第1版（2011/2/3 Thu） 0922028 Bコース E科 森田 健幸

誤字・脱字・解法の誤りなどがあれば連絡して下さい
この解答例を使用したことによって起こるあらゆる損害に対して、当方は責任を負いかねます
用法・用量を守ってご使用ください

・数理解析（山本）
1.1.「桁落ち」とはどういう現象か？ 簡単に説明せよ。
2. $f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}$
の計算は $x \ll 1$ のとき桁落ちを起こす。なぜ起きるのかを1.で述べた内容に則して説明せよ。
3. 2.の fx の計算で桁落ちが起こらないようにするにはどうしたらよいか。
$(1-\cos x)(1+\cos x)=(\sin x)^2$ をヒントにして、考察せよ。

（解）
1：桁落ちとは絶対値の近い2数の加減算の結果、もとの数と比べて絶対値の小さな数が得られるとき、計算結果の有効桁数が著しく落ちる現象である。

2：$x \ll 1$ のとき $\cos x \cong 1$ となる。このとき分子に絶対値の近い2数の減法が現われる。したがって桁落ちが起こる。

3：fx の分子、分母に $1+\cos x$ を掛けると

$$f(x)=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$$

$$=\frac{(\sin x)^2}{x^2(1+\cos x)}$$

fx から絶対値の近い2数の減算がなくなるので桁落ちは起こらない。したがって桁落ちが起こらないようにするためには fx の分子、分母に $1+\cos x$ を掛ければよいと分かる。

2. 行列

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&3\\0&0&10\end{bmatrix}$$

の絶対値最大固有値およびその固有ベクトルの近似値を、$x^{(0)}=[0,0,1]T$ から出発するべき乗法によって求めよ。
ただし規格化には最大値ノルムを使用し、$x^{(2)}$（規格化後）の算定値の近似値を答とする。
＃固有値の算定にはレイリー商を用いない方法をとること。

(解)
反復法のアルゴリズム1を用いると

$$y^{(1)}=A\times x^{(0)}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&3\\0&0&10\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\3\\10\end{bmatrix}$$

$v^{(1)}=\left\|y^{(1)}\right\|=10$ （$y^{(1)}$ベクトルにおける最大数）

$$x^{(1)}=\frac{y^{(1)}}{v^{(1)}}=\begin{bmatrix}\frac{3}{10}\\\frac{3}{10}\\1\end{bmatrix}$$

$$y^{(2)}=A\times\left(x^{(1)}\right)=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&3\\0&0&10\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\frac{3}{10}\\\frac{3}{10}\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{39}{10}\\\frac{33}{10}\\10\end{bmatrix}$$

$v^{(2)}=\left\|y^{(2)}\right\|=10$

誤字・脱字・解法の誤りなどがあれば連絡して下さい
この解答例を使用したことによって起こるあらゆる損害に対して、当方は責任を負いかねます
用法・用量を守ってご使用ください

$$x^{(2)}=\frac{y^{(2)}}{v^{(2)}}=\begin{bmatrix}\frac{39}{100}\\\frac{33}{100}\\1\end{bmatrix}$$

したがって

絶対値最大固有値の近似解 $v^{(2)}=\left\|y^{(2)}\right\|=10$

固有ベクトルの近似解 $x^{(2)}=\frac{y^{(2)}}{v^{(2)}}=\begin{bmatrix}\frac{39}{100}\\\frac{33}{100}\\1\end{bmatrix}$

3.1. 関数 $fx=(x^2-9)$に対し、fx=0となる x を求めるための Newton 法の計算方法を具体的に記せ。

2. 上で記した計算方法を用いて、$x^{(0)}$=1から出発し、真の解 x=3に対する近似解の相対誤差が3パーセント以下になるまで計算せよ。

3. 連立非線形方程式

2x13+3x22=5,3x12-2x23=1

の近似解を求める Newton 法を考える。K 回反復して得られる近似解を x(k)=(x1(k),x2(k))T とするとき、x(k) ら x(k+1)を求めるための式を具体的に書け。最終的な表現は、x(k+1)=(x1(k+1),x2(k+1))T のそれぞれの成分ごとに記述すること。

(解)

1. Newton 法のアルゴリズムは、x(0)を適切に定めると

$x^{(k+1)}=x^{(k)}-\frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$ (k=0,1,2,…)

なので、具体的に式を代入すると

$x^{(k+1)}=x^{(k)}-\frac{(x^{(k)})^2-9}{2x^{(k)}}$

となる。

2. 問題文の条件により

$x^{(0)}=1$

停止条件 $|\frac{3-x^{(k)}}{3}|\leq 0.03$

として反復を繰り返す。

$x^{(1)}=x^{(0)}-\frac{(x^{(0)})^2-9}{2x^{(0)}}=1-\left(-\frac{8}{2}\right)=5$

$|\frac{3-5}{3}|=0.66\geq 0.03$

$x^{(2)}=x^{(1)}-\frac{(x^{(1)})^2-9}{2x^{(1)}}=5-\left(\frac{16}{10}\right)=3.4$

$|\frac{3-3.4}{3}|=0.13\geq 0.03$

$x^{(3)}=x^{(2)}-\frac{(x^{(2)})^2-9}{2x^{(2)}}=\frac{17}{5}-\left(\frac{32}{85}\right)=3.023529\ldots\cong 3.024$

$|\frac{3-3.024}{3}|=0.008\leq 0.03$

よって近似解は3.024

3. 連立非線形方程式の近似解を求める Newton 法のアルゴリズムは、$x^{(0)}$を適切に定めると

誤字・脱字・解法の誤りなどがあれば連絡して下さい
この解答例を使用したことによって起こるあらゆる損害に対して、当方は責任を負いかねます
用法・用量を守ってご使用ください

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left(\frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x}\right)^{-1} f(x^{(k)}) \quad (k=0,1,2,\ldots)$$

となる。与えられた連立方程式を行列形に整理して以下のように置く。

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1^3 + 3x_2^2 - 5 \\ 3x_1^2 - 2x_2^3 - 1 \end{bmatrix}$$

x についてのヤコビ行列をとると

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} x_1^2 & x_2 \\ x_1 & -x_2^2 \end{bmatrix}$$

2元なので逆行列を直接求めてしまえば

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{-1} = -\frac{1}{6|(x_1^2 x_2^2) + x_1 x_2|}\begin{bmatrix} -x_2^2 & -x_2 \\ -x_1 & x_1^2 \end{bmatrix}$$

以上より、具体的な式は

$$x^{(k+1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} + \frac{1}{6|(x_1^2 x_2^2) + x_1 x_2|}\begin{bmatrix} -x_2^{(k)^2} & -x_2{}^{(k)} \\ -x_1{}^{(k)} & x_1^{(k)^2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_1(x^{(k)}) \\ f_2(x^{(k)}) \end{bmatrix}$$

整理して各成分ごとに記述すると

$$x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} + \frac{1}{6|(x_1^2 x_2^2) + x_1 x_2|}\left(-x_2^{(k)^2} f_1\left(x^{(k)}\right) - x_2{}^{(k)} f_2(x^{(k)})\right)$$

$$x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} + \frac{1}{6|(x_1^2 x_2^2) + x_1 x_2|}\left(-x_1{}^{(k)} f_1\left(x^{(k)}\right) + x_1^{(k)^2} f_2(x^{(k)})\right)$$