# 信号処理論



## 回 信号とは 信号処理とは

### 1 信号とは

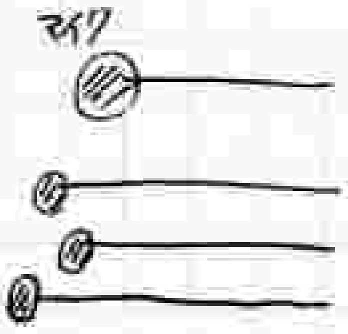
形式的には ⇒ 1つまたは複数個の変数の関数

通常は ⇒ 時間 $t$　空間 $x, y, z$　→　センサ出力値　アクチュエータの操作

計測するまで波形はわからない

現実の世界の情報を運ぶ.

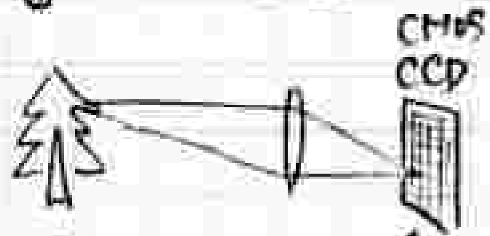
信号の例)



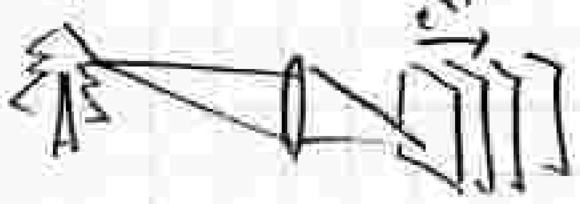

$x(t)$

$x(t)=(x_1, x_2, x_3)$

} 音, 温度 価格, 電圧, 電流 etc




$I(x,y)$ …… 画像




$I(x,y,t)$ …… 映像(動画像)

### 2 信号処理とは

信号 $\xrightarrow{x(t)}$ [変形] $\xrightarrow{y(t)}$ 別の信号　分離, 雑音抑圧 → エフェクタ, フィルタ

信号 $\xrightarrow{x(t)}$ [変換] $\xrightarrow{X(\omega)}$ 別の{世界 座標}の信号　周波数領域での表現 → ウェーブレット変換 離散コサイン変換

信号 $\xrightarrow{x(t)}$ [抽出] $\xrightarrow{y}$ 特徴量　ピッチ推定, 音源定位 音声認識

スカラー シンボル

### 3 本講義で何がわかるのか

1部では. 確定信号 ← 変換手法を学んでおく (全講義中 4~5割)

① 時間 ↔ 周波数　自由に行き来できるように. 何故周波数で考えるのか?
② 連続時間 ↔ 離散時間　サンプリング定理
③ $z$変換 —— ディジタル信号処理のフーリエ変換・ラプラス変換
④ ディジタルフィルタ

為替相場での応用


25日移動平均線

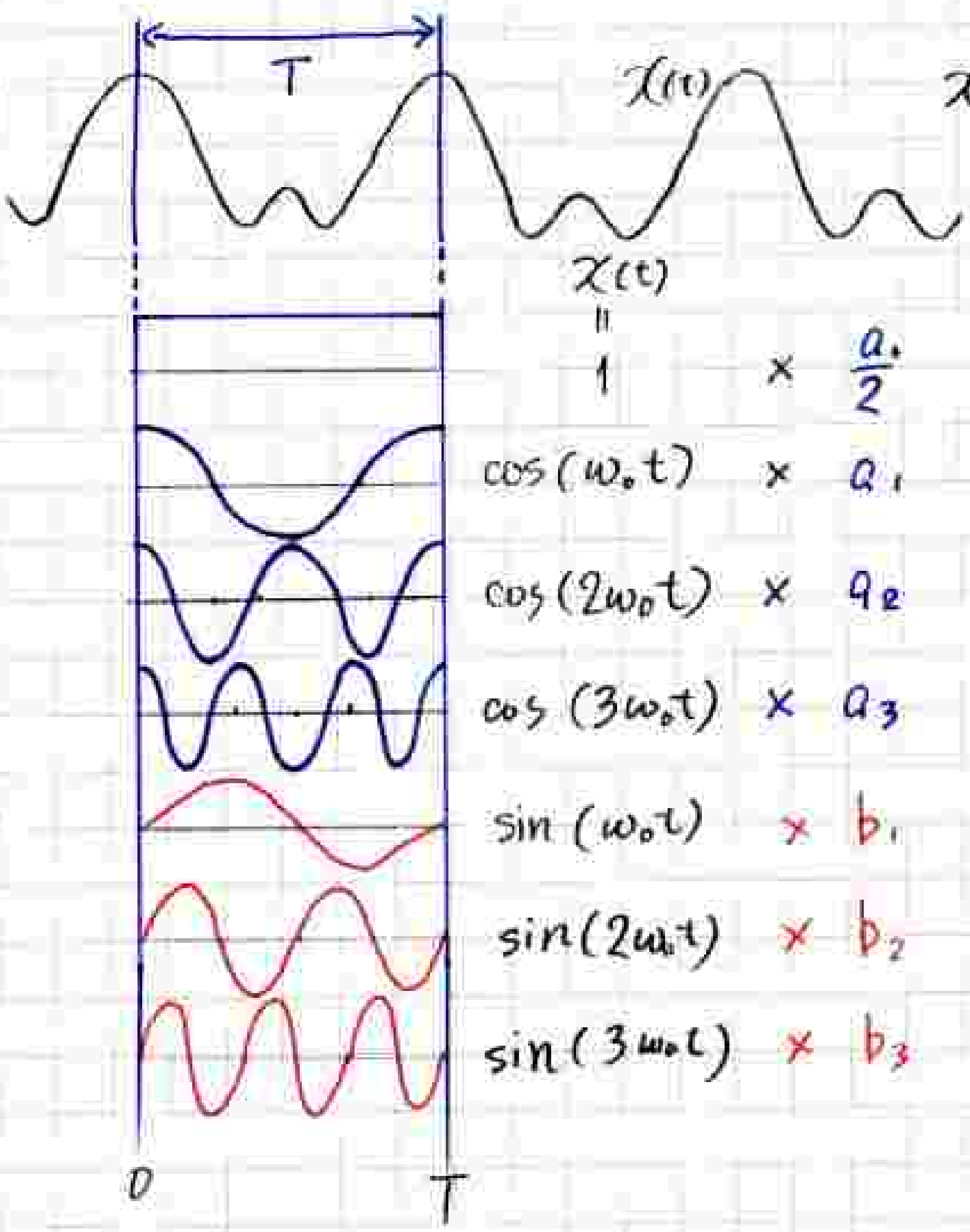
$$y_n = \frac{1}{25}x_{n-24} + \frac{1}{25}x_{n-23} + \cdots + \frac{1}{25}x_n$$

$$y_n = \underbrace{\alpha_{24}x_{n-24} + \alpha_{23}x_{n-23} + \cdots + \alpha_0 x_n}_{\text{ディジタルフィルタを使って重み付け.}}$$


2 部では、不規則信号論

4/19

1 1 三角関数によるフーリエ級数展開




$x(t+T) = x(t)$

$T$ : 周期

$f$ : 周波数 $(= \frac{1}{T})$

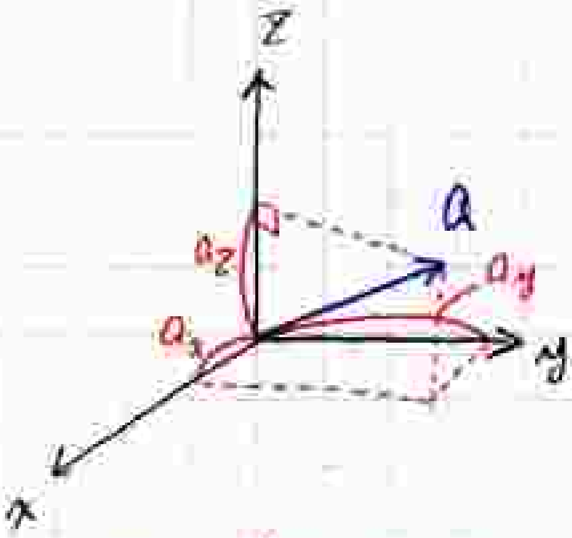
$\omega_0$ : 角周波数 $(= \frac{2\pi}{T} = 2\pi f)$

1~3の条件 (← p2)

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T \underbrace{x(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt}_{x(t)\text{と}\cos(n\omega_0 t)\text{の内積.}} \\ b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T x(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt \\ \dfrac{a_0}{2} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T x(t)\,dt \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(n\omega_0 t)$$

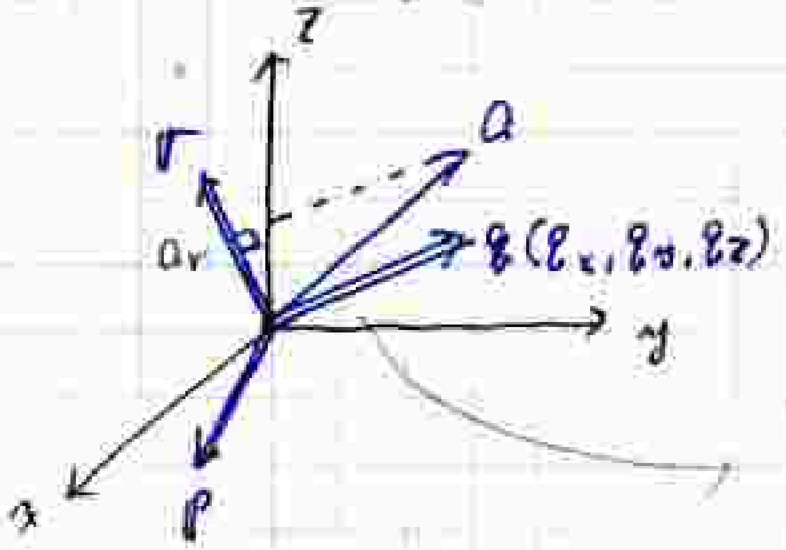
フーリエ級数展開



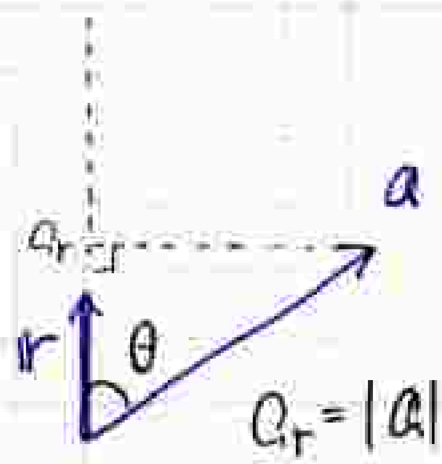
$a \to (a_x, a_y, a_z)$

↓ pqr 座標系

$(a_r, a_q, a_r)$



$(a_1\ a_2\ a_3)\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$



$a_r = |a||r|\cos\theta$

$= a \cdot r$

→ つまり 内積をとれば座標変換できる!

## 2 複素フーリエ級数展開

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum a_n \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} + \sum b_n \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j}$$

$$= \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{C_0} + \sum a_n \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} + \sum b_n \frac{-je^{jn\omega_0 t} + je^{-jn\omega_0 t}}{2}$$

$$= C_0 + \sum \underbrace{\frac{1}{2}(a_n - jb_n)}_{C_n} e^{jn\omega_0 t} + \sum \underbrace{\frac{1}{2}(a_n + jb_n)}_{C_{-n} = C_n^*} e^{-jn\omega_0 t}$$

複素共役

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$\therefore \begin{cases} x(t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \\ \underbrace{C_n}_{係数} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \underbrace{x(t)}_{回転} \underbrace{e^{-jn\omega_0 t}}_{回転を打ち消す} dt \end{cases}$$

(フーリエ級数展開)

→ 信号を回転として捉える。

時計回りと反時計回りが打ち消しあうイメージ

パーシバルの定理

$$\frac{1}{T}\int_0^T \underbrace{x(t)^2}_{電圧の2乗 = エネルギー} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$$

時間の世界で表したエネルギーと周波数 ≒ は等しい

## 3 フーリエ変換

$$X(\omega) = \int x(t) e^{-j\omega t} dt$$

→ 工学で使うのはこっちが多い。だから $\frac{1}{2\pi}$ は $x(t)$ の方に付ける。

$X(\omega)$の計算を簡単にするため

$$x(t) = \underbrace{\frac{1}{2\pi}}_{X(\omega)とx(t)でつじつま合わせ} \int X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

4/26 続

③ フーリエ変換

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{フーリエ変換}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{逆フーリエ変換}$$

パーシバルの定理：

時間の世界と周波数の世界のエネルギーは等しい
式(12),(13)

3.1 フーリエ変換の性質

1. 線形性

$$a x_1(t) + b x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} a X_1(\omega) + b X_2(\omega)$$

2. 時間軸畳み込み

$$x_1(t) * x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X_1(\omega) X_2(\omega)$$

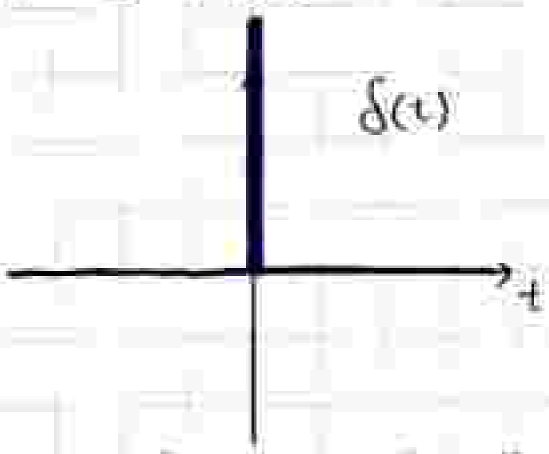
→ 時間世界での畳み込み積分は面倒だが、周波数世界では掛け算で良い。

3. 周波数軸畳み込み

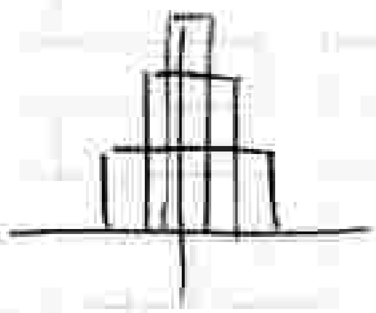
$$x_1(t)\, x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) X_2(\omega) \quad \left(\text{or} \quad X_1(f) X_2(f)\right)$$

解説)

☆ δ関数




$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}$$



面積1の四角形を極限まで延ばしたものがδ関数である。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

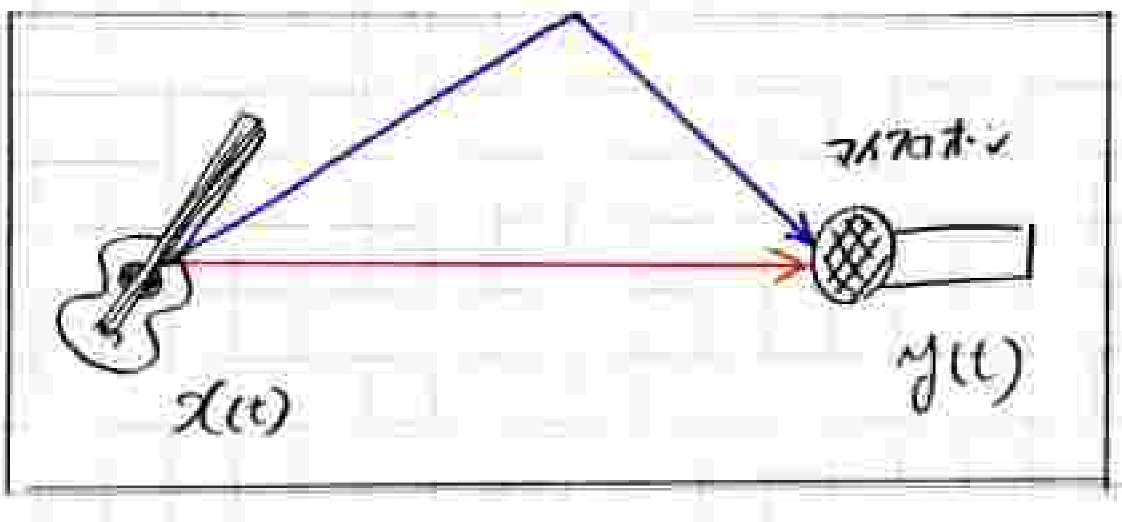
δ関数のサンプリング能力

$$\int f(t)\delta(t) dt = f(0)$$

t=0のとき、f(t)信号をサンプリングできる。

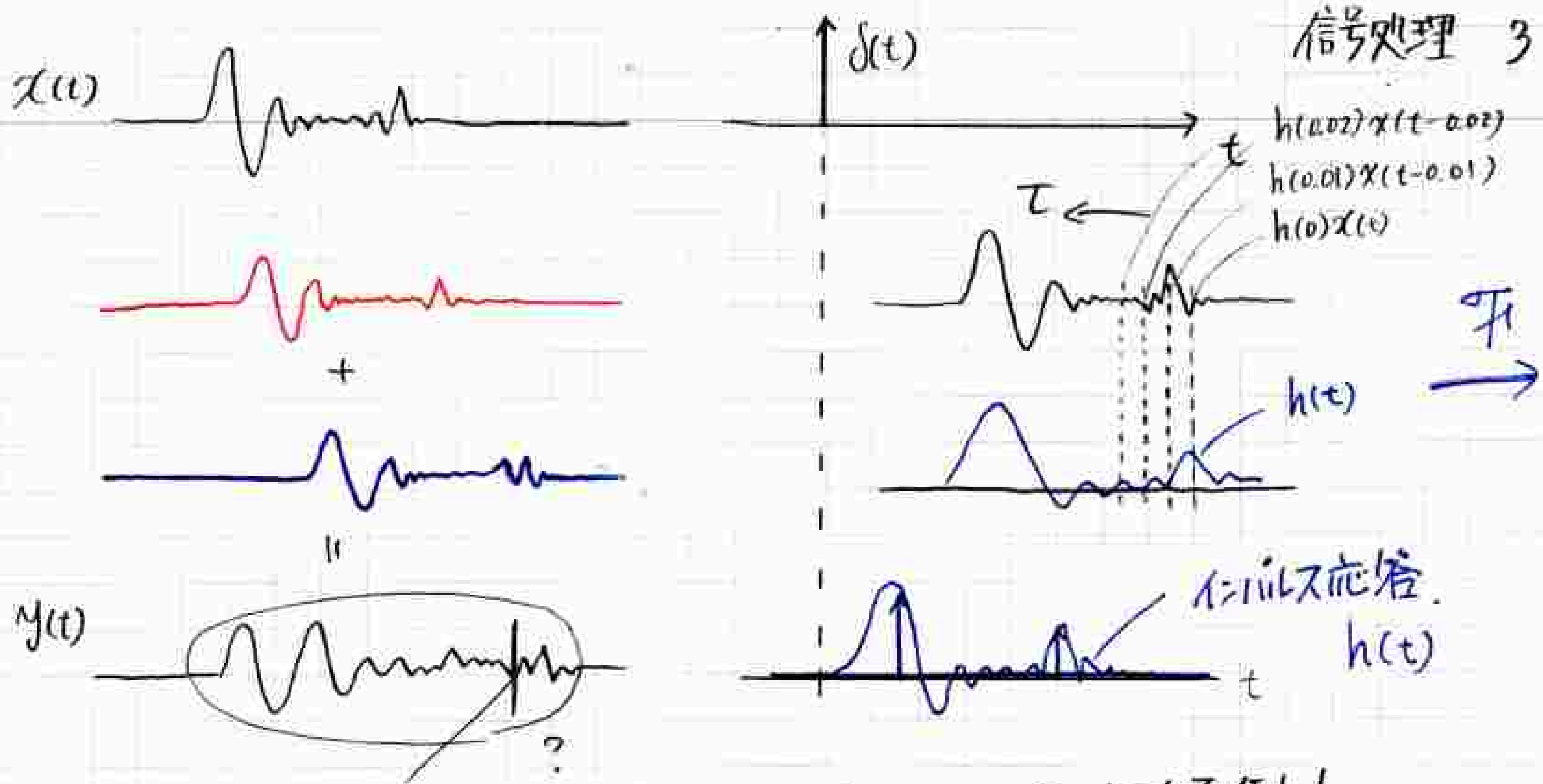
$$\int f(t_1)\delta(t_1 - t) dt = f(t_1)$$

$t = t_1$ のときの信号をサンプリングするためには、$\delta(t) = 1$ となるように、tの値を調整すれば良い。



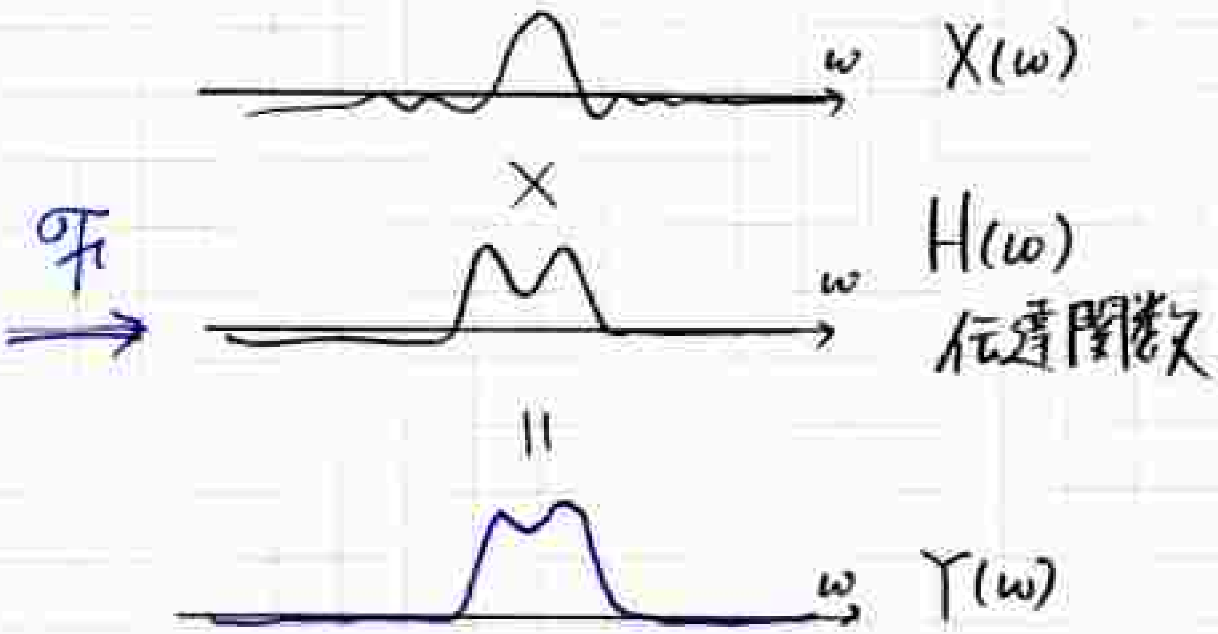

$$y(t) = 0.3x(t - 0.02) + 0.1x(t - 0.05)$$

マイクが離れているので遅れて聴こえる。



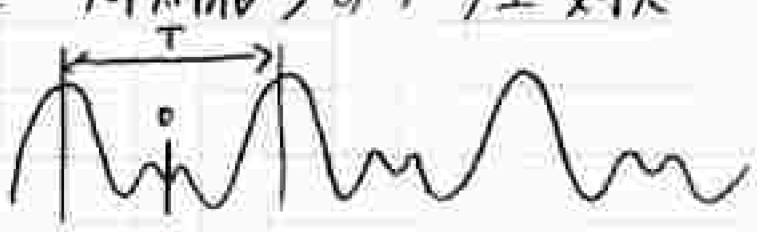

$h(0)x(t) * h(0.01)x(t-0.01) * h(0.02)x(t-0.02) * \cdots$ → とても面倒!

$$y(t) = \int h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$




5/10

## 3.2 周期信号のフーリエ変換




$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_1 t} e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_1-\omega)t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} 1\, dt = \infty$$

フーリエ級数展開ならできる.

$$\begin{cases} c_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt \\ x_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \boxed{e^{jn\omega_0 t}} \end{cases}$$

$\boxed{2\pi\delta(\omega - n\omega_0)}$ を逆フーリエ変換してみる.

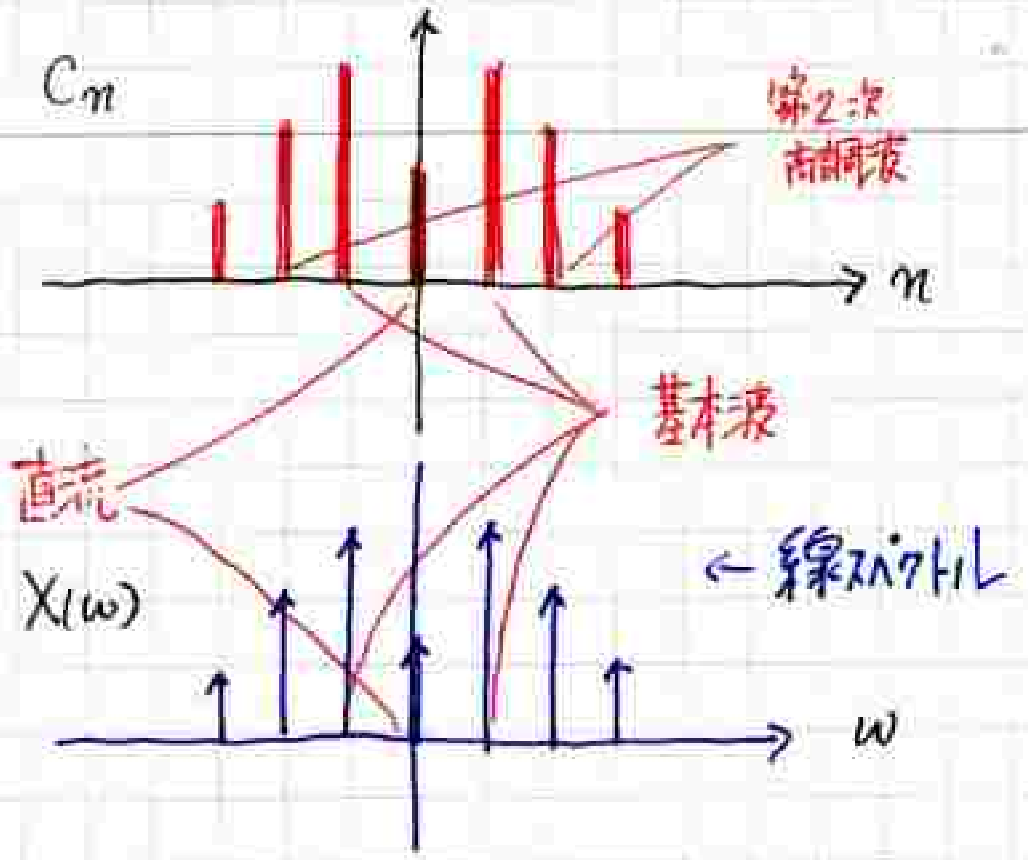
フーリエ変換

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\,\delta(\omega - n\omega_0)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$= \boxed{e^{jn\omega_0 t}}$$

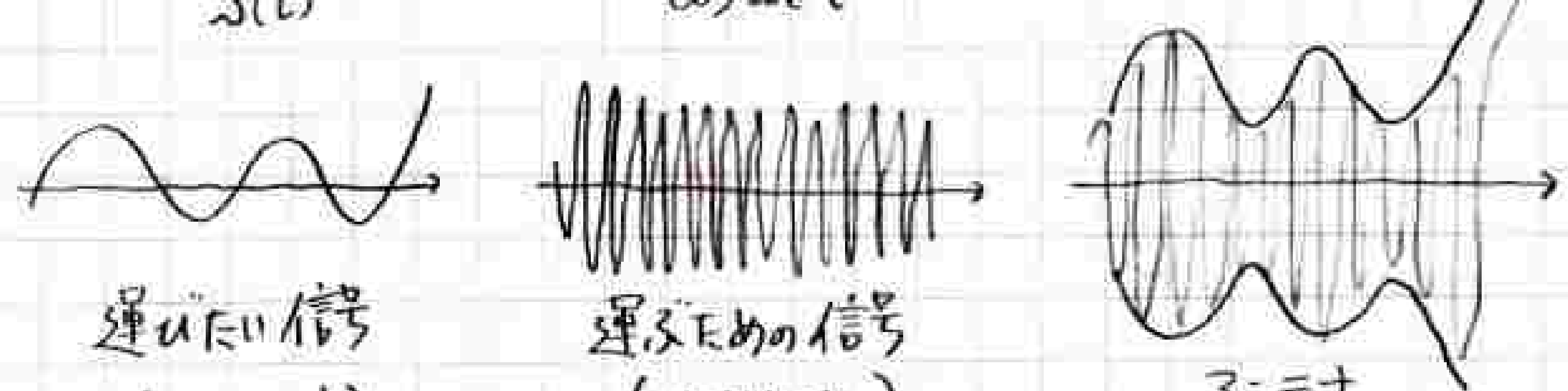
よって $x(t)$ のフーリエ変換は

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, \delta(\omega - n\omega_0)$$




$$x(t) = [1 + s(t)] \cos \omega_c t$$
$$= \cos \omega_c t + s(t) \cos \omega_c t$$
$$\cos \omega_c t = \frac{e^{-j\omega_c t} + e^{j\omega_c t}}{2}$$

## 3.3 振幅変調信号のフーリエ変換



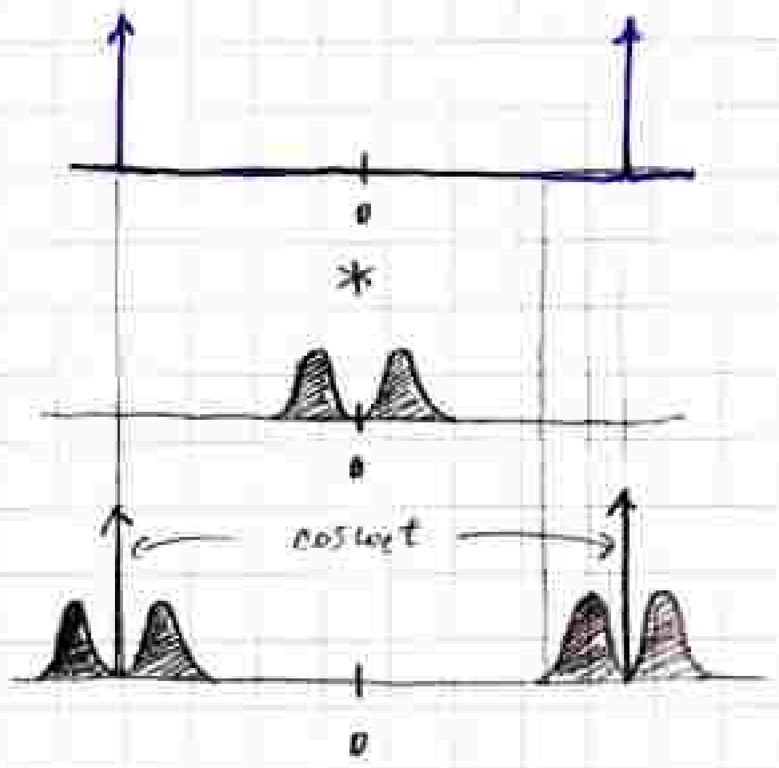

$\frac{e^{-j\omega_c t} + e^{j\omega_c t}}{2} \xrightarrow{\mathcal{F}}$

$\times$ 　　　　 $*$

$s(t) \xrightarrow{\mathcal{F}}$

$\|$

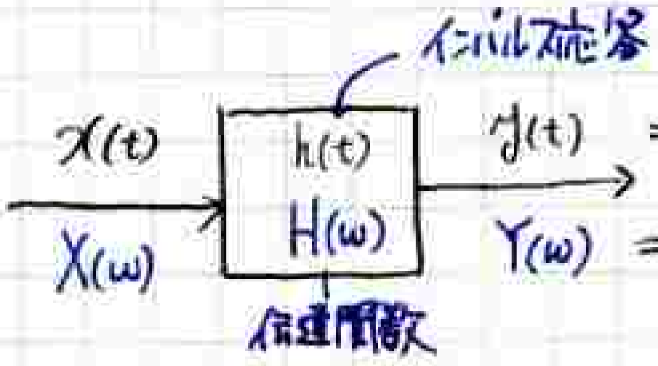
$X(\omega) = s(t) \cos \omega_c t + \cos \omega_c t \xrightarrow{\mathcal{F}}$




← 1つの信号を送るのに4つの山を送っている → 非効率的!

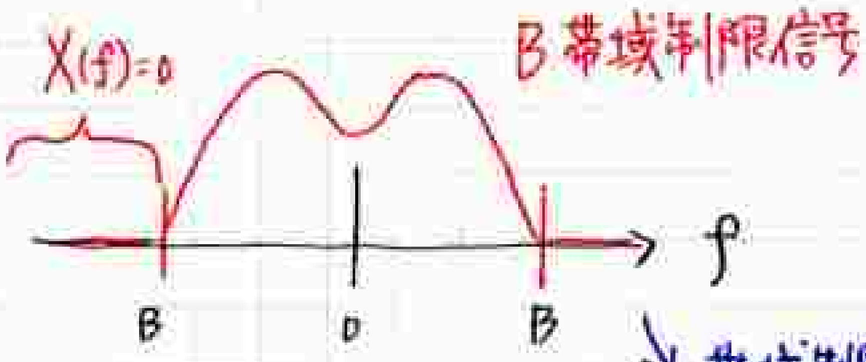
片側だけを使うことも.

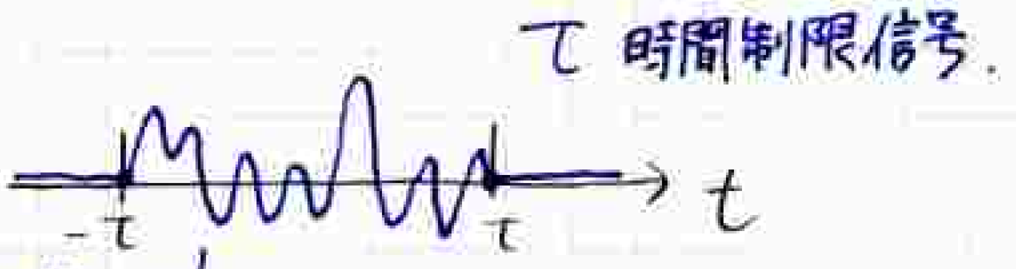
## 4. 線形シフト不変システム




$$y(t) = h(t) * x(t)$$
$$Y(\omega) = H(\omega) X(\omega)$$

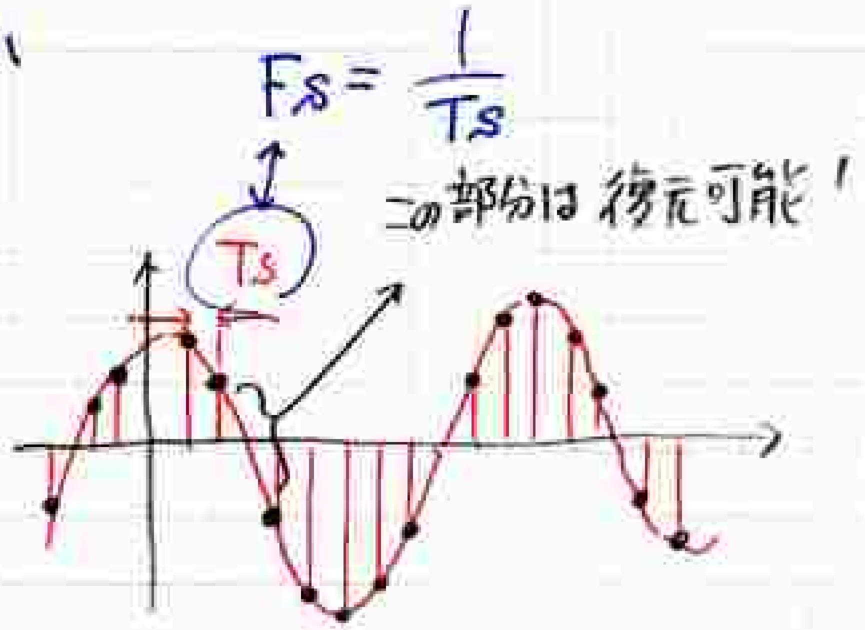
## 5. 帯域制限，時間制限信号.




↘ 帯域制限信号 と 時間制限信号は両立しない ↙

## 6. サンプリング

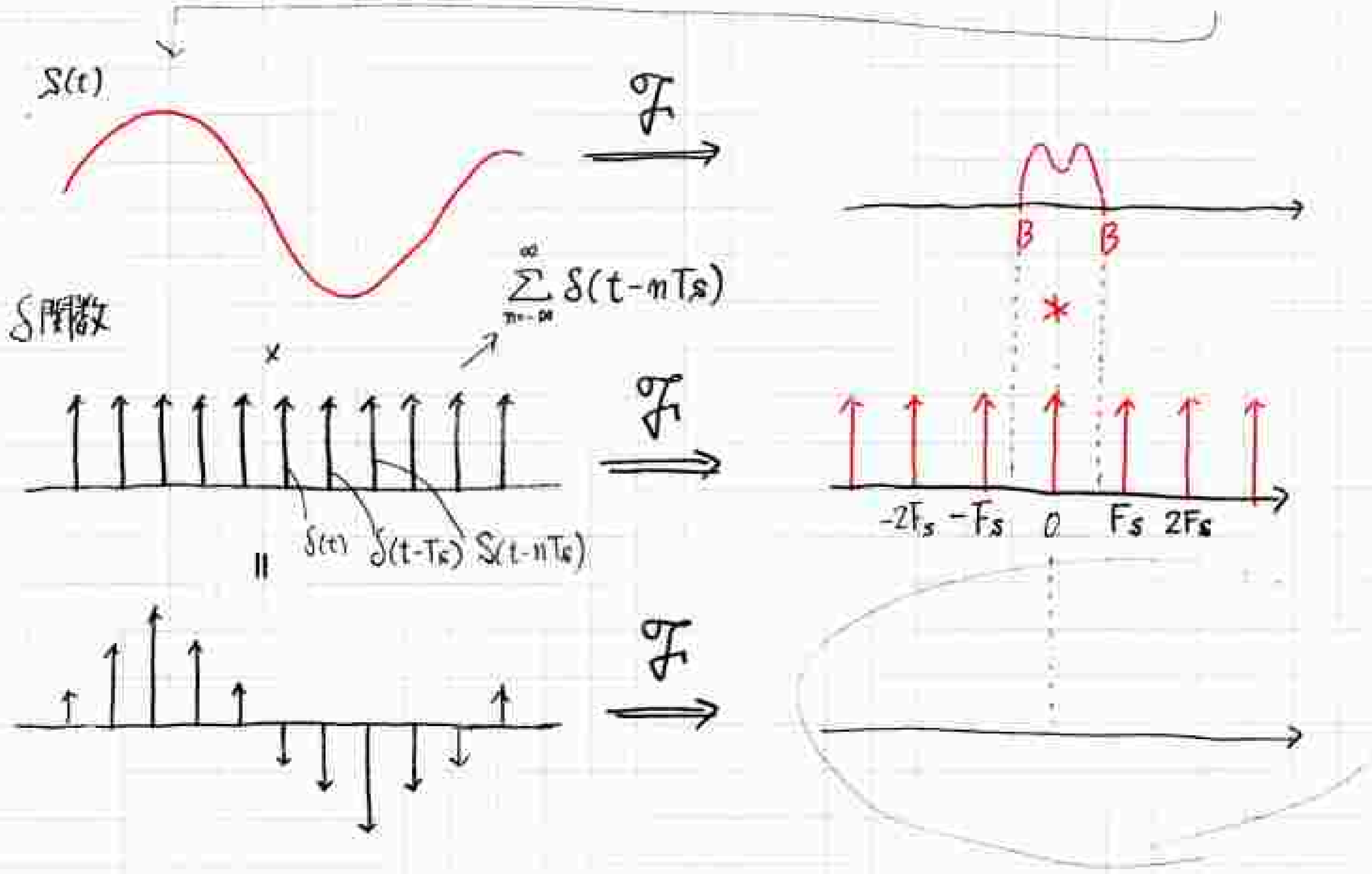



<u>定理</u> B(Hz) 帯域制限信号 $x(t)$ は
時間隔間 $T_s = \frac{1}{2B}$ のサンプリング
( $F_s = 2B$ )
で得られた値 $x(T_s n)$ から
完全に決定される

→ サンプリング定理 ( シャノン－染谷定理 )

• の離散データを得る事と ∿ のアナログデータを得る事は等しい.

→ 離散データを得るには?




$\sum \delta(t-nT_s)$

↓ 級数展開 $\quad \omega_c = \frac{2\pi}{T_s}$

$$C_n = \frac{1}{T_s}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \delta(t-nT_s)\, e^{-jn\omega_c t}\, dt$$

$= \frac{1}{T_s}$ ← $|t| \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で使える δ関数は $\overset{t}{0}$ のときだけ!

$$D(\omega) = \frac{2\pi}{T_s}$$

5/17.

## 6.4 内挿式

$$H(\omega) = \begin{cases} T_s & |\omega| \le \frac{\omega_s}{2} \\ 0 & |\omega| > \frac{\omega_s}{2} \end{cases}$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} T_s e^{j\omega t}\, dt$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\omega_s}{2}t\right)}{\frac{\omega_s}{2}t} \qquad F_s = \frac{1}{T_s}$$

$$\omega_s = 2\pi F_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

$$= \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega_s}{2}t\right) \qquad \frac{\sin x}{x} = \mathrm{sinc}\, x$$

$t = T_s$

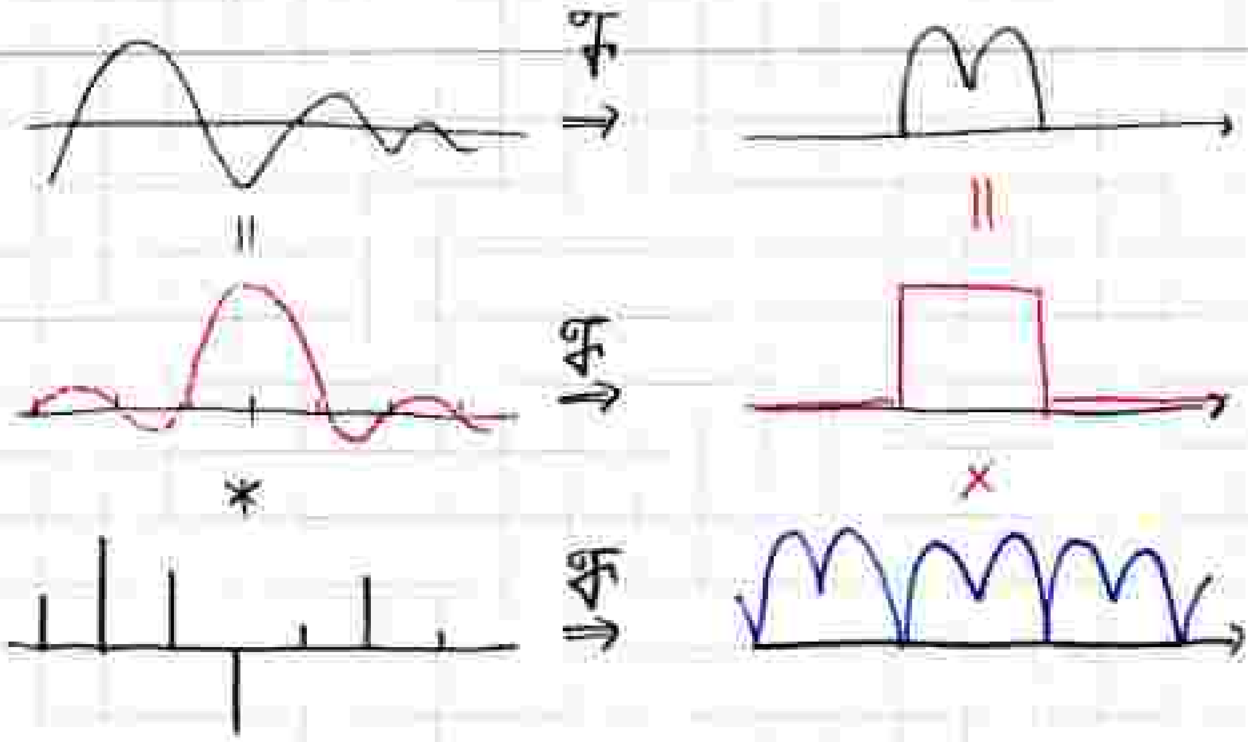
パルス列が入る

→ sinc 関数

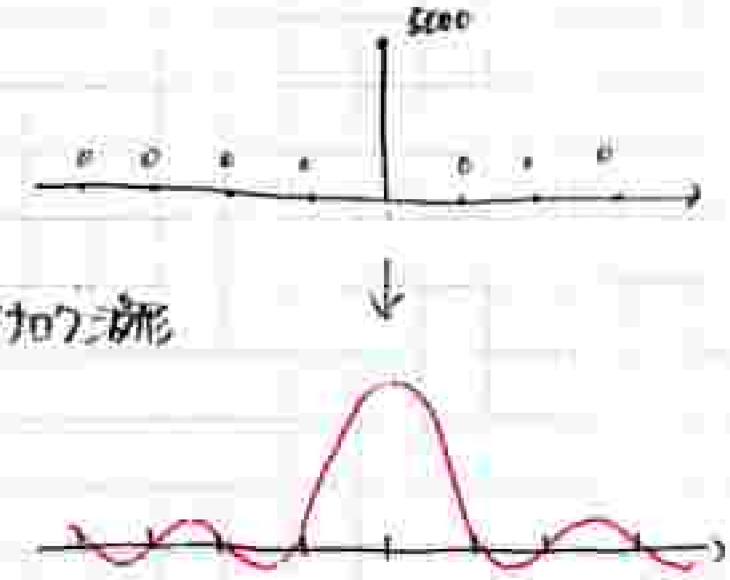
内挿式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(T_s n)\,\frac{\sin\left(\frac{\omega_s}{2}(t-T_s n)\right)}{\frac{\omega_s}{2}(t-T_s n)}$$

→ パルス列を復元する為に必要不可欠!!

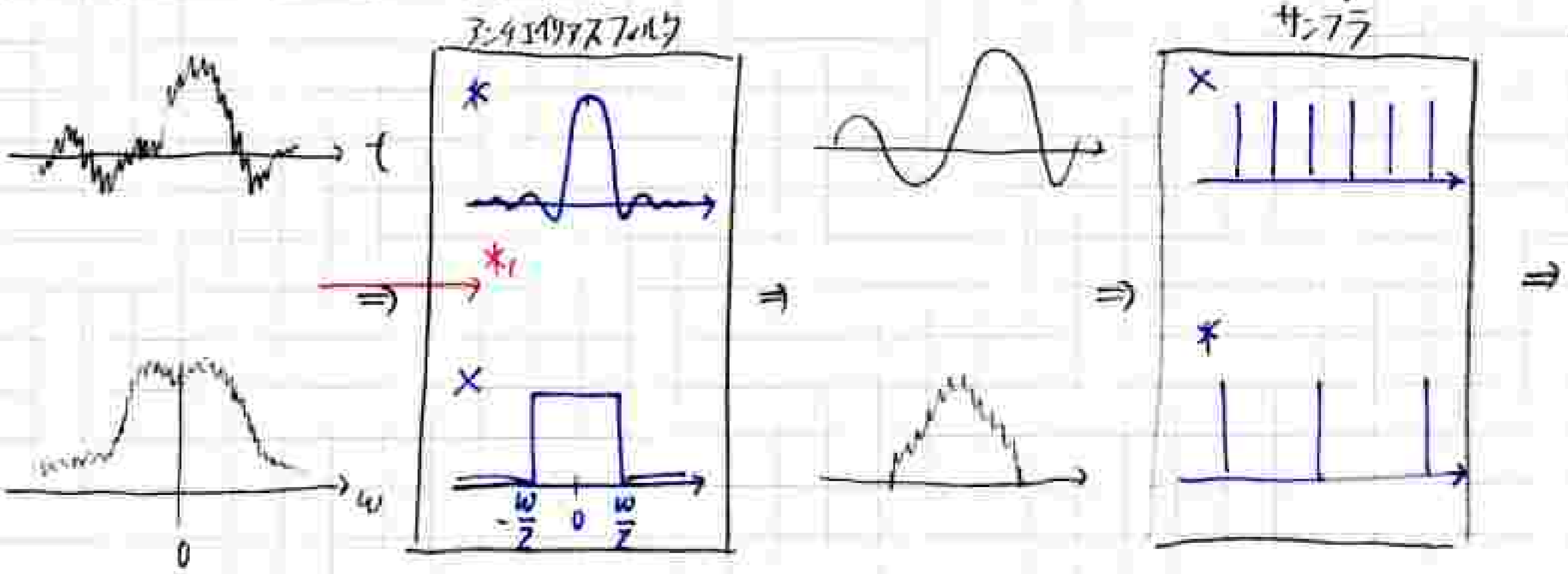


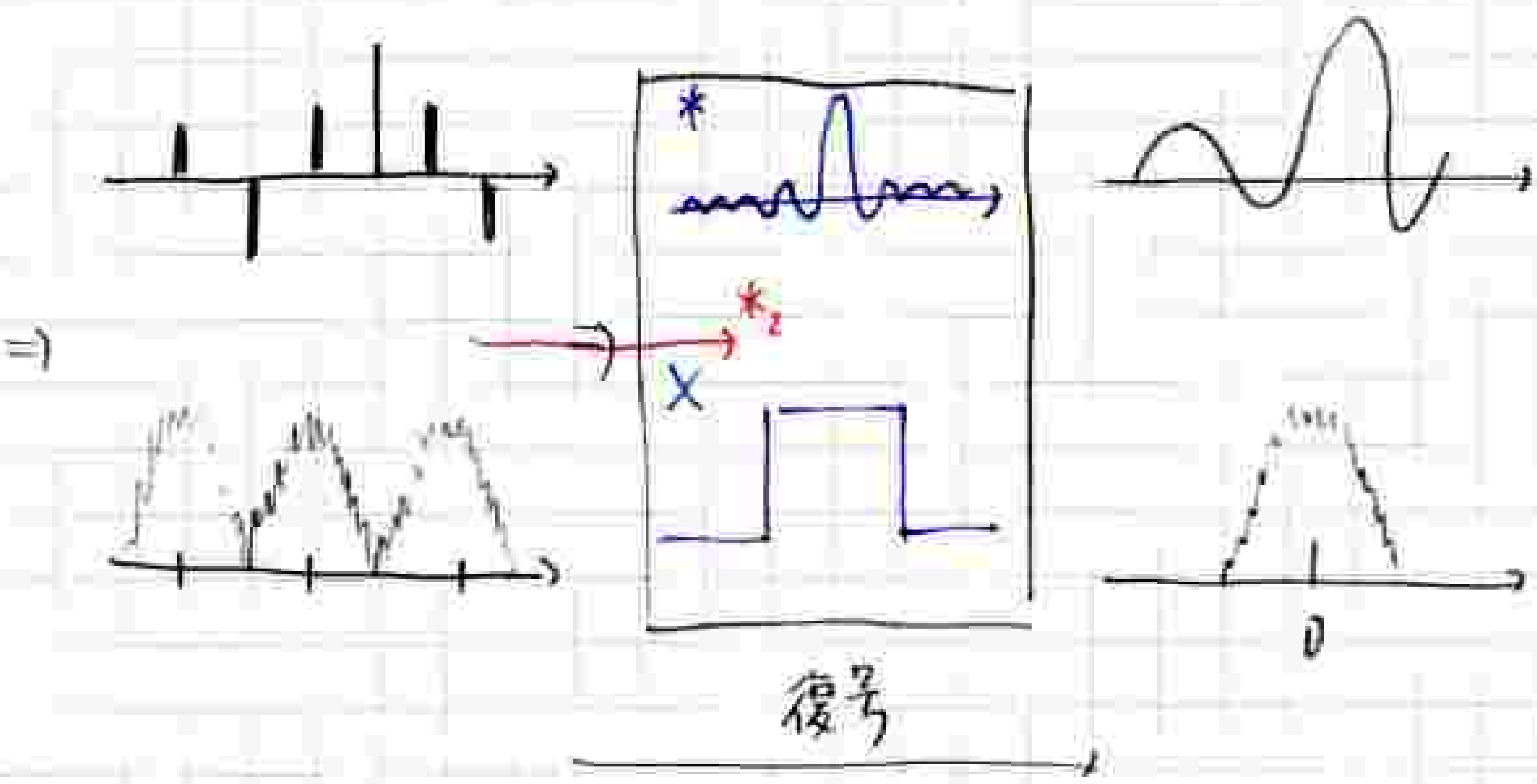
あるCDのデータ



プレイヤーの再現したアナログ波形

## 6.5 アナログ信号のディジタル信号処理系

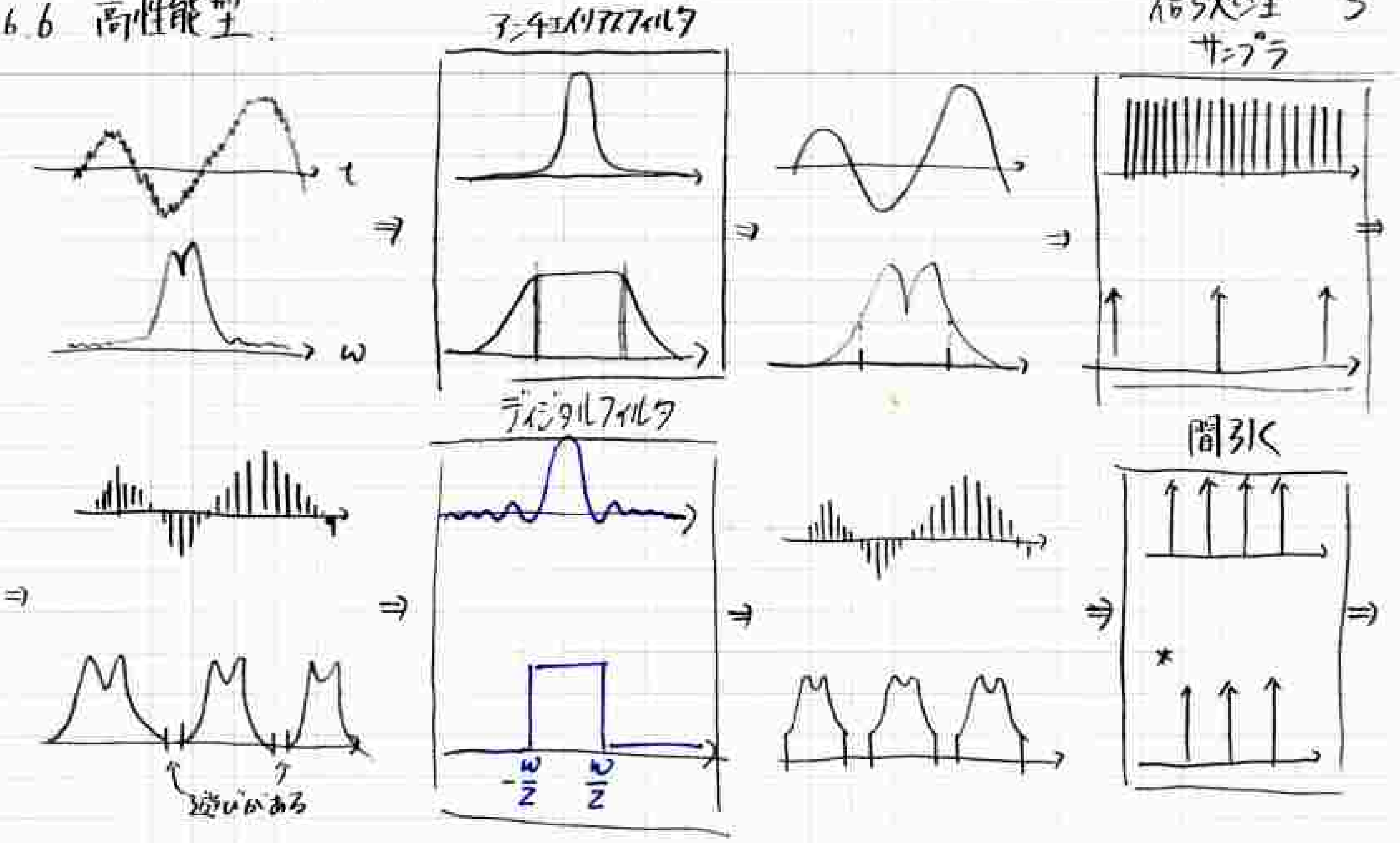


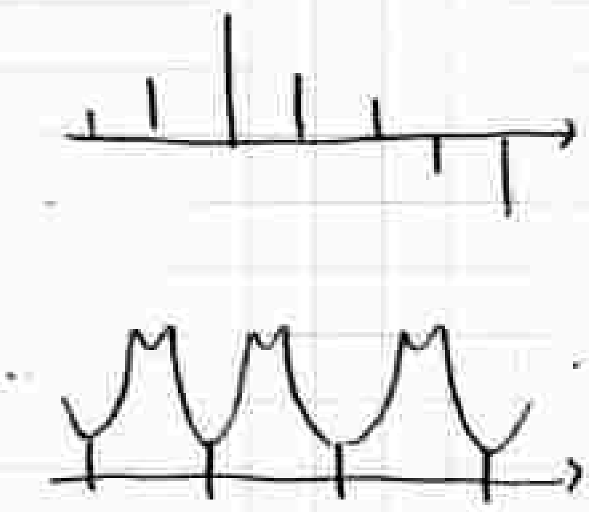




$*_1$, $*_2$ は電子回路によって実現しなければならないため、作るのが難しい。

→ CDはデジタル信号処理でそれを実現している。

## 6.6 高性能型



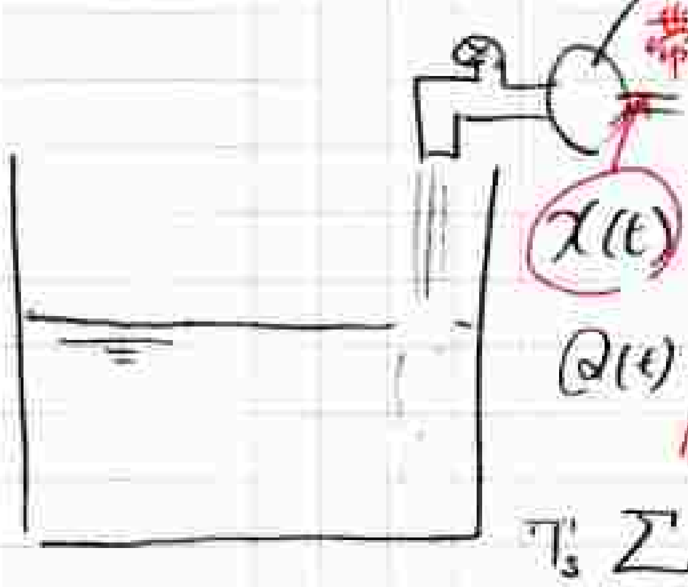



マルチレート
信号処理

## 6.7↓ 補足的図説 ↓

漏量計

帯域制限をかける



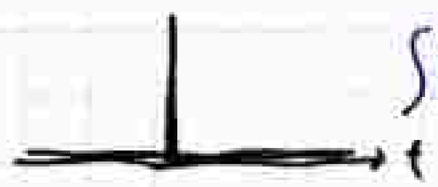
$x(t) \xrightarrow{\text{サンプリング}} x_n$

$Q(t) = \int x(t)\,dt$

$= T_s \sum x_n$

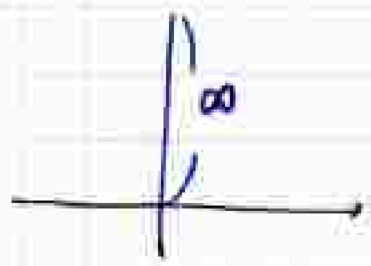
## 6.9 離散時間でのインパルス

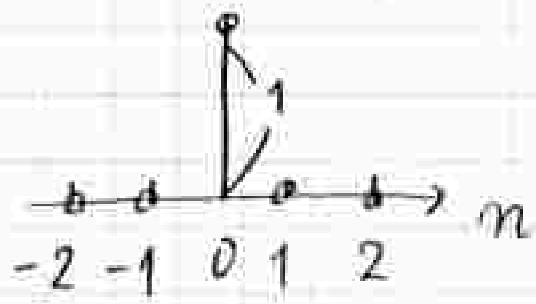
$\delta(t)$




$\int \delta(x) f(x)\,dx = f(0)$

$$\delta_n = x_n = \begin{cases} \infty & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

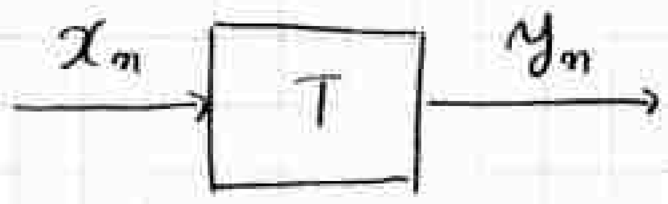


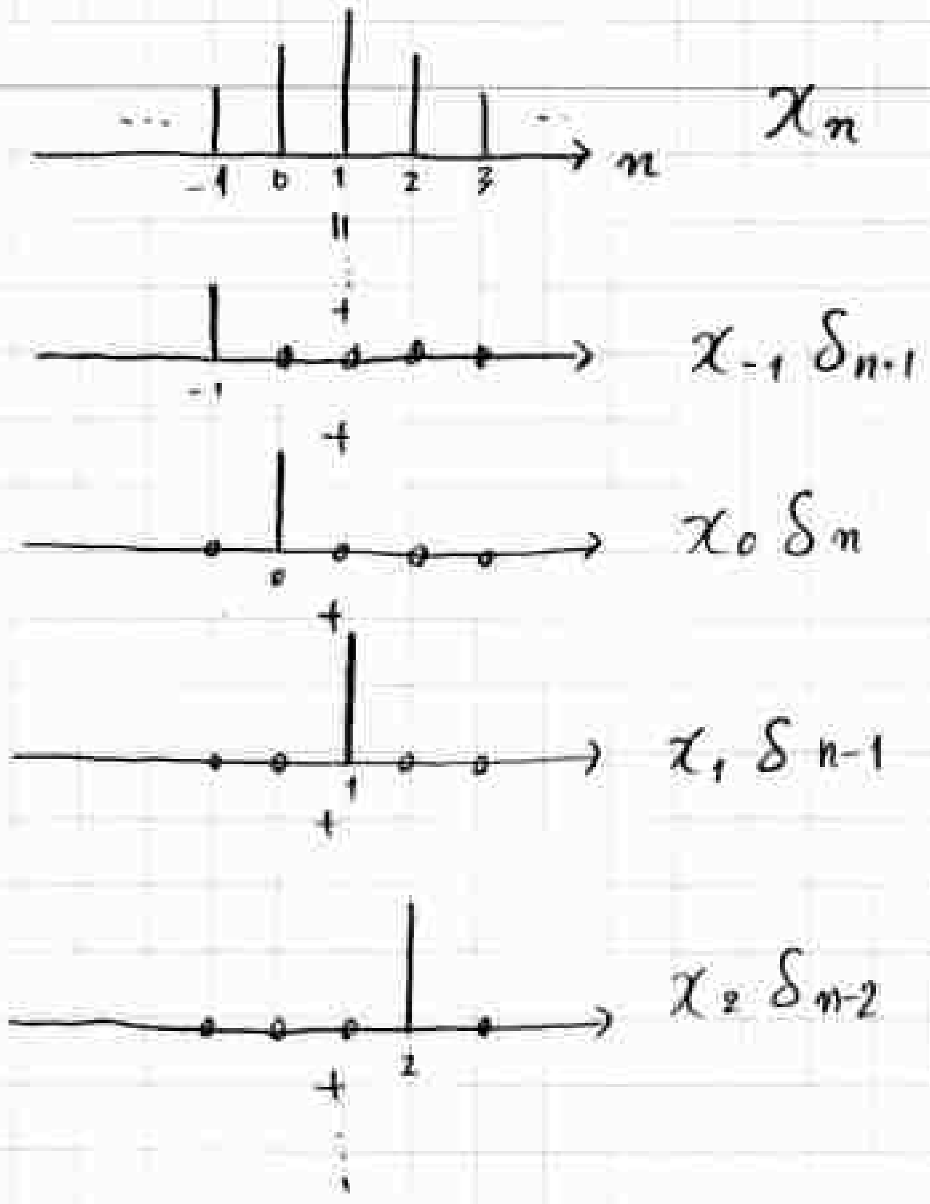




$$\delta_n = \begin{cases} 0 & (n \neq 0) \\ 1 & (n = 0) \end{cases}$$

5/24

## 6.10 線形シフト不変



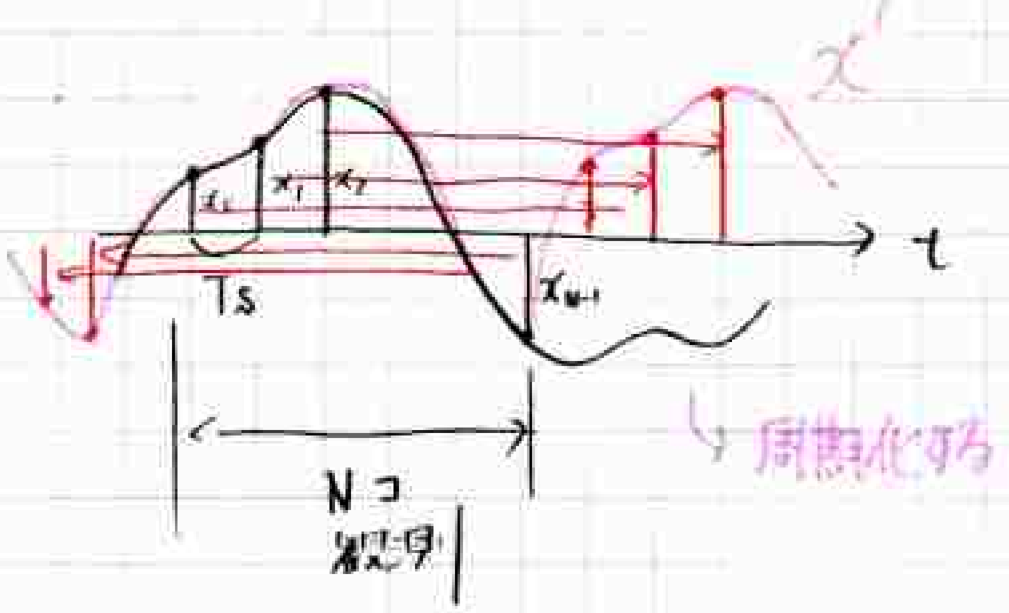




つまり…

$$
\begin{aligned}
y_n &= T[x_n] \\
&= T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \delta_{n-k}\right] \quad \text{線形性} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k T[\delta_{n-k}] \quad \text{シフト不変} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k h_{n-k} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k x_{n-k}
\end{aligned}
$$

たたみこみ
$h * x$
$x * h$

## 7 離散フーリエ変換（DFT）




$$X_k = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} \rightarrow \text{DFT}$$

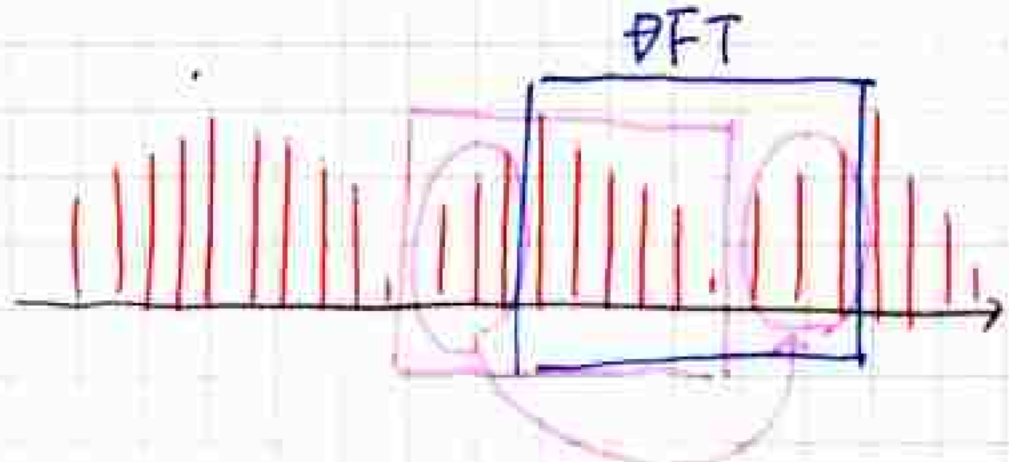
$$x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j\frac{2\pi kn}{N}} \rightarrow \text{IDFT}$$

⇒ フーリエ級数展開に似てる？

### 7.1 $X_k$は何を表しているのか

ムリヤリ周期信号化 ⇒ $x'(t)$

$x'(t)$のフーリエ級数 $C_k$ : $C_k = \frac{1}{T_s} X_k$



## 8. 高速フーリエ変換（FFT）

プリント p9 ～ p10 参照.　　FFT = DFT を速くしたもの！
計算方法は プログラム的(?) → プリント参照.

5/31 続

$F_s = 32\,\mathrm{kHz}$
残響 0.5s → 16000点

時間領域のみだったら… 5億回.
FFT 乗算 逆FFT 200万回
100万 6万 100万

## 9. 離散時間でのフーリエ変換（⟷ 離散フーリエ変換 ×）

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j\omega n}$$

$$x_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n}$$

$\omega$: 規格化角周波数.
$\omega = \pi$ が 扱える最高の周波数
↳ $\frac{F_s}{2}$ に対応している

## 10. Z変換

周波数領域のメリット：たたみ込み → 掛け算

導入）多項式の掛け算

$$\underbrace{(2x^3+3x^2-x+4)}_{\text{それぞれの多項式を}}\underbrace{(3x^3-5x^2+2x+6)}_{\text{周波数だとすると.}}$$

$$= \underbrace{6}x^6 + \underbrace{(-10+9)}x^5 + \underbrace{(4-15-3)}x^4 + \cdots$$

その種の係数の計算は、畳み込みの計算になっている

$$X(z) = \sum x_n z^{-n} \quad \{\text{収束領域}\}$$　　$z$: 複素数.

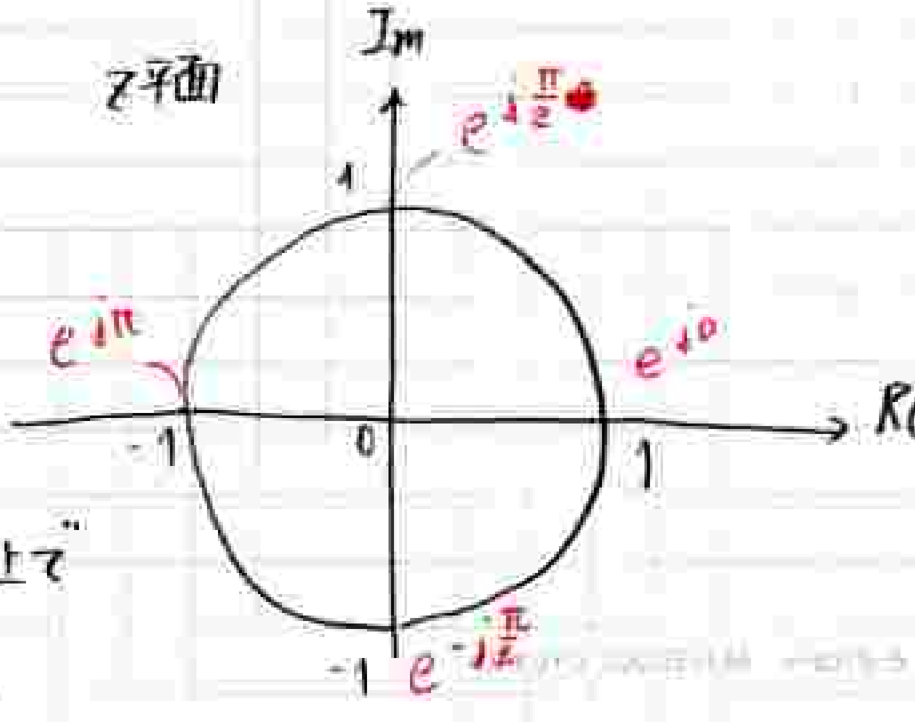
$$x_n = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

$C$：収束領域の周りで反時計まわりに1回転

### 10.3

$z \leftarrow e^{j\omega}$ を代入

$\sum x_n e^{-j\omega n}$ ⇒ 離散時間でのフーリエ変換
（$\omega$：実数）




$e^{j\omega}$ の軌跡

z：複素数のときは z平面全体が領域 ⟷ $z = e^{j\omega}$ にすれば、z平面上で円上だけの領域になる.

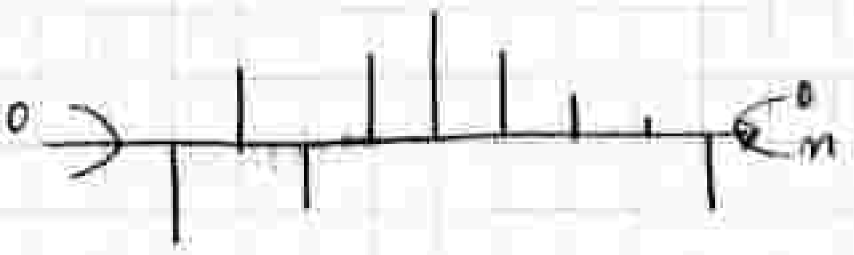
# 10.4 収束領域

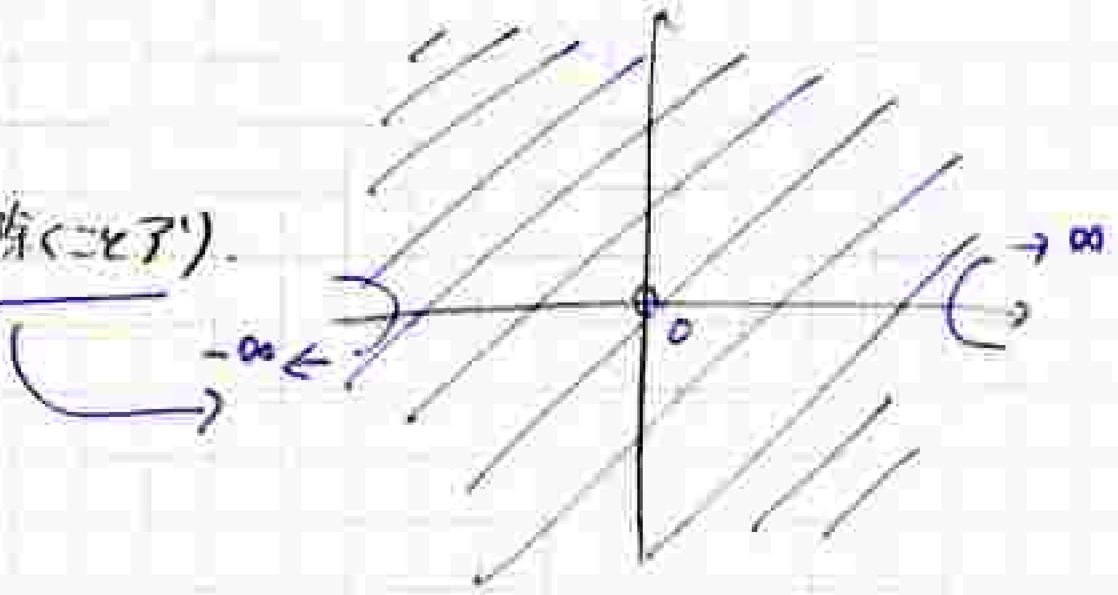
$e^{-7}+5e^{3}+e^{9}$

0を代入すると発散

∞を代入すると発散

## 10.4.1 $x_n$が有限長

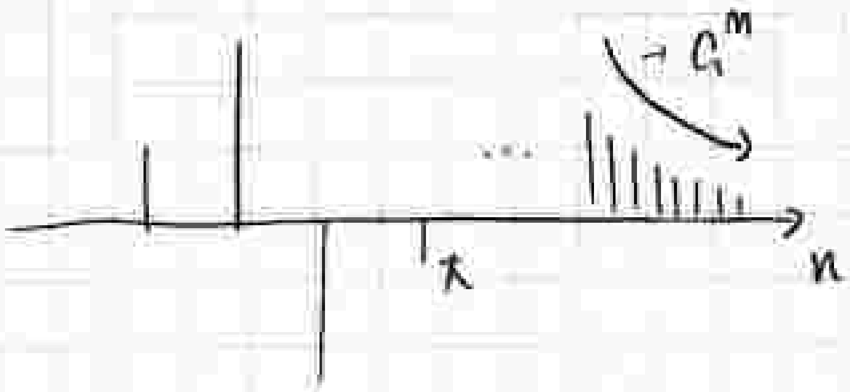



ほとんどの領域．ただし $z=0$, $|z|=\infty$ は除くことアリ．

6/7.

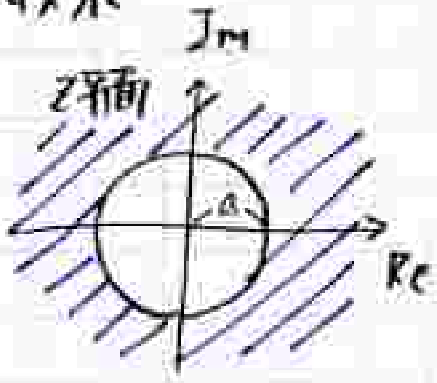
## 10.4.2 未来方向に続く



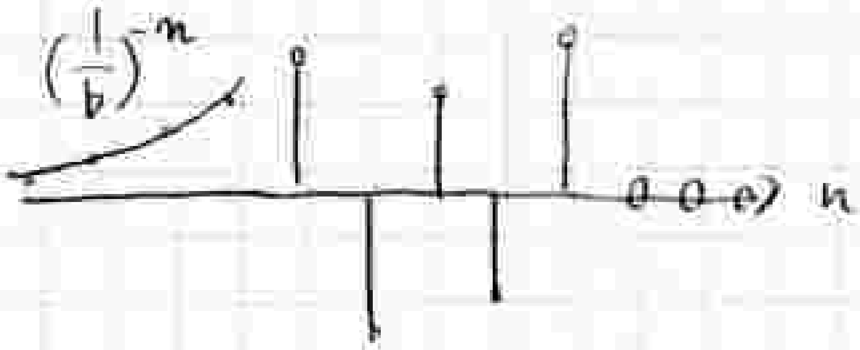

$$\sum_{n=大きい}^{\infty} x_n z^{-n}$$

$$\sim \sum_{n=大}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^{n} \quad \left|\frac{a}{z}\right|<1 \text{で収束}$$

$(|a|<|z|)$




## 10.4.3 過去方向に続く

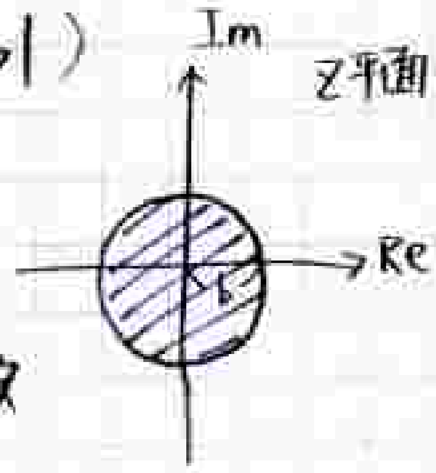



$$\sum_{n=大きい}^{-\infty} x_n z^{-n}$$

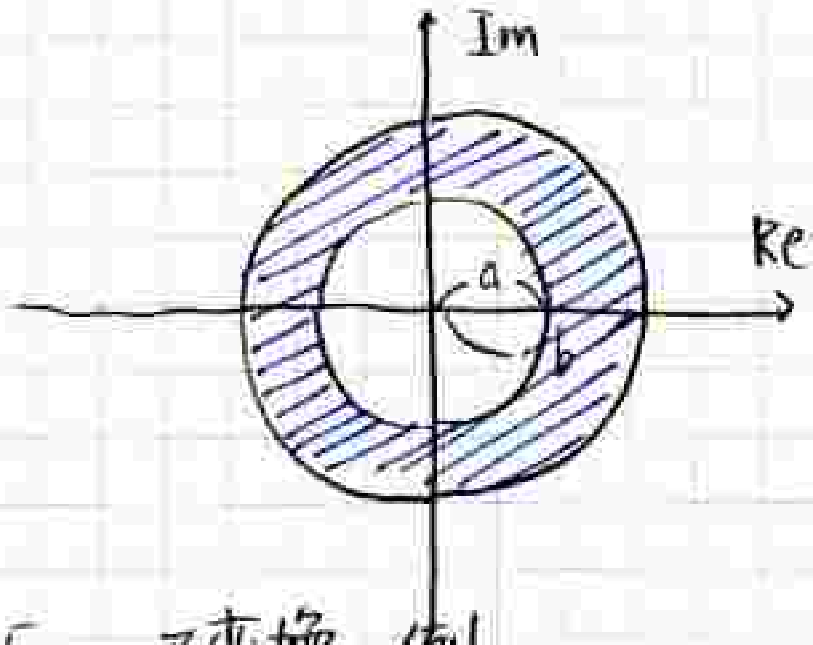
$$= \sum_{n=-大きい}^{-\infty}\left(\frac{1}{b}\right)^{-n} z^{-n} = \sum\left(\frac{z}{b}\right)^{-n}$$

$$= \sum_{n=大きい}^{\infty}\left(\frac{z}{b}\right)^{n} \quad \left|\frac{z}{b}\right|<1 \text{で収束}$$

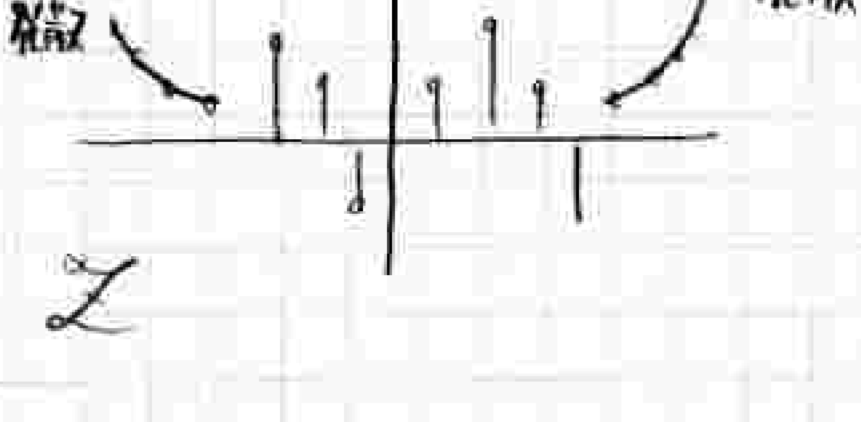
$(|z|<|b|)$




## 10.4.4 一般の場合




※ $|a|>|b|$ のとき領域は存在しない．




$\mathcal{Z}$

# 10.5 Z変換の例

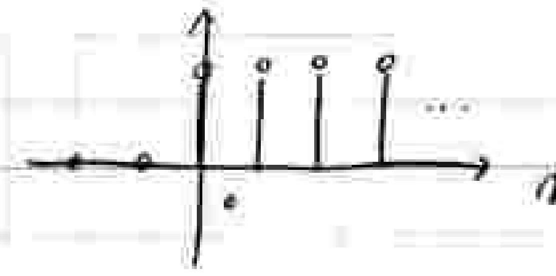
$$\delta_n \xrightarrow{\mathcal{Z}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n z^{-0} = z^{0} = 1$$

，収束領域：全部

$$u_n \xrightarrow{\mathcal{Z}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n z^{-n} = ?$$

$$u_n = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n<0 \end{cases}$$

$= \sum_{n=0}^{\infty} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots$



$= \underbrace{\frac{1}{1-z^{-1}}}$ , 収束領域 : $1<|z|$

初項1 , 公比 $z^{-1}$ の和.

信号処理 7

$a^n u_n \xrightarrow{\mathcal{Z}} 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \cdots = \frac{1}{1-az^{-1}}$ , 収束領域 : $|a|<|z|$

10.6 Z変換の性質

1. $ax_n + by_n \xrightarrow{\mathcal{Z}} aX(z) + bY(z)$ 収束領域に単位円を含むか?
2. $x_n * y_n \xrightarrow{\mathcal{Z}} X(z)Y(z)$ 含む… 未来方向に向かう
3. $x_n y_n \xrightarrow{\mathcal{Z}} \cdots$ 含まない… 過去方向に向かう
5. $x_{n-N} \xrightarrow{\mathcal{Z}} z^{-N}X(z)$

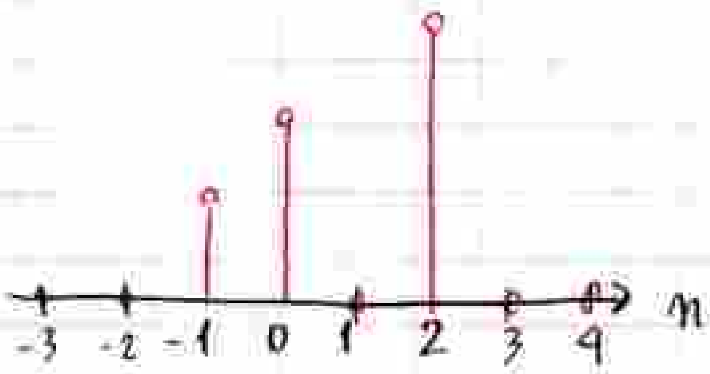
10.7 逆Z変換 (6)はやらない $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n}$

10.7.1 べき級数法

正と負が逆なのは Z変換の定義から

$X(z) = 3z + 5 + 7z^{-2}$

$$x_n = \begin{cases} 3 & (n=-1) \to ? \\ 5 & (n=0) \\ 7 & (n=2) \to ? \end{cases}$$




例)

(1) $X(z) = \frac{1}{\underbrace{1-az^{-1}}}$ , 収 : $|a|<|z|$ $|az^{-1}|<1$

$\Downarrow$

$= 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \cdots$

$\Downarrow \mathcal{Z}$

$$x_n = \begin{cases} 0 & (n<0) \\ a^n & (n \geq 0) \end{cases}$$

(2) $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$ , 収 : $|a|>|z|$

$\Downarrow$

$|az^{-1}|>1$

$\frac{a}{1-r}$ では $1>|r|$.

今. 逆に. $1<|r|$ だから. 1とrの役割を反転させる.

$\underbrace{|az^{-1}|<1}$

$= \frac{a^{-1}z}{az^{-1}-1}$

$= \frac{-a^{-1}z}{1-az^{-1}}$

$= -a^{-1}z - a^{-2}z^{-2} - a^{-3}z^{-3} - \cdots$

$\Downarrow \mathcal{Z}$

$$x_n = \begin{cases} -a^n & (n<0) \\ 0 & (n \geq 0) \end{cases}$$

10.7.2 部分分数法

$$X(z) = \frac{1}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})},$$

収束領域：$|a|<|z|,\ |b|<|z|$

⇓ 部分分数分解する

$$= \frac{A}{1-az^{-1}} + \frac{B}{1-bz^{-1}} \quad \text{とおく.}$$

$$= \frac{(1-bz^{-1})A + (1-az^{-1})B}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})}$$

$(1-bz^{-1})A + (1-az^{-1})B = 1$ となればよい

$$\begin{cases} A+B = 1 \\ Ab+Ba = 0 \end{cases}$$

$B = 1-A$

$Ab + (1-A)a = 0$

$A(b-a) + a = 0$

$$\therefore A = \frac{a}{a-b}$$

$$\therefore B = \frac{b}{b-a}$$

さっきやった

$$\therefore X(z) = \frac{a}{a-b}\cdot\underbrace{\frac{1}{1-az^{-1}}}_{a^n} + \frac{b}{b-a}\cdot\underbrace{\frac{1}{1-bz^{-1}}}_{b^n}$$

$$\therefore x_n = \begin{cases} 0 & (n<0) \\ \dfrac{a}{a-b}a^n + \dfrac{b}{b-a}b^n & (n \geq 0) \end{cases}$$

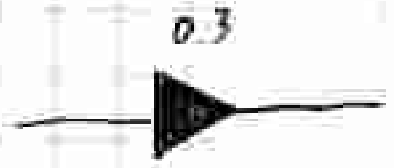
6/21

メリット（安価で正確.
時間変化しない ← 物理現象にとらわれない.

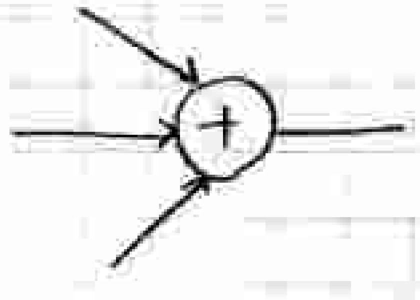
## 11 ディジタルフィルタ

アナログだと高性能なコンデンサなどが必要.


遅延素子.




定数乗算素子




加算素子

これらを有限個組み合わせて作られる線形シフト不変システムをディジタルフィルタと言う

（第3回レポート 2ページ 図）

$p_n = x_n - 2x_{n-1}$

$q_n = 2p_n + p_{n-1}$

$= 2(x_n - 2x_{n-1}) + (x_{n-1} - 2x_{n-2})$

⋮

$$y_n = 0.5y_{n-1} - 0.28y_{n-2} + 0.32y_{n-3} + 0.2304y_{n-4} + 2x_n - x_{n-1} - 3x_{n-2} - 5x_{n-3} - 2x_{n-4}$$

$$\boxed{y_n = \sum_{k=1}^{N} a_k y_{n-k} + \sum_{k=0}^{M} b_k x_{n-k}}$$

線形差分方程式（ディジタルフィルタの基本式）

$\mathcal{Z}$ ⇓ $y_n \to Y(z)$, $x_n \to X(z)$ とする

$$Y(z) = 0.5z^{-1}Y(z) - 0.28z^{-2}Y(z) + 0.32z^{-3}Y(z) + 0.2304z^{-4}Y(z) + 2X(z) - z^{-1}X(z) - 3z^{-2}X(z) - 5z^{-3}X(z) - 2z^{-4}X(z)$$

$$Y(z) = \boxed{H(z)}X(z)$$

↑ これを知りたい.

$$\therefore Y(z) = \boxed{\frac{2 - z^{-1} - 3z^{-2} - 5z^{-3} - 2z^{-4}}{0.5z^{-1} - 0.28z^{-2} + 0.32z^{-3} + 0.2304z^{-4}}}X(z)$$

$= H(z)$.

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

$$H(z) = 2\frac{(1+z^{-1}+z^{-2})(1-2z^{-1})(1+0.5z^{-1})}{(1+0.64z^{-2})(1-0.9z^{-1})(1+0.4z^{-2})}$$

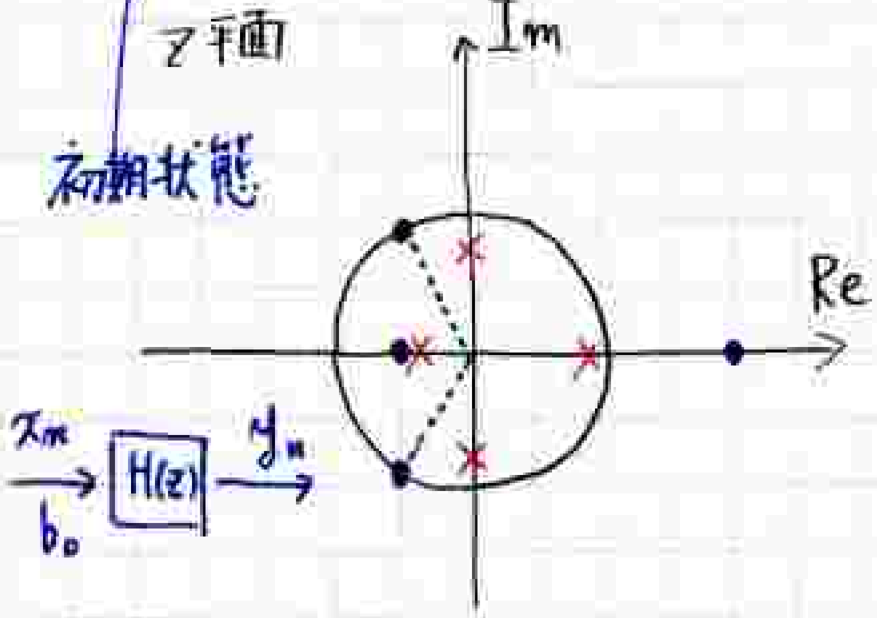
$$= 2\frac{\left(1-\frac{-1+\sqrt{3}j}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{-1-\sqrt{3}j}{2}z^{-1}\right)(1-2z^{-1})(1+0.5z^{-1})}{(1-0.8jz^{-1})(1+0.8jz^{-1})(1-0.9z^{-1})(1+0.4z^{-2})}$$

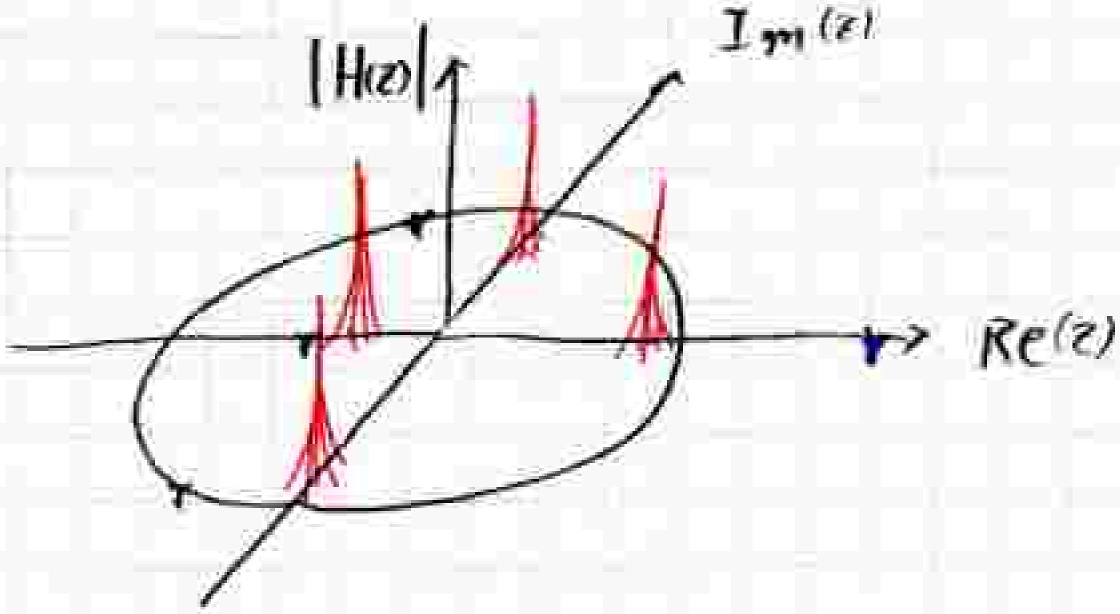
$$\boxed{H(z) = b_0\frac{\prod_{k=0}^{M}(1-d_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-c_k z^{-1})}}$$

ゼロ点 $\frac{-1+\sqrt{3}j}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{3}j}{2}$, 2, -0.5
($z^{-1}=d_k$ となる点)

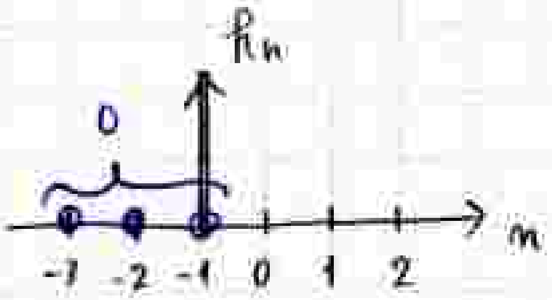
極 : $0.8j$, $-0.8j$, $0.9$, $-0.4$
($z^{-1}=c_k$ となる点)

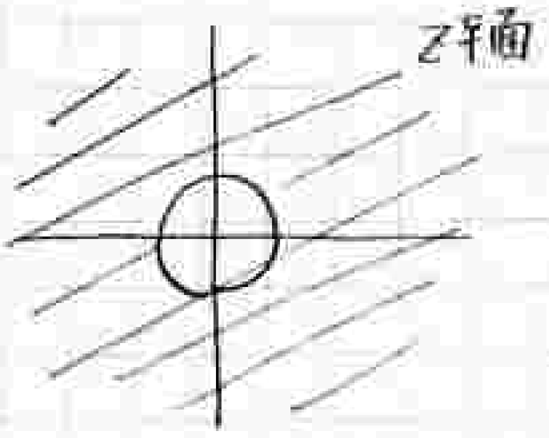
初期状態




[因果性]




未来の入力は過去の出力に影響を与えない

[安定性]

A: 安定
有限な入力 ⇒ 有限な出力
$|x_n| \le M$ $|y_n| < \infty$

$\Longleftrightarrow$ 必要十分

B: $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h_n| < \infty$

(1) A → B  $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$

$\bar{B}$ : $\sum|h_n| = \infty$ …①

$$x_n = \begin{cases} \frac{h_{-n}^*}{|h_{-n}|} & (h_{-n} \neq 0) \\ 0 & (h_{-n} = 0) \end{cases}$$

とおけばこれは有界.

$$y_n = \sum x_{-n}h_n = \sum \frac{h_n^*}{|h_n|}h_n = \sum\frac{|h_n|^2}{|h_n|} = \sum|h_n| = \infty \quad (\because ①より)$$

有界な入力に対して∞になってしまった. つまり $\bar{A}$

安定かつ因果 … すべての極が単位円の内部にある

(2). B → A

収束領域

$$|y_n| = \left|\sum_m h_m x_{n-m}\right| \le \sum |h_m||x_{n-m}| \le \sum |h_m| M = \underbrace{M}_{\text{定数}} \cdot \underbrace{\sum h_m}_{①より<\infty} < \infty$$

つまり A.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_n z^{-n}| < \infty$$

よって単位円が収束領域に含まれること ← B.

6/28

11.5 FIR フィルタ (零点のみを使う) → 極がない → ループするものがない → 差分方程式の $y_{n-k}$ の項がない.

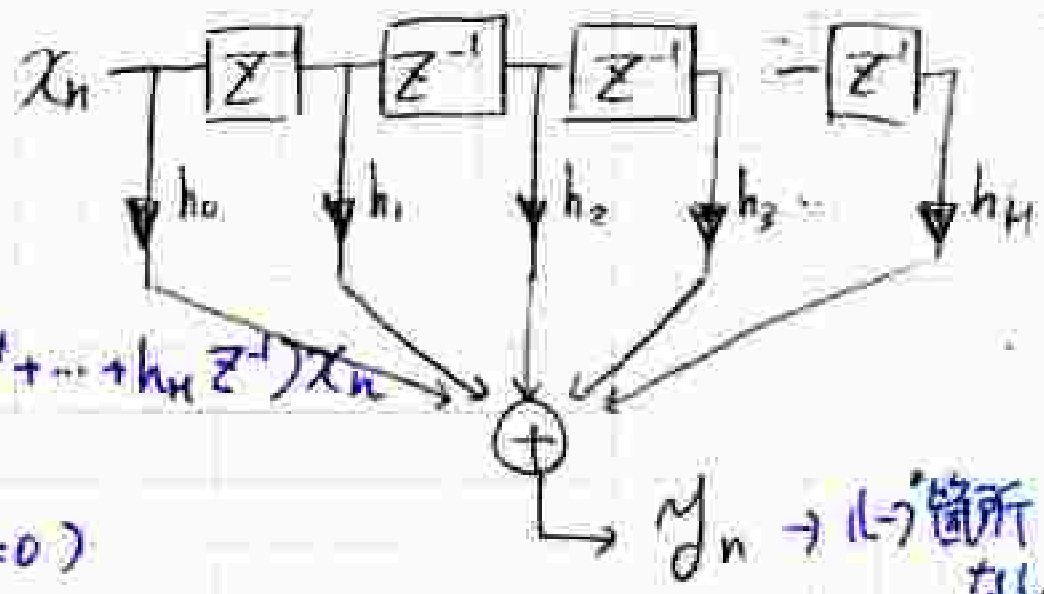
$$y = \sum_{k=0}^{M} b_k x_{n-k} = \sum_{k=0}^{M} h_k x_{n-k}$$

インパルス応答

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} = b_0 \prod_{k=1}^{M} (1 - d_k z^{-1})$$

FIRフィルタの優位性

$\boxed{\text{直線位相フィルタ}}$ 音響で利用される.




$y_n = (h_0 + h_1 z^{-1} + \cdots + h_M z^{-1}) x_n$

$\downarrow z^{-1}$

$x_0 = h_0 \ (n=0)$

$x_n = h_1 \ (n=1)$

⋮

$y_n$ → ループ箇所なし.

$h_1$ がそのままインパルス応答になる.


解析

$M = 2$

$h_0 = 0.5$

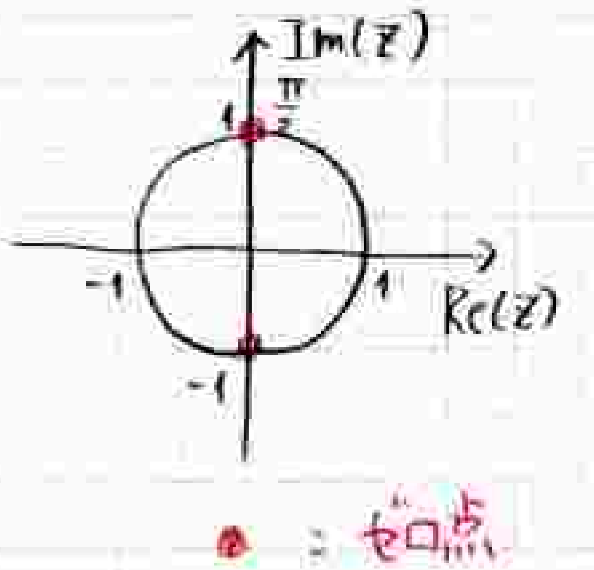
$h_1 = 0$

$h_2 = 0.5$

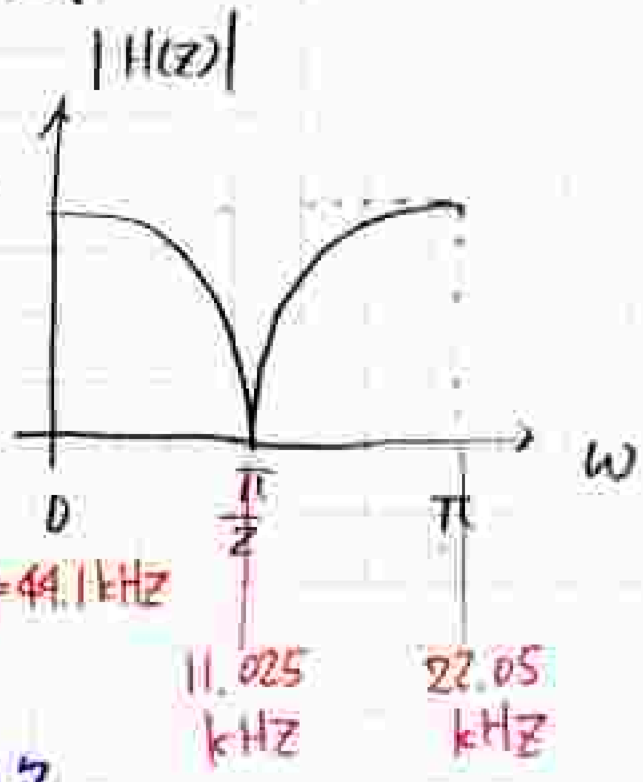

伝達関数

$$H(z) = 0.5 + 0.5 z^{-2} = 0.5(1 - jz^{-1})(1 + jz^{-1})$$

因数分解して零点求めて.




⇒




直線位相フィルタ … ある $h_n$ に対して …, $h_{n-2}, h_{n-1}$ と $h_{n+1}, h_{n+2}$, … が対称になっているフィルタ

↳ 利点 : 信号が遅延してもそれを補完する働きがある

設計

インパルス応答が与えられた
長さは $\boxed{M+1\text{以下}}$ → そのまま フィルタ係数

少しずつ微調整していく。

- 計算機設計
- ウィンドウ法

## 11.6 IIR フィルタ

Infinity

→ ループがある。
(極を使う)

計算の度に 複素数がでてメンドウ

FIRフィルタと一緒(?)

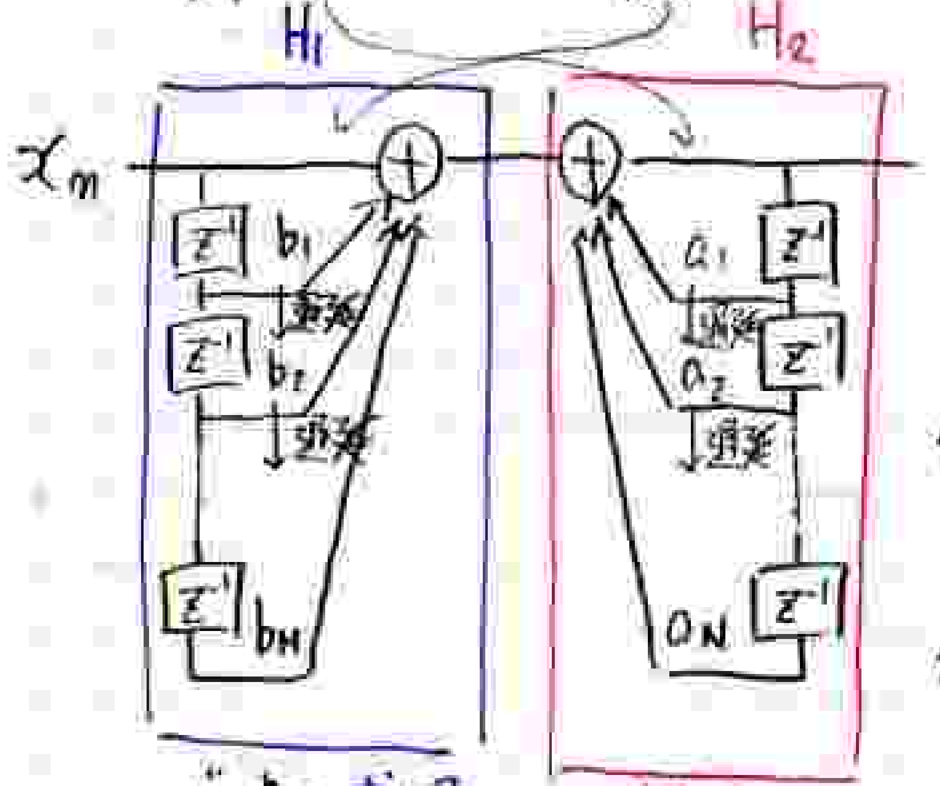
$$H(z)=\frac{\sum_{k=1}^{M} b_k z^{-k}}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = b_0 \frac{\prod(1-d_k z^{-1})}{\prod(1-c_k z^{-1})} = b_0 \frac{\prod\boxed{(1+r_k z^{-1}+s_k z^{-1})}}{\prod\boxed{(1-p_k z^{-1}-q_k z^{-1})}}$$

① ②

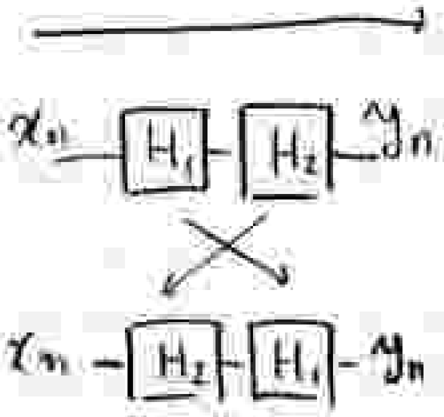
戻ってくる(ループ)

①

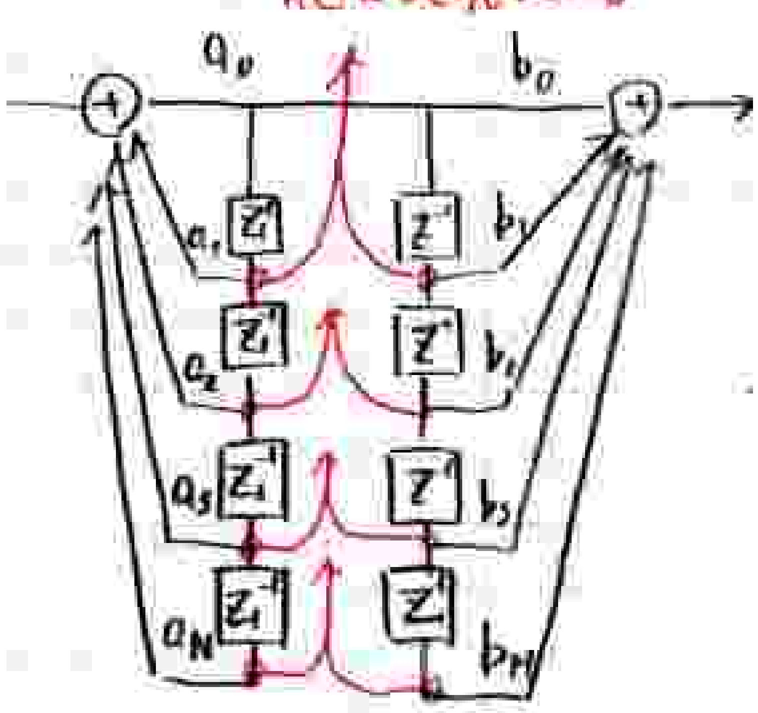
$$y_n=\sum_{k=1}^{N} a_k y_{n-k}+\sum_{k=0}^{M} b_k x_{n-k} \quad (83)$$




ゼロ点を求める　　極を求める

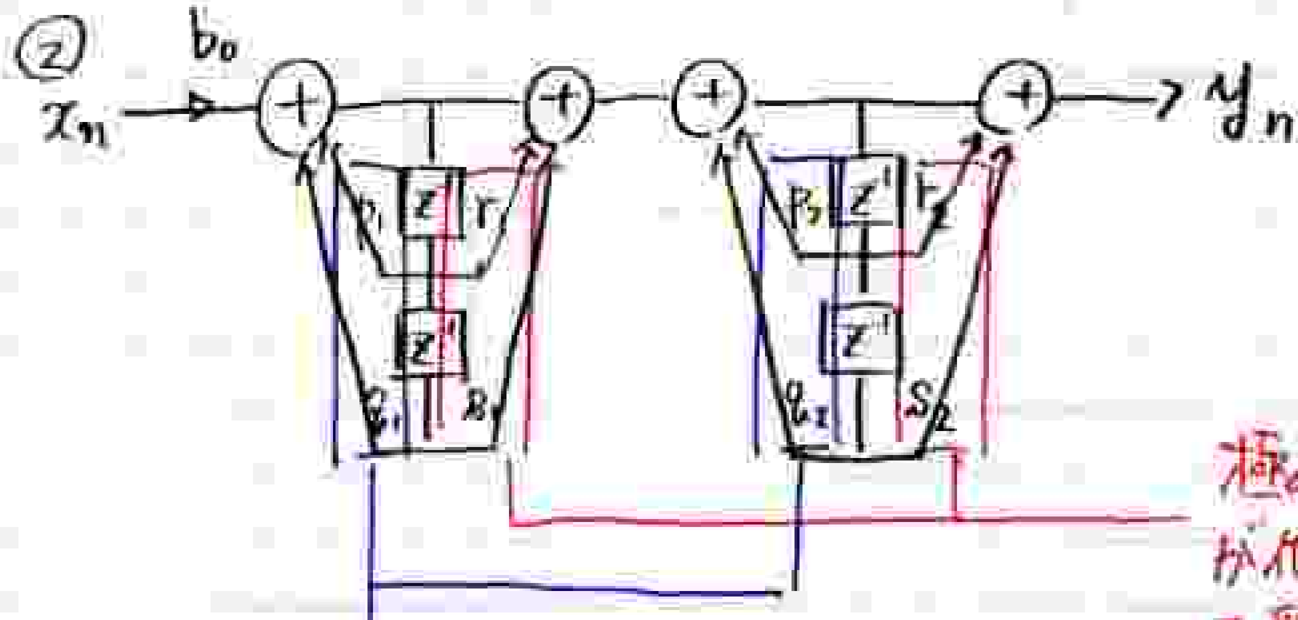



この点はそれぞれ同じ値を記憶している




↳ 遅延器は一列でok (図26(b))

②




極の計算が他の影響を受けない。

ゼロ点の計算が他の影響を受けない

↓ DSPで使われる
(後期の実験では IIR フィルタを設計する)

FIRフィルタ
→ 音響用フィルタ

IIR フィルタ
→ 高周波用フィルタ

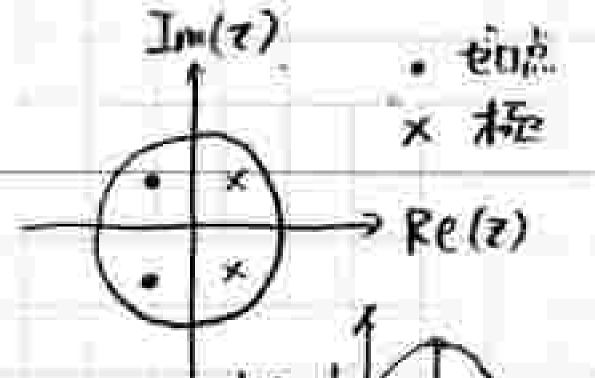
(但し最近は演算能力の向上によりFIRを高周波用に使うことも。)

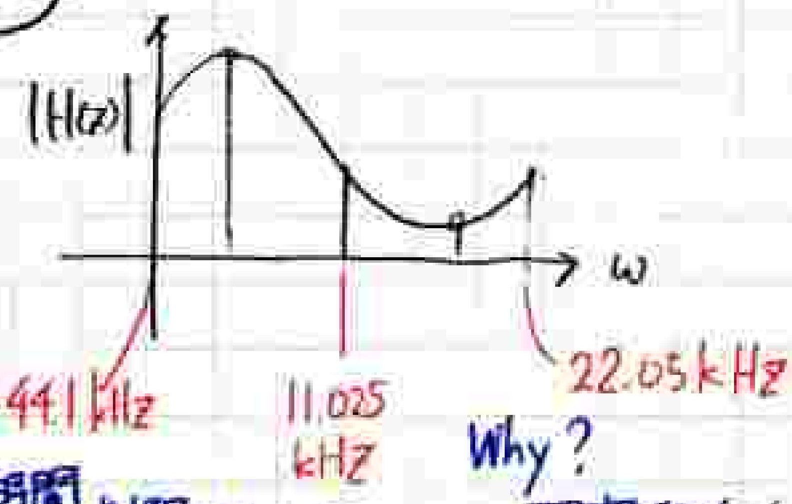
## 解析

$H = N = 2$

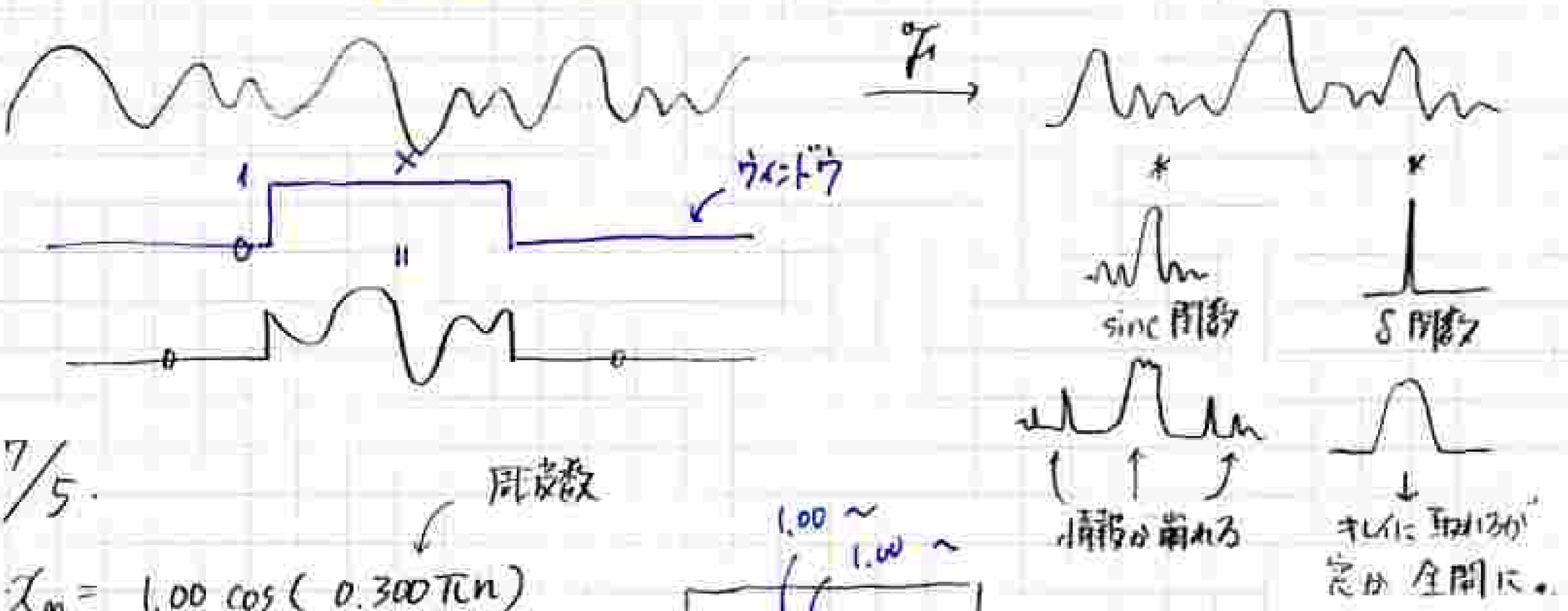
極 $0.6 \pm 0.6j$

ゼロ点 $-0.6 \pm 0.6j$



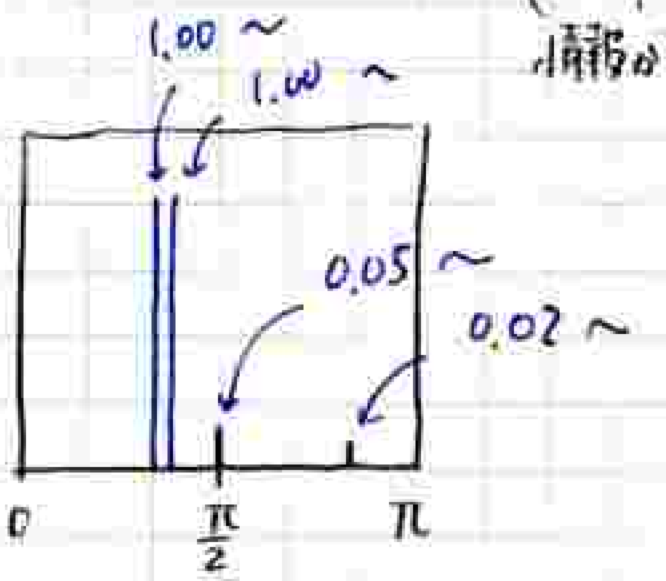

12 ウインドウ → When? 信号を時間帯域制限していとき　Why? 理想的なインパルスは作ることができないから.

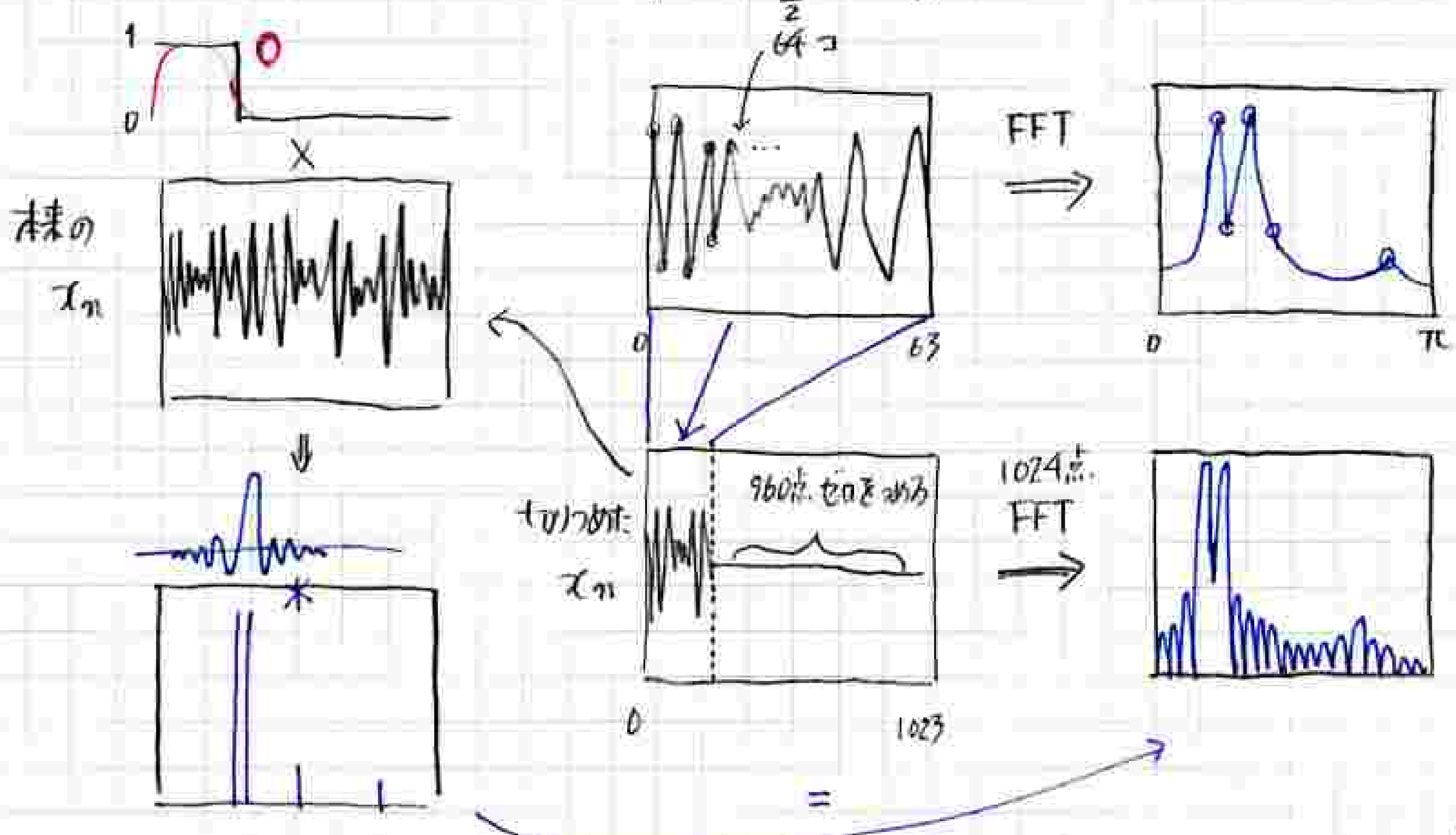



7/5

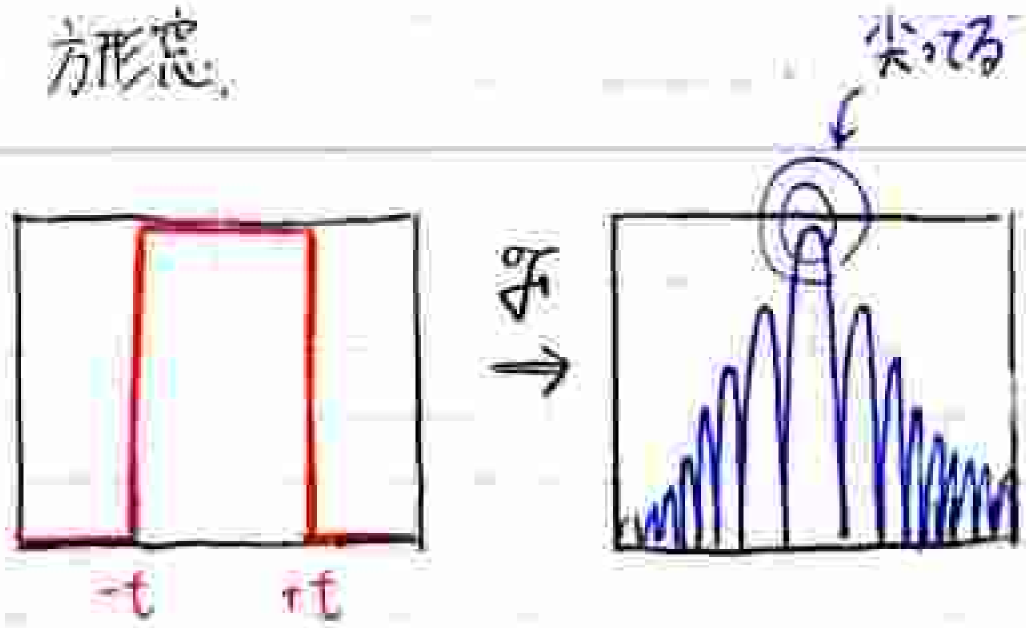
周波数

$$
\begin{aligned}
x_n = &\ 1.00 \cos(0.300\pi n) \\
&+ 1.00 \cos(0.326\pi n) \\
&+ 0.05 \cos(0.390\pi n) \\
&+ 0.02 \cos(0.805\pi n)
\end{aligned}
$$

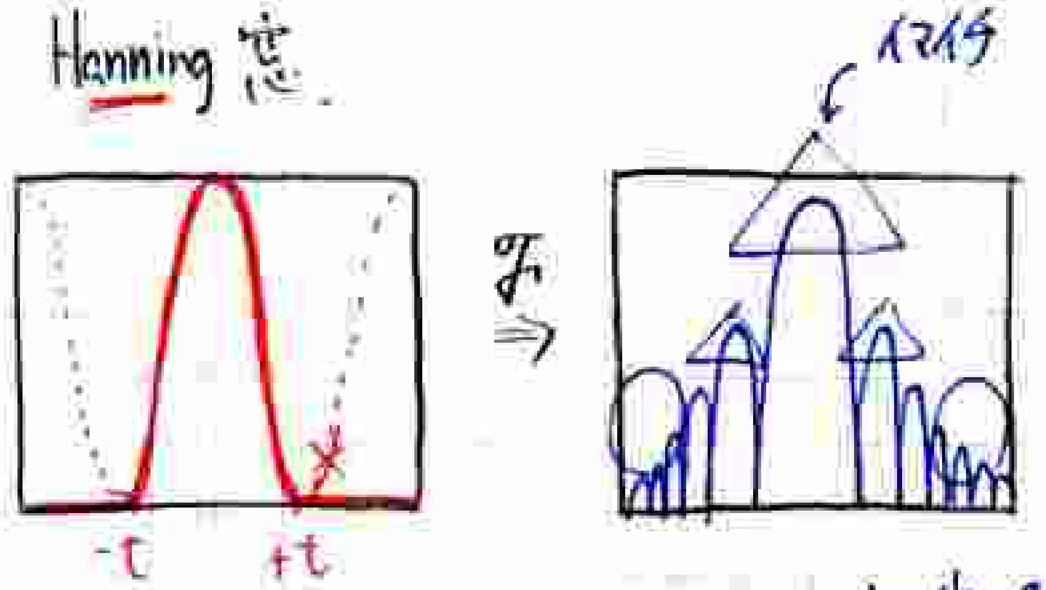


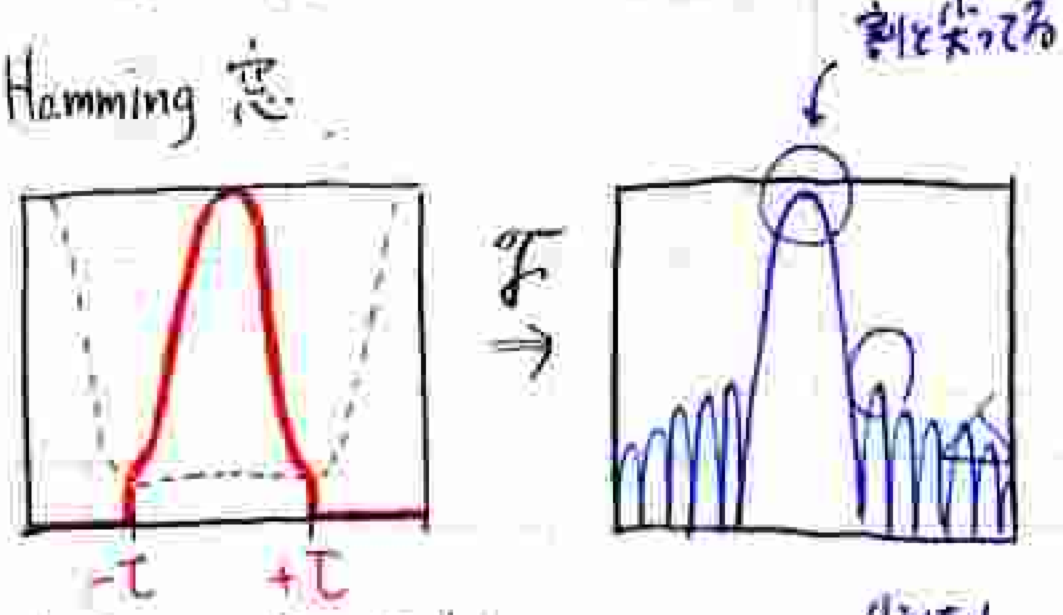
Ⓐ 方形窓.



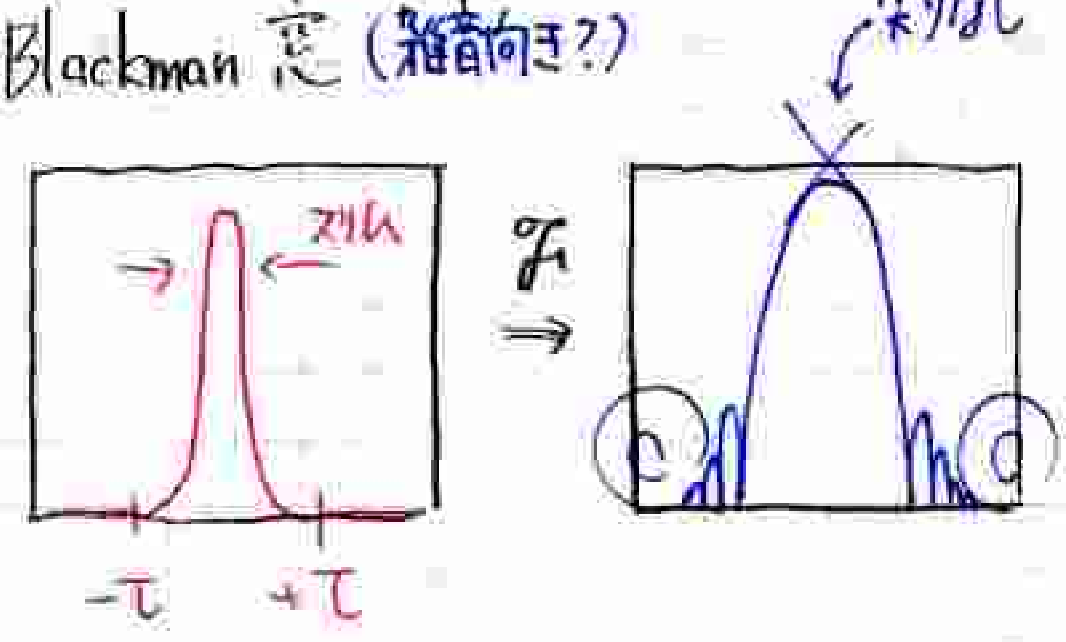

Ⓑ Hanning 窓.



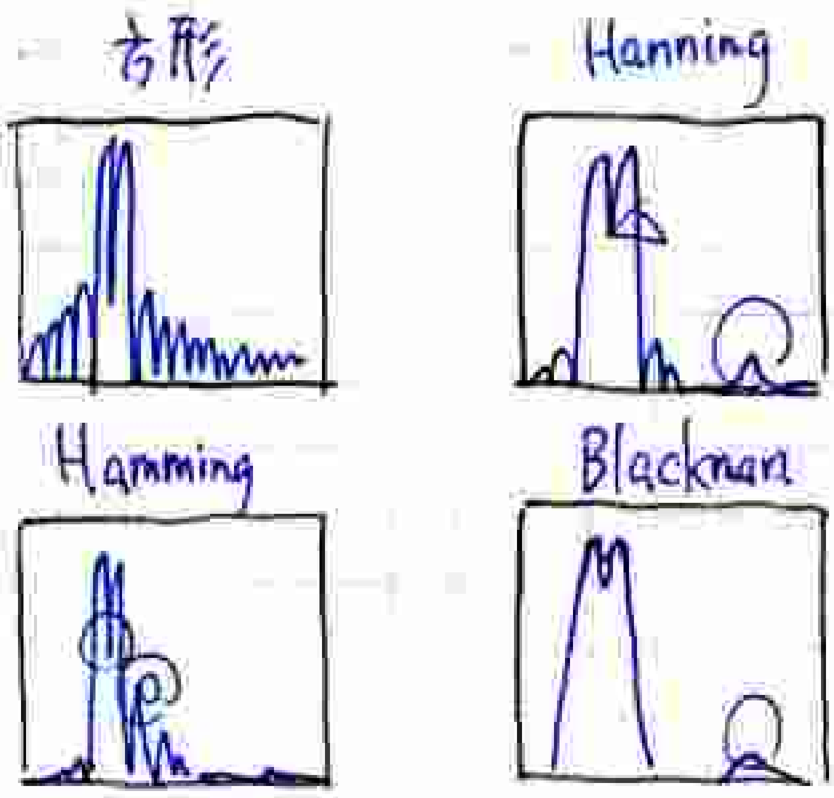

Ⓒ Hamming 窓.



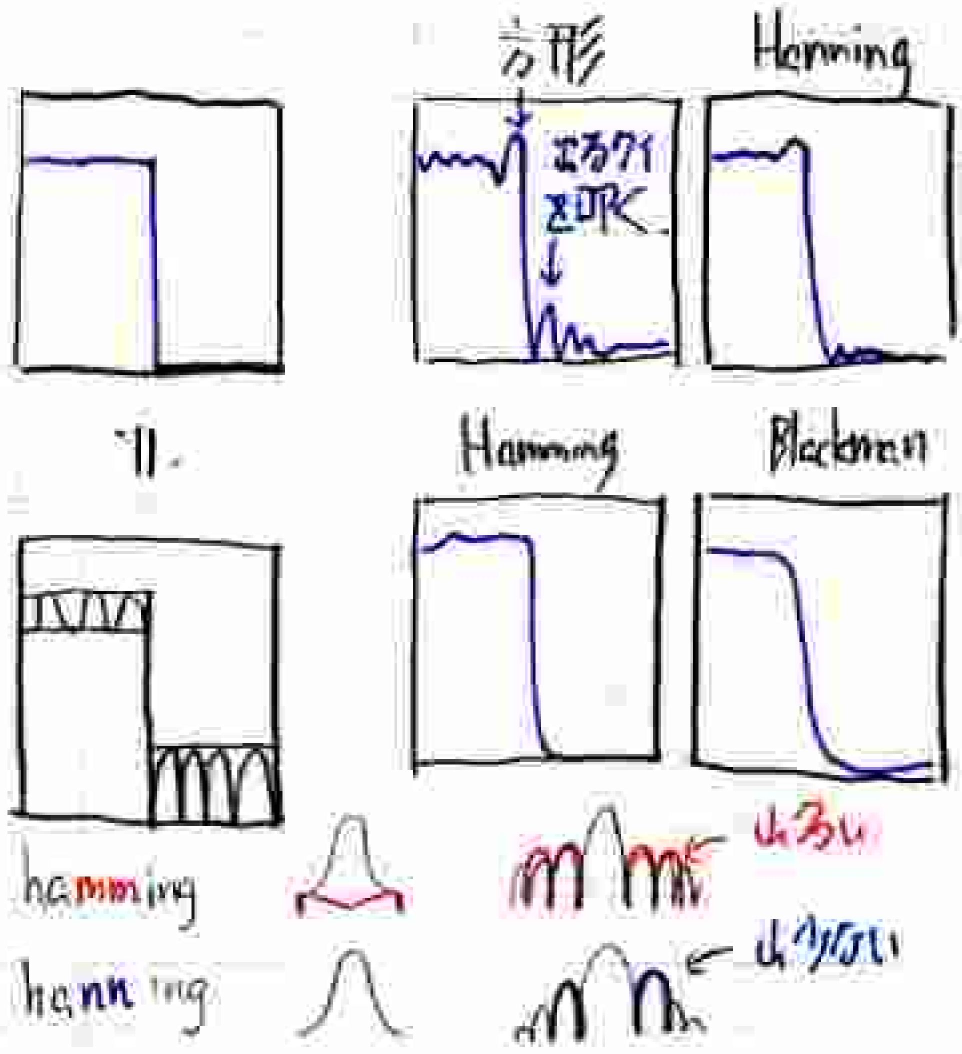

Ⓓ Blackman 窓 (雑音向き?)




12.3 FFTへの応用




12.4 FIRへの応用




## 12 不規則信号

1. 確率過程 (Stochastic Process)

音声波形に確率法則を当てはめる.

確率論　確率変数 $X$　密度関数 $p(x)$

7/12

確率過程論

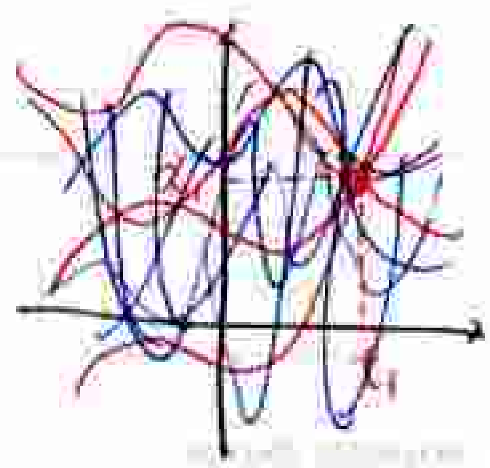
有限次元の密度関数

$$p(x_1, x_2 \cdots x_n ; t_1, t_2 \cdots t_n)$$

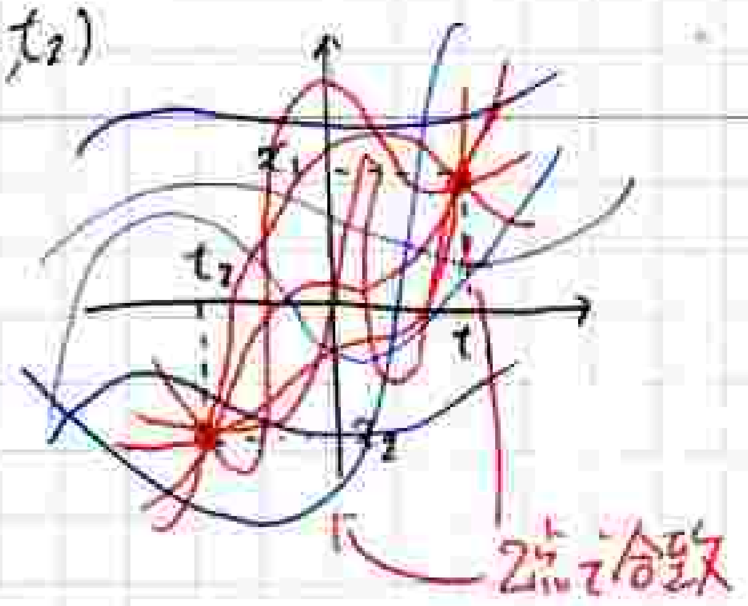
⇑

ランダムではない!

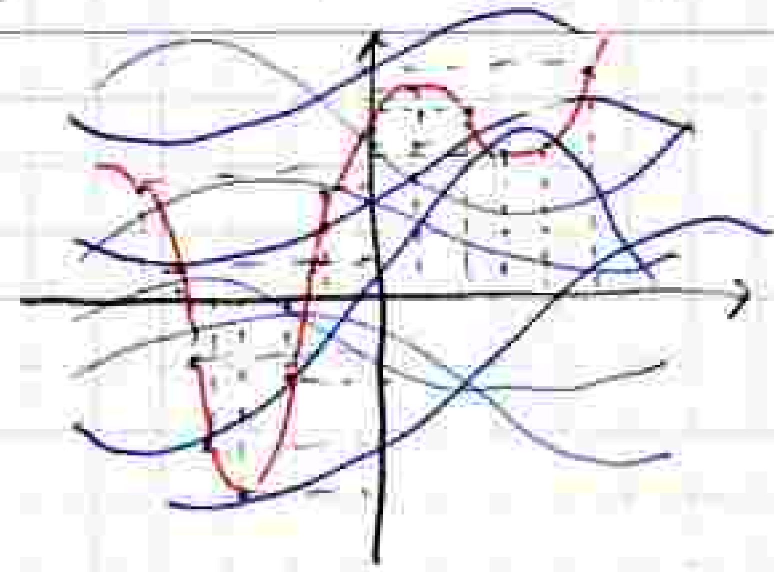
→ $p(x_1, t_1)$ のゲートを通る信号



$p(x_1, x_2, t_1, t_2)$




$p(x_1, x_2 \cdots x_n; t_1, t_2 \cdots t_n)$



アンサンブルと標本 (→ p20 左側参照)

## 1.5. 2つの平均

### 1.5.1 集合平均 (アンサンブル平均)

$$\underbrace{E}_{\text{Expectation}}\left[F[x^{(m)}(t)]\right] \overset{\text{def}}{=} \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} F[x^{(m)}(t)]$$

tを固定して $x^{(m)}(t)$ の m を変えて平均すること.

### 1.5.2 時間平均

$$\overline{F[x^{(m)}(t)]} \overset{\text{def}}{=} \lim_{T\to\infty} \int_0^T F[x^{(m)}(t)]\,dt$$

→ F[] という観測に対して、その観測開始時間を変えながら平均していく.

## 1.6. 定常性とエルゴード性

### 1.6.1 定常性

$$p(x_1, x_2 \cdots x_n; t_1, t_2 \cdots t_n) = p(x_1, x_2 \cdots x_n; t_1+\tau, t_2+\tau \cdots t_n+\tau)$$

が任意の τ について成立するとき、定常という.

### 1.6.2 エルゴード性

任意の F[] に関して集合平均と時間平均が確率1で等しいとき、
すなわち

$$E\left[F[x^{(m)}(t)]\right] = \overline{F[x^{(m)}(t)]}$$

が成立する m が選ばれる確率が1であるとき エルゴード性を持つという.

# ② 平均と相関関数

## 2.1 平均値

$x(t)$ の時間 $t$ での平均値

$$\mu_x(t) \overset{def}{=} E[x(t)]$$ ← ランダムな値.

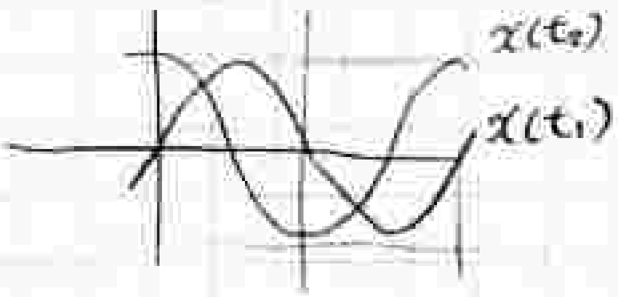
$$= \lim_{M\to\infty}\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} x^{(m)}(t)$$ （アンサンブル平均）

$$= \int x\,p(x;t)\,dx$$ （密度関数） ← ランダム ではない 存在する値.（一意に定まる）

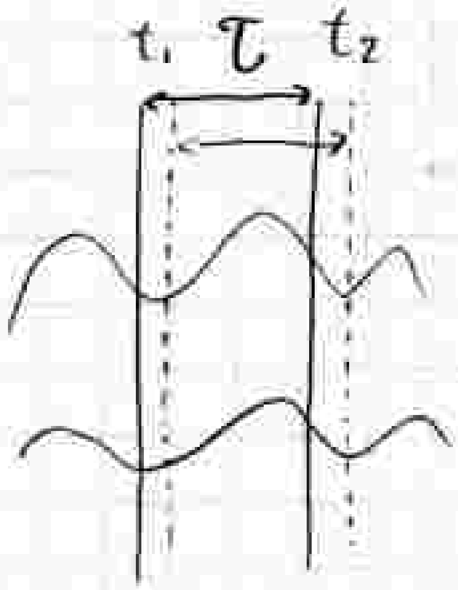
↓ 定常化（$\mu_x(t)$ は $t$ に依らない）
エルゴード性（時間平均によって表すことができる）

$$\mu_x = \overline{x(t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt$$ ····→ 平均はあまり情報を含まないのであまり興味がない.

## 2.2 自己相関関数




$x(t_1)$ と $x(t_2)$ の自己相関関数




$$\phi_{xx}(t_1,t_2) \overset{def.}{=} E[x(t_1), x(t_2)]$$

$$= \lim_{M\to\infty}\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} x^{(m)}(t_1)\,x^{(m)}(t_2)$$

密度関数 → $$= \iint x_1x_2\,p(x_1,x_2;t_1,t_2)\,dx_1dx_2$$

↓ 定常性
エルゴード性.

$$\phi_{xx}(\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)\,dt$$

実際の観測では有限時間長の $x(t)$ しか得られないので十分に長い観測時間 $T$ のデータから自己相関関数を計算するには、以下の式を使う.

$$\text{推定}\ \phi_{xx}(\tau) = \frac{1}{T-|\tau|}\int_0^{T-|\tau|} x(t)x(t+|\tau|)\,dt \quad (t \ll |\tau|)$$

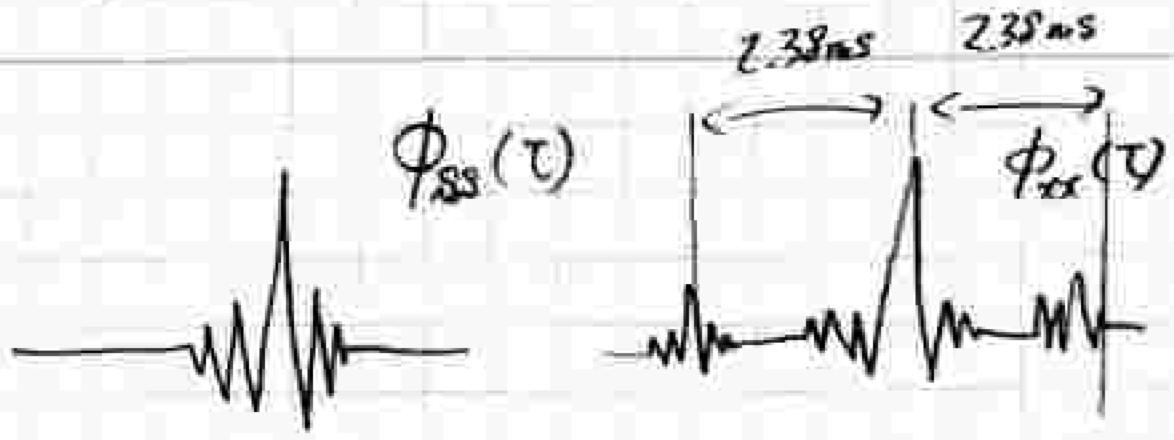
$$\text{推定}\ \phi_{xx}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^{T-|\tau|} x(t)x(t+|\tau|)\,dt \quad (t \approx |\tau|)$$

自己相関関数の応用（→ p22 右側参照）

マイクロホンに入ってきた信号：

$x(t) = s(t) + \alpha s(t-\tau_0)$

自己相関関数を求める




$$
\begin{aligned}
\phi_{xx}(\tau) &= E[x(t)x(t+\tau)] \\
&= E[(s(t)+\alpha s(t-\tau_0))(s(t+\tau)+\alpha s(t+\tau-\tau_0))] \\
&= E[s(t)s(t+\tau)] + \alpha E[s(t)s(t+\tau-\tau_0)] \\
&\quad + \alpha E[s(t-\tau_0)s(t+\tau)] \\
&\quad + \alpha^2 E[s(t-\tau_0)s(t+\tau-\tau_0)] \\
&= \phi_{ss}(\tau) + \alpha\phi_{ss}(\tau-\tau_0) + \alpha\phi_{ss}(\tau+\tau_0) + \alpha^2\phi_{ss}(\tau) \\
&= (1+\alpha^2)\phi_{ss}(\tau) + \alpha\phi_{ss}(\tau-\tau_0) + \alpha\phi_{ss}(\tau+\tau_0)
\end{aligned}
$$

7/19

2.3. 相互相関関数

$p(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n)$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$p(x, y, t_1, t_2)$

相互相関関数 2

$$\phi_{xy}(t_1, t_2) = E[x(t_1), y(t_2)]$$

$$= \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} x^{(m)}(t_1)\, y^{(m)}(t_2)$$

$$= \iint xy\, p(x, y; t_1, t_2)\, dx\, dy$$

存在する

↓ 定常

$\phi_{xy}(\tau)$

↓ エルゴード性

$$\phi_{xy}(\tau) = \overline{x(t)\, y(t+\tau)}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\, y(t+\tau)\, dt$$

3. 不規則信号のパワースペクトル

$$\left| X^{(m)}(\omega) \right|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x^{(m)}(t) e^{-j\omega t} dt \right|^2$$

無限大を避けて

$$\Phi^{(m)}_{xx}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left| \int_0^T x^{(m)}(t) e^{-j\omega t} dt \right|^2$$

標本信号のパワースペクトル密度 → 図40.（p24）

$$\Phi_{xx}(\omega) \overset{\text{def}}{=} E\left[ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left| \int_0^T x^{(m)}(t) e^{-j\omega t} dt \right|^2 \right]$$

不規則信号のパワースペクトル密度 (1)

## 3.2. ウィナー・ヒンチンの定理

$$\Phi_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

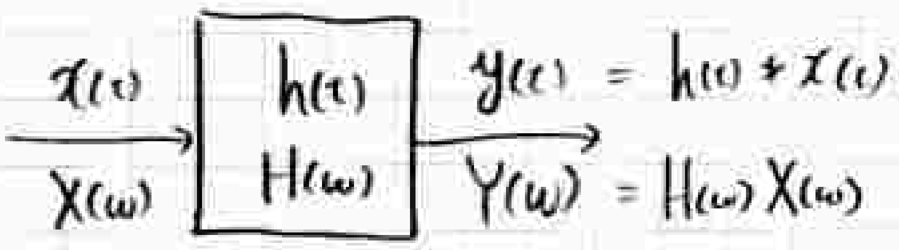
## 3.3. クロススペクトル

クロススペクトル

$$\boxed{\Phi_{xy}(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$\phi_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xy}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

## 4 線形システムの入出力関係

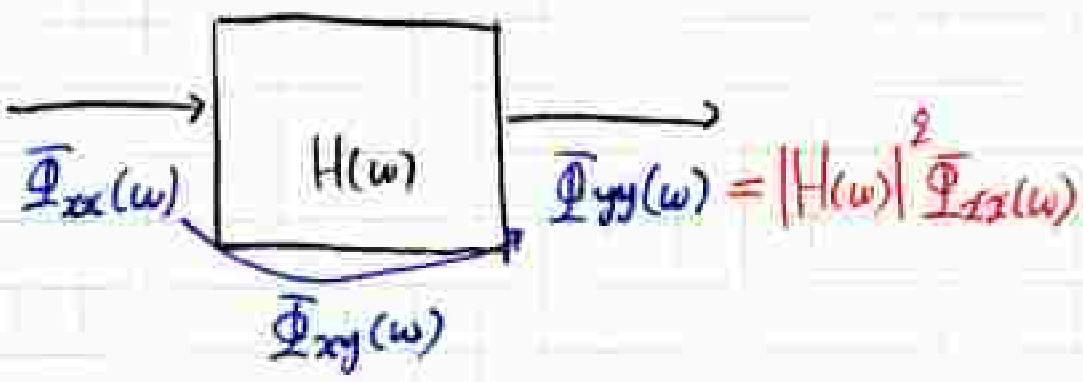



$$h(t) * \phi_{xx}(t) = \phi_{xy}(t)$$

$$H(\omega)\,\Phi_{xx}(\omega) = \Phi_{xy}(\omega)$$

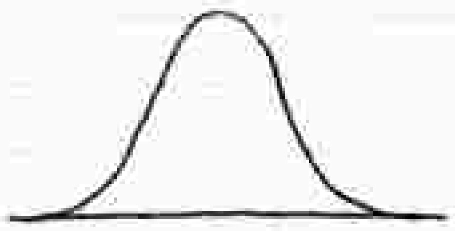
$$h(-t) * \phi_{xy}(t) = \phi_{yy}(t)$$

$$\overline{H(\omega)}\,\Phi_{xy}(\omega) = \Phi_{yy}(\omega)$$




$$\boxed{\begin{aligned}\Phi_{xy}(\omega) &= H(\omega)\,\Phi_{xx}(\omega) \\ \Phi_{yy}(\omega) &= |H(\omega)|^2\,\Phi_{xx}(\omega)\end{aligned}}$$

## 5 重要な不規則信号



中心極限定理

平均0, 分散1

同一分布 独立

$$Y_N = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_N}{\sqrt{N}}$$

↳ ガウス ( $N \to \infty$ )

任意のNと$C_n$に対して

$$Y = \sum_{n=1}^{N} C_n x(t_n)$$

Yが常にガウス分布になるとき、Yをガウス性不規則信号という。

ガウス分布(正規分布)

### 5.2 白色雑音

$$\Phi_{xx}(\omega) = A^2$$


$$\phi_{xx}(\omega) = A^2\delta(\tau)$$

桃色雑音

# 6 スペクトル推定法

6.1 ピリオドグラム法 → (32)式

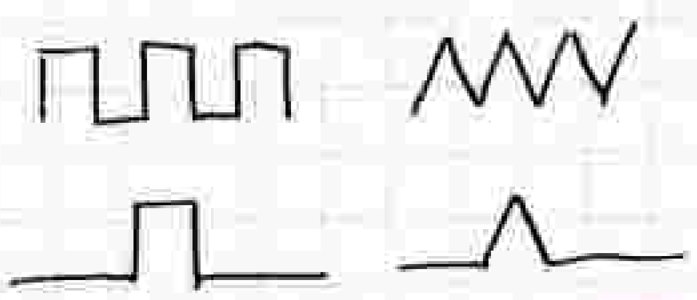
短所 ： 人工的に信号を切っている

6.2 Blackman-Tukey法 → (42)式

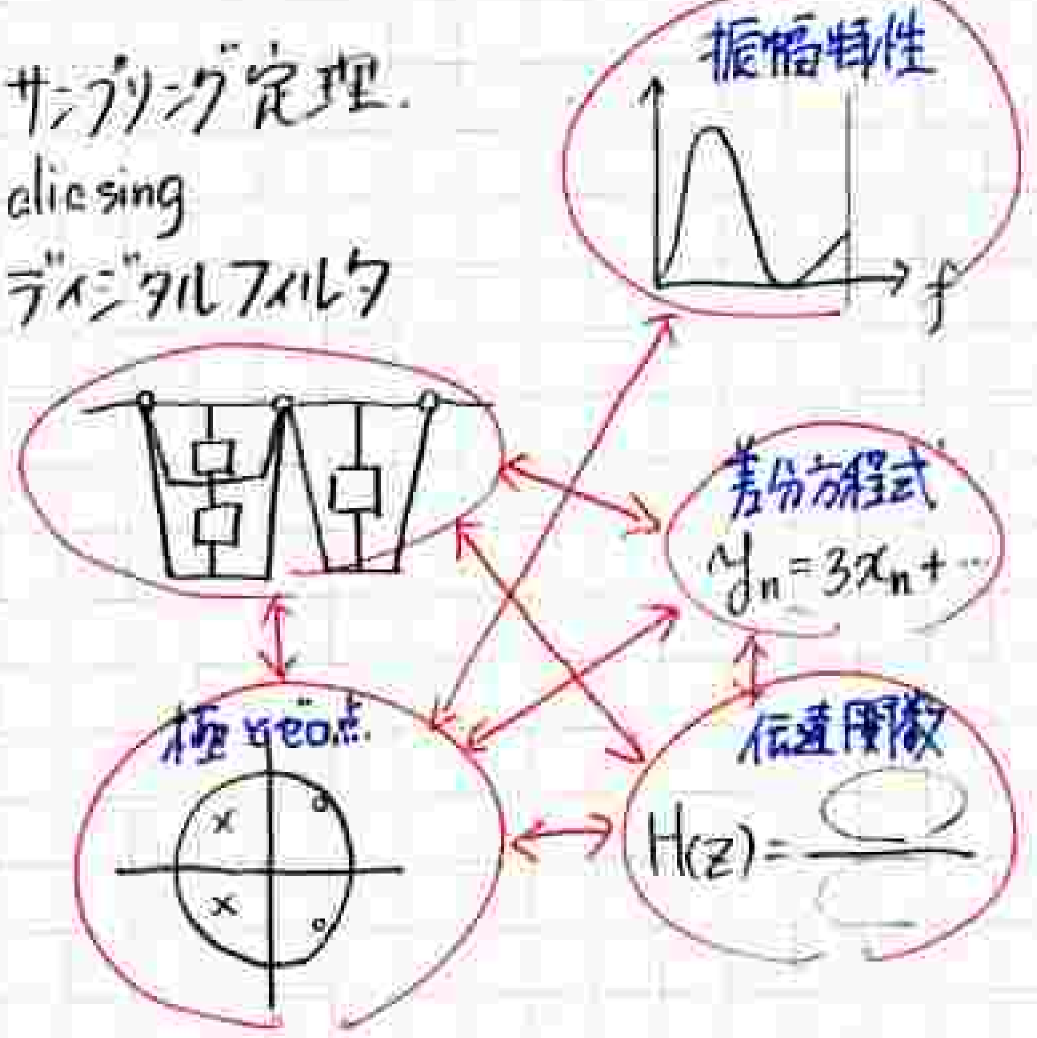
短所 ： 計算量膨大

試験対策 (8/9 火 ⑦ 西5-209)

・フ級
・フ変



○ サンプリング定理
○ aliasing
・ディジタルフィルタ




互いに関連している。1つ与えられれば他もわかる。

- ○ ウィンドウ
- ○ 定常
- ○ エルゴード性
- ○ $\phi_{xx}(\tau)$, $\phi_{xy}(\tau)$
- ○ $\Phi_{xx}(\omega)$, $\Phi_{xy}(\omega)$

- ○ ガウス性不規則信号
- ○ 白色雑音
- ○ ピリオドグラム法
- ○ Blackman-Tukey法
- ○ レポートと同じ問題

～不規則信号の考え方の流れ～

定常性・エルゴード性

↓ 求められる

自己相関関数

⇕

パワースペクトル ← ある周波数にどれくらいパワーがあるか。 ⇑ 測りやすい

ウィナー・ヒンチンの定理 ：
パワースペクトル = 自己相関関数のフーリエ変換

求められる

ガウス性不規則信号

∴ すべての信号は ガウス性不規則信号に行きつく！
パワースペクトルを調べることで、すべてわかる！

ex.) 空間Aと空間Bで採取したパワースペクトルが等しいとき、信号は等しいといえる。

※ パワースペクトルは響き方に依らない
空間に一意に決まる //