確率

事象（出来事）「公平なコインを4回投げて表が1回以上越える」$= A$

事象の確率 = Aの確率 = $P(A)$

標本空間 $\Omega = \{B, T\}^4$ = 実験結果の全体 (ω)

BBTB, BBBB, …

$\omega \in \Omega$

$A :=$「A」が真となるωの全体 $\subseteq \Omega$

$= \{\omega : \omega \in A\}$

$p(\omega) :=$ ωが起こる確率 (≥ 0)

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1.$$

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$$

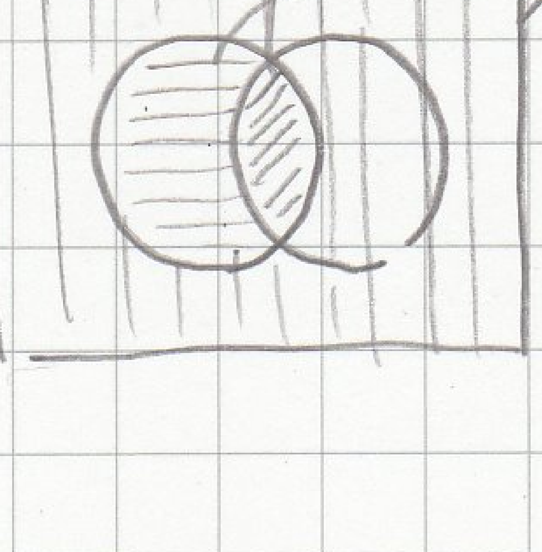
Ωが離散集合.　$p(\omega) = P(\{\omega\})$

定義
- Ωの部分集合を事象という.
- $\{\omega\}, \omega \in \Omega$ を基本事象という.

事象 $A, B \subseteq \Omega$

$A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $A^c = \Omega - A$, $\phi = \Omega^c$

和　積　余事象



のように 集合演算について閉じている

$P : 2^\Omega \to \mathbb{R}$　… 2^ΩはΩの部分集合の全体

1) $A \subseteq \Omega \Rightarrow P(A) \geq 0$

2) $P(\Omega)$ ……

$p(\omega) = P(\omega = BBTB) = \dfrac{1}{16}$

Aが1回以上	A^c=表が1回も出ない
A=表が1回以上出る	
$=\Omega - A^c$	

$P(A^c) = P(BBBB$ が出る$) = \dfrac{1}{16}$

$P(A) = P(\Omega) - P(A^c)$

$= 1 - \dfrac{1}{16} = \dfrac{15}{16}$

偏りがあるコイン投げ（4回）

$\Omega = \{B, T\}^4$

Q(1回コインを投げると表が出る$) = \theta$

$Q(\{\omega\}) = (1-\theta)(1-\theta)\theta(1-\theta) = q(\omega)$

ω = BBTB

$$Q(A) = \sum_{\omega \in A} q(\omega)$$

例. 偏りのあるコインをn回投げ

$\Omega = \{B, T\}^n$　　$K(\omega)$：表が出た回数

公平　$P(\{\omega\}) = \dfrac{1}{2^n}$

偏り　$Q(\{\omega\}) = (1-\theta)^{n-K(\omega)}\,\theta^{K(\omega)}$

$K : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{0\}$

$K(\omega) = $ (n回コインを投げて表が出た回数)

Kは ランダムな変数 である

確率変数

[random variable] r.v

定義

Ω から分布空間 $\mathcal{X}$ への写像

$X : \Omega \to \mathcal{X}$

を確率変数という。

$x \in \mathcal{X}$

$P(\{\omega : X_\omega = x\}) \ (= P(X = x)) := p_X(x)$

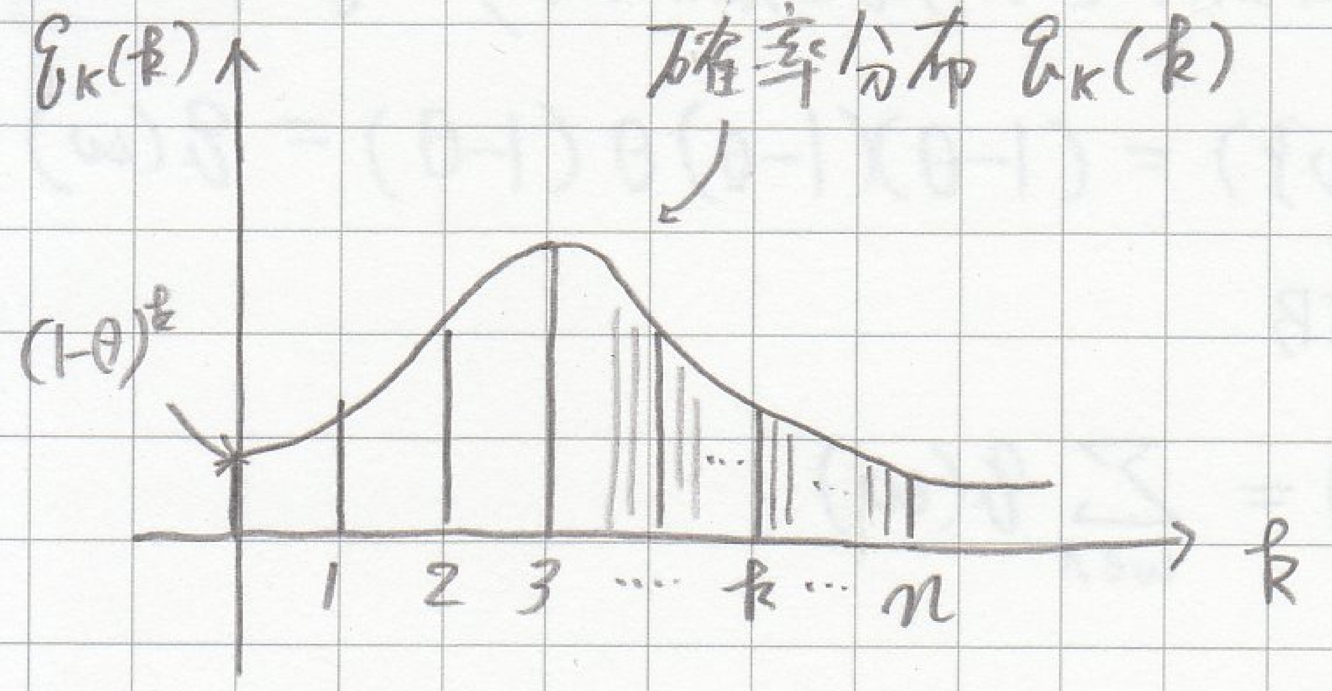
をXの確率関数という。

$$p_X(x) = \sum_{\omega : X(\omega) = x} p(\omega)$$

$$K : \underset{\{B,T\}^n}{\overset{}{\Omega}} \to K$$

$$g_K(k) = \sum_{\omega : K(\omega) = k} \overbrace{p(\omega)}^{=(1-\theta)^{n-k}\theta^k}$$

$$= {}_nC_k (1-\theta)^{n-k} \theta^k$$: 二項分布 [Binomical distribution]



例. $\Omega = \{B, T\}^{\infty に近い}$

$N : \Omega \to \mathbb{N}$

($N(\omega)$は結果ωの中で初めてTが出た回数)

↓

$$p_N(n) = P(N = n) = P(\overbrace{BBB\cdots B}^{n-1}T) = \frac{1}{2^n}$$

$$q_N(n) = Q(\ 〃\ ) = Q(\ 〃\ )$$

$$= (1-\theta)^{n-1}\theta$$: 幾何分布

$X : \Omega \to \mathcal{X}$

$\mathcal{X}$ が線型演算できる場合 (例. $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^k, \ldots$)

Xの期待値 [expectation]

$$EX := \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) X(\omega)$$

$$= \sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{\omega : X(\omega) = x} p(\omega) \underbrace{X(\omega)}_{x}$$

$$= \sum_{x \in \mathcal{X}} x \, p_X(x)$$

$$g : \overset{\mathbb{R}}{\mathcal{X}} \to \overset{\mathbb{R}}{\mathcal{Y}}$$

$g(X(\omega)) \in \mathcal{Y}$

$g \cdot X : \Omega \to \mathcal{Y}$ r.v.

$$Eg(X) := \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) g(X(\omega))$$

$$= \sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{\omega : X(\omega) = x} p(\omega) \boxed{g(x)}$$

$$= \sum_{x \in \mathcal{X}} g(x) p_X(\omega)$$

H.W.

- Kの期待値 (EK)
- Nの期待値 (EN)