応用幾何学 (復習)

ベクトル場と積分曲線
(定常の流れ) (流れた距離)

4/20

補足 定義 (流)
$\vec{X}$の定める1パラメータ変換群 φ_t
各点Pに対し Pを始点 $(t=0)$ として 積分曲線に沿って 時刻 t まで移動した点を対応させる変換を φ_t とする

$\vec{X}$の積分曲線 $c(t)$ に対して
$$\varphi_t(c(s)) = c(s+t)$$

§1. 準備

1-1.) 外積

$\mathbb{R}^3$ の (Oを始点とする) 2つのベクトル

$\vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ に対し

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix} a_2b_3-a_3b_2 \\ a_3b_1-a_1b_3 \\ a_1b_2-a_2b_1 \end{pmatrix}$$

覚え方

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}=11\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & -5 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{array}$$

$\downarrow$ ③ $\downarrow$ ① $\downarrow$ ②

性質

① $(\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{a}$, $(\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{b}$

② $\|\vec{a}\times\vec{b}\| = (\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす ▱ の面積)

③ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}\times\vec{b}$ の順に右手系

公式

線形性 $(c_1\vec{a}_1+c_2\vec{a}_2)\times\vec{b}$
$= c_1(\vec{a}_1\times\vec{b})+c_2(\vec{a}_2\times\vec{b})$

$\vec{a}\times(d_1\vec{b}_1+d_2\vec{b}_2)$
$= d_1(\vec{a}\times\vec{b}_1)+d_2(\vec{a}\times\vec{b}_2)$

交代性 $\vec{b}\times\vec{a} = -(\vec{a}\times\vec{b})$

ラグランジュ公式 $\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2=\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$
$= (\|a\|\|b\|\sin\theta)^2$

θ: $\vec{a}, \vec{b}$ のなす角

平面の式 → プリント A1

点と平面の距離の公式 → プリント A1

1-2.) 線積分とグリーンの公式 A2

xy-平面上で 2つの関数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ を用いて

$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ ← 一次の微分形式

というものと

曲線 C: $c(t)=(x(t),y(t))$ $a\leq t\leq b$

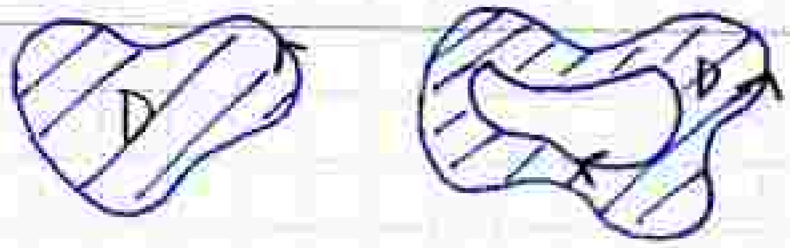
が与えられたとき

$\int_C P\,dx + Q\,dy$ とは

$$= \int_a^b \left\{P(x(t),y(t))\frac{dx}{dt} + Q(x(t),y(t))\frac{dy}{dt}(t)\right\}dt$$

覚え方
$x\to x(t)$, $y\to y(t)$
$dx = \frac{dx}{dt}(t)\,dt$
$dy = \frac{dy}{dt}(t)\,dt$

領域D の 境界∂Dは "右が外" の向き



単純閉曲線

始点=終点

自己交点を持たない

グリーンの定理

単純閉曲線に囲まれた領域D（つまり $\partial D = C$）について

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

解説.

高校数学 $[F(x)]_a^b = \int_a^b F'(x)dx$

$$F(x) \underset{境界}{\overset{微分}{\rightleftarrows}} F'(x)$$

線積分で面積を測る

$$\int_{\partial D} x\, dy = \int_D dxdy = Dの面積$$

$Pdx + Qdy = 0$ とは $\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q}$ 微分方程式のこと.

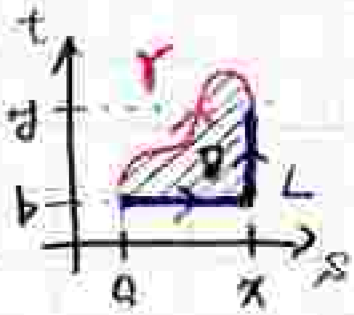
この方程式は

条件 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ のとき、完全形という.

このとき $\frac{\partial F}{\partial x} = P, \frac{\partial F}{\partial y} = Q$ となる $F(x,y)$ が存在して

一般解は $F(x,y) = C$ （C：任意） これは等高線のイメージ

$$F(x,y) = \int_a^x P(s,b)ds + \int_b^y Q(x,t)dt$$
$$= \int_L Pdx + Qdy$$



↓

実はこの線積分は経路(L)には依らない.

説明. $\int_L Pdx + Qdy - \int_\gamma Pdx + Qdy$

（$= \int_L - \int_\gamma$ と略して）

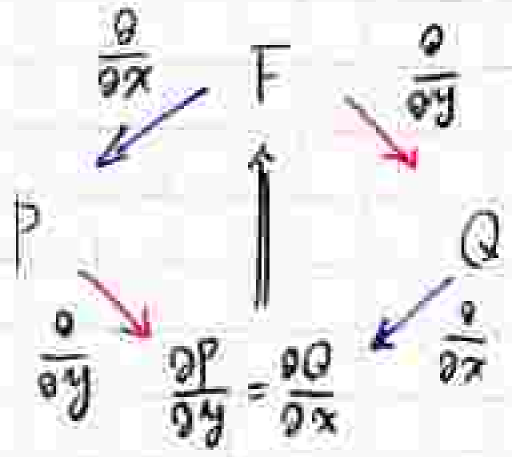
$= \int_L + \int_{-\gamma}$ ← 逆向きのγ

$= \int_{L \cup -\gamma} Pdx + Qdy$

$\underset{グリーン}{=} \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0$

∵ 完全形では0

実は $\int_L Pdx + Qdy = F(B) - F(A)$ はポテンシャルの差



前回の復習！

grad p21

div p28

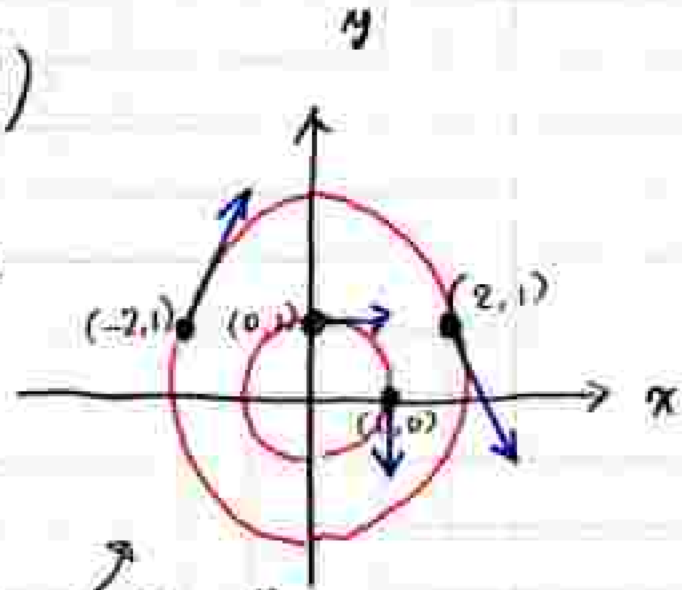
rot p32

プリント② 参照

定義 xy平面上のベクトル場 $\vec{X} = \begin{pmatrix} X_1(x,y) \\ X_2(x,y) \end{pmatrix}$ とは、点 $p(a,b)$ に指定されたベクトル $\vec{X}_{at\ p}$ の成分が $\begin{pmatrix} X_1(a,b) \\ X_2(a,b) \end{pmatrix}$ であるベクトル場のこと。

例 $\vec{X} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$

ベクトル場を描くときは、(長さより)向きを大切に。



ベクトル場は風がふいてるイメージ。

定義 曲線C：$C(t) = (x(t), y(t))$ がベクトル場 $\vec{X}$ の積分曲線とは、

$$\frac{dC}{dt}(t) = \underbrace{\vec{X}_{at\ c(t)}}_{c(t)\text{での}\vec{X}}$$

であること

↑の例で $(R\cos t, -R\sin t)$ が積分曲線

↳ 点の座標は横、ベクトルの座標はタテ

$$\frac{dc}{dt} = \begin{pmatrix} -R\sin t \\ -R\cos t \end{pmatrix}_{(R\cos t,\ -R\sin t)}$$

一致

一方、$(R\cos t, -R\sin t)$ で (x, y)

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\sin t \\ -R\cos t \end{pmatrix}$$

一致

§2. 行列の定めるベクトル場

$$\vec{X} = A\vec{x} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

これの積分曲線は？

準備 行列の exp.

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

$$\exp(A) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{単位行列}}}{I} + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \cdots$$

• $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ のとき $A^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix} + \cdots$$

$$= \begin{pmatrix} 1+\alpha+\frac{1}{2}\alpha^2+\cdots & 0 \\ 0 & 1+\beta+\frac{1}{2}\beta^2+\cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^\beta \end{pmatrix}$$

• $A = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$ のとき $A^2 = \begin{pmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & b^3 \\ -b^3 & 0 \end{pmatrix}$

$A^4 = \begin{pmatrix} b^4 & 0 \\ 0 & b^4 \end{pmatrix} = b^4 I$

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{pmatrix} + \cdots$$

$$= \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2}b^2+\cdots & -b+\frac{1}{6}b^3+\cdots \\ b-\frac{1}{6}b^3+\cdots & 1-\frac{1}{2}b^2+\cdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}$$

回転の行列

$Q = PAP^{-1}$ のとき $Q^m = PAP^{-1}PAP^{-1}PAP^{-1} = P\Lambda^m P^{-1}$

これにより、$\exp(PAP^{-1}) = P\exp(A)P^{-1}$

事実 ($e^a e^b = e^{a+b}$ と似てる)

$XY = YX$ のとき $\exp(X+Y) = \exp(X)\exp(Y)$

$$\frac{d}{dt}\exp(tA) = A\exp(tA)$$

($\frac{d}{dt}e^{at} = ae^{at}$ と似ている)

説明

$$\exp(tA) = I + tA + \frac{1}{2}t^2A^2 + \frac{1}{6}t^3A^3 + \cdots$$

$$\frac{d}{dt}\exp(tA) = A + tA^2 + \frac{1}{2}t^2A^3 + \cdots$$

$$= A\left(I + tA + \frac{1}{2}t^2A^2 + \cdots\right)$$

$$= A\exp(tA) \quad //$$

定理 ― 行列の定めるベクトル場

→ プリント② 右ページ参照

プリント②

$\exp(tA)$ の計算例

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

特性方程式 ($\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$)

$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \to \lambda = 1 \pm i$ (固有値)

固有値ベクトルを求める

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1 \pm i)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$-2y = (1 \pm i)x \to x = 2,\ y = -1 \mp i$

$(x + 2y = (1 \pm i)y)$ $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \mp i \end{pmatrix}$ 固有ベクトル

検 $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \mp i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \pm 2i \\ 2 - 2 \mp 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \pm 2i \\ \mp 2i \end{pmatrix}$

$$= (1 \pm i)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \mp i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \mp i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \mp i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

コツ

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \quad P \quad = \quad P\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = P\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{X} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{Y}$$

$XY = YX$ を満たす

$$\exp\left(t\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \exp\left(t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \times \exp\left(t\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= e^t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$= e^t\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$\exp(tA) = \exp\left(P\, t\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}\right)$$

$$= P\exp\left(t\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)P^{-1}$$

$$= P\, e^t\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}P^{-1}$$

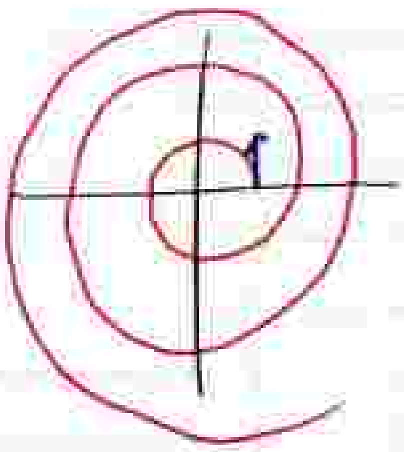
$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}e^t\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \cdots$$

$$= e^t\begin{pmatrix} \cos t - \sin t & -2\sin t \\ \sin t & \cos t + \sin t \end{pmatrix} \quad //$$

定理より $t=0$ で $(1,0)$ を通る積分曲線は

$$C(t) = \exp(tA)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t(\cos t - \sin t) \\ e^t \sin t \end{pmatrix}$$



$$\frac{dc}{dt} = \begin{pmatrix} -2e^t \sin t \\ e^t(\cos t + \sin t) \end{pmatrix}$$

$$Ac(t) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t(\cos t - \sin t) \\ e^t \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^t \sin t \\ e^t(\cos t - \sin t) \end{pmatrix}$$

一致

5/11

これまでの復習

内容：ベクトル解析（教科書） と 微分形式（プリント → ファイル持参）

成績：期末試験 60%
出席, レポート 40%

ベクトル場とは ——
積分曲線とは —— } → プリント①

・ベクトル解析の3つの主役

勾配(gradient) $\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi$　ス から ベ
発散(divergence) $\operatorname{div}\vec{X} = \nabla\cdot\vec{X}$　ベ から ス
回転(rotation) $\operatorname{rot}\vec{X} = \nabla\times\vec{X}$　ベ から ベ

勾配（$\mathbb{R}^n$ でも使う）

$\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ に対し

$$\nabla\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

発散（$\mathbb{R}^n$ でも） $\vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ 各 X_i は関数

$$\operatorname{div}\vec{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_i} = \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}$$

回転（$\mathbb{R}^3$ のみ）

$\vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ に対して

$$\operatorname{rot}\vec{X} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

$1 \to 2 \to 3 \to 1$ ローテーション

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{X}) = 0$$
$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi) = 0$$

$$\operatorname{div}(\varphi\vec{X}) = \operatorname{grad}\varphi\cdot\vec{X} + \varphi\operatorname{div}\vec{X}$$
$$\operatorname{rot}(\varphi\vec{X}) = \operatorname{grad}\varphi\times\vec{X} + \varphi\operatorname{rot}\vec{X}$$
$$\vdots$$

たくさんある → まとめたい！

ベクトル場の 線積分 $\int_C \vec{X}\cdot ds$
〃 面積分 $\int_S \vec{X}\cdot dS$ などがある

それらに関して幾何的な公式がいくつかある →

定理「ガウスの発散定理」

空間図形 V が 曲面 F に 囲まれているとき
$$\int_V \mathrm{div}\,\vec{X}\,dV = \int_F \vec{X}\,d\vec{S}$$

→ Vでの積分が 境界面の積分が 同じ.

定理「ストークスの定理」

曲面 S が 曲線 C に囲まれているとき
$$\int_S \mathrm{rot}\,\vec{X}\cdot d\vec{S} = \int_C \vec{X}\cdot ds$$

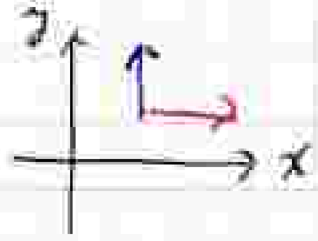
という図形があったとき、曲面Sの面積分と Sと地面の境界面 C の線積分が同じ.

→ 2つの定理は似ている
→「微分形式」で 幾何学として一般化

復習終わり

§3. ベクトルによる(ナナナの)微分

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_{at\ P(p_1, p_2, \cdots, p_n)}$$



始点 $P(p_1, p_2, \cdots, p_n)$, 成分 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_n \end{pmatrix}$

関数 $\varphi = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に対して
$$\vec{a}(\varphi) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(p + t\vec{a}) - \varphi(p)}{t}$$
を「φ の Pにおける $\vec{a}$ 方向の微分係数」という.

↓
幾何学では始点を勝手に移動してはいけない.

$$\vec{a}(\varphi) = \frac{d}{dt}\left(\varphi(p_1 + ta_1, p_2 + ta_2, \cdots, p_n + ta_n)\right)_{at\ t=0}$$
$$= a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(p) + a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(p) + \cdots + a_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(p)$$
↑ 微積

言わば,
$$\vec{a} = \left(a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)_{at\ P}$$
⇝ 幾何学でのベクトル表示

ベクトルを単位ベクトル $\vec{u}$ に限るとき ($\|\vec{u}\| = 1$)
「$\vec{u}$ 方向微分」という.

$T\mathbb{R}^n = \{\mathbb{R}^n$ のベクトル$\}$

$T_p\mathbb{R}^n = \{\mathbb{R}^n$ の p を始点とするベクトル$\}$ $(p \in \mathbb{R}^n)$

$T_p\mathbb{R}^n$ は n次元の線形空間

基底として $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{at\ p}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{at\ p}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{at\ p} \right\}$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_{at\ p}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_{at\ p}, \quad \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_{at\ p}$$

と表すことがある

"Tに接する(tangent)" の意味

$\mathbb{R}^n$ は平坦なので
「接する」とは「入る」こと.

§4 双対空間と1次微分形式

4-1) 双対空間

準備 線形空間 $\mathbb{R}^n$ で（0を始点）

ベクトルをたて $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ で表わすと

1つ1つの横ベクトル $(a_1 \cdots a_n)$ は

$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}$ への線形写像を定める

$$(a_1 \cdots a_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto (a_1 \cdots a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

逆に $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}$ への線形写像 f は、必ずある横ベクトルで表示できる

定義. n 次元の線形空間 V に対して、

$V^* = \{ V$ から $\mathbb{R}$ への線形写像 $\}$

を「V の双対空間」という
(dual space)

V^* の元を V のコベクトルという。

例. $(\mathbb{R}^n_{たて})^* = \mathbb{R}_{よこ}$

事実 V^* は n 次元（V と同じ次元）の線形空間

V の基底 $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ に対して、

V^* の基底 $B^* = \{e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*\}$ を次のように作れる

$$e_i^*(\vec{e}_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

B^* を「B の双対基底」という。

$\circlearrowright$

例. $e_1^*(2\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2) = 2\underbrace{e_1^*(\vec{e}_1)}_{1} - 5\underbrace{e_1^*(\vec{e}_2)}_{0}$

$= 2$

例 $(3e_1^* - 4e_2^*)(2\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2)$

$= 3e_1^*(2\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2) - 4e_2^*(2\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2)$

$= 3\cdot 2 - 4\cdot(-5)$

$= 26$

4-3) 1次微分形式

(1本のベクトル) $\rightsquigarrow$ ベクトル場

同様に 1次微分形式

コベクトル $\rightsquigarrow$ (~~コベクトル場~~)

各点に $T_p\mathbb{R}^n$ の双対空間（$T_p^*\mathbb{R}^n$ と表す）の元コベクトルが指定されていること

表示法

$X_1dx_1 + X_2dx_2 + \cdots + X_ndx_n$ と表す。

各 X_i は関数

$\mathbb{R}^2$ では $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

グリーンの定理

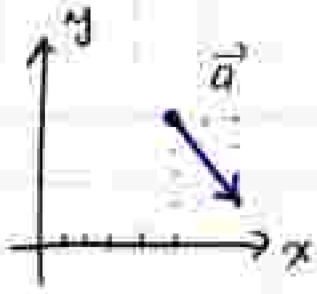
$\{dx_1, \cdots, dx_n\}$ は各点 P で

5/18.

1次微分形式へのベクトルの代入

例. $\mu = 2xy\,dx + y^2 dy$

に $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}_{at(5,4)}$ を代入.



$\left(= \left(2\frac{\partial}{\partial x} - 3\frac{\partial}{\partial y}\right)_{at(5,4)}\right)$

$\mu(\vec{a}) = (\mu_{at(5,4)})(\vec{a})$

$= (2\times 5\times 4\,dx + 4^2 dy)_{at(5,4)} \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}_{at(5,4)}$

$= 40\times 2 + 4^2\times(-3) = 32$ //

4-2) コベクトルと内積

Vが内積を指定されているとき.

"内積の片方にベクトル $\vec{a}$ を代入して得る"

$(\_, \vec{a})$

コベクトルが作れる

$(\_, \vec{a}) : V \to \mathbb{R}$

$\vec{x} \mapsto (\vec{x}, \vec{a})$

つまり.

$\vec{a} \in V$ から. $(\_, \vec{a}) \in V^*$ への対応

が得られた.

$V \xrightarrow{\iota} V^*$

$\vec{a} \longmapsto (\_, \vec{a})$

事実. この対応 ι は $1:1$ 対応である

説明) Vの正規直交基底

$\mathcal{U} = \{\vec{u}_i\}$ を使えば.

$u_i^* = (\_, \vec{u}_i)$ がわかる

Vの基底 $\mathcal{U}$

V^* 〃 $\mathcal{U}^*$ による ι の行列表示は. 単位行列となる

4-4) 関数の外微分

スカラー場 $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$

に対して

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}dx_n$$

を φ の外微分という. これは $\mathrm{grad}\,\varphi$ と同等.

例. $f = x^2 y$ に対し.

$df = 2xy\,dx + x^2 dy$

$\mathrm{grad}\, f = \begin{pmatrix}2xy\\x^2\end{pmatrix}$.

性質. $= \mathrm{grad}(f)\cdot\vec{a}$ と同等.

$\vec{a}(f) = df(\vec{a})$ (in $\mathbb{R}$)

例 $f = x^2 y$ $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}_{at(5,4)}$ の場合

左辺 $= \vec{a}(f) = \left(2\frac{\partial}{\partial x} - 3\frac{\partial}{\partial y}\right)_{at(5,4)}(x^2 y)$

$= (2\cdot 2xy - 3x^2)_{at(5,4)}$

$= 2\cdot 2\cdot 5\cdot 4 - 3\cdot 5^2 = 5$.

右辺 $= df(\vec{a})$

$= (2xy\,dx + x^2 dy)\left(\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}_{at(5,4)}\right)$

$= (2\cdot 5\cdot 4\,dx + 5^2 dy)_{(5,4)} \left(\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}_{at(5,4)}\right)$

$= 2\cdot 5\cdot 4\cdot 2 + 5^2(-3)$

$= 5$. //

プリント③ 裏参照.

(補足)

・交代性

$X = -X$ という性質が成り立つため $X=0$.

例.)

$$(a\vec{e_1} + b\vec{e_2}) \wedge (c\vec{e_1} + d\vec{e_2})$$

$$= ac \underbrace{\vec{e_1}\wedge\vec{e_1}}_{=0} + ad\, \vec{e_1}\wedge\vec{e_2} + bc \underbrace{\vec{e_2}\wedge\vec{e_1}}_{-\vec{e_1}\wedge\vec{e_2}} + bd \underbrace{\vec{e_2}\wedge\vec{e_2}}_{=0}$$

・$\wedge^r V$ は ${}_nC_r$ 次元 …

ex) $\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}$

$\vec{b} = b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2} + b_3\vec{e_3}$ とする

$\vec{a}\wedge\vec{b} = ?$　$\vec{a}\wedge\vec{b}\wedge\vec{c} = ?$

$I_r = \{(i_1, i_2, \cdots, i_r) \mid 1 \le i_1 \le i_2 < \cdots < i_r \le n\}$

$\wedge^r V$ の元を

$$w = \sum_{I_r} \underbrace{a_{i_1 i_2 \cdots i_r}}_{\in \mathbb{R}} \vec{e_{i_1}}\wedge\vec{e_{i_2}}\wedge\cdots\wedge\vec{e_{i_r}}$$

コベクトルの r 次外積へのr個のベクトル列の代入

w が 1つの項 $w_1^*\wedge w_2^*\wedge\cdots\wedge w_r^*$ に $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_r}$ を代入

$$w(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_r}) = \det\begin{pmatrix} w_1^*(\vec{v_1}) & \cdots & w_1^*(\vec{v_r}) \\ \vdots & w_i^*(\vec{v_j}) & \vdots \\ w_r^*(\vec{v_1}) & \cdots & w_r^*(\vec{v_r}) \end{pmatrix}$$

w が複数の項からなるときは各項に対する値の和とする

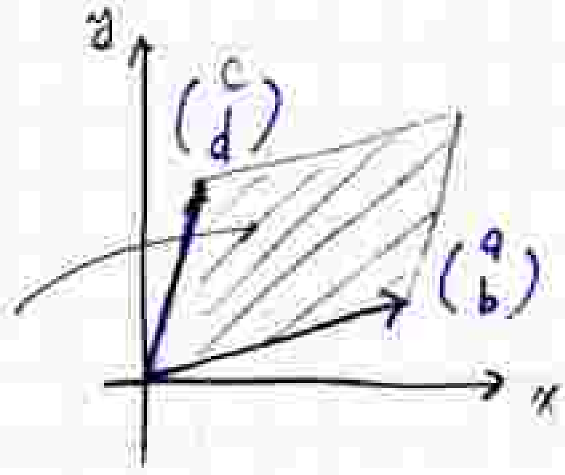
例 $(e_1^*\wedge e_2^*)(a\vec{e_1} + b\vec{e_2}, c\vec{e_1} + d\vec{e_2})$

$$= \det\begin{pmatrix} e_1^*(a\vec{e_1}+b\vec{e_2}) & e_1^*(c\vec{e_1}+d\vec{e_2}) \\ e_2^*(a\vec{e_1}+b\vec{e_2}) & e_2^*(c\vec{e_1}+d\vec{e_2}) \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$= ad - bc$

$= \pm$ ▱ 面積



ベクトル → ベクトル場

コベクトル → (コベクトル場) 1次微分形式

コベクトルの r 次外積 → r 次微分形式

「すべての点において その点におけるコベクトルの r 次外積が与えられている」

r 次微分形式の表示法

$$w = \sum_{I_r} X_{i_1 i_2 \cdots i_r}\, dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r}$$

例 $n=2, r=1$

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

$n=3, r=2$ ($\mathbb{R}^3$ の 2次微分形式)

$X(x,y,z)dy\wedge dz + Y(x,y,z)dz\wedge dx + Z(x,y,z)dx\wedge dy$

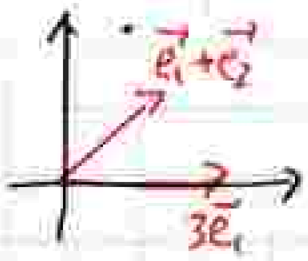
小テスト 図(1) 図(1) //

5/25　0920029
0921022

6/1 休

補足
V^* の r次外積

例.
$w = (5e_1^* - 3e_2^*) \wedge (e_1^* + e_2^*)$
に $(\vec{e}_1 + \vec{e}_2,\ 3\vec{e}_1)$ を代入



・そのまま代入

$w(\vec{e}_1 + \vec{e}_2,\ 3\vec{e}_1)$

$= \det\begin{pmatrix} (5e_1^*-3e_2^*)(\vec{e}_1+\vec{e}_2) & (5e_1^*-3e_2^*)3\vec{e}_1 \\ (e_1^*+e_2^*)(\vec{e}_1+\vec{e}_2) & (e_1^*+e_2^*)3\vec{e}_1 \end{pmatrix}$

$= \det\begin{pmatrix} 2 & 15 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = -24$

・計算してから代入

$w = (5e_1^* - 3e_2^*) \wedge (e_1^* + e_2^*)$

$= 5\underbrace{e_1^* \wedge e_1^*}_{=0} + 5e_1^* \wedge e_2^* - 3\underbrace{e_2^* \wedge e_1^*}_{-e_1^* \wedge e_2^*} - 3\underbrace{e_2^* \wedge e_2^*}_{=0}$

$= 8\, e_1^* \wedge e_2^*$

$(8e_1^* \wedge e_2^*)(\vec{e}_1 + \vec{e}_2,\ 3\vec{e}_1)$

$= 8 \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= -24$　　一致!!

r次微分形式の外微分.

r次微分形式　関数

$$\omega = \sum_{I_r} X_{i_1 \cdots i_r}\, \underline{dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r}}$$

に対して.(r+1)次微分形式

$$d\omega = \sum_{j=1}^{n} \sum_{I_r} \frac{\partial X_{i_1 \cdots i_r}}{\partial x_j} dx_j \wedge \underline{dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r}}$$

を ω の外微分という.

$n=2,\ r=1$

$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$

略して $P dx + Q dy$

$$d(Pdx + Qdy) = \frac{\partial P}{\partial x} \underbrace{dx \wedge dx}_{=0} + \frac{\partial P}{\partial y} \underbrace{dy \wedge dx}_{-dx \wedge dy}$$

コツ.

$$+ \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial y} \underbrace{dy \wedge dy}_{=0}$$

外微分では
$O \cdots dx \cdots$
に対して
$\frac{\partial O}{\partial x} dx$ は
しなくてよい

$$= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

↑
グリーンの定理ででてきた形!

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

$n=3,\ r=1$　　(X, Y, Zは関数)

$\omega = X dx + Y dy + Z dz$　1次

$$d\omega = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$　2次

↑ rot $\vec{X}$ と同じ形　↑ 違う.

近づけるための
スター作用素.

$$* : \Lambda^p V \to \Lambda^{n-p} V \quad (n = \dim V)$$

$$\underset{0次}{*1} = \vec{e_1}\wedge\vec{e_2}\wedge\cdots\wedge\vec{e_n} \qquad (p=0)$$

$$*(\underbrace{\vec{e_1}\wedge\vec{e_2}\wedge\cdots\wedge\vec{e_n}}_{n次}) = 1 \qquad (p=n)$$

$r+s=n$ で $(i_1, i_2, \cdots, i_r, j_1, \cdots, j_s)$ が
$(1, 2, \cdots, n)$ と 偶(奇)置換のとき
　　　　　　　　$+$　$-$

$$*(\vec{e_{i_1}}\wedge\cdots\wedge\vec{e_{i_r}}) = \pm\vec{e_{j_1}}\wedge\cdots\wedge\vec{e_{j_s}}$$

$n=3$

$$*\vec{e_1} = \vec{e_2}\wedge\vec{e_3}$$
$$*\vec{e_2} = \vec{e_3}\wedge\vec{e_1} = -\vec{e_1}\wedge\vec{e_3}$$
$$*\vec{e_3} = \vec{e_1}\wedge\vec{e_2}$$

$$*(\vec{e_2}\wedge\vec{e_3}) = \vec{e_1}$$
$$*(\vec{e_3}\wedge\vec{e_1}) = \vec{e_2}$$
$$*(\vec{e_1}\wedge\vec{e_2}) = \vec{e_3}$$

$\omega = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ に対して

$$*d\omega = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)dx + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)dy + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)dz$$

$\vec{X} \to \mathrm{rot}\,\vec{X}$ は. $\omega \to *d\omega$ と同等
　　　　　　　　1次形式

(grad φ は $d\varphi$ と同等)

外微分の性質

$$\boxed{d\cdot d = 0}$$

2回外微分すると 0.

理由. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i\wedge dx_j + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i = 0$$

第2編

§1. 教科書より

① ベクトル $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$ 始点は任意

と同じ向きの単位ベクトル (長さ1)

$$\vec{l} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\|A\|}\vec{A} = \frac{1}{\sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2}}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

l_1, l_2, l_3 を方向余弦という. (p2, p3)

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1$$

② $\mathbb{R}^3$ の 3つのベクトル $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ に対して

$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \det(\vec{A}\,\vec{B}\,\vec{C})$ 3重積

$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\cdot\vec{C}$

ベクトル3重積

③ ベクトルの微積分

$\vec{A} = \vec{A}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2-2 \\ \pi \sin \pi t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$ のとき

$\frac{d\vec{A}}{dt} = \begin{pmatrix} 6t \\ \pi^2 \cos \pi t \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$

$\int \vec{A}\,dt = \begin{pmatrix} t^3-2t \\ -\cos \pi t \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$

$\int_0^1 \vec{A}\,dt = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1-\frac{1}{e} \end{pmatrix}$

$\vec{A} = \vec{A}(x, y)$

$\vec{A}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2+2y^2 \\ xy \\ x \sin y \end{pmatrix}$

$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} = \begin{pmatrix} 2x \\ y \\ \sin y \end{pmatrix}$, $\frac{\partial \vec{A}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 4y \\ x \\ x \cos y \end{pmatrix}$

公式) $\varphi = \varphi(t)$, $\vec{A} = \vec{A}(t)$

$\frac{d}{dt}(\varphi \vec{A}) = \frac{d\varphi}{dt}\vec{A} + \varphi \frac{d\vec{A}}{dt}$

$\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{dt}$

$\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B} + \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}$ (p15)

$\|A\| =$ 一定 (つまり $\vec{A}\vec{A} =$ 一定)

$0 = \frac{d}{dt}\vec{A}\cdot\vec{A} = \frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\frac{d\vec{A}}{dt} = 2\vec{A}\cdot\frac{d\vec{A}}{dt}$ より

$\boxed{\|A\| = \text{一定} \Rightarrow \vec{A} \perp \frac{d\vec{A}}{dt}}$

常に接ベクトル ⊥ 位置ベクトル

$* \tilde{x} = x^2 y\, dx \wedge dz + \cdots$

$d * \hat{x} = \frac{\partial}{\partial x} x^2 y\, dx \wedge dy \wedge dz + \cdots = 2xy\, dx \wedge dy \wedge dz + \cdots$

ベクトルに関数を代入

$\mathbb{R}^n$ で $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_{at\ P(p_1, p_2, \cdots, p_n)}$ に、

$\varphi = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を代入。

$\vec{a}(\varphi) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(p+t\vec{a}) - \varphi(p)}{t}$ と定める

「φ の P における $\vec{a}$ 方向の微分」 $= \frac{d}{dt}\varphi(p_1+a_1, \cdots, p_n+a_n)\Big|_{t=0}$

$= a_1 \frac{d\varphi_1}{dt}(p) + \cdots + a_n \frac{d\varphi_n}{dt}(p)$

となる

§2 勾配 grad

スカラー場 $\varphi = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に対して

ベクトル場

$\mathrm{grad}\,\varphi = \nabla \varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ を

「φ の gradient(グラディエント) (勾配) ベクトル場」という

$\underset{\text{ナブラ}}{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ "微分作用素"

($\nabla \cdot \varphi$ とか $\nabla \times \varphi$ とかも後述)

例 $\varphi = \varphi(x, y, z) = x^2 y - \sin(yz)$

に対して

$\mathrm{grad}\,\varphi = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 - z\cos(yz) \\ -y\cos(yz) \end{pmatrix}$

↪

ベクトル $\vec{a}$ について

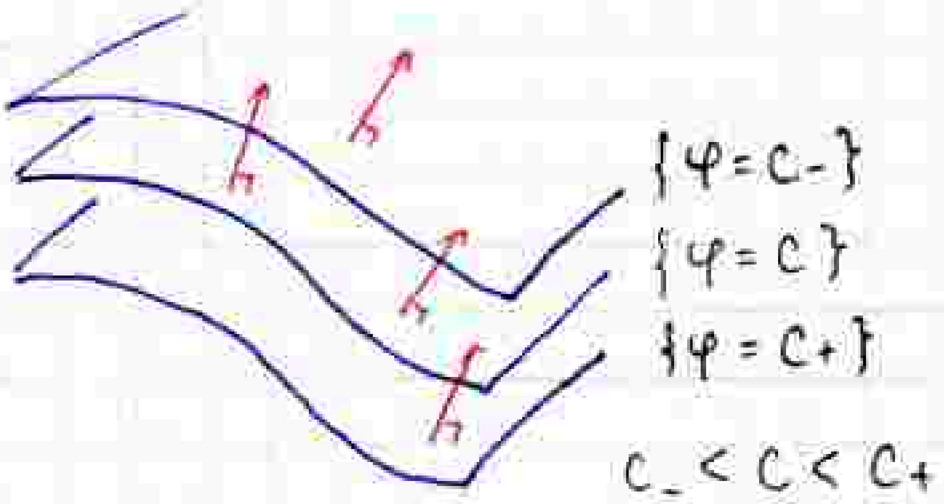
$$\vec{X}(\varphi) = \vec{X}\cdot \mathrm{grad}(\varphi)$$
$$\vec{a}(\varphi) = \vec{a}\cdot \mathrm{grad}(\varphi)\ \text{at}\ P$$

（$\vec{a}$の始点がP）

スカラー場φに対し、φの値が定数cである点を集めた集合

$$\{x \mid \varphi(x) = c\}\quad(\text{略して}\{\varphi = c\})$$

を「φのc-等位面」という。
xyz-空間では関数の等位面は"曲面"になる。（特異点があるかもしれない）

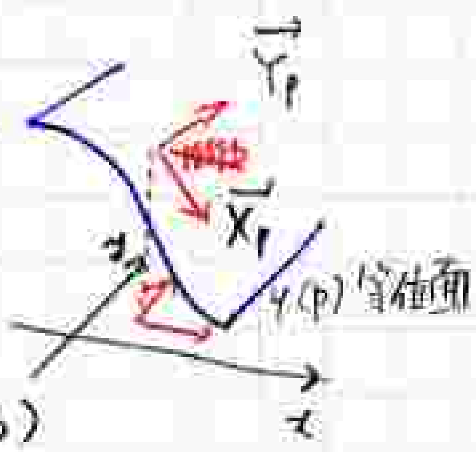


定理

$\boxed{\mathrm{grad}(\varphi)\text{は、各点}P\text{で}\varphi(P)\text{-等位面に垂直}}$

証明

$P(a,b,c)$とする。
Pの近くで$\varphi(P)$-等位面が
$z = f(x,y)$と表されているとする



Pでの接平面は

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) + f(a,b)$$

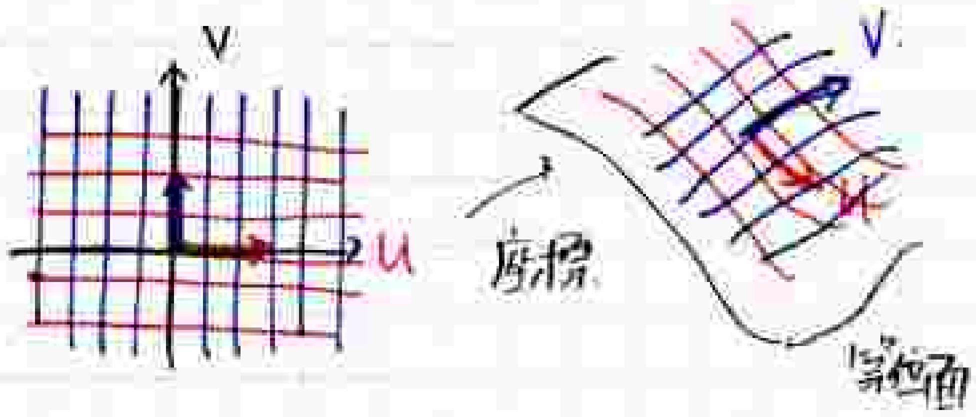
$z = f(x,y)$がφの等位面

$$\varphi(x, y, f(x,y)) = \varphi(P) \leftarrow \text{定数}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}:\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(P) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(P)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}:\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(P) + \text{—}\quad \sim\sim$$

もう少し工夫した証明



$$\vec{r}(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$$

$\vec{r}(0,0) = P$ も仮定

Pでの接ベクトル

$$\vec{U}_P = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(0,0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(0,0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(0,0) \end{pmatrix},\quad \vec{V}_P = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(0,0) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(0,0) \\ \frac{\partial z}{\partial v}(0,0) \end{pmatrix}$$

等位面は

$$\varphi(\vec{r}(u,v)) = \varphi(p)$$

$$\varphi(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)) = \varphi(p)$$

$$\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(p)\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(p)\frac{\partial y}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(p)\frac{\partial z}{\partial u}(u,v) = 0$$

$$\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial v}} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(p)\frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(p)\frac{\partial y}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(p)\frac{\partial z}{\partial v}(u,v) = 0$$

これは

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(p) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z}(p) \end{pmatrix}}_{\fallingdotseq\ grad(\varphi)_{at\ p}} \perp \vec{U}_p,\ \vec{V}_p$$ を意味してる！

曲面の向き … 単位法ベクトルの一方 $\vec{n}$

長さ1 で定める $\vec{n}_p$ で表す

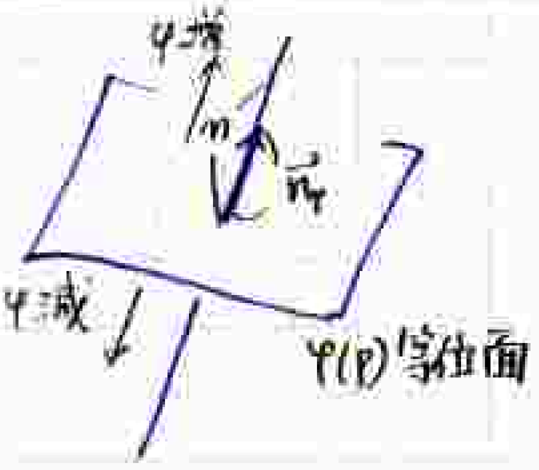
$\vec{r}(u,v) = p$ のとき

$$\vec{n}_p = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v)}{\| \qquad '' \qquad \|}$$ で定める

(そうなるように $\vec{r}(u,v)$ を定める)

変数 n を P における $\varphi(p)$ 等位面の法線 l_p のパラメータにとる

$$l_p = \{ \vec{OP} + n\,\vec{n}_p \}$$



$$(\vec{x}\cdot\vec{n}) = \underbrace{\|\vec{x}\|}_{=1}\underbrace{\|\vec{n}\|}_{=1}\cos\theta$$

$$= \cos\theta \le 1$$

θは $\vec{x}$ と $\vec{n}$ のなす角

定理

$\varphi(p)$-等位面の単位法ベクトル $\vec{n}_p$ を φ が増加する側に立てるとき
(つまり $\vec{n}_p(\varphi) > 0$ のとき)

$$grad(\varphi) = \vec{n}(\varphi)\,\vec{n}$$

$$\|grad(\varphi)\| = \vec{n}(p)$$

証明.

$grad(\varphi) \parallel \vec{n}$

$grad(\varphi)$ は $\vec{n}$ と同じ方向

$$grad(\varphi) = \|grad(\varphi)\|\ \vec{n}$$

長さ　　向きが同じ

$$\vec{n}(\varphi) = \vec{n}\cdot grad(\varphi)$$
$$= \vec{n}\cdot(\|grad(\varphi)\|\ \vec{n})$$
$$= \|grad(\varphi)\|\ \underbrace{\vec{n}\cdot\vec{n}}_{=1}$$
$$= \|grad(\varphi)\|$$

//

定理

「$grad(\varphi)$ は φ が最も増加する向きを指す」

単位ベクトル $\vec{x}$ に対して ($\|\vec{x}\| = 1$)

$$\vec{x}(\varphi) \le \frac{grad(\varphi)}{\|grad(\varphi)\|}(\varphi)$$

$$\vec{n} = \frac{grad(\varphi)}{\|grad(\varphi)\|}$$ とする

証明.

$$\vec{x}(\varphi) = \vec{x}\cdot grad(p) = \vec{x}\cdot(\vec{n}(\varphi)\,\vec{n})$$
$$= \vec{n}(\varphi)(\vec{x}\cdot\vec{n}) \le \vec{n}(\varphi)$$

$=$ は $\vec{x} = \vec{n}$, $\theta = 0$ のときのみ //

grad$(\varphi) = \nabla\varphi$ に関する公式

① $\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + (\nabla\varphi)\psi$

② $\nabla(f(\varphi)) = \dfrac{df(\varphi)}{d\varphi}\nabla\varphi$

… ①は高校数学の $(fg)' = f'g + fg'$ に相当.
… ②は 〃 $(f(g(t)))' = f'(g(t))\cdot g'(t)$ に 〃

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ のとき

$$\nabla r = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\nabla r^2 = 2r\nabla r = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$d\varphi$ と grad(φ)は同等

$$d\varphi = \boxed{\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}}dx_1 + \cdots + \boxed{\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}}dx_n$$

$$\mathrm{grad}(\varphi) = \begin{pmatrix} \boxed{\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}} \\ \vdots \\ \boxed{\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}} \end{pmatrix}$$

§2. 発散 divergence

ベクトル場 $\vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ に対して.

$$\mathrm{div}\,\vec{X} = \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}$$

$\mathrm{div}\,\vec{X}$ を $\nabla\cdot\vec{X}$ と表すこともある.
「$\vec{X}$ の発散」という.

$$\left(\overset{\text{ナブラ}}{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \right)$$

例.

$\vec{X} = \begin{pmatrix} x^2y^3 \\ -\sin(yz^2) \\ e^{2xyz} \end{pmatrix}$ なら.

$$\mathrm{div}\,\vec{X} = 2xy^3 - z^2\cos(yz^2) + 2xye^{2xyz}$$

公式

$$\mathrm{div}(\vec{X}+\vec{Y}) = \mathrm{div}(\vec{X}) + \mathrm{div}(\vec{Y})$$
$$\mathrm{div}(\varphi\vec{X}) = \nabla\varphi\cdot\vec{X} + \varphi\,\mathrm{div}(\vec{X})$$

§3. ラプラシアン p30.

スカラー場 φ に対して

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}(\varphi)) = \nabla^2\varphi \;\left(= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n^2} \right)$$

と表し ∇^2 をラプラシアンという
$\nabla^2\varphi$ を $\Delta\varphi$ と表すこともある.
$\nabla^2\varphi = 0$ をみたす φ を調和関数という.

例. $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ の式 $f(r)$ について

$$\nabla^2 f(r) = \frac{d^2f}{dr^2} + \frac{2}{r}\cdot\frac{df}{dr}$$

$\nabla^2 f(r) = 0$ となるのは.

$$f(r) = \frac{A}{r} + B \text{ のみ.}$$

原点0を除く必要アリ).

∇^2は ベクトル場にも用いる

$$\nabla^2\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 X_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 X_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 X_1}{\partial x_3^2} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

§4 回転 rot

$\mathbb{R}^3$ に限る ベクトル場 $\vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ に対して

$$\mathrm{rot}\,\vec{X} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial X_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial X_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial X_3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial X_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial X_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 3 \\ \downarrow \\ 1 \\ \downarrow \\ 2 \end{matrix}$$

ローテーション

$\mathrm{rot}\,\vec{X} = \nabla \times \vec{X}$ と表すこともある

例.

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ \alpha z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

公式

$\mathrm{rot}(\vec{X}+\vec{Y}) = \mathrm{rot}(\vec{X}) + \mathrm{rot}(\vec{Y})$

$\mathrm{rot}(\alpha\vec{X}) = \alpha\,\mathrm{rot}\,\vec{X}$

$\mathrm{rot}(\varphi\vec{X}) = \nabla\varphi \times \vec{X} + \varphi\,\mathrm{rot}\,\vec{X}$

$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}(\vec{X})) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\vec{X}) - \nabla^2\vec{X}$

$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(\varphi)) = \vec{0}$

$\nabla \times \nabla\varphi = \vec{0}$

定理 $\mathbb{R}^3$全体で定義された関数, ベクトル場について. $\mathrm{rot}\,\vec{X} = \vec{0}$ ならば $\vec{X} = \mathrm{grad}(\varphi)$ となる φ が存在.

ラメラー(層状)という.

つまり…

$$\text{スカ} \xrightarrow{\mathrm{grad}} \text{ベク} \xrightarrow{\mathrm{rot}} \text{ベク}$$

$\varphi \mapsto \mathrm{grad}(\varphi) \mapsto \mathrm{rot}(\mathrm{grad}(\varphi)) = \vec{0}$

$\forall\vec{X} \mapsto \vec{0}$

$\Downarrow$

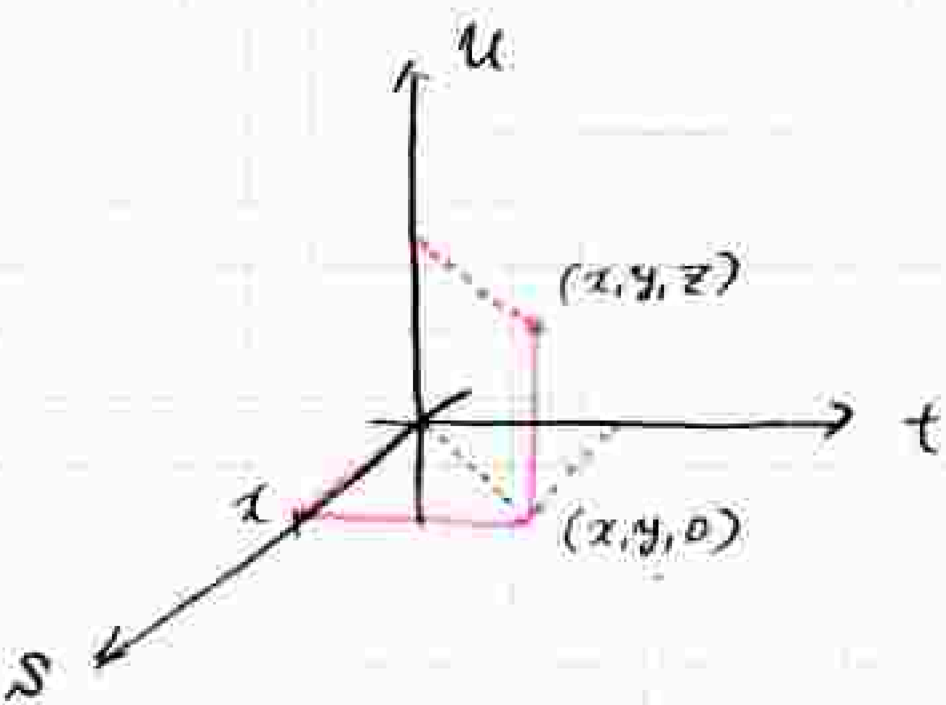
$\forall\varphi \mapsto \vec{X} = \mathrm{grad}(\varphi)$

定理の証明.(φの構成法)

$\vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ で $\mathrm{rot}\,\vec{X} = \vec{0}$ とする.

$$\varphi = \int_a^x X_1(s,b,c)\,ds + \int_b^y X_2(x,t,c)\,dt + \int_c^z X_3(x,y,u)\,du$$

(a,b,c は任意) でよい. //



公式 $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{X}) = 0$.

定理 $\mathbb{R}^3$全体で定義されたベクトル場について $\mathrm{div}\,\vec{X} = \vec{0}$ ならば $\vec{X} = \mathrm{rot}\,\vec{B}$ となる $\vec{B}$ が存在

ソレノイド(管状)という.

$$\text{ベク} \xrightarrow{\mathrm{rot}} \text{ベク} \xrightarrow{\mathrm{div}} \text{スカ}$$

$\vec{X} \mapsto \mathrm{rot}(\vec{X}) \mapsto \mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{X}) = 0$

$\forall\vec{X} \mapsto \mathrm{div}\,\vec{X} = 0$

$\Downarrow$

$\forall\vec{B} \mapsto \vec{X} = \mathrm{rot}\,\vec{B}$

$\forall\varphi \mapsto \vec{B} = \mathrm{grad}(\varphi)$

※ 但し その $\vec{B}$ は $\mathrm{grad}(\varphi)$ のベクトル場の自由度がある

構成法 $\vec{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$ を

$$B_1 = 0$$
$$B_2 = \int_a^x X_3(s, y, z)\, ds$$
$$B_3 = -\int_a^x X_2(s, y, z)\, ds + \int_b^y X_1(a, t, z)\, dt$$ //

$$\mathrm{rot}(\vec{B} + \nabla f) = \vec{X} = \mathrm{rot}\,\vec{B}$$
$$\mathrm{rot}\,\vec{B} + \underbrace{\mathrm{rot}(\nabla f)}_{\vec{0}}$$

試験 : 8/3 (水)
(補講期間ではない!)

例.

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x+3y \\ y-2z \\ x-2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$ の場合

$\mathrm{div}\,\vec{X} = 0$.

$$B_1 = 0.$$
$$B_2 = \int_0^x (s-2z)\, ds = \frac{1}{2}x^2 - 2xz$$
$$B_3 = -\int_0^x (y-2z)\, ds + \int_0^y 3t\, dt$$
$$= -(y-2z)x + \frac{3}{2}y^2$$

$$\therefore\ \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}x^2 - 2xz \\ -xy + \frac{3}{2}y^2 - 2xz \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \cdots = \vec{X}$$ //

$f = -\frac{1}{2}x^2 y - \frac{3}{2}y^2 z$ とおく.

$$\nabla f = \begin{pmatrix} -xy \\ -\frac{1}{2}x^2 - 3yz \\ -\frac{3}{2}y^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{B} + \nabla f = \begin{pmatrix} -xy \\ -2xz - 3yz \\ -xy + 2xz \end{pmatrix}$$

6/22

ベクトル解析 から 微分形式 へ

(1) grad

$\mathrm{grad}(\varphi)$ は $d\varphi$ と同等.

$n=3$ のとき,

$$\mathrm{grad}(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix}$$ (ベクトル場)

対応

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz$$ (一次微分形式)

「ユークリッド内積 $(\cdot,\cdot)$ の一方に ベクトル場を代入して得るコベクトル(場)」

$$\vec{X} \longleftrightarrow \tilde{X}$$

(2). rot ($\mathbb{R}^3$ に限る)

$\vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ と $\tilde{X} = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3$

$$d\tilde{X} = \frac{\partial X_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial X_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1$$
$$+ \cdots$$

$$d\tilde{X} = \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \underbrace{dx_2 \wedge dx_1}_{= -dx_1 \wedge dx_2} + \frac{\partial X_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1$$

$$+ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial X_2}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2$$

$$+ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial X_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3$$

$$= \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3$$

$$+ \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1}\right) dx_3 \wedge dx_1$$

$$+ \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2$$

$$*d\hat{X} = \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3}\right) dx_1$$

$$+ \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1}\right) dx_2$$

$$+ \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2}\right) dx_3$$

$\mathrm{rot}\,\vec{X}$ と同等.

(3) div

$\vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ と $\tilde{X} = X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + X_3\,dx_3$

$$*\tilde{X} = X_1\, dx_2 \wedge dx_3 + X_2\, dx_3 \wedge dx_1 + X_3\, dx_1 \wedge dx_2$$

$$d*\tilde{X} = \frac{\partial X_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

$$+ \frac{\partial X_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1$$

$$+ \frac{\partial X_3}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2$$

$$= \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \frac{\partial X_3}{\partial x_3}\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

$$*d*\tilde{X} = \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \frac{\partial X_3}{\partial x_3}$$

$\mathrm{div}\,\vec{X}$ と同等.

積分との関係.

ベクトル場の線積分.

$$\int_C \vec{X} \cdot d\vec{r} = \int_C \tilde{X}$$

ベクトル場の面積分.

$$\int_C \vec{X} \cdot d\vec{S} = \int_C \underbrace{*\tilde{X}}_{2次}$$

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(\varphi)) = \vec{0}$$

$$(\nabla \times (\nabla\varphi) = \vec{0})$$

を微分形式で考えると

$$*\underbrace{d(d}_{=0}\varphi)$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{X}) = 0$$

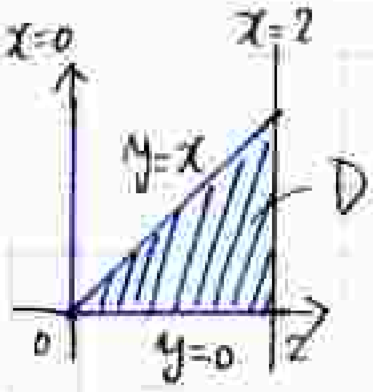
は.

$$*d\underbrace{*(*}_{=1}d\tilde{X}) = *\underbrace{dd}_{0}\tilde{X} = 0.$$

6/29

スカラー場の面積分

例. 鉄板の平均温度?



$f(x,y)=x^2y$ の

$D: \{0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2\}$

$$\frac{\iint_D f(x,y)\,dxdy}{\iint_D dxdy}\quad \begin{matrix}\leftarrow \text{Dでの}f(x,y)\text{の積分}\\ \leftarrow \text{Dの面積}\end{matrix}$$

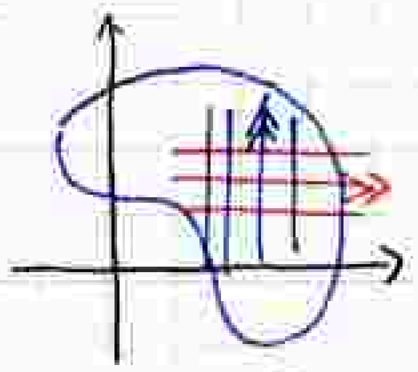
→ この分子がスカラー場の積分に相当する.

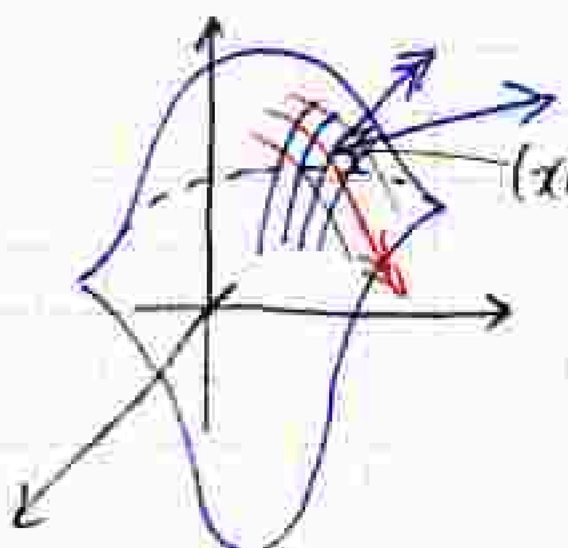
方針: 面積を求める積分を用意しておき,
スカラーを積分する

曲面を表すときは

$$S : \vec{r}(u,v)=(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$$

↑
Surface
曲面のS



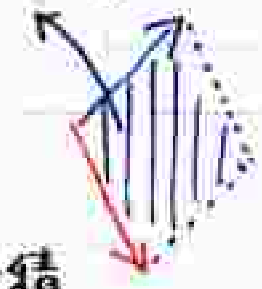


$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}\\ \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial z}{\partial u}\end{pmatrix},\quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial v}\\ \frac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}$$

これらは S の 接ベクトル

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}=\begin{pmatrix}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\\ \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\\ \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\end{pmatrix}$$ がSの法ベクトル.

$\left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right\|$ = $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ と $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ のなす平行四辺形の面積.



$$\underbrace{\iint_D \left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right\| dudv}_{\text{面積素}} = S\text{の面積}$$

それに対して,

$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)dudv$ を ベクトル面積素 という
$d\vec{S}$ or $d\boldsymbol{S}$

$$\vec{n}(u,v)=\frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{\|\ 〃\ \|}\ :\ S\text{の単位法ベクトル}$$

これを使うと

$$d\vec{S}=\vec{n}\,dS$$

§2 ベクトル場の線積分 面積分

$\vec{A}=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}$, 曲線C : $\vec{r}(t)=(x(t),\ y(t),\ z(t))$
$a\le t\le b$

$$\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r}=\int_a^b\left(A_1\frac{dx}{dt}+A_2\frac{dy}{dt}+A_3\frac{dz}{dt}\right)dt$$

$$d\vec{r}=\begin{pmatrix}\frac{dx}{dt}\\ \frac{dy}{dt}\\ \frac{dz}{dt}\end{pmatrix}dt=\begin{pmatrix}\frac{dx}{ds}\\ \frac{dy}{ds}\\ \frac{dz}{ds}\end{pmatrix}ds$$

sは弧長パラメータ

① 「ベクトル場の線積分」といえば
通常は $\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r}$ のこと

しかし他にもベクトルに値をとる

$\underbrace{\int_C \vec{A}\,ds}_{線素}$, $\int_C \vec{A}\times \underbrace{d\vec{r}}_{ベクトル線素}$ もある

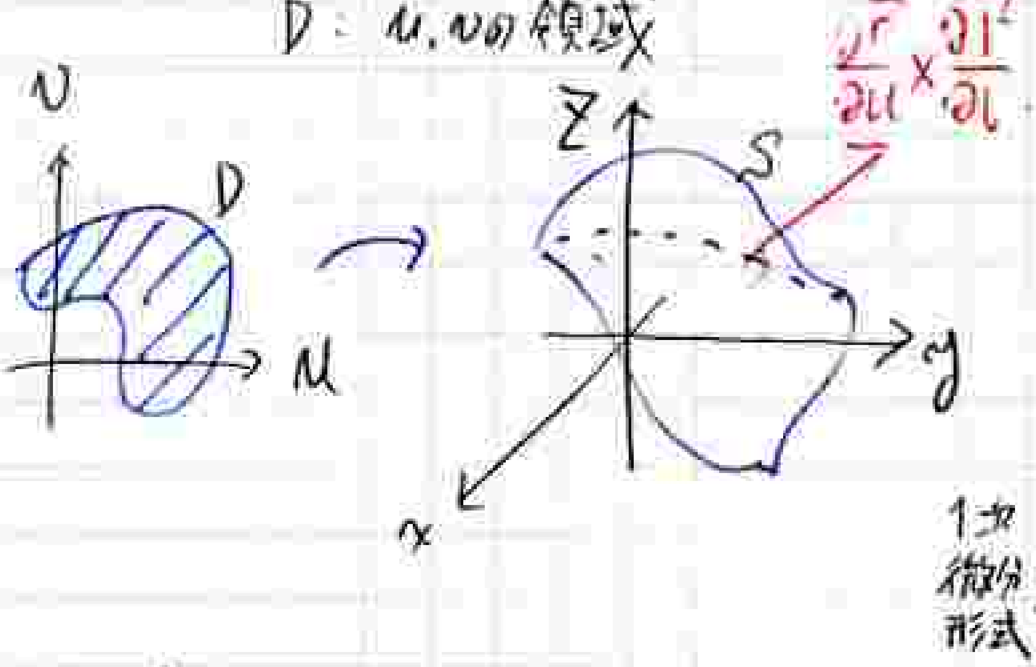
$\cancel{\int_c^b \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} ds}$

7/6.

ベクトル場と曲面 S

$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

D : u, v の領域



$$d\vec{S} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\,dudv$$

ベクトル面積素.

$$= \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} dudv$$ の形に表せる

ベクトルなし

$$dS = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| dudv$$

は面積素.

$\int_S dS = [\,S の面積\,]$

$\int_S \varphi\, dS$ = "スカラー場 φ の積分"

$$\int_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_D \underbrace{(A_1S_1 + A_2S_2 + A_3S_3)}_{\vec{A}\cdot\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)}\,dudv$$

通常の「ベクトル場 $\vec{A}$ の面積分」

$$= \int_S \vec{A}\cdot\vec{n}\,dS$$

と書くこともある

$$\vec{n} = \frac{\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)}{\left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right\|}$$

: 単位法ベクトル

ガウスの立体角

準備 (1つ次元を下げて)

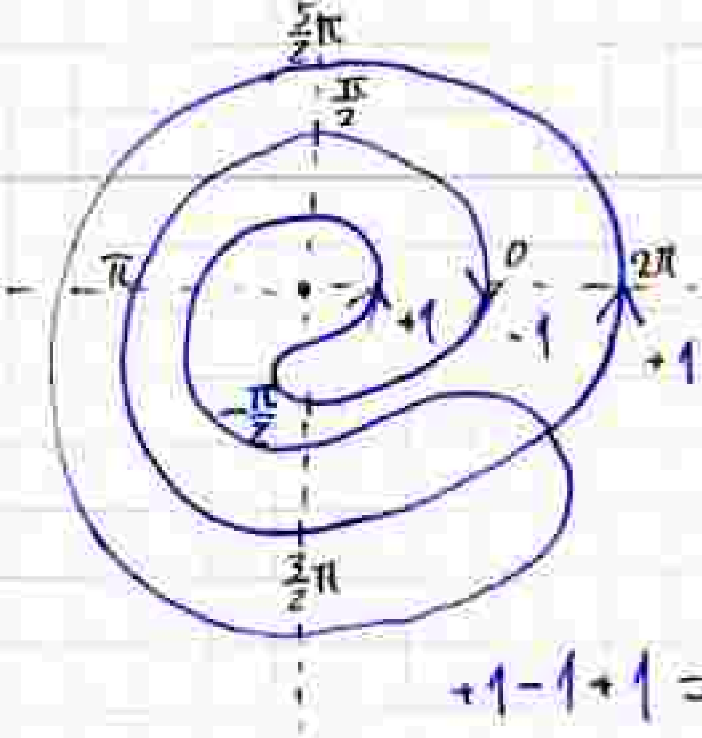
$\mathbb{R}^2$ から 0 を除いた部分で.

1次微分形式 $\dfrac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = ?$

0 を通らない閉曲面 C に対する積分

$$\int_C \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = 2\pi \left(0のまわりの符号付回転数 \right)$$

+ −



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$+1-1+1=+1$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial \theta}d\theta$$
$$= \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial r}dr + \frac{\partial y}{\partial \theta}d\theta$$
$$= \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta$$

$$x\,dy - y\,dx = r\cos\theta(\sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta)$$
$$\quad - r\sin\theta(\cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta)$$
$$= r^2 d\theta$$

$$\therefore \boxed{\frac{x\,dy - yx}{x^2+y^2} = d\theta}$$

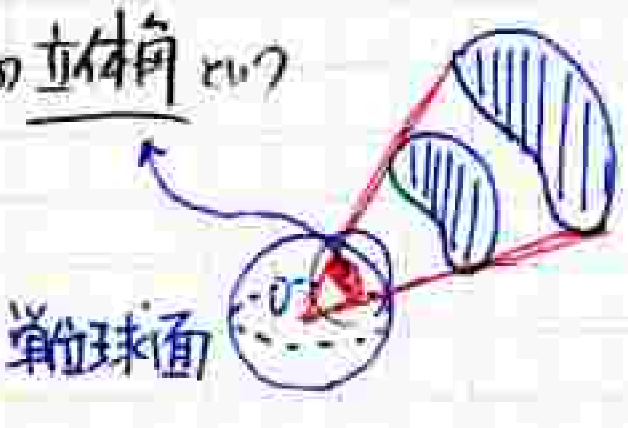
$\mathbb{R}^3$内の0を除いた部分に含まれる曲面Sについて．$(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$

$$-\nabla\frac{1}{r} = \frac{1}{r^3}\vec{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{\,3}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

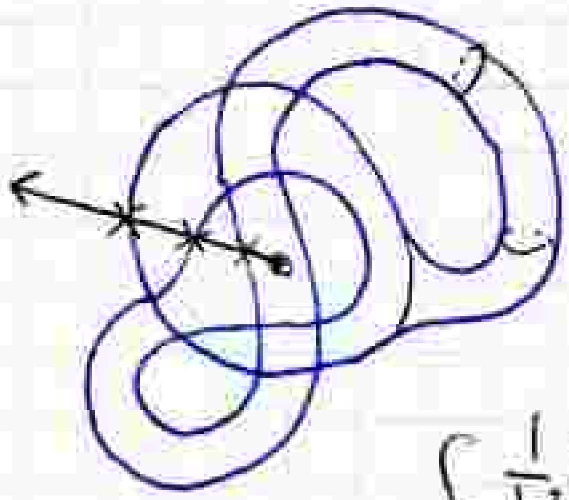
の面積分

$$\int_S \frac{1}{r^3}\vec{r}\cdot d\vec{S}$$

を0からのSの立体角という



Sが単位球面全体を（1重に）覆っていれば4π，n重に覆っていれば$4n\pi$となる．（符号付きで数える）



なら．

$$\int_S \frac{1}{r^3}\vec{r}\cdot d\vec{S} = 12\pi$$

$$\int_S \frac{x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

4章 ガウスの発散定理 p54

$\mathbb{R}^3$内で．

ベクトル場 $\vec{A}$，領域 V

$\partial V = S$ （Vが曲面Sに囲まれてる）

Sの向きは「Vから出る」を正

$$\int_V \operatorname{div}\vec{A}\,\underbrace{dv}_{dxdydz} = \int_S \underbrace{\vec{A}\cdot d\vec{S}}_{\text{面積分}}$$

7/13.

Gauß の発散定理

$\mathbb{R}^3$ 内で V を区分的に滑らかな曲面 (∂V) に囲まれた有界閉領域 とする
(∂V には 境界の向き を入れる)

$$\int_V \mathrm{div}\vec{X}\,dV = \int_{\partial V} \vec{X}\cdot d\vec{S}$$

$$\int_V \nabla f\,dV = \int_{\partial V} f\,d\vec{S} \quad (\text{ベクトル})$$

$$\int_V \mathrm{rot}\vec{X}\,dV = \int_{\partial V} \vec{X}\times d\vec{S} \quad \text{も 発散定理}$$

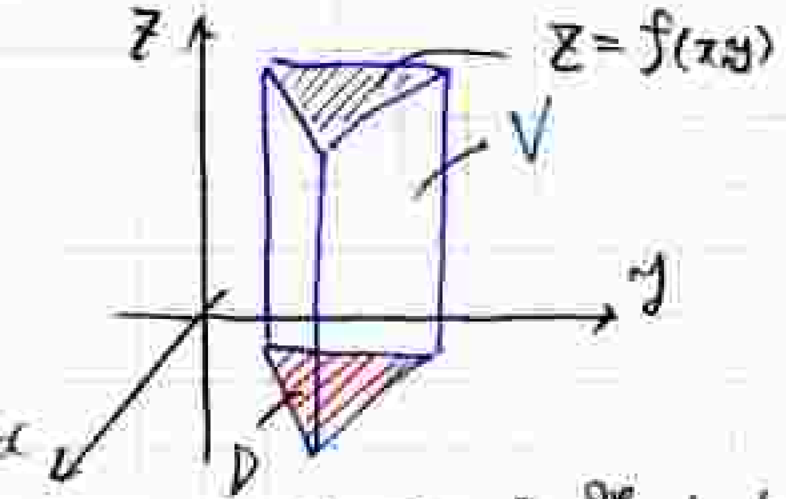
補題

$$\int_V \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}dV = \int_{\partial V}\varphi\,dx_1dx_2 = \int_{\partial V}\varphi\,\underbrace{\overset{(0,0,1)}{\vec{e_3}}\cdot\vec{n}}_{n_3}\,\overbrace{dS}^{d\vec{S}}$$

$(i=3)$ … $i=1,2$ でも同様

n_3: $\vec{n}$ の第3成分 (x_3)

証明. (柱状: 下底面 $D<$ xy平面 の場合)
上底面 $z=f(x,y)$



$$(\text{左辺}) = \int_V \frac{\partial\varphi}{\partial z}dx\,dy\,dz$$

$$= \iint_D \left(\int_0^{f(x,y)}\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz\right)dx\,dy$$

$$= \iint_D \{\varphi(x,y,f(x,y)) - \varphi(x,y,0)\}dx\,dy$$

$$= \iint_D \varphi(x,y,f(x,y))dx\,dy$$
$$- \iint_D \varphi(x,y,0)dx\,dy$$

↺

(右辺): 側面は $\vec{n}$ が $\vec{e_3}$ と垂直
$\therefore \vec{n}\cdot\vec{e_3}=0$

上底面は. $z=f(x,y)$

法ベクトル: $\begin{pmatrix}-f_x\\-f_y\\1\end{pmatrix}$

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}}\begin{pmatrix}-f_x\\-f_y\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{n}dS = \frac{1}{\cancel{\sqrt{\ }}}(\ )\cdot\cancel{\sqrt{\ }}\,dx\,dy$$

$$= \begin{pmatrix}-f_x\\-f_y\\1\end{pmatrix}dx\,dy$$

$$\vec{e_3}\cdot\vec{n}dS = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-f_x\\-f_y\\1\end{pmatrix}dx\,dy = dx\,dy$$

下底面で. $z=0$ $\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $dS=dx\,dy$

$$\text{右辺} = \int_{\text{上底面}} + \int_{\text{下底面}} + \int_{\text{側面}}$$

$$= \iint_D \varphi(x,y,f(x,y))dx\,dy + \int_{\text{側}} 0$$

$$\underset{\text{逆向き}}{-}\iint_D \varphi(x,y,0)dx\,dy = \text{左辺} \quad /\!/$$

補題で

$\varphi=X_1$ $i=1$ $\int_V \frac{\partial X_1}{\partial x_1}dV = \int_{\partial V} X_1\vec{e_1}\cdot d\vec{S}$

$\varphi=X_2$ $i=2$ $\int_V \frac{\partial X_2}{\partial x_2}dV = \int_{\partial V} X_2\vec{e_2}\cdot d\vec{S}$

$\varphi=X_3$ $i=3$ $\int_V \frac{\partial X_3}{\partial x_3}dV = \int_{\partial V} X_3\vec{e_3}\cdot d\vec{S}$

$$\int_V \mathrm{div}\vec{X}dV = \int_{\partial V}\vec{X}\cdot d\vec{S}$$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{pmatrix} = X_1\vec{e_1} + X_2\vec{e_2} + X_3\vec{e_3}$$

Stokesの定理

$\mathbb{R}^3$ 内で、S を向き付けられた区分的に滑らかな閉曲線 ∂S に囲まれた曲面とする

∂S には S の境界としての向きを入れる。

$$\int_S \mathrm{rot}\,\vec{X}\cdot d\vec{S}=\int_{\partial S}\vec{X}\cdot d\vec{r}$$

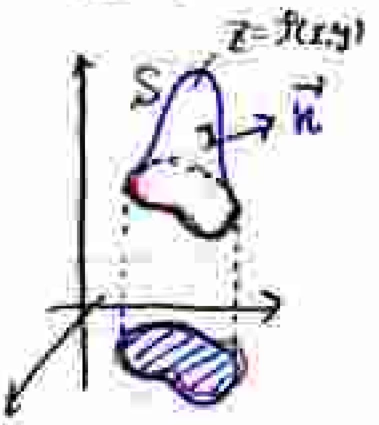
$\int_S (\nabla f)\cdot d\vec{S}=\int_{\partial S} f\,d\vec{r}$ も "Stokesの定理"

補題

$$\int_S\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\underbrace{\vec{e}_2\cdot\vec{n}}-\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\underbrace{\vec{e}_3\cdot\vec{n}}\Big)dS=\int_{\partial S}\varphi\,dx_1$$

$\vec{n}$ の第2,3成分

"証明" S が $z=f(x,y)$ D が (x,y) の場合



S の法ベクトル $\begin{pmatrix}-f_x\\-f_y\\1\end{pmatrix}$

$$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}}\begin{pmatrix}-f_x\\-f_y\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_2=\frac{-f_y}{\sqrt{\ }},\quad \vec{n}_3=\frac{1}{\sqrt{\ }}$$

$$dS=\sqrt{\qquad}\,dxdy$$

$$\text{左辺}=\int_S\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\frac{-f_y}{\cancel{\sqrt{\ }}}-\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{1}{\cancel{\sqrt{\ }}}\Big)\cancel{\sqrt{\ }}\,dxdy$$

$$=-\int_S\underbrace{\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}f_y+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\Big)}dxdy\quad\cdots(*)$$

$\hat{\varphi}(x,y)=\varphi(\underline{x,y,f(x,y)})$ S上の点

$$\frac{\partial\hat\varphi}{\partial y}=\underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}}\quad\cdots\cdots\ \text{合成関数の微分公式}$$

$x_1=x$
$x_2=y$
$x_3=z$

$$(*)=-\iint_D\frac{\partial\hat\varphi}{\partial y}dxdy$$

$$=\int_{\partial D}\hat\varphi\,dx\quad(\text{グリーンの定理})$$

グリーンの定理

$\mathbb{R}^2$ 内の区分的に滑らかな閉曲線 (∂D) に囲まれた領域 D について、

$$\int_D Pdx+Qdy=\int_{\partial D}\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)dxdy$$

$\hat\varphi(x,y)=\varphi(x,y,f(x,y))$

$(x,y)\in\partial D$ のとき $\hat\varphi(x,y)=\varphi(x,y,f(x,y))$

$$\int_{\partial S}\varphi\,dx=\int_{\partial D}\hat\varphi\,dx\quad //$$

発散定理同様、補題から定理が示せた。

$\vec{X}=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{pmatrix}$ 同様 $\tilde{X}=X_1dx+X_2dy+X_3dz$

各 X_i は関数

$\mathrm{div}\,\vec{X}$	$\leftrightarrow$	$*d*\vec{X}$
$\mathrm{rot}\,\vec{X}$	$\leftrightarrow$	$*dX$
$\mathrm{grad}\,\vec{X}$	$\leftrightarrow$	$d\varphi$
物理学で常用		近代数学で発展

1次
2次
3次
0次

C に沿う線積分 $\int_C\vec{X}\cdot d\vec{r}\leftrightarrow\int_C\tilde{X}$

S に沿う面積分 $\int_S\vec{X}\cdot d\vec{S}\leftrightarrow\int_S\underbrace{*\tilde{X}}_{\text{2次微分形式}}$

グリーンの定理において、

$\mu=Pdx+Qdy$ 1次微分形式

$d\mu=\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)dx\wedge dy$

$$\boxed{\int_{\partial D}\mu=\int_D d\mu}$$

発散定理 …

発散定理

$$\int_V \mathrm{div}\,\vec{X}\,dV$$
$$= \int_V *d*\tilde{X}\,dV$$
$$= \int_V \underbrace{**}_{1} d*\tilde{X} \quad *1 = dxdydz$$
$$\boxed{= \int_V d*\tilde{X}}$$

$$\int_{\partial V} \vec{X}\cdot d\vec{S}$$
$$\boxed{= \int_{\partial V} *\tilde{X}}$$

$$\boxed{\int_V d*\tilde{X} = \int_{\partial V} *\tilde{X}}$$

Stokesの定理.

$$\int_S \mathrm{rot}\,\vec{X}\cdot d\vec{S} = \int_{\partial S}\vec{X}\cdot d\vec{r} = \boxed{\int_{\partial S}\tilde{X}}$$
$$\int_S *\widetilde{\mathrm{rot}\,\vec{X}} = \int_S \underbrace{**}_{1} d\tilde{X} = \boxed{\int_S d\tilde{X}}$$

$$\boxed{\int_S d\tilde{X} = \int_{\partial S}\tilde{X}}$$

□で囲んだ式には共通点がありそう.

⇓

一般化したStokesの定理 $\boxed{\int_{\underbrace{M}_{r+1}} \underbrace{d\omega}_{r+1} = \int_{\underbrace{\partial M}_{r}} \underbrace{\omega}_{r}}$

ωはr次微分形式
Mは(r+1)次元の図形「多様体」

p60.

(思い出す) $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ のとき

$$\underset{ベクトル}{\vec{n}}(\underset{関数代入}{\varphi}) = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi(p+t\vec{n})-\varphi(p)}{t}$$ 「pでの$\vec{n}$方向微分」

$$= n_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + n_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + n_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}$$
$$= \nabla\varphi\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$
$$= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}x_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}x_3\right)\cdot\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

グリーンの定理 (大)

$\mathbb{R}^3$内で区分的に滑らかな曲面に囲まれた有界閉領域Vについて.

(1) $$\int_V \left(\psi\overset{ナブラ}{\nabla^2}\varphi + (\nabla\psi)\cdot(\nabla\varphi)\right)dV$$
$$= \int_{\partial V}\underbrace{\psi}_{スカラ}\underbrace{\vec{n}(\varphi)}_{スカラ}dS = \int_{\partial V}\psi\,\underbrace{\nabla\varphi}_{ベクトル}\cdot\underbrace{d\vec{S}}_{ベクトル}$$

特に

$$\int_V\left(\varphi\nabla^2\varphi + \|\nabla\varphi\|^2\right)dV = \int_{\partial V}\varphi\nabla\varphi\cdot d\vec{S}$$

(2) $$\int_V\left(\psi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\psi\right)dV$$
$$= \int_{\partial V}\left(\psi\vec{n}(\varphi) - \varphi\vec{n}(\psi)\right)dS$$

しょーめー

↳ ……

証明

(1) 公式 $\mathrm{div}(\psi\vec{X}) = \nabla\psi\cdot\vec{X} + \psi\,\mathrm{div}\vec{X}$

で $\vec{X} = \nabla\varphi$ とすると

$$\mathrm{div}(\psi\nabla\varphi) = \nabla\psi\cdot\nabla\varphi + \psi\underbrace{\mathrm{div}(\nabla\varphi)}_{=\nabla^2\varphi}$$

発散定理 $\int_V \mathrm{div}\vec{X}\,dV = \int_{\partial V}\vec{X}\cdot d\vec{S}$

で $\vec{X} = \psi\nabla\varphi$ を使うと

$$\int_V(\nabla\psi\cdot\nabla\varphi + \psi\nabla^2\varphi)\,dV = \int_{\partial V}\psi\nabla\varphi\cdot d\vec{S}$$

「特に」$\psi = \varphi$ とすればよい

(2) ψ と φ を入れ替えて差をとればよい //

応用

① V内の調和関数 u $(\nabla^2 u = 0)$ が境界 ∂V 上で法方向成分が0 $(\vec{n}(u) = 0)$ のとき、uは定数関数

証明

グリーンの定理(*)で「特に〜」で $\varphi = u$ とする.

$$\int_V u\underbrace{\nabla^2 u}_{調和\ 0} + \|\nabla u\|^2\,dV = \int_{\partial V} u\underbrace{\vec{n}(u)}_{条件\ 0}\,dS$$

$$\therefore \int_V \|\nabla u\|^2\,dV = 0$$

$\Rightarrow \|\nabla u\| = 0$

$\Rightarrow \nabla u = 0$ $\therefore$ uは定数 //

② 点 $P(p, q, r)$

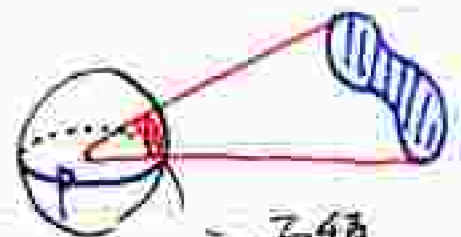
$$r_P = |\vec{PX}| = \sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2 + (z-r)^2}$$

$\frac{1}{r_P}$ は点P以外で定義された調和関数 $\nabla^2\frac{1}{r_P} = 0$ (p40)

レポート3で使う?

補講 → なし
試験 → 8/3 (レポ期限)
ノート、プリント、教科書 持ち込み可.

$-\nabla\frac{1}{r_P} = \frac{1}{r_P^3}\vec{PX}$ の面積分
「Pを中心とする立体角」



この面積

・Pを含まない閉領域Vに対して

$$\int_{\partial V} -\nabla\frac{1}{r_P}\cdot d\vec{S} = \int_V \underbrace{-\nabla^2\frac{1}{r_P}}_{=0}\,dV = 0$$

・Pを中心とする半径 $\varepsilon\ (>0)$ の球 B_ε をとると

$$\int_{\partial B_\varepsilon} -\nabla\frac{1}{r_P}\cdot d\vec{S} = 4\pi$$

εに依らない

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B_\varepsilon \to P} -\nabla\frac{1}{r_P}\cdot d\vec{S} = 4\pi\varphi(p)$$

$$\rightsquigarrow -\int_V \nabla^2\frac{1}{r_P} = \begin{cases} 0 & p \notin V \\ 4\pi\varphi(p) & p \in V - \partial V \end{cases}$$

グリーンの定理(*)(2)で $\psi = \frac{1}{r_P}$ とすると

……

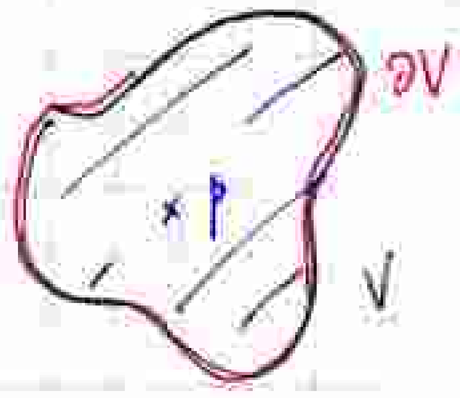
グリーンの定理(1)(2)で $\psi = \frac{1}{r_P}$ とすると

$$\int_V \left(\frac{1}{r_P}\underbrace{\nabla^2\varphi}_{0} - \varphi\underbrace{\nabla^2\frac{1}{r_P}}_{4\pi\varphi(P)}\right)dV = \int_{\partial V}\left(\frac{1}{r_P}\vec{n}(\varphi) - \varphi\vec{n}\left(\frac{1}{r_P}\right)\right)dS$$

φが 調和関数で

$P \in V - \partial V$ $\quad 4\pi\varphi(P) = \int_{\partial V}\left(\frac{1}{r_P}\vec{n}(\varphi) - \varphi\vec{n}\left(\frac{1}{r_P}\right)\right)dS$

∂Vの積分で φ(P)が決まる.

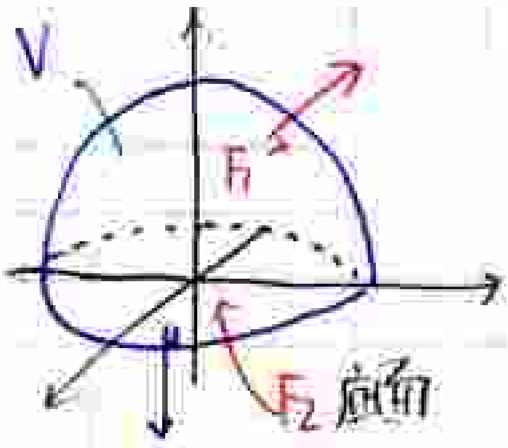


参 関数論

f(z) 正則のとき

$$2\pi i\, f(\alpha) = \int_C \frac{f(z)}{z-\alpha}\,dz$$

αを中に含む曲線



向きに関する注意

「Vの境界∂VにはVの外に出る法ベクトルで向きを入れる」

$\partial V = F_1 \cup F_2$ … 向きを考えていない

しかし通常はz成分が正で向きを定める

★ 向きも考えて式を書く. $\partial V = F_1 \cup -F_2$

発散定理は

$$\int_V \mathrm{div}\vec{X}\,dV = \int_{\partial V}\vec{X}\cdot d\vec{S} = \int_{F_1}\vec{X}\cdot d\vec{S} + \int_{-F_2}\vec{X}\cdot d\vec{S}$$
$$= \int_{F_1}\vec{X}\cdot d\vec{S} - \int_{F_2}\vec{X}\cdot d\vec{S}$$

★ 向きを考えずに書くなら. $\partial V = F_1 \cup F_2$

$$\int_V \mathrm{div}\vec{X}\,dV = \int_{F_1}\vec{X}\cdot d\vec{S} - \int_{F_2}\vec{X}\cdot d\vec{S}$$

(F_2は∂Vの一部としては 逆向き)

レポート 第2回の解説.

V: $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \le 1$, $z \ge 0$

で. 楕円球上半分

$\Omega = (2+z)\,dx\wedge dy\wedge dz$ 積分

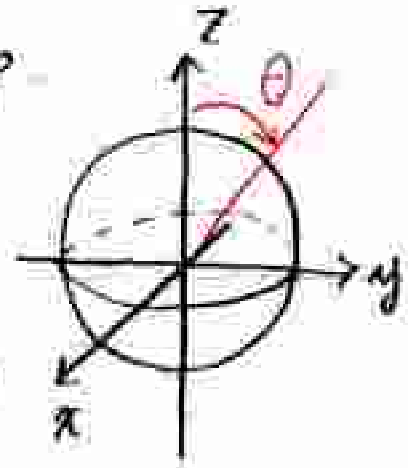
$$\int_V (2+z)\,dx\wedge dy\wedge dz = \int_V (2+z)\,dxdydz$$

$$= \underbrace{\int_V 2\,dxdydz}_{2[V\text{の体積}]} + \underbrace{\int_V z\,dxdydz}_{(*)} \cdots ★$$

$\frac{4}{3}\pi\times1\times2\times3$ Vの係数より

極座標.

$$\begin{cases} x = 1\,r\sin\theta\cos\varphi \\ y = 2\,r\sin\theta\sin\varphi \\ z = 3\,r\cos\theta \end{cases}$$



$$E = \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

ヤコビアン $\quad dxdy = r\,drd\theta$

$dxdydz = 6r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi$

(*)より

$$\int_V z\,dxdydz = \iiint_E 3r\cos\theta\cdot 6r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi$$

$$= \underbrace{\int_0^{2\pi}d\varphi}_{2\pi}\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\,d\theta}_{\frac{1}{2}}\underbrace{\int_0^1 18r^3\,dr}_{\frac{9}{2}}$$

$= \frac{9}{2}\pi$

$\therefore$ ★ $= 8\pi + \frac{9}{2}\pi = \frac{25}{2}\pi$ //

補足 p64, 65

事実 f を $\mathbb{R}^3$ の連続関数とする.

「$\mathbb{R}^3$ の任意の閉領域で $\int_V f\,dV = 0$」 $\Rightarrow f = 0$

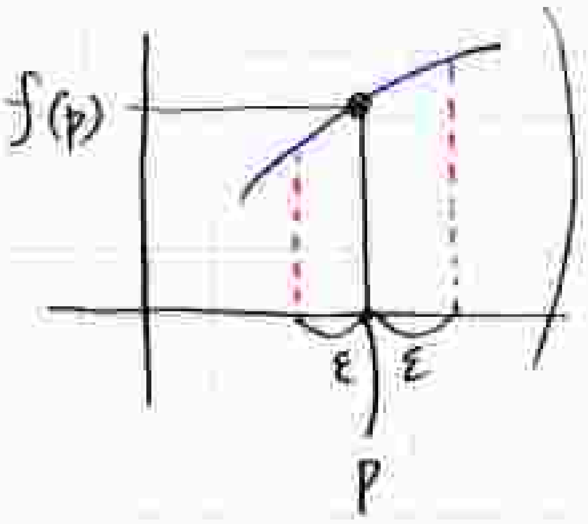
証明 対偶を示す.

$f(p) = \delta > 0$ とする

次のように十分小さな $\varepsilon > 0$ がとれる

中心 P, 半径 ε の球 $B_{\varepsilon p}$ 内で $f(x) \geq \frac{\delta}{2}$

(次元を下げた図



)

$$\int_{B_\varepsilon} f\,dV \geq \int_{B_\varepsilon} \frac{\delta}{2}\,dV = \frac{4}{3}\pi\varepsilon^2 \cdot \frac{\delta}{2} > 0 \quad //$$

定理 スカラー場 ρ と ベクトル場 $\vec{A}$ について

「任意の閉領域 V で $\int_{\partial V} \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho\,dV$」 $\Rightarrow \operatorname{div}\vec{A} = \rho$

$\parallel$ ← 発散定理

$\int_V \operatorname{div}\vec{A}\,dV$

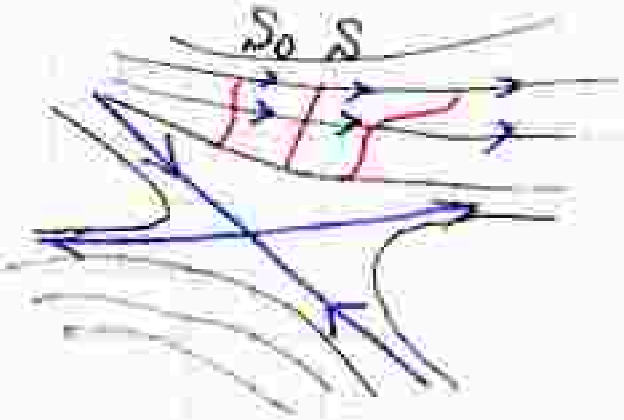
定理 ベクトル場 $\vec{A}, \vec{B}$ について

「任意の曲面 S について $\int_{\partial S} \vec{A}\,d\vec{r} = \int_S \vec{B}\,d\vec{S}$」 $\Rightarrow \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$

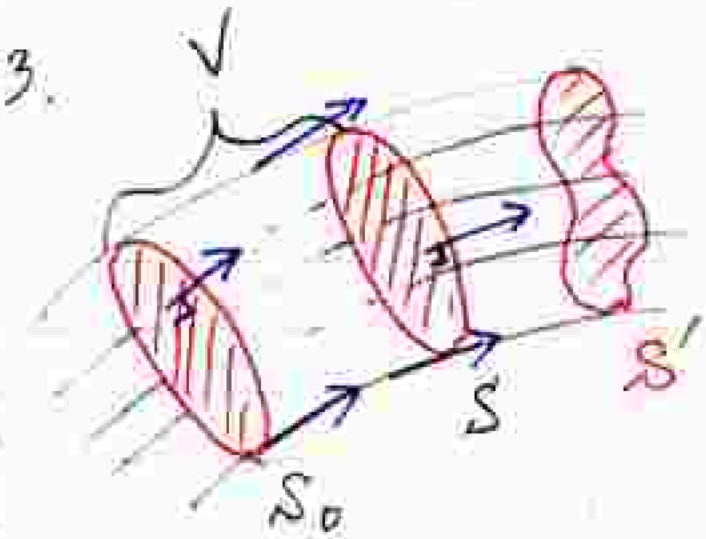
§ 流管と渦管

ベクトル場 $\vec{A}$ の積分曲線(流線)を考え

n=2



n=3.



曲面 S_0 をとり, その各点を通る積分の束がなす管状の立体を流管という.

流管の断面図 S について

定理

$\operatorname{div}\vec{A} = 0$ ならば

任意の断面 S (S_0 と同じ向き)

に対して $\int_S \vec{A}\cdot d\vec{S}$ は一定

つまり $\int_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_{S_0} \vec{A}\,d\vec{S}$

証明

S_0 と S にはさまれた領域を V とする.

$\partial V = S_0 \cup S \cup \underset{\text{側部分}}{T}$

$(\overset{\text{向き込みで}}{=} -S_0 \cup S \cup T)$

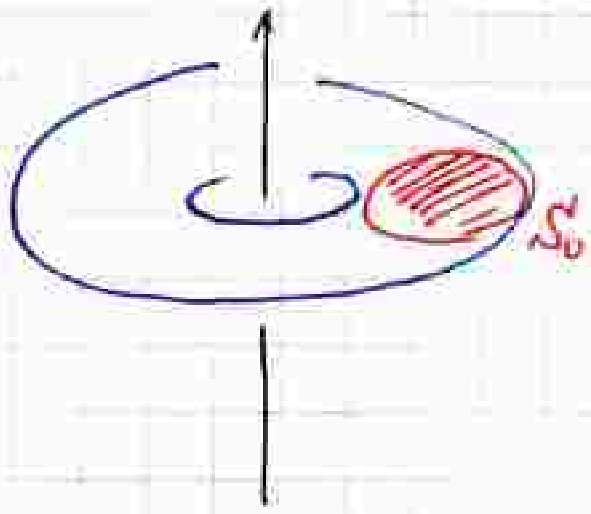
$$0 = \int_V \underset{\overset{\parallel}{0}\ \text{仮定}}{\operatorname{div}\vec{A}}\,dV \underset{\text{発散定理}}{=} \int_{\partial V} \vec{A}\cdot d\vec{S}$$

$$= -\int_{S_0} \vec{A}\cdot d\vec{S} + \int_S \vec{A}\cdot d\vec{S} + \int_T \vec{A}\cdot \overset{\vec{A}\cdot\vec{n}\,dS \ \overset{\parallel}{0}\ \text{側では}}{d\vec{S}}$$

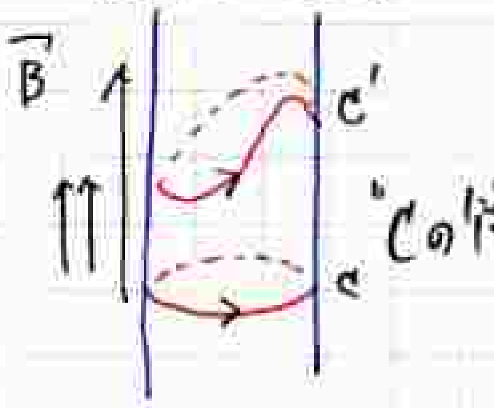
ベクトル場 $\vec{A}$ に対して
$\vec{B}=\mathrm{rot}\,\vec{A}$ に対する流管を渦管という.

例 $\vec{A}=\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix}$ の場合. $\vec{B}=\mathrm{rot}\,\vec{A}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$

$\vec{A}$の流管の例



$\vec{A}$の渦管
($\vec{B}$の渦管)



$\{(x,y,z)\,|\,(x,y)\in C\}$
閉曲線

定理

渦管を(向きに注意して)一周する曲線 $C\ (=\partial S)$
(Sは$\vec{B}$の流管としての断面)に対して

$$\Gamma=\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r} \quad \text{の値は一定}$$

証明

$$\mathrm{div}\,\vec{B}=\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{A})=0$$

$$\Gamma=\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r} \underset{\text{ストークス}}{=} \int_S \mathrm{rot}\,\vec{A}\cdot d\vec{S}=\int_S \vec{B}\,d\vec{S}$$

$$\underset{\text{管の定理}}{=} \int_{S'} \vec{B}\cdot d\vec{S}$$ 断面S'に依らない //

"例"の場合.

$C:\ \vec{r}(t)=(x(t),\ y(t),\ z(t)) \quad 0\le t\le 2\pi$

$$\vec{A}\ \mathrm{at}\ \vec{r}(t)=\begin{pmatrix}-y(t)\\x(t)\\0\end{pmatrix}$$

$$d\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}\frac{dx}{dt}(t)\\\frac{dy}{dt}(t)\\\frac{dz}{dt}(t)\end{pmatrix}dt$$

$$\Gamma=\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r}$$
$$=\int_0^{2\pi}\left(-y\frac{dx}{dt}+x\frac{dy}{dt}\right)dt$$
$$=\int_C \underbrace{-y\,dx+x\,dy}_{\tilde{A}}$$
$$=\int_D 2\,dx\wedge dy$$ DはCが囲む図形
$$=2\,[D\text{の面積}]$$

公式 $\mathrm{div}(f\vec{X})=\nabla f\cdot\vec{X}+f\,\mathrm{div}\,\vec{X}$

$$\int_V \vec{F}\cdot\nabla f\,dV=\int_{\partial V} f\vec{F}\cdot d\vec{S}-\int_V f\,\mathrm{div}\,\vec{F}\,dV$$

∵ 発散定理

$$\int_{\partial V} f\vec{F}\cdot d\vec{S}=\int_V \underbrace{\mathrm{div}(f\vec{F})}_{=\ \nabla f\cdot\vec{F}+f\,\mathrm{div}\,\vec{F}}\,dV$$

$$\mathrm{rot}(f\vec{X})=\nabla f\times\vec{X}+f\,\mathrm{rot}\,\vec{X}$$