年度不明

情報理論試験問題（昼間主コース）模範解答

1. 以下の確率分布についてそのエントロピーを求めなさい．

   (a) $\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}$

   (b) $\{\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}\}$

   (c) $\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4^2}, \frac{3^2}{4^3}, \frac{3^3}{4^4}, \ldots\}$

(答)

a)

$$
\begin{aligned}
H(\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}) &= -\frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\log\frac{3}{4} \\
&= \frac{1}{4}\log 4 + \frac{3}{4}\log\frac{4}{3} \\
&= 2 - \frac{3}{4}\log 3
\end{aligned}
$$

b) 確率分布 $\{1/2, 1/2\} \times \{1/4, 3/4\}$ の独立積になっている．すなわちエントロピーは $H(1/2)$ と $H(1/4)$ の和である．換言すれば，

$$
1 + (2 - \frac{3}{4}\log 3) \quad = \quad 3 - \frac{3}{4}\log 3
$$

c)

$$
\begin{aligned}
H_1 := H(\{\frac{1}{4}, \frac{3}{16}, \frac{9}{64}, \frac{27}{256}, \ldots\}) &= H(1/4) + (3/4)H(\{\frac{1}{4}, \frac{3}{16}, \frac{9}{64}, \ldots\}) \text{ (分割のエントロピー)} \\
&= H(1/4) + (3/4)H_1
\end{aligned}
$$

方程式を解けば，$H_1 = 4H(1/4) = 8 - 3\log 3$ をうる．

2. 状態集合 $\{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$ 上のマルコフ連鎖を考える．全８状態の各々は３ビットで表されていることに注意する．このマルコフ連鎖の状態遷移確率を，ハミング距離 $d(b_0b_1b_2, a_0a_1a_2) = \sum_{i=0}^{2} 1\{b_i \neq a_i\}$ を用いて

$$
p(b_0b_1b_2|a_0a_1a_2) = \begin{cases} 1/3 & if \quad d(b_0b_1b_2, a_0a_1a_2) = 0 \\ 2/9 & if \quad d(b_0b_1b_2, a_0a_1a_2) = 1 \\ 0 & if \quad d(b_0b_1b_2, a_0a_1a_2) \geq 2 \end{cases}
$$

と定義する．以下の問いに答えなさい．

   (a) このマルコフ連鎖の定常確率分布を求めなさい．

   (b) このマルコフ連鎖のエントロピーレート（すなわち１状態遷移当りのエントロピー）を求めなさい．

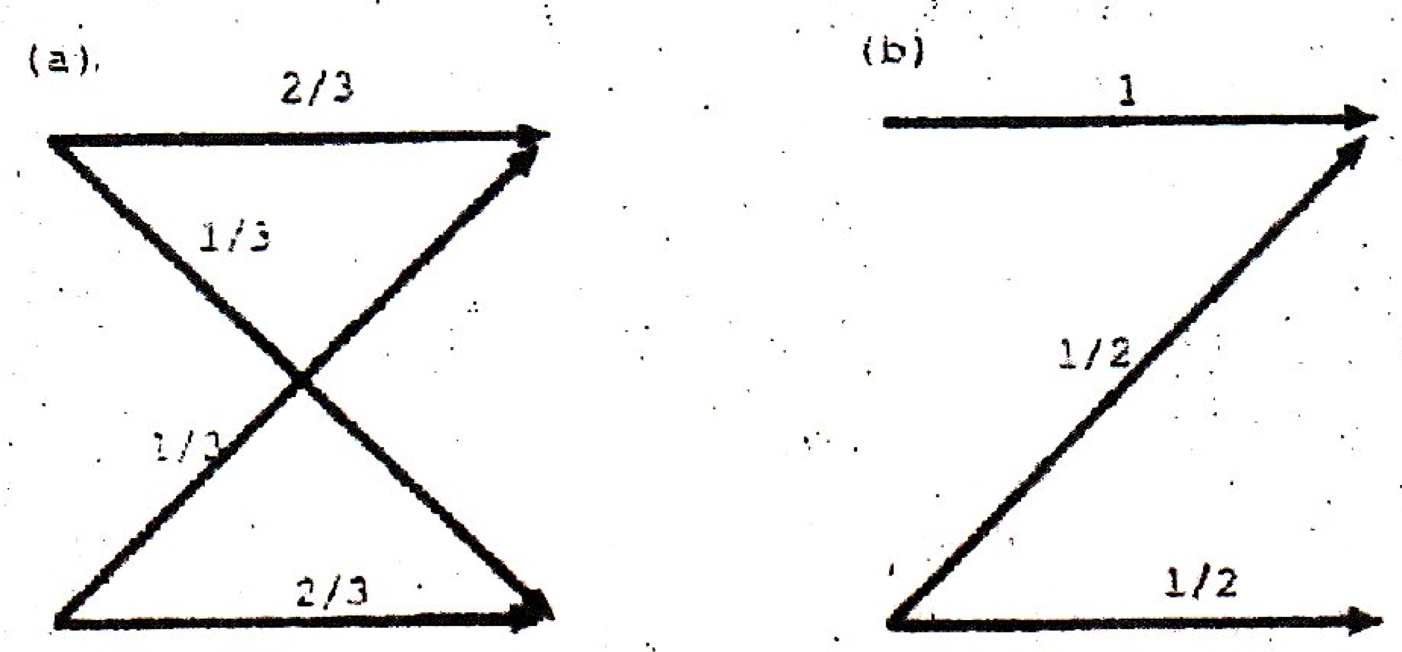
(答)

a) このマルコフ連鎖は既約かつ非周期的である．従って定常確率分布は一意に定まる．対称性から，一様分布が定常確率であることが予想されるが，実際それは状態方程式を満足する．

b) $H_\infty = H(\{1/3, 2/9, 2/9, 2/9\}) = H(1/3) + (2/3)\log 3 = (5/3)\log 3 - (2/3)$

3. 図 (a),(b) に示す離散無記憶通信路について各々の通信路容量を求めなさい．

年度不明



(答)

a)

$$C = 1 - H(1/3) = 1 - (\log 3 - 2/3) = 5/3 - \log 3$$

b)

$$C = D(0\|\bar{q}) = D(1/2\|q)$$

を解く．変形すると，

$$\begin{aligned} -\log q &= -H(1/2) - (1/2)\log q - (1/2)\log \bar{q} \\ 1 &= (1/2)\log \frac{q}{\bar{q}} \end{aligned}$$

となり，最後の式を解くと，$q = 4/5$ となる．従って，

$$\begin{aligned} C &= D(0\|1/5) \\ &= -\log(4/5) \\ &= \log 5 - 2 \end{aligned} \tag{1}$$

4. 以下の２問のうち一問を選択し，答えなさい．

(a) 定常無記憶通信路について，通信路符号化定理の内容を，過不足なく簡潔に述べよ．
(答え) 略

(b) X, Y, Z がこの順にマルコフ連鎖をなすとき，$I(Y;XZ) = I(X;Z) + I(X;Y|Z) + I(Y;Z|X)$ を証明しなさい．
(答え)　右辺-左辺は，

$$\begin{aligned} & I(X;Z) + I(X;Y|Z) + I(Y;Z|X) - I(Y;XZ) \\ =\ & E[\log \frac{p(X,Z)}{p(X)p(Z)} \frac{p(X,Y|Z)}{p(X|Z)p(Y|Z)} \frac{p(Y,Z|X)}{p(Y|X)p(Z|X)} \frac{p(Y)p(X,Z)}{p(X,Y,Z)}] \\ =\ & E[\log \frac{p(X,Z)p(X,Y,Z)p(Z)p(Z)p(X,Y,Z)p(X)p(X)p(Y)p(X,Z)}{p(X)p(Z)p(Z)p(X,Z)p(Y,Z)p(X)p(X,Y)p(X,Z)p(X,Y,Z)}] \\ =\ & E[\log \frac{p(X,Y,Z)p(Y)}{p(Y,Z)p(X,Y)}] \\ =\ & E[\log \frac{p(X,Z|Y)}{p(Z|Y)p(X|Y)}] \\ =\ & I(X;Z|Y) \qquad \text{（ここまでベン図を用いて示してもよい。最後にマルコフ性を用いると次のようになる} \\ =\ & 0 \end{aligned}$$

2006

情報理論試験問題（昼間コース）模範解答

1. 以下の確率分布についてそのエントロピーを求めなさい.

(a) $\{\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\}$

(b) $\{\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}\}$

(c) $\{\frac{1}{5}, \frac{4}{5^2}, \frac{4^2}{5^3}, \frac{4^3}{5^4}, \ldots\}$

(答)
a)

$$\begin{aligned} H(1/5) &= (1/5)\log 5 + (4/5)\log(5/4) \\ &= \log 5 - (4/5)\log 4 \\ &= \log 5 - 8/5 \end{aligned}$$

b) 確率分布 $\{1/2, 1/2\} \times \{1/5, 4/5\}$ の独立積になっている. すなわちエントロピーは $H(1/2)$ と $H(1/5)$ の和である. 換言すれば,

$$1 + \log 5 - 8/5 \;=\; \log 5 - 3/5$$

c)

$$\begin{aligned} H_1 := H(\{\frac{1}{5}, \frac{4}{5^2}, \frac{4^2}{5^3}, \frac{4^3}{5^4}, \ldots\}) &= H(1/5) + (4/5)H(\{\frac{1}{5}, \frac{4}{5^2}, \frac{4^2}{5^3}, \frac{4^3}{5^4}, \ldots\}) \text{ (分割のエントロピー)} \\ &= H(1/5) + (4/5)H_1 \end{aligned}$$

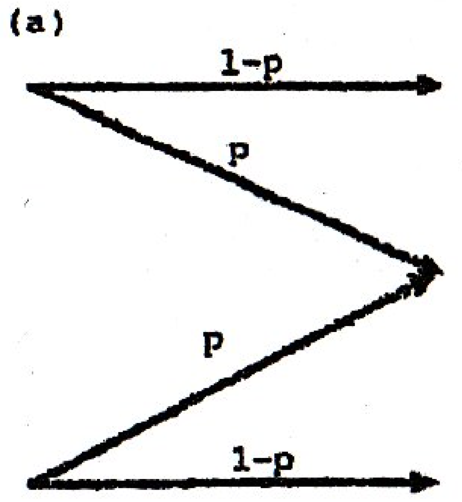
方程式を解けば, $H_1 = 5H(1/5) = 5\log_5 - 3$ をうる.

2. 下の図 (a) に示す離散無記憶通信路について通信路容量を理論的に導出しなさい。
(答) 通信路容量の導出は略。(講義ノート参照)　答

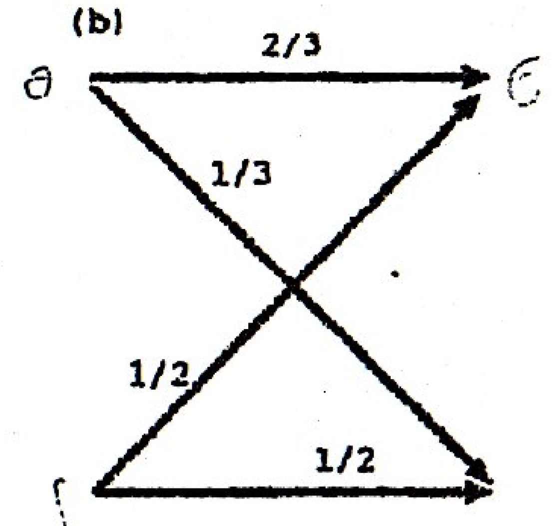
$$C = 1 - p$$

3. 下の図 (b) に示す離散無記憶通信路について通信路容量を求めなさい。

(a)



(b)



$$C = D(1 - 1/3||q) = D(1/2|q)$$

を解く. 変形すると,

$$\begin{aligned} D(2/3||q) &= D(1/2|q) \\ -H(2/3) - (2/3)\log q - (1/3)\log(1-q) &= -H(1/2) - (1/2)\log q - (1/2)\log(1-q) \\ -(1/6)\log q + (1/6)\log(1-q) &= (\log 3 - (2/3)) - 1 \\ \log((1-q)/q) &= 6(\log 3 - 5/3) \\ \log((1-q)/q) &= \log 3^6/2^{10} \\ (1-q)/q &= 3^6/2^{10} \end{aligned}$$

となり, 最後の式を解くと, $q = 2^{10}/(3^6 + 2^{10})$ となる. 従って,

$$\begin{aligned} C &= D(1/2||q) \\ &= -H(1/2) - (1/2)\log q - (1/2)\log(1-q) \\ &= -1 - (1/2)\log q - (1/2)\log(q(3^6/2^{10})) \\ &= -1 - \log q - (1/2)\log\{3^6/2^{10}\} \\ &= -\log\{3^6/(3^6 + 2^{10})\} - 3\log 3 + 4 \\ &= \log(3^6 + 2^{10}) + 4 - 9\log 3 \\ &= \log 1753 + 4 - 9\log 3 \end{aligned}$$

4. 盤面 (chess board) は 8 行 8 列のマス目の集合 $\mathcal{X} = \{(i,j)) : 1 \le i \le 8, 1 \le j \le 8\}$ であるとする. 一つのマス目の上にコマ (玉, あるいは King) を置く. コマは時刻毎に, 現在存在するマス目から, それに (縦, 横, 斜めに) 隣接するマス目のどれかに, 等しい確率で動くものとする. 従って, コマの存在するマス目の系列は, $\mathcal{X}$ 上のマルコフ連鎖をなす. これに関し以下の問いに答えなさい.

(a) このマルコフ連鎖に関して, マス目 $x \in \mathcal{X}$ からマス目 $y \in \mathcal{X}$ への状態遷移確率を $p(y|x)$ と書くことにする. あらゆるマス目 x,y に対して方程式 $q(x)p(y|x) = q(y)p(x|y)$ が成り立つような状態上の確率分布 $\{q(x), x \in \mathcal{X}\}$ が存在する. これを具体的に定めよ.
(答) $p(y|x)$ は x に隣接するマス目数 $N(x)$ の逆数. 従って, $q(x)/N(x) = q(y)/N(y)$ を満たす q を見出せばよい. $\sum_{x\in\mathcal{X}} N(x) = N$ とおくと明らかに $q(x) = N(x)/N$ が答である. これはマルコフ連鎖の定常分布である. これは $q(x)p(y|x) = q(y)p(x|y)$ の両辺を x について和をとったものが状態方程式であることからもわかる.
具体的には,

$$\begin{aligned} x \in \{2,\ldots,7\} \times \{2,\ldots,7\} &\rightarrow N(x) = 8 \\ x = (i,j) \in \{2,\ldots,7\} \times \{1,8\} \text{ or } \{1,8\} \times \{2,\ldots,7\} &\rightarrow N(x) = 5 \\ x = (i,j) \in \{1,8\} \times \{1,8\} &\rightarrow N(x) = 3. \qquad (1) \end{aligned}$$

従って, $N = 8*36 + 5*24 + 3*4 = 420$, 即ち各々の場合 $q(x)$ は,2/105,1/84,1/140.

2006

(b) このマルコフ連鎖のエントロピー（レート）を求めなさい.
(答) 各状態における次状態の確率分布のエントロピーは3状態の各々について,

$$\begin{aligned}\log 36 &= 2+2\log 3,\\ \log 24 &= 3+\log 3,\\ \log 4 &= 2\end{aligned}$$

従って, エントロピー（レート）H_∞ はこれらの, 定常確率分布に関する期待値である.
即ち,

$$\begin{aligned}H_\infty &= 36*(2/105)*\{2+2\log 3\}+24*(1/84)*\{3+\log 3\}+4*(1/140)*2\\ &= 144/105*\{1+\log 3\}+30/105*\{3+\log 3\}+6/105\\ &= 16/7+(58/35)\log 3\end{aligned}$$

5. 以下の問いに答えなさい.

(a) 式

$$I(X;Z|Y)$$

の明確な定義を一つ与えなさい.
(答)

$$I(X;Z|Y)=E[\log\frac{p(X,Z|Y)}{p(X|Y)p(Z|Y)}]$$

(b) 以下の式を証明せよ.

$$I(Z;X|Y)+I(W;XY|Z)=I(Y;W|Z)+I(X;ZW|Y)$$

(答) 左辺を定義を用いて書き換えると

$$\begin{aligned}&E[\log\frac{p(X,Z|Y)}{p(X|Y)p(Z|Y)}]+E[\log\frac{p(W,XY|Z)}{p(W|Y)p(XY|Z)}]\\ =\;&E[\log\frac{p(X,Z,Y)}{p(Y)}\frac{p(Y)}{p(Z,Y)}\frac{p(Y)}{p(X,Y)}]+E[\log\frac{p(W,XY,Z)}{p(Z)}\frac{p(Z)}{p(W,Z)}\frac{p(Z)}{p(X,Y,Z)}]\\ =\;&E[\log\frac{p(W,X,Y,Z)p(Y)p(Z)}{p(Z,Y)p(X,Y)p(W,Z)}]\end{aligned}$$

であるが, これは $X\leftrightarrow W$, $Y\leftrightarrow Z$ の入れ替えに関して対称. したがって, $I(Y;W|Z)+I(X;ZW|Y)$ となる.

(c) 上の式の両辺が零のとき, 確率変数 X,Y,Z,W にどのような性質が成り立つか, 説明とともに述べなさい.
(答) $I(Z;X|Y)=0$ より, $X-Y-Z$. 即ち X,Y,Z はこの順にマルコフ連鎖をなす.
$I(W;XY|Z)=0$ より $(X,Y)-Z-W$. 即ち $(X,Y),Y,W$ はこの順にマルコフ連鎖をなす. あわせると $X-Y-Z-W$, 即ち, X,Y,X,W はこの順にマルコフ連鎖をなす.

2006年8月1日，川端

情報理論試験問題（昼間コース）

以下の問題のうち３題に答えなさい．ただし，問題１，２は必須とする．対数の底は 2 とする．近似計算はする必要はない．答には，3 以上の素数の対数等を用いてよい．

1. 以下の確率分布についてそのエントロピーを求めなさい．

$H(p) = p\log\frac{1}{p}$

   (a) $\{\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\}$

   (b) $\{\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}\}$

   (c) $\{\frac{1}{5}, \frac{4}{5^2}, \frac{4^2}{5^3}, \frac{4^3}{5^4}, \ldots\}$

2. 下の図 (a) の二元消失通信路の通信路容量を与えなさい．（理論的導出がある場合，　加点する．）

3. 下の図 (b) に示す離散無記憶通信路について通信路容量を求めなさい．(ヒント:1753 は素数.)

4. 盤面 (chess board) は 8 行 8 列のマス目の集合 $\mathcal{X} = \{(i,j)) : 1 \le i \le 8, 1 \le j \le 8\}$ であるとする．一つのマス目の上にコマ (玉，あるいは King) を置く．コマは時刻毎に，現在存在するマス目から，それに（縦，横，斜めに）隣接するマス目のどれかに，等しい確率で動くものとする．従って，コマの存在するマス目の系列は，$\mathcal{X}$ 上のマルコフ連鎖をなす．これに関し以下の問いに答えなさい．

   (a) このマルコフ連鎖に関して，マス目 $x \in \mathcal{X}$ からマス目 $y \in \mathcal{X}$ への状態遷移確率を $p(y|x)$ と書くことにする．あらゆるマス目 x, y に対して方程式 $q(x)p(y|x) = q(y)p(x|y)$ が成り立つような状態上の確率分布 $\{q(x), x \in \mathcal{X}\}$ が存在する．これを具体的に定めよ．

   (b) このマルコフ連鎖のエントロピー（レート）を求めなさい．

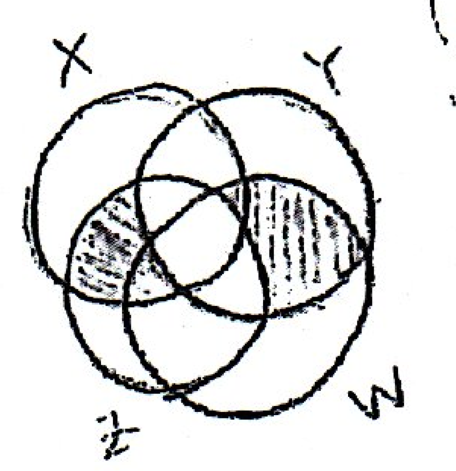
5. 以下の (a),(b),(c) に答えなさい．

   (a) 確率変数 X, Y, Z について，情報量

$$I(X; Z|Y)$$

   の明確な定義を一つ与えなさい．

$(X \cap Z) - Y$



   (b) 確率変数 X, Y, Z, W について，以下の式を証明せよ．

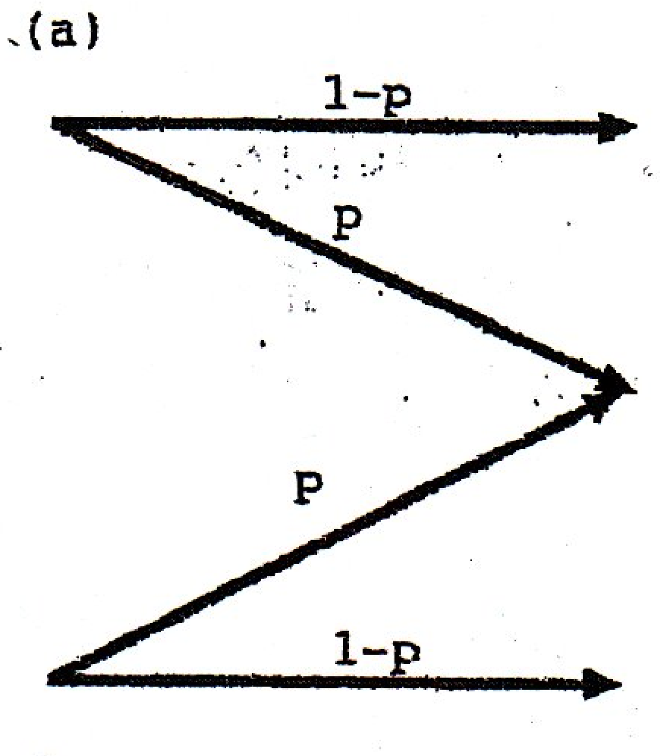
$$I(Z; X|Y) + I(W; XY|Z) = I(Y; W|Z) + I(X; ZW|Y)$$

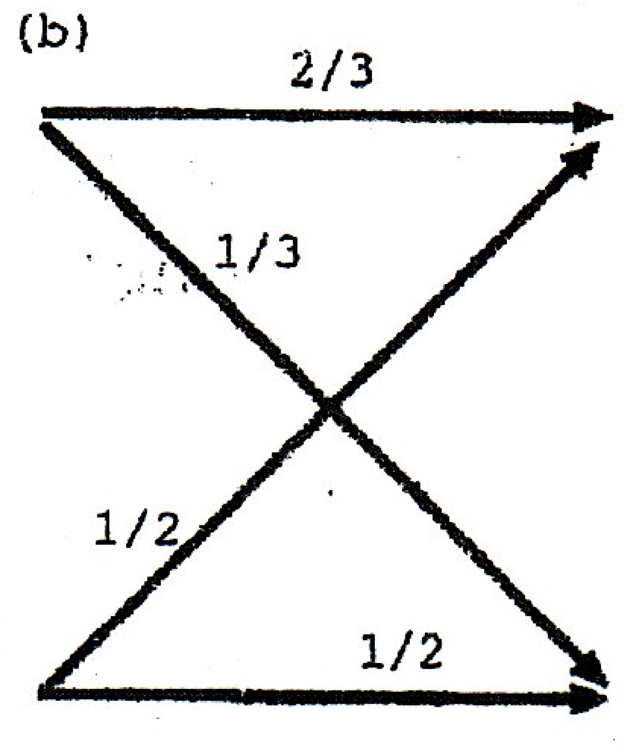
   (c) 上の式の両辺が零のとき，確率変数 X, Y, Z, W にどのような性質が成り立つか，説明とともに述べなさい．

$(Z \cap X) - Y = (Z - Y) \cap (X - Y)$

$I(X; ZW|Y) = I(X; Z|Y) + I(X; W|Y)$

$\frac{1}{(\frac{4}{5})^2}$ $\frac{4}{5}$





$I(Y) = H(Y) - H(Y|X)$

2007年7月31日，川端

情報理論試験問題（昼間コース）

以下の問題から3題選択して答えなさい．但し問い1,2は必須とする．対数の底は2とする．近似計算はする必要はない．

1. 確率分布

$$\{p(1)=\frac{2}{9},p(2)=\frac{1}{5},p(3)=\frac{8}{45},p(4)=\frac{2}{15},p(5)=\frac{1}{9},p(6)=\frac{4}{45},p(7)=\frac{2}{45},p(8)=\frac{1}{45}\}$$

に従うメッセージに対して

(a) Huffman 符号 (Prefix-free な符号で期待符号長が最小になるもの) を構成しなさい．

(b) 上問で得られた符号の期待符号長を求めなさい．

$\frac{10+18+24+24+25+24+14+8}{45} = \frac{147}{45}$

2. 以下の問題に順に答えなさい．答はなるべく簡単に与えなさい．

$\frac{1}{3}\log 3 + \frac{2}{3}\log\frac{3}{2} = \log 3 - \frac{2}{3}$

(a) 確率が $p_X(0)=1-p_X(1)=1/3$ で与えられる二元確率変数 X のエントロピーを計算せよ．

(b) 二元確率変数 Y は X に関係し，以下の表の要素として与える条件付確率 $p_{Y|X}(y|x), y\in\{0,1\}, x\in\{0,1\}$ により分布するものとする．相互情報量 $I(X;Y)$ を計算せよ．

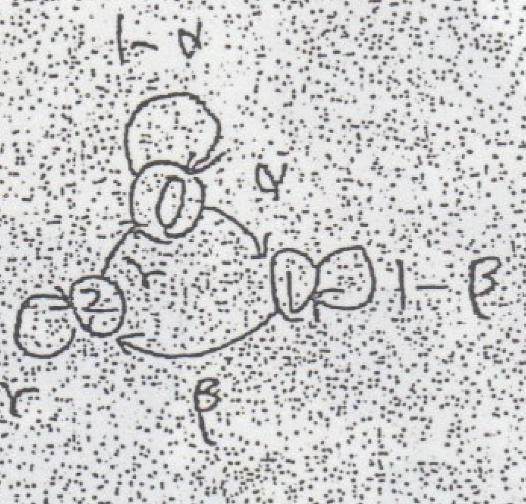
$x\backslash y$	0	1
0	1/3	1/6
1	1/6	1/3

(c) 入力記号 $x\in\{0,1\}$ に対して出力記号 $y\in\{0,1\}$ が得られる確率が上問の $p_{Y|X}(y|x)$ で与えられるような離散無記憶通信路についてその通信路容量を与えなさい．

$C = 1 - H(\varepsilon) = \frac{5}{3} - \log 3$

3. 状態集合 $\{0,1,2\}$ をもつ定常マルコフ連鎖の遷移確率 $\mathbf{P}$(次の状態が x' | 現在の状態が x) が，$0<\alpha,\beta,\gamma<1$ をパラメータとして，

$x\backslash x'$	0	1	2
0	$1-\alpha$	α	0
1	0	$1-\beta$	β
2	γ	0	$1-\gamma$



の要素として与えられる．このマルコフ連鎖について，

(a) 状態遷移図を描け．

(b) 定常確率分布を計算せよ．

(c) エントロピー（レート）を計算せよ．答は，二元エントロピー関数 $H(x)=-x\log x-(1-x)\log(1-x)$ を用いて，なるべく簡単に表せ．

(d) パラメータを変化させるとき，エントロピー（レート）がとる最大値を求めよ．(Hint:分母分子が対称式であるような分数の最大化では，分母か分子を定数と置き，一方だけの極値問題が対称性をもつ解をとしてとけないか考えてみるとよい．)

4. 盤面 (chess board) は4行4列のマス目の集合 $\mathcal{X}=\{(i,j)):1\le i\le 4, 1\le j\le 4\}$ であるとする．一つのマス目の上にコマ (馬，あるいは Knight) がある．コマが現在任意のマス目 (i,j) にあるとき，次の時刻には関係式 $|(k-i)(l-j)|=2$ を満たすマス目 (k,j) の何れかに等確率で動くものとする．従って，コマの存在するマス目の系列は，$\mathcal{X}$ 上のマルコフ連鎖をなす．これに関し以下の問いに答えなさい．

(a) このマルコフ連鎖に関して，マス目 $x\in\mathcal{X}$ からマス目 $y\in\mathcal{X}$ への状態遷移確率を $p(y|x)$ と書くことにする．方程式

$$q(x)p(y|x)=q(y)p(x|y),\ \forall x\in\mathcal{X},\ \forall y\in\mathcal{X}$$

が成り立つようマス目集合上の確率分布 $\{q(x), x\in\mathcal{X}\}$ が存在する．これを具体的に定めよ．

(b) このマルコフ連鎖のエントロピー（レート）を求めなさい．

2008年7月29日，川端

情報理論試験問題（昼間コース）

以下の問題に答えなさい．ただし，問題1, 2は必須とし，問題3か問題4はそれらのうち1題を選択せよ．対数の底は2とする．近似計算はする必要はない．

1. 以下の各々の確率分布についてエントロピーを求めなさい．

   $2 - \frac{3}{4}\log 3$ (a) $\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}$

   $6 - \frac{9}{4}\log 3$ (b) $\{\frac{1\cdot1\cdot1}{4^3}, \frac{1\cdot1\cdot3}{4^3}, \frac{1\cdot3\cdot1}{4^3}, \frac{1\cdot3\cdot3}{4^3}, \frac{3\cdot1\cdot1}{4^3}, \frac{3\cdot1\cdot3}{4^3}, \frac{3\cdot3\cdot1}{4^3}, \frac{3\cdot3\cdot3}{4^3}\}$

   (c) $\{\frac{3}{4}, \frac{3}{4^2}, \frac{3}{4^3}, \frac{3}{4^4}, \frac{3}{4^5}, \ldots\}$

2. 3つの確率変数 X, Y, Z がこの順にマルコフ連鎖をなすものとする（すなわち $X - Y - Z$），このとき，データ処理不等式

$$I(X;Y) \geq I(X;Z)$$

   を証明せよ．

3. 以下の通信路行列をもつ離散無記憶通信路の通信路容量を求めよ．

   (a)

   $C = 1 - \varepsilon = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$$\begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

   (b)

   $C = \log\left(2^{\frac{3}{2}} + 3^{\frac{3}{2}}\right) - \frac{3}{2}\log 3 - \frac{5}{6}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

4. 盤面 (chess board) は8行8列のマス目の集合 $\mathcal{X} = \{(i,j) : 1 \leq i \leq 8, 1 \leq j \leq 8\}$ であるとする．一つのマス目にコマ（王，あるいはKing）がある．現在マス目 $(i,j) \in \mathcal{X}$ にあるコマは，次の時刻には関係式 $|k-i| = 1$ と関係式 $|l-j| = 1$ の何れかあるいは両方を満たすマス目 $(k,l) \in \mathcal{X}$ に等確率で動くものとする．コマのあるマス目の系列 (sequence) は，状態空間 $\mathcal{X}$ 上のマルコフ連鎖をなす．これに関し以下の問いに答えなさい．

   (a) マス目 $x \in \mathcal{X}$ からマス目 $y \in \mathcal{X}$ への状態遷移確率を $p(y|x)$ と書くことにする．方程式

$$q(x)p(y|x) = q(y)p(x|y), \ \forall x \in \mathcal{X}, \ \forall y \in \mathcal{X}$$

   が成り立つような確率分布 $\{q(x), x \in \mathcal{X}\}$ が存在する．これを具体的に定めよ．

   (b) このマルコフ連鎖のエントロピー（レート）を求めなさい．

2009 年 8 月 4 日，川端

情報理論試験問題（昼間コース）

平均 40 点ぐらい?

以下の問題に答えなさい．対数の底は 2 とする．近似計算はする必要はない．答には, 3 以上の素数の対数等を用いてよい．ノート参考書等の持込は不可とする． 配点は正しさ, 計算の明解さ, 記述も含めた最高点を示します．

1. 以下の確率分布についてそのエントロピーを求めなさい．
   (a) $\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}$ （5 点） $2 - \frac{3}{4}\log 3$
   (b) $\{\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}\}$ （5 点） $3 - \frac{3}{4}\log 3$
   (c) $\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4^2}, \frac{3^2}{4^3}, \frac{3^3}{4^4}, \ldots\}$ （10 点） $8 - 3\log 3$

2. 確率分布

$$\{\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{15}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}\}$$

   に従うメッセージに対して,
   (a) Huffman 符号, 即ち期待符号長最小の二進語頭符号, を構成しなさい. (10 点)
   (b) その期待符号長を求めなさい.（10 点） $\frac{167}{60}$

3. 通信路行列 $P = \boxed{(p(y|x))}$ が以下の表で与えられるような２入力２出力離散無記憶通信路 (Z 通信路) の通信路容量を求めなさい．導出過程も書きなさい. (30 点)

$x\backslash y$	0	1
0	1	0
1	1/2	1/2

$C = \log 5 - 2$

4. 盤面 (chess board) は 8 行 8 列のマス目 (状態) の集合 $\mathcal{X} = \{(i,j)) : 1 \leq i \leq 8, 1 \leq j \leq 8\}$ であるとする．一つのマス目の上にコマ (王, あるいは King) を置く．マス目 (i,j) にあるコマは次の時刻には縦横斜めに隣接したマス目 (すなわち現在位置とは異なるマス目 (l,m) であって $|i-l| \leq 1$ かつ $|j-m| \leq 1$ を満たすところに) に等確率で遷移するものとする．コマが位置するマス目は, $\mathcal{X}$ 上のマルコフ連鎖をなす．これに関して, 以下の問いに答えなさい．
   (a) マス目 $x \in \mathcal{X}$ からマス目 $y \in \mathcal{X}$ への状態遷移確率を $p(y|x)$ と書く．各マス目 x,y に対して方程式 $q(x)p(y|x) = q(y)p(x|y)$ が成り立つような状態上の確率分布 $\{q(x), x \in \mathcal{X}\}$ が存在する．これを具体的に定めよ． (15 点)
   $q(x)$: $\frac{2}{105}$ · $\frac{1}{84}$ · $\frac{1}{140}$
   (b) このマルコフ連鎖のエントロピー（レート）を求めなさい. (15 点)
   $H_\infty = \frac{1}{35}(80 + 58\log 3) = \frac{16}{7} + \frac{58}{35}\log 3$

2010年8月10日，川端

情報理論試験問題（昼間コース）

以下の問題に答えなさい．問題1から3は必須，問題4と5はそのうち1問の選択とする．ノート参考書等の持込は不可．対数の底は 2 とする．近似計算はする必要はない．答には，3以上の素数の対数を用いてよい．

1. 二元符号 $\{0^k1^l0, k=0,1,2,\ldots,l=0,1,2,\ldots\}$ について以下の問いに答えなさい．
   (a) 非特異か？ (Yes, No ともに，理由も書くこと.)
   (b) Kraft の不等式を満足するか? (Yes, No ともに，理由も書くこと.)
   (c) 最小限の変更を加えて prefix-free 符号にしなさい．

2. 以下の確率分布のエントロピーを求めよ．
   (a) $\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$
   (b) $\{\frac{2}{3}, \frac{2}{3^2}, \frac{2}{3^3}, \frac{2}{3^4}, \ldots\}$

3. 入力アルファベット $\mathcal{X}$ および出力アルファベット $\mathcal{Y}$，ならびに通信路行列 $\{p_{Y|X}(y \mid x), X \in \mathcal{X}, Y \in \mathcal{Y}\}$ が以下の各々のように与えられる離散無記憶通信路について，それぞれの通信路容量を求めなさい．
   (a) $\mathcal{X} = \{0,1\}, \mathcal{Y} = \{0,e,1\}$. 通信路行列:

$X\backslash Y$	0	e	1
0	2/3	1/3	0
1	0	1/3	2/3

   (b) $\mathcal{X} = \{0,1\}, \mathcal{Y} = \{0,1\}$. 通信路行列:

$X\backslash Y$	0	1
0	1	0
1	1/2	1/2

4. 期待値が0，標準偏差が1の互いに独立な確率変数 $X_n, n=1,\ldots,N$ について，それらの和を S_N と書く．不等式 $|S_N| \geq N$ が成り立つ確率を Q_N と表すとき，この確率 Q_N に関して以下の問いに答えなさい．
   (a) Chebychev の不等式を用いた上限を求めよ．
   (b) N が十分大きいとき，中心極限定理を用いた近似式を与えよ．ただし，ガウスの誤差関数

$$\mathrm{erf}(x) = 2\int_{\sqrt{2}\times x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{\lambda^2}{2}\} d\lambda$$

   を用いよ．

5. 状態集合 $\{0,1,2\}$ 上の定常マルコフ連鎖が，以下の表で与えられる状態遷移確率 $\{p_{X_2|X_1}(x_2 \mid x_1)\}$ をもつとする．

$X_1\backslash X_2$	0	1	2
0	1/2	1/2	0
1	0	2/3	1/3
2	1/6	0	5/6

   このとき以下の問いに答えよ。
   (a) このマルコフ連鎖の定常 (確率) 分布を求めなさい。
   (b) このマルコフ連鎖のエントロピー（あるいはエントロピーレート）を求めなさい．

情報理論試験問題 (昼間コース)2004 年 7 月 27 日　川端先生

以下の問題に答えなさい。対数の底は 2 とする。問題 2、3 では、二進エントロピー関数すなわち

$$H(p) = -p\log p - (1-p)\log(1-p)$$

は自由に用いてよい。

1. 以下の確率分布についてそのエントロピーを求めなさい。log 3 はもちいてよい。ただしなるべく簡単に表すこと。

(a) $\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$
(b) $\{\frac{1}{6}. \frac{2}{6}, \frac{3}{6}\}$
(c) $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots\}$

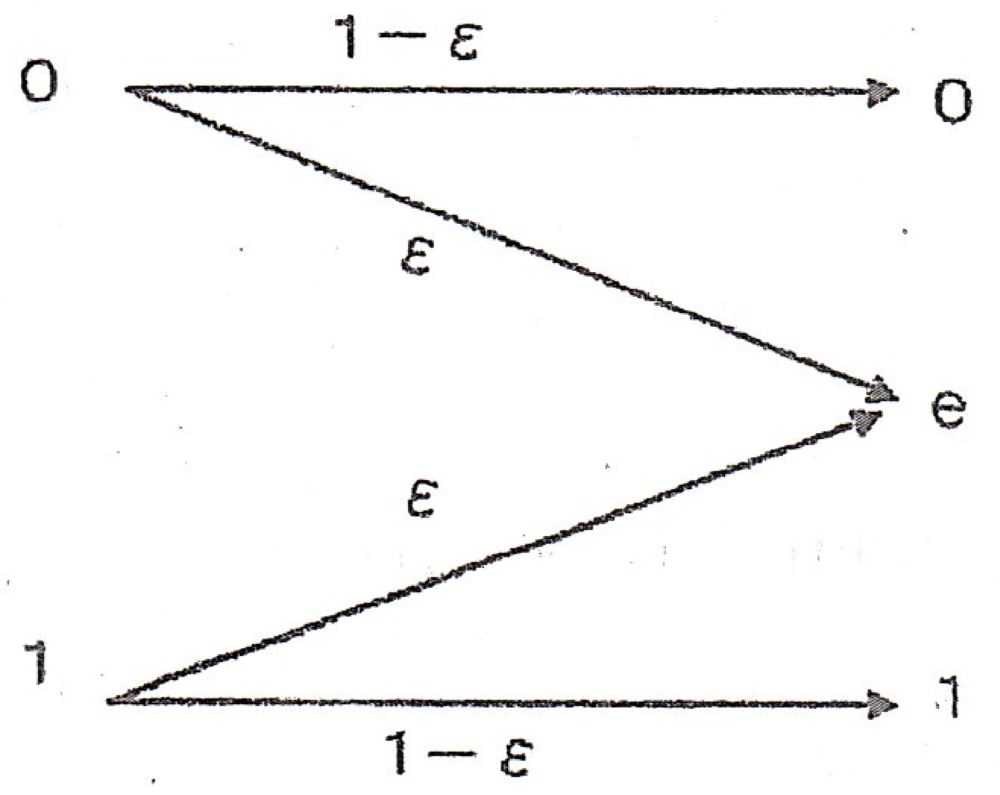
2. 状態集合 $\{0, 1, 2\}$ 上のマルコフ連鎖で遷移確率が

$$p_{00} = 1 - a,\ p_{01} = a,\ p_{11} = 1/2,\ p_{12} = 1/2,\ p_{22} = 1/2,\ p_{20} = 1/2$$

で与えられるものを考える。ただし、$p_{\alpha\beta}$ は現状態が α である条件下で次に状態 β に遷移する状態遷移確率を表すものとし、a は $0 < a < 1$ を満足する定数とする。このマルコフ連鎖について、以下の問いに答えなさい。

(a) 状態遷移図を描け。
(b) 定常状態の確率分布を a をパラメータとして求めなさい。
(c) エントロピー (レート)H_∞ を a をパラメータとして求めなさい。
(d) H_∞ の a に関する最大値を求めなさい。

3. 以下の離散無記憶通信路の通信路容量を求めなさい。



4. 式

$$f(p, q, r) := -p\log p - q\log q - r\log r + q + r\log 3$$

の確率分布 $\{p, q, r\}$ に関する最大値を (達成する確率分布も含めて) 求めなさい。