^2 + \cdots + (1-\theta)^{k-1} + \cdots\right]$$

$$[\quad] = \frac{1}{1-(1-\theta)}$$

これは等比級数の和の公式より!! (°Д°)

$$
\begin{aligned}
\therefore E(N)-(1-\theta)E(N) &= \theta E(N) \\
&= \theta\cdot\frac{1}{1-(1-\theta)}
\end{aligned}
$$

$$E(N) = \frac{1}{\theta}$$

確率θの事象を $\frac{1}{\theta}$ 回くり返せば「それ」は起こる.

ってことなのかなー w