

4/8

## 宇宙・地球科学(新田)

基礎科学 + 技術 = 転用

(量子力学)

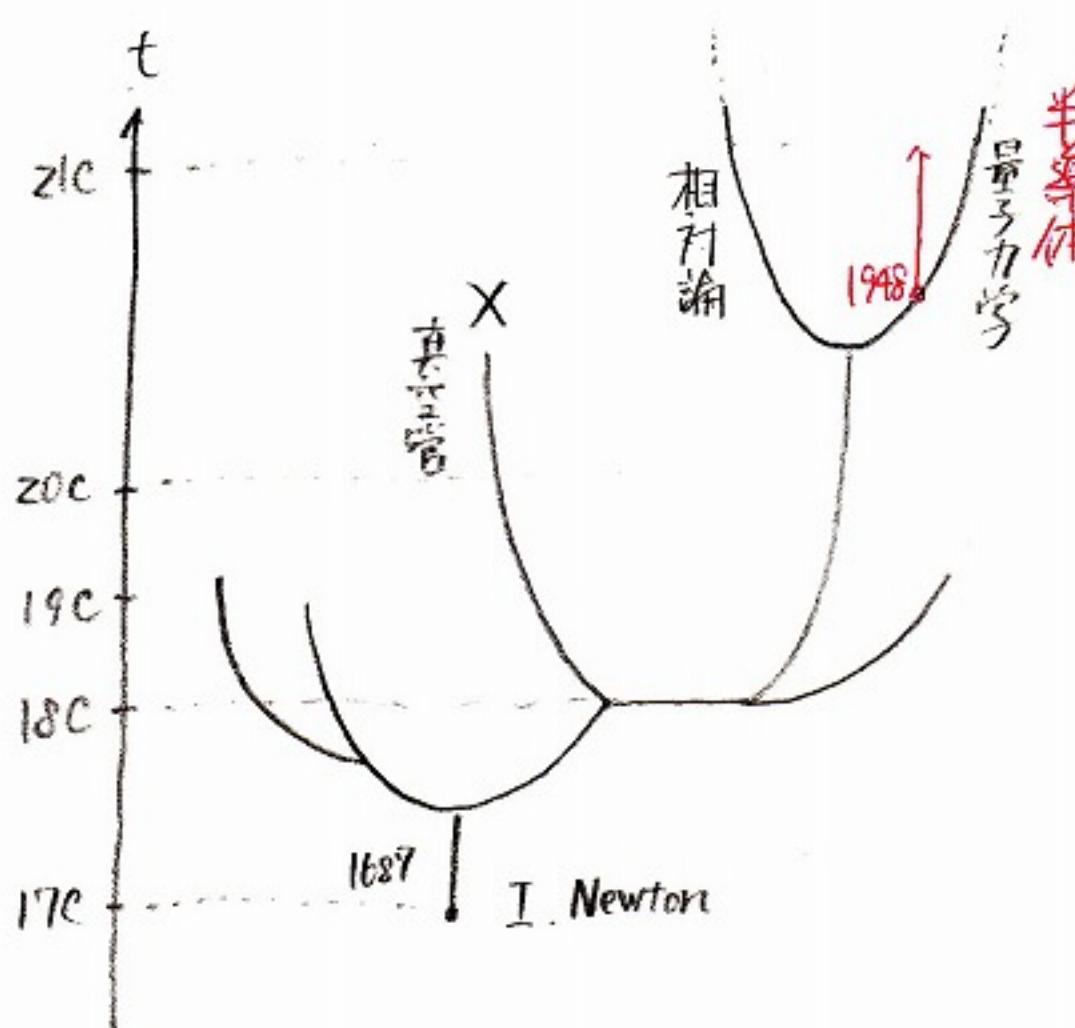
(半導体の発明)

### プロセス主義

「真空管からトランジスタは生まれた」  
江崎玲於奈

真空管

両者は同じ機能を持っているが、作動原理  
は全く異なる。



大学と専門学校の違い。

専門学校：流行する技術で短期間で。  
⇒ 技術的流行が“終われば”流れで

大学：学問的基礎で長期間で。  
⇒ すぐには役立たない but 不変の価値を持つ

1940年代、量子力学(基礎学問)を修得した  
技術者は、真空管と同じ機能を全く別の  
方法で作り出すと発見できた。

### 命題

$-1 \times (-1) = 1$  を証明せよ。

証明のために必要な事項

- $-1$  の定義
- 四則演算の計算規約
- 四則演算の単位元の理解

これらはすべて小学校高学年の履修範囲。

何が議論の出発点で、何が結果であるか  
まるで混同している。学問は身につかない  
論理過程の プロセス が大切。

自分の知力で“創造した世界に遊ぶ”。

・ 箱庭遊びと RPG の違い。  
→ どちらも仮想宇宙の中で物語が進行

RPGはケーブルエイターが「神」  
(箱庭遊びは)自分が「神」  
↓

つまり学問には基礎学力(数Ⅲ・B.C.)が必要。  
しかし学ぶ事は万人向け。

「Xの学問」と「Yの学問」

水とき片栗粉のきよ動

天文学 Astronomy 「Yの学問」  
宇宙物理学 Astrophysics 「Xの学問」

Y: 帰納重視 (多くの学問)  
技術  $\xrightarrow{\text{Y}}$  幹 (生地化)  
X: 演繹重視 (数・物)

学問において「Xの学問」は少數派。  
→何故嫌われる?

公式主義、暗記主義 (Yの学問)  
で「Xの学問」を教えようとしている。

↓  
プロセス主義

飛び級 → 数・物で試行

「Xの学問」ではごく少數の基礎知識  
(公理・法則)で事象を理解する。

特撮ナキシングで見る「Xの学問」

特撮現場のミニコア  
映画世界の巨大怪獣

→ ショミレーション 技術

紅茶のリーフとカキ混ぜると中に固まる

遠洋漁業  
天体の形成 ) → これらに応用可能

これがXの学問の魅力!

地球人類が何故宇宙を理解できるか?  
解釈力学: 同じ物理法則がいつでも何處で  
成立する  
相対論: どんな観測者が見ても同じ物理法則  
が成立する (共変形式)

Liberty の思想

Freedom と Liberty の違い.

気身の自由	自ら勝ち取る自由
他人の選択の自由	新しい自由
制限された自由	無限の自由

学問こそ人類に究極の自由をもたらす。

本講義について

認めらる自由: 欠席、眉眼り、内職、飲食、着飾り等  
制奪の自由: 謂義の妨害、不正行為

認めらる自由: 言論の自由、服装の自由 (失)

最終回までの宿題

「なぜ我々は学ばなければならぬのか?」

4/15

## §1. 無次元量とシナリオーションの原理

### §1.1. 物理量の次元と単位系

物理量  $\rightarrow$  定義、測定法が明らかな量  
物体の運動 を調べる学問

・ 物体を表現：長さ、幅、質量、慣性モーメント etc  
 - 運動  $\rightarrow$  時間、位置、角度、速度、加速度、  
位置の時間変化! エネルギー etc  $\rightarrow$  向き

非常に多くの物理量が登場する！  
 → 整理してみよう。

#### ・ 物理量の次元

大小の比較の可否に基づいた物理量の分類

例) 「長さ」、「質量」、「時間」、「エネルギー」 etc  
 整理収納棚のラベルに対応。

同じ次元 の物理量：大小を比べられる

例) 幅と高さ、5cmと1ft, 3kgと10oz, etc  
 $約28g \approx 30g$

異なる次元 の物理量：大小を比べられない。

例) 長さと時間、体重70kgと身長164cm, etc  
 → もと整理すると…

#### ・ 基本次元

地球人類は

「長さ」 L (Length)

「質量」 M (Mass)

「時間」 T (Time)

→ 基本的方量（基本次元）とする ← 任意性あり

→ 他の選択性も有り得る。

→ 人類が便利と感じるのが LMT だった。

例外) 不動産物件広告の不思議

「OO駅より 300m」と「OO駅より 5分」の比較？

本來、大小を比べなければならない。

→ ヒント：これらの広告で何を表現したいのか？

→ OO駅への「アクセスのしやすさ」

代わりに

アクセスのキロ、アクセスの所要時間で表された。

比べなければならないのはどのを比べるためのトコ？

→ 暗黙の了解事項

人の標準歩行速度：80 m / min  
 (日本の不動産業界)

$$「5分」 = 80\text{ m/min} \times 5\text{ min}$$

$$= 80\text{ m/min} \times 5\text{ min}$$

$$= 400\text{ m} > 300\text{ m} !$$

〔これらは比較可〕

※ 第1の物件の方が駅に近いとわかる。

but. これは人外的的方法 (初学者には理解されない)。

$$\begin{aligned} 450\text{ g} &= 1\text{ ポイント} \\ \text{日本で売られている4-5スリーブ} & \\ \rightarrow 1-7\text{ ポイント}(225\text{ g}) & \end{aligned}$$

問題点

・ 「アクセスのしやすさ」はキロたりでは表現できない。

例) 水平キロ300mと高度差100mなら、前者の方が楽！

・ 暗黙の了解事項は誤解を招きかねない。

基本次元と他の次元との関係は？

→ 組立次元

多様な物理量の次元は基本次元の物理量との関係式（物理法則、定義 etc）によって決める

↓ 次元解析

引数

[0]: 0の次元

次元を表す = 関数

を返す

例) 定義から 位置

$$\text{速度 } v \equiv \frac{dx}{dt} \rightarrow [v] = \left[ \frac{dx}{dt} \right] = L T^{-1}$$

時間

速度の組立次元

微分の定義

$$\frac{df(x)}{dt} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

分子の次元 :  $f$  の次元

分母の次元 :  $x$  の次元

$$\therefore \left[ \frac{df}{dt} \right] = \frac{[f]}{[x]} \quad \text{商と同じ！}$$

$$\text{加速度 } a \equiv \frac{dv}{dt} \rightarrow [a] = \left[ \frac{dv}{dt} \right] = L T^{-2}$$

$$\text{運動エネルギー } K \equiv \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow [K] = \left[ \frac{1}{2}mv^2 \right]$$

$$= \left[ \frac{1}{2} \right] \left[ m \right] \left[ v^2 \right]$$

$$= M L^2 T^{-2}$$

注) 数の次元は1

↓ 定義

例) 物理法則から

$$\text{Newton's 2nd law} : F = ma$$

$$\rightarrow [F] = [ma] = \left[ m \right] \left[ a \right] = M L T^{-2}$$

このようにして、新しい物理量の次元を基本次元で表現できる。

↑ 大きさ比較

注) 和、差：同一次元間でのみ可。次元は不变。  
積、商：異なる次元間でも可。次元も積商の変化。

・ 無次元量

次元解析した結果、組立次元が1になる量

例) 数、同一次元の2量の比  
重要

4/22.

・ 単位系

基本次元の物理量に定めた単位の組

例) SI単位系：理工学分野で使われる

基本次元	単位	注) 単位は m では m/s/m
L	1 m	
M	1 kg	
T	1 sec	
(Q)	1 C	

注) 単位それぞれの定義は？

注) 基本次元や各々の単位の選び方は任意

単位の歴史(30~40年)  
の変遷を調べる \*

→ 地球人に好都合ないように決めてよい  
← 異星人は異なる基本次元、単位を使う可能性あり

例) 文化圏ごとに長さの単位が異なる

例) SI単位系での組立次元の単位

$$\text{速度 } [v] = L T^{-1} \rightarrow 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{力 } [F] = M L T^{-2} \rightarrow 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$\text{エネルギー } [K] = M L^2 T^{-2} \rightarrow 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$$

$$\equiv 1 \text{ J (Joule)}$$

注) 質量  $m$  と 質量  $m(\text{kg})$  の違い.

$$\begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ [m] = M \quad [m] = 1 \leftarrow \text{無次元} \end{array}$$

$$m(\text{kg}) \equiv \underbrace{m}_{\text{質量}} \times \underbrace{1 \text{ kg}}_{\text{ここが } M \text{ の次元}} \leftarrow \text{単位$$

### ミクロ シミュレーションの原理

#### ・怪獣映画の特撮法

ミニチュア撮影だけで巨大怪獣を表現

#### ・スケールを変えての実験

風洞実験だけでスペースシャトルを設計

#### ・天体の研究

巨大で長時間の現象を地球上人類が研究



ミクロ  
シミュレーションの意義  
一方を知ることでもう一方を理解する

どうやればこんなことが可能なのか?

キーワード:  $\pi$ -定理, 無次元量, 相似則

### Buckingham's $\pi$ -theorem

ある現象を記述する物理量の個数  $n$  個

$$(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$$

$(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  に含まれる基本次元の個数  $m$  個

$$\downarrow \quad \text{すべて自然数}$$

I] この現象は  $p$  個 ( $p = n - m$ ) の 独立な 無次元量 (パラメータ) で記述される

系を制御することができる  
パラメータのこと.

$$(\pi_1, \dots, \pi_p)$$

II] これらのパラメータは  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  の内、高々  $m+1$  個の組み合わせにて作ることができる.

物理学の世界では  $m=3$ .

さて、 $m+1$  個の組合せについて  
パラメータは表現できる.

### 相似則

2つの系がある場合.

1.) 両系の形が同じ (幾何学的相似)  
かつ

2.) 両系のパラメータ ( $\pi_1, \dots, \pi_p$ ) が等しい  
(物理学的相似)  
ならば、スケールが違っても

両系は本質的に等しい!



ミクロシミュレーションをするには.

幾何学的相似

物理学的相似

の両方を満たすことが必要! (必要十分条件)

実験時の教訓)

パラメータ値の同じ実験を何度もして(繰り返す)

5/6.

恒熟映画の特撮法

現象：炎の海上の歩くガトラ。

・記述するための物理量

	次元
スケル	$\ell$
時間	$t$
炎の速度	$v_f$
ガトラの速度	$v_g$
巨大	$\approx 4:7$

$$\Rightarrow m = 4$$

・必要な基次元：L, T

$$\Rightarrow m = 2$$

∴ π-定理)(パラメータの個数  $P = n - m = 4 - 2 = 2$ )

↓ 無次元量

$$\text{パラメータ } R_f \equiv \frac{v_f}{\ell/t} \quad R_g \equiv \frac{v_g}{\ell/t}$$

 $\Rightarrow (R_f, R_g)$  を保てシユレーション!

(パラメータの選び方は一意ではない。

 $R_f, R_g$  の  $\sqrt{\cdot}$  や  $\cdot^2$ , 積も無次元量。注)  $R_3 \equiv v_f/v_g$  は  $(R_f, R_g)$  と独立ではない

$$\rightarrow R_3 = \frac{R_f}{R_g}$$

 $R_3$  と  $R_f$  をパラメータとみなせば、 $R_g$  はパラメータではない。逆もまたとうである。 $\Rightarrow$  これをパラメータの選び方は一意ではないといつてある。

$$R_g' = R_g$$
  
をなく等号

## スケル変換 (1)

・  $1/N$  スケルで時刻  $\ell' = \ell/N$ 

・仮定：炎の上昇速度は

$$\text{サイズに依存しない } v_f' = v_f$$

→ ガトラが燃やしているのは石油コンビナートならば、ミニチュアで使うのも石油。

∴ 燃焼は燃やす材質に依存するため。

$$R_f' = R_f \text{ をなく等号}$$

 $R_f$  の保存

$$R_f' \equiv \frac{v_f'}{\ell'/t'} = \frac{v_f}{(\ell/N)/t} \quad (\ell'/t' = \frac{v_f}{\ell/t}) \quad (= R_f)$$

→ 意味がハキリするにパラメータを設定。

$$R_f' \propto v_f'$$

$$t = Nt'$$

$$\therefore t' = t/N$$

(撮影用の  $t' = 1s$  は上映時の  $t = Ns$ )

↓

1/N倍でスロー再生すべし！

→ 経験上、炎は約1秒で人間の身長をかき抜けることと人間は知っている。つまりこれを逆手に取ることに。スロー再生することで本物の炎に見せる工夫が成される。

## スケル変換 (2)

 $R_g$  の保存

$$R_g' \equiv \frac{v_g'}{\ell'/t'} = \frac{v_g'}{(\ell/N)/(t/N)} \quad (\ell'/t' = \frac{v_g}{\ell/t}) \quad (= R_g)$$

$$\therefore v_g' = v_g$$

ミニチュアも実物と同じ速度で動かすべし！

↓  
(中に入る人間の運動能力が力の動きを制限している!)

∴ 特徴での怪獣は遅い。

↓  
このようにして、 $(R_f, R_g)$  を保存した  
スケール変換が可能。

リアリティ!

### スケール変換の困難性

複雑な系 ( $n \gg 1$ )

多くのパラメータ ( $p = n \cdot m \gg 1$ )

⇒ すべてのパラメータを保存したスケール変換は困難!

⇒ **重要なパラメータ値のみ保つ!** (近似)

**要:** LMT.

**不要:** 石油コンビナートの付積、圧力 etc..

例.) 破片が飛び散る時 (自由落下)

重力加速度  $g$  が加わる ( $n=5$ )

$$[g] = L/T^2 \rightarrow m=2$$

⇒  $p=5-2=3$  (パラメータも増える)

$$\text{パラメータがもう一つ必要} \rightarrow R_4 = \frac{g}{T^2}$$

$$\text{スケール変換 } R'_4 = \frac{1}{N} R_4 < R_4 \quad * \begin{matrix} \text{復習} \\ \text{計算} \end{matrix}$$

$(\because g' = g)$

∴ はいりでない!

(実際  $g'$  もしくは落下なし)

まとめと議論

シミュレーションのやり方

パラメータを見つける (π-定理)

↓  
スケール変換 (相似則を満たす)

幾何学的相似 (形を真似る)

物理学的相似 (パラメータ値を保つ)

の両方を満たすモデルを作る (相似則)

シミュレート!

応用性

物理学で記述される すべての現象に適用可

例) 天体现象、化学工業プロセス、宇宙船等

5/13

## §2. 粘性のひきおこす現象

### §2.1 天体の形成

太古(カクマリ)の分裂と収縮によって生じる  
星雲(星形成、元素の起源)

収縮するには、

- 1) エネルギー } の両方を捨てなくてはならない。
- 2) 角運動量 }

エネルギーを捨てる：幅射で冷やす(ラジオ・タ)  
角運動量：粘性で回軸を抑える(ブレーキ)

disk での粘性の働き → 4章

ここでは、

粘性の引き起こす現象を考えいく。

H22. 11. 6. Sat

電波 = 電荷の加速度運動

電波(光)が出やすい = 分子の衝突が多い

分子密度の高い部分 = 工程 - 幅射 (①)

→ こうした部分では 連続的に圧力が抜け、

収縮していく。

分子雲の主要成分は ✓  
CO の様な電気双極子  
を持つ物質。  
重力に逆らって引かれう

→ 角運動量によってバランスの取れた回転円板

あわち 原星の誕生。

5/27

### 1. 偏微分

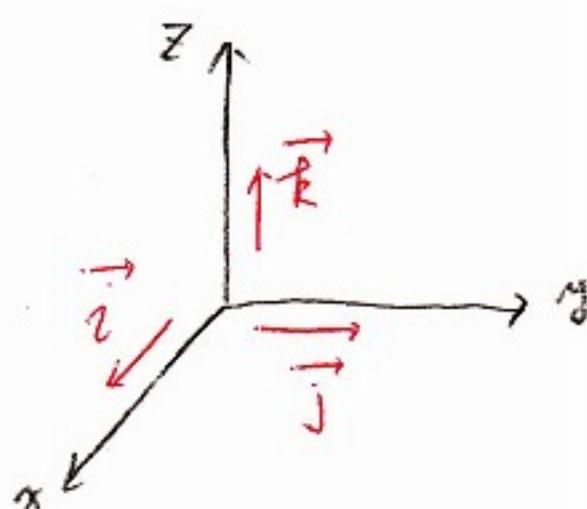
### 2. デカルト座標系

(右手系といふ) (必須)



← 地球人類の先人の知恵は  
全て右手系で書かれている

### 3. 座標基底



$i\text{-}j\text{-}k$  : 座標基底

$$(|i\text{-}j\text{-}k| = |i\text{-}j| = |k| = 1)$$

ベクトル界では定数

### 4. ベクトル関数の微分

$\vec{A}(s)$  の  $s$  变化率 ベクトルの差

$$\frac{d\vec{A}(s)}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\vec{A}(s+\Delta s) - \vec{A}(s)}{\Delta s}$$

## 5. ベクトル微分のテカルト系での成分表示

$$\vec{A}(s) = A_x(s)\vec{i} + A_y(s)\vec{j} + A_z(s)\vec{k}$$

: 成分表示

注)  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} = \text{const.}$

$$\frac{d\vec{A}(s)}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{[A_x(s+\Delta s) - A_x(s)]\vec{i} + [A_y(s+\Delta s) - A_y(s)]\vec{j} + [A_z(s+\Delta s) - A_z(s)]\vec{k}}{\Delta s}$$

$$= \frac{dA_x}{ds}\vec{i} + \frac{dA_y}{ds}\vec{j} + \frac{dA_z}{ds}\vec{k}$$

テカルト系では成分(スカラ係数)のみ  
微分される  $\leftarrow$  テカルト系の性質

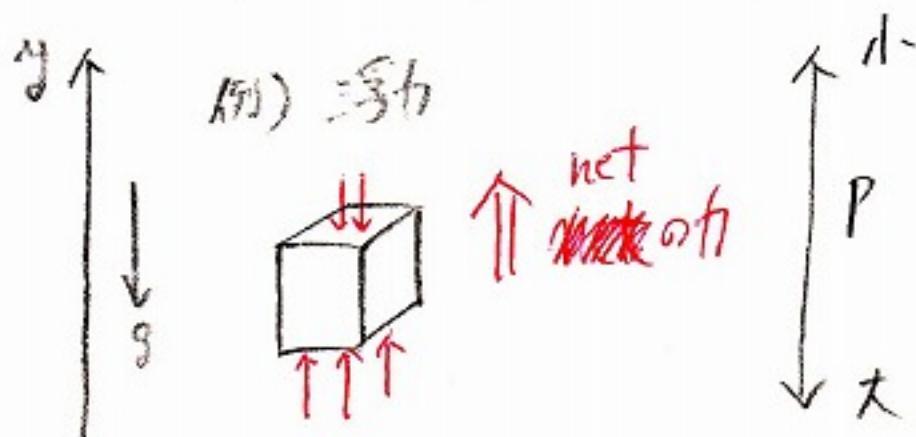
## 89 粘性流体

粘性流体に働く力

・圧力勾配力(Pressure gradient force)

$\Rightarrow$  圧力の大きい所から小さい所に向むく力

$$\vec{F}_P = -\nabla P \quad (\text{単位体積あたりの力})$$



$P(y)$ : 圧力

$$\vec{F}_P = -\nabla P = -\frac{dP(y)}{dy}\vec{j}$$

H22.11.6  
複数の計算  
と1つにバージョン化  
(たとえ)

注)  $\vec{\nabla}$ : gradient operator  
テカルト座標系で。

$$\vec{\nabla} f = \partial_x f \vec{i} + \partial_y f \vec{j} + \partial_z f \vec{k}$$

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \partial_x + \vec{j} \partial_y + \vec{k} \partial_z$$

$$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$$

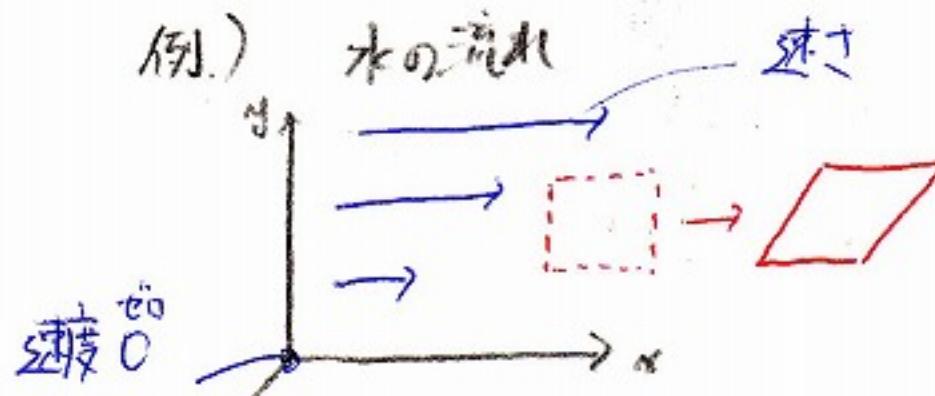
・粘性力(viscous force)

・体積粘性(bulk viscosity)  $\leftarrow$  非圧縮流体  
で扱われる

・すれ粘性(shear viscosity)

速度のすれを感じる。  
 $\downarrow$   
速度に「すれ」があるときに引ひき力

$$\vec{F}_{vis} = \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v} \quad (\text{単位体積あたりの力})$$



$$\vec{v} = V_x(y) \vec{i} : \text{速度}$$

$$\vec{F}_{vis} = \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v} = \eta \frac{d^2 V_x(y)}{dy^2} \vec{i}$$

$\eta$ : 粘性率

$\rightarrow$  もし回転を考えると, shear viscosity は発生  
する。ただし,  $\vec{\omega}$  = 回転ベクトル。

注)  $\vec{\nabla}^2$ : Laplacian

$$\vec{\nabla}^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$$

テカルト座標系では

$$\vec{\nabla}^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$$

隣の流体(プローブ)  
との間に生ずる

粘性流体の運動方程式(非圧縮性)

流体の「単位体積」で見る。



$\rho$ : 密度

$$\vec{F} = \vec{F}_P + \vec{F}_{vis} + \vec{F}_{ext}$$

$$(2nd law: m \vec{a} = \vec{F})$$

$$\rho \frac{d\vec{v}(r,t)}{dt} = -\vec{\nabla} P + \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v} + \vec{F}$$

Lagrange 方式

$$\vec{F}_{vis} \quad \text{外力(重力等)}$$

ナビエ シテ-ズ  
Navier-Stokes 方程式 (Pで面割してめう)  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \underbrace{\nu \nabla^2 \vec{v}}_{Euler 律約式} + \frac{\vec{F}}{\rho}$

$\frac{1}{\rho} \nabla P$ : 外力  
水の流れは 質量  
 $\nu \nabla^2 \vec{v}$ : 粘性  
外力  
(質量)  
あたつ)

流体の運動方程式解説.

単位体積  
単位密度 = 単位質量

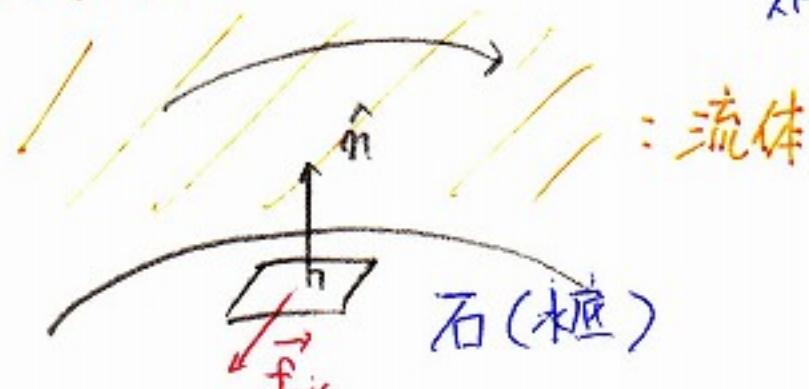
6/3.

○境界条件

境界面上働く粘性力

$$\vec{f}_{vis} = \hat{n} \cdot \eta \nabla \vec{v} \quad \text{流体の側に向く}$$

→  $\hat{n}$  を単位法線ベクトルとす  
る  
→  $\hat{n}$  単位面積あたりの力(応力)  
ストレス



⇒ 水底の石にかかる流体からの力を議論

例題)  $y$   
 $\vec{v}$   
 $\hat{n} = j$   
 $\vec{v} = v_x(y) i$   
 速度は  $x$  成分のみを持つ

$z-x$  面にかかる応力

$$\vec{f}_{vis} = j \cdot \eta \nabla \vec{v}$$

$$= \eta \frac{dv_x(y)}{dy} i$$

→ 速度にすれがあると応力がかかる  
(すれ  $\propto$  応力)

$$\frac{dv_x(y)}{dy} \propto \vec{f}_{vis}$$

## 自由境界(水面)

$$\text{力がかけられてい} \rightarrow \hat{n} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} = 0$$

$$\text{上の例) } \frac{d v_x}{dy} = 0 \quad (\text{水面で})$$

$\Rightarrow$  自由境界においてすれはなし。

## 固体との境界(水底)

粘性で水の膜が物体に沿っている

$$\begin{array}{c} \text{水の速度} \quad \text{物体の速度} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \rightarrow \vec{v} = \vec{v}_b \end{array}$$

相対速度 = 0  
non-slip condition

$$\text{上の例) 川底が静止して見える座標系} \\ \text{では, } \vec{v}_b = 0$$

$$v_x = 0 \quad (\text{水底で})$$

$\Rightarrow$  水底では速度 0.

未知数

$$\left. \begin{array}{l} \text{動粘性率:} \\ \text{物質に} \\ \text{よる異なり} \\ \text{① } \frac{d^2 v}{dy^2} + g \sin \theta = 0 \quad (x\text{成分}) \\ - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} - g \cos \theta = 0 \quad (y\text{成分}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{物質の} \\ \text{質量密度} \end{array}$$

② J')

$$\frac{dp}{dy} = - \frac{\rho g \cos \theta}{\text{const.}}$$

$$\rightarrow p = - \rho g \cos \theta \cdot y + C$$

boundary condition  
: 境界条件

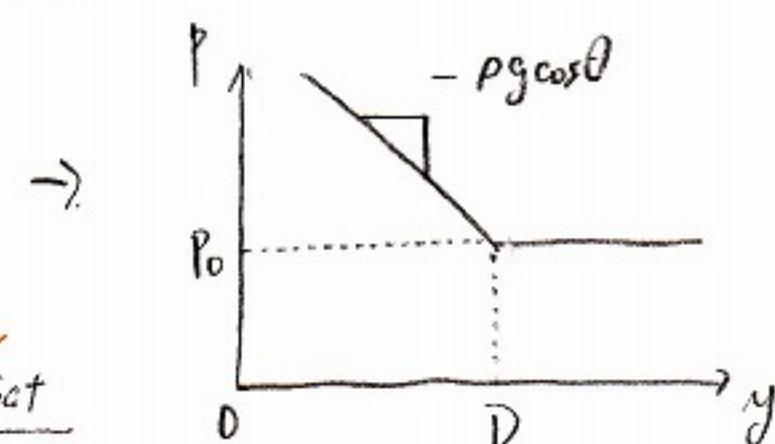
$$\text{b.c. } p = p_0 \text{ at } y = D \quad \text{J'}$$

$$C = p_0 + \rho g \cos \theta \cdot D$$

$$\therefore p = \rho g \cos \theta \cdot (D - y) + p_0$$

(静水圧平衡の筋)

(H.W) P-y プラット作図せよ.



## 非圧縮粘性流

$$\text{定常 } \partial_t = 0 \quad (\text{手前方法での})$$

$\partial_x = \partial_z = 0$  : 川の上流下流による変化なし

$$\vec{v} = v(y) \vec{i}, \quad P = P(y) \quad \text{H22. 11. 13 Sat}$$

$\Rightarrow$  物質は y 成分のみ変化すると簡単化.

Navier-Stokes eq.

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \nu \nabla^2 \vec{v} + \vec{g}$$

単位質量あたり

の重力

$$\frac{mg}{m}$$

① J')

$$\frac{d^2 v}{dy^2} = - \frac{g \sin \theta}{\nu} \cdot \text{const.}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dy} = - \frac{g \sin \theta}{\nu} \cdot y + C_1$$

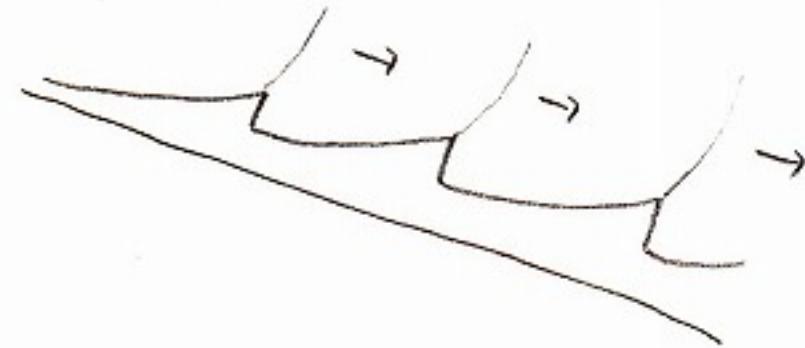
$$\Rightarrow v = - \frac{g \sin \theta}{\nu} y^2 + C_1 y + C_2$$

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = v \left( \frac{\partial}{\partial x} v \right) \vec{i} + v \left( \frac{\partial}{\partial y} v \right) \vec{j} = 0$$

$$\nu \nabla^2 \vec{v} = \nu \frac{d^2 v}{dy^2} \vec{i}, \quad \vec{\nabla} P = \frac{dp}{dy} \vec{j},$$

$$\vec{g} = g (\sin \theta \vec{i} - \cos \theta \vec{j})$$

例) アスファルト斜面の雨水の流れ



$$\cdot \frac{dv}{dy} = 0 \text{ at } y=D \text{ (自由境界)}$$

$$\rightarrow C_1 = \frac{g \sin \theta}{V} D \quad (\text{水面で})$$

$$\cdot v=0 \text{ at } y=0 \text{ (non-slip)}$$

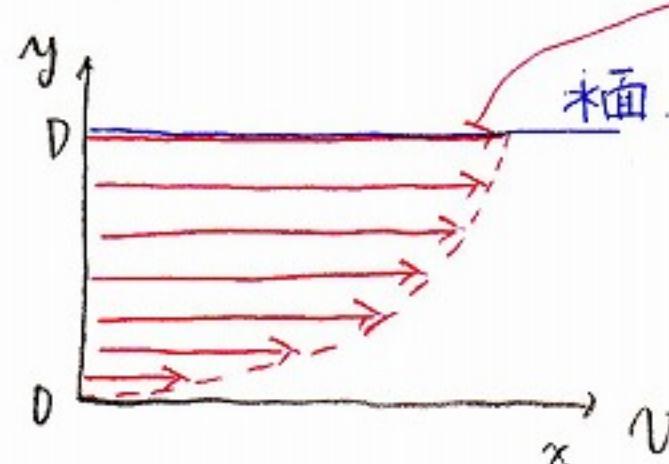
$$\rightarrow C_2 = 0 \quad (\text{底で})$$

$$\therefore v = \frac{g \sin \theta}{2V} y(2D-y)$$

$$v(D) = \frac{g \sin \theta}{2V} D^2 = U_{\max}$$

⇒ 水深が深い程流れは速い！

例題)  $y-v$  グラフを作図せよ

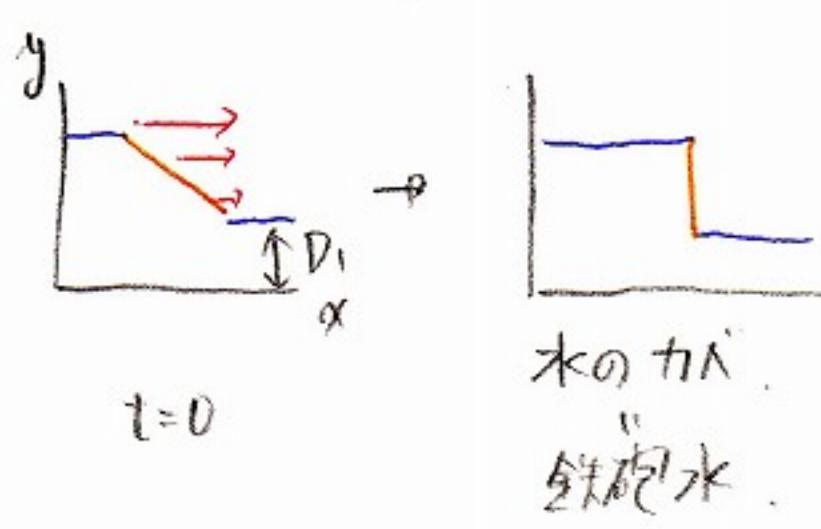


底から遠い程速く流れ！

→ (浅い川 : 遅い  
深い川 : 速い)

(鉄砲水の飛行原理)

水深の変化

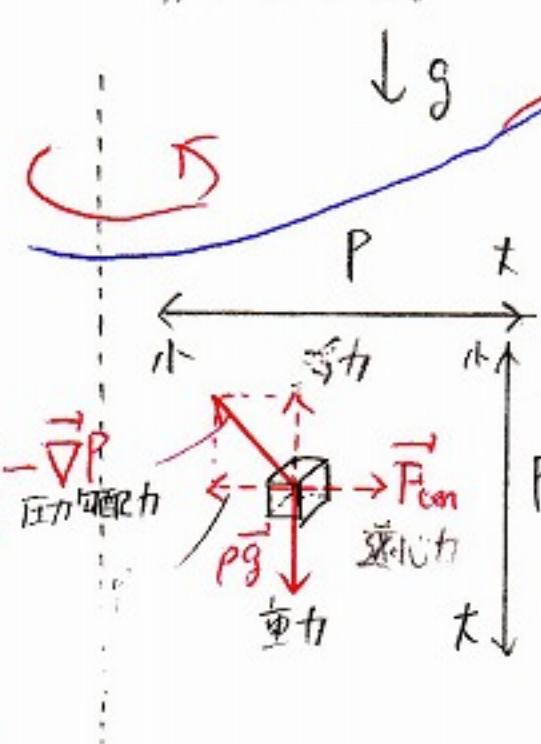
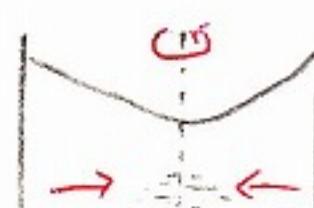


6/10.

红茶の葉

紅茶をかき混ぜる

川の湾曲部

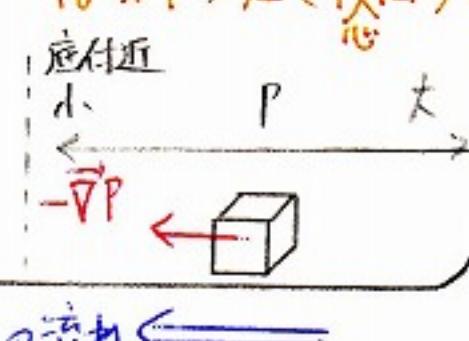


- ・水と共に回転する物体
- 3力の合力にて
- 水は一定半径で停止
- ・慣性系の観測者
- 水は円運動

プロックは水面にも水底にも近づいた層(死層)のものと仮定する。プロックは回転運動する。

\* 壓力勾配力は  $P$  の小さい方へ向く。

∴ 縦方向では上へ、横方向では左(回転軸)へ向かう程、 $P$  は小さい、故に、圧力勾配力は斜め左(中軸)上向きとなる。

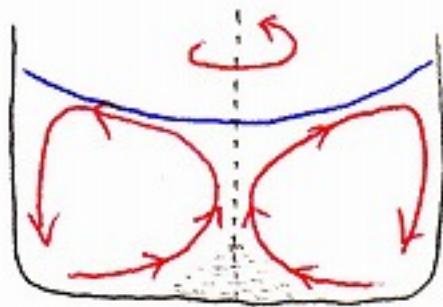


粘性の効果  
底付近の回転は遅い



↓  
容器の底は Non-slip-condition と粘着力で  
ほとんど動かない

Ekman 流



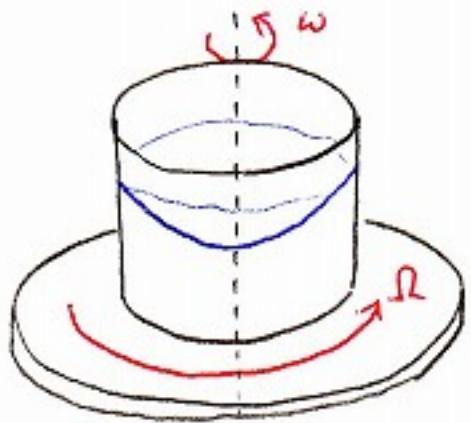
~1910

葉を集める  
砂を  
遠洋漁業

考察:

$\Omega = 0 :$

Ekman 流



クーニングル

$$\begin{array}{ll} \omega > \Omega : ? \\ \omega = \Omega : ? \\ \omega < \Omega : ? \end{array}$$

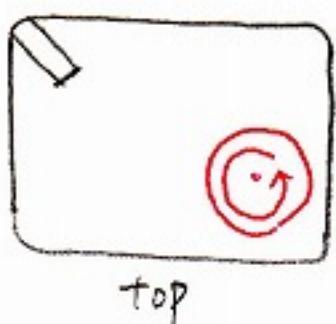
せんたく機

Ekman 流(のまな流れ) :

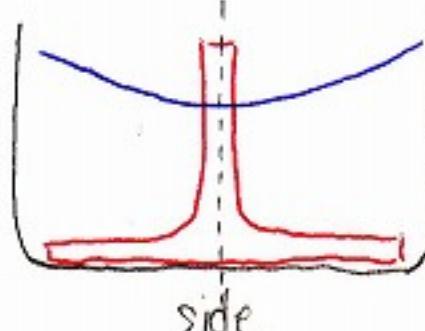
せんたく物がかかる原因



Wiltse オセット



top



side

Non-slip-condition

Wiltse の回転

6/7 (10分遅刻.)

研究のプロセス

## 1.) 動機

何をなぜどこまで研究するか?

## 1.) モデル作り

本質を捉えた簡単化 (セントが必須!)

## 2.) 定性的評価

 $F(x,y) \propto x^a \times y^b$  (スケルが必須!)

## 3.) 定量的評価

$F = k \times x^a \times y^b = 0.000 \dots \times 10^0 [unit]$

実験、シミュレーション (相性が必須!)

## 4.) 考察、議論

応用、発展、他研究との比較 …

- BC, MC では 3.)のみ。研究の全体を体験  
LEHれば DC 人! ただし博士号取得は厳しい!
- 動機無き研究は人を不幸にする!!!
- 動機を共有できないときは PI にイタピューせよ!  
それでタナから EP 脱出! T Principal Investigator

次回以降 ↓

水溶性片栗粉の振る舞い

水溶き片栗粉の振る舞い

$\text{SiO}_2$ (主)

)

動機

泥砂の波打ち際、(鳴き砂=石英砂)

- 砂浜を走る  
走ると堅いが立ち止ると足がめり込む

- 砂の城  
囲んだときは固体的、保持していると液体的。

ひたひたの水で溶いた片栗粉の振る舞い

この不思議な振る舞いの本質は?

モデル

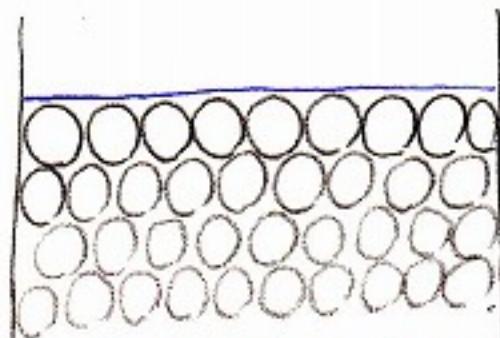
水: 非圧縮  
粘性。

片栗粉: 水に溶けない  
粒が堅い  
粒そろい

+

ひたひたの水で溶いたとき

~最密配置  
の状態



あらゆる变形に 密 → 疎の変化

期待される運動

・圧縮に対して つぶり非圧縮  
→ いつこ。

最密かつ粒が堅い  $\Rightarrow$  剛体的

包丁 はさみ

・膨張、剪断に対して

変形  $\Rightarrow$  力を加えて隙間を広げる

$\Leftarrow$  水の流入が必要 ( $\because$  水、粒は非圧縮)

↓

速い変形

隙間に水が流入  $\Rightarrow$  流体的

速い変形

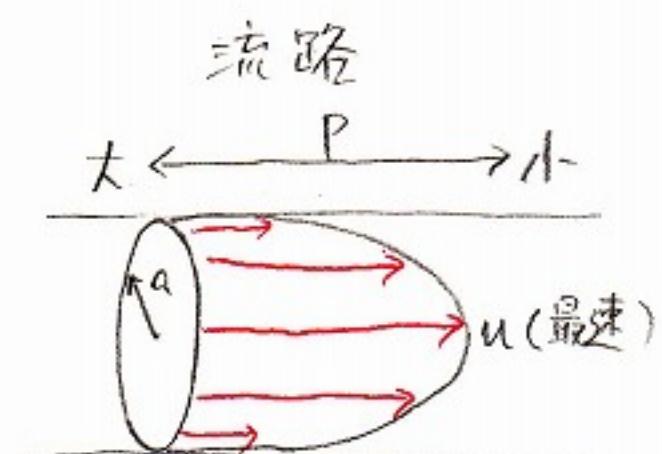
水が流入で走り + 隙間の水は非圧縮

定性的評価 (1)

水が動く timescale  $T$  を求める。

平均粒径  $a$

モデル



隙間を流れろ水 ~ 径  $a$  の円管内の流れ  
(Poiseuille 流れ)

$$u \sim \frac{a^2}{\eta P} \frac{dP}{dx}$$

外力  $f$  で生じる

$$\therefore u \sim \frac{a^2 f}{\eta P}$$

定性的評価 (2)

変形 = 最密配置が崩れるには。  
流れが  $\sim a$  程度進む時間が必要！

$$\therefore T \sim a/u \sim \frac{\eta P}{a f}$$

例) 動いて変形 ( $f \sim \rho g$ )

$$T \sim \frac{\eta}{\rho g}$$

定量的評価

有効粒径は 0 行で近似！

常温の水  $\eta \sim 10^{-6} [\text{m}^2/\text{s}]$

地表  $\rho \sim 10^3 [\text{kg}/\text{m}^3]$

てんぶん粒径  $a \sim 10^{-6} [\text{m}]$

$$\therefore T \sim 10^{-1} [\text{s}] \text{ reasonable!}$$

⑤

6/24 考察と議論

宇宙地図序 8

### ・「粒崩し」の意味

最密配置の実現確率を大きくする

↔ 粒崩してなければ

(粒の大小混在、粒形状がいびつ)

例：埋め立て地、粘土質土壤

⇒ 流状化現象（初期状態が疎）

遅い変形：剛体的 ↔ 片栗粉と逆！

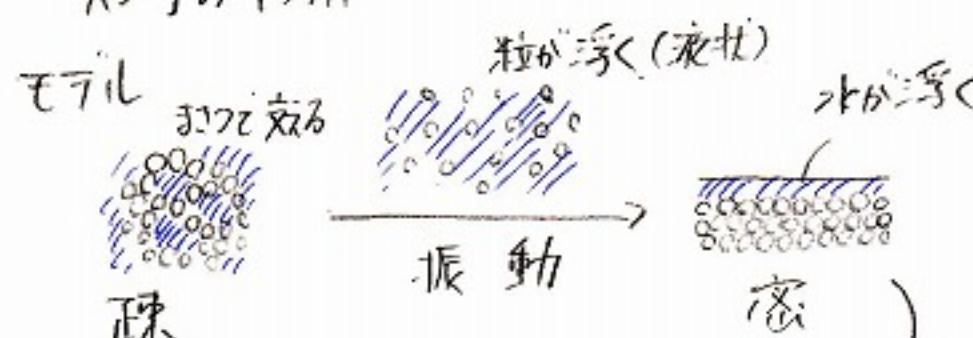
速い変形：流体的

### 流状化の議論

・地震での地面の変形

・ボーリングのドリルの支え

・黄河の中洲

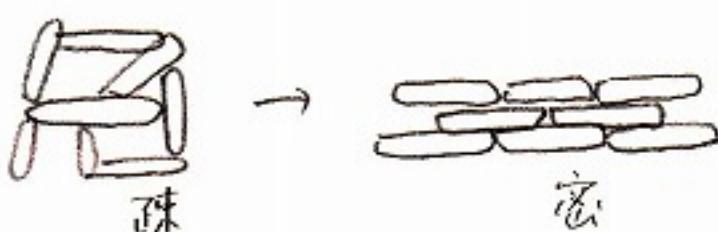


何故疎の状態でいるのか？（片栗粉との違い）

・粒の大きさが不崩い？



・粒の形が非対称？



石垣から石材1コを取出すのは可能か？



音波を利用し、  
表面での回転運動を起す

### 天体の形成（角運動量輸送問題）

天体を作るには

第1段階：エリギー（輻射が担う）

第2段階 角運動量（粘性が担う）

を抜き取ることが必要

⇒ 恒星の誕生 → 行星の起源の惑星系 生命

「我々はどこから来てどこへ行くのか？」

「我々はなぜ、今、ここに存在するのか？」

人類宿命の問いに答えられるか？

7/1

• BH エンジン

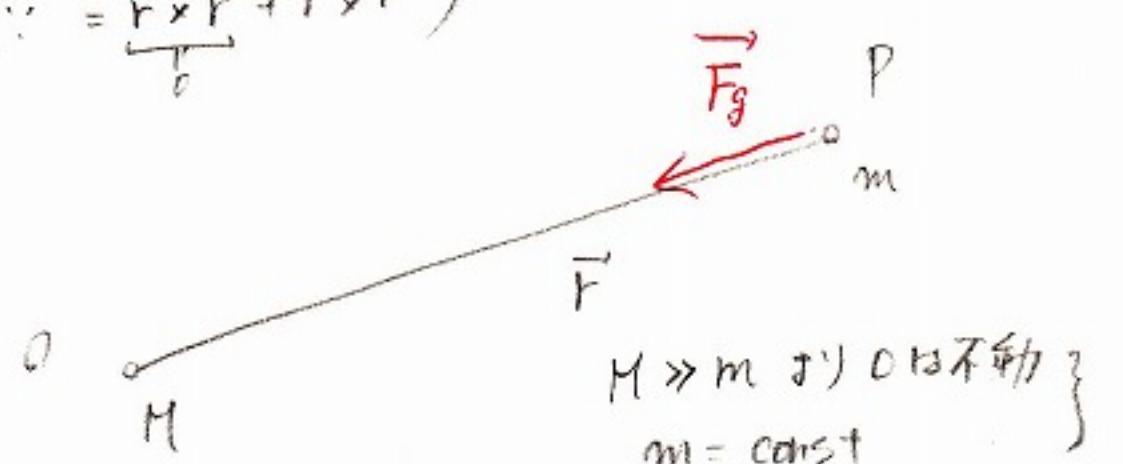
• Kepler's 2nd law

惑星の運動方程式

$$m\ddot{r} = -GMm \frac{1}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad \text{①} \quad \text{ケルビン力}$$

$$\vec{r} \times \ddot{r} = -\frac{GM}{|\vec{r}|^2} \vec{r} \times \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \rightarrow \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \text{const.}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} \quad (\because \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|})$$



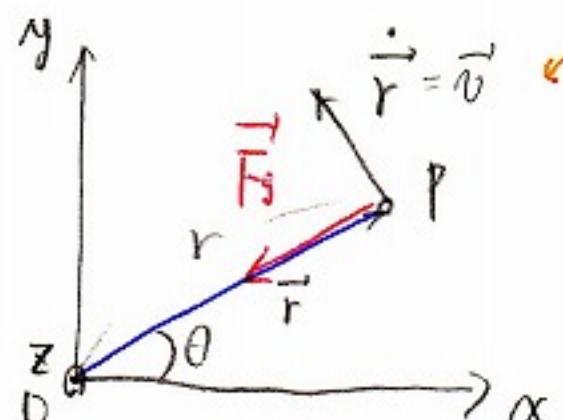
とある。

成分表示

座標基底

$$\vec{r} = r \cos\theta \hat{i} + r \sin\theta \hat{j}$$

注)  $r(t), \theta(t)$  が変化する



座標系は右手系

左辺

$$\ddot{\vec{r}} = r \cos\theta \ddot{\vec{i}} + r \sin\theta \ddot{\vec{j}}$$

$$\ddot{\vec{r}} = [ \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - \tan\theta \cdot (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) ] \cos\theta \vec{i} \\ = [ \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \cot\theta \cdot ( \ddot{r} + r\ddot{\theta} ) ] \sin\theta \vec{j}$$

注)  $\cot\theta = 1 / \tan\theta$

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \quad (\because \text{②})$$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) (\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j})$$

$$\therefore \vec{F} \times \ddot{\vec{r}} = r^2 \dot{\theta} \vec{k} = \text{const.} \quad \text{①の} \vec{k}$$

面積速度

$$h = r^2 \dot{\theta} = \text{const.} \quad \text{②} \quad (\text{Kepler's 2nd law})$$

$$\vec{r} = (r \cos\theta, r \sin\theta, 0)$$

$$\dot{\vec{r}} = (r \cos\theta - r \sin\theta \cdot \dot{\theta}, r \sin\theta + r \cos\theta \cdot \dot{\theta}, 0)$$

$$\vec{F} \times \dot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} i & j & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} i -$$

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} \cos\theta - \ddot{r} \sin\theta \cdot \dot{\theta})$$

$$- ((r \sin\theta - r \cos\theta \cdot \dot{\theta}) \cdot \ddot{\theta} + r \sin\theta \cdot \ddot{\theta}) \vec{i}$$

$$+ (\ddot{r} \sin\theta + \ddot{r} \cos\theta \cdot \dot{\theta})$$

$$+ (r \cos\theta - r \sin\theta \cdot \dot{\theta}) \cdot \ddot{\theta} + r \cos\theta \cdot \ddot{\theta}) \vec{j}$$

$$\text{①' RHS} = - \frac{GM}{r^2} (\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j})$$

$$\therefore \text{①'} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = - \frac{GM}{r^2}$$

$$\text{hのみの式} \rightarrow \ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = - \frac{GM}{r^2} \quad \text{③}$$

注) PのOまわりの角運動量 L

$$L = \vec{r} \times m \dot{\vec{r}} = m \frac{r^2 \dot{\theta}}{h} \vec{k} \quad \text{Kepler's 2nd law は角運動量保存則を示している!}$$

h: 単位質量あたりの角運動量

②, ③ の 2 本の常微分方程式から未知量  $r, \theta$  を求めることがでる。

→ 1st & 3rd laws (略)

力学の教科書へ ← A4 2枚 ↗

$$\vec{F} = \vec{\nabla} U$$

§§ 有効ポテンシャル

Coulomb 力の下での運動を直観的に理解する

$$\text{③} \rightarrow \ddot{r} = - \frac{d}{dr} \left( \frac{h^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} \right) \quad \text{④' 力 (∵ 単位質量)}$$

加速度

$U_{\text{eff}}$  = 有効ポテンシャル

単位質量あたりの力学的エネルギー

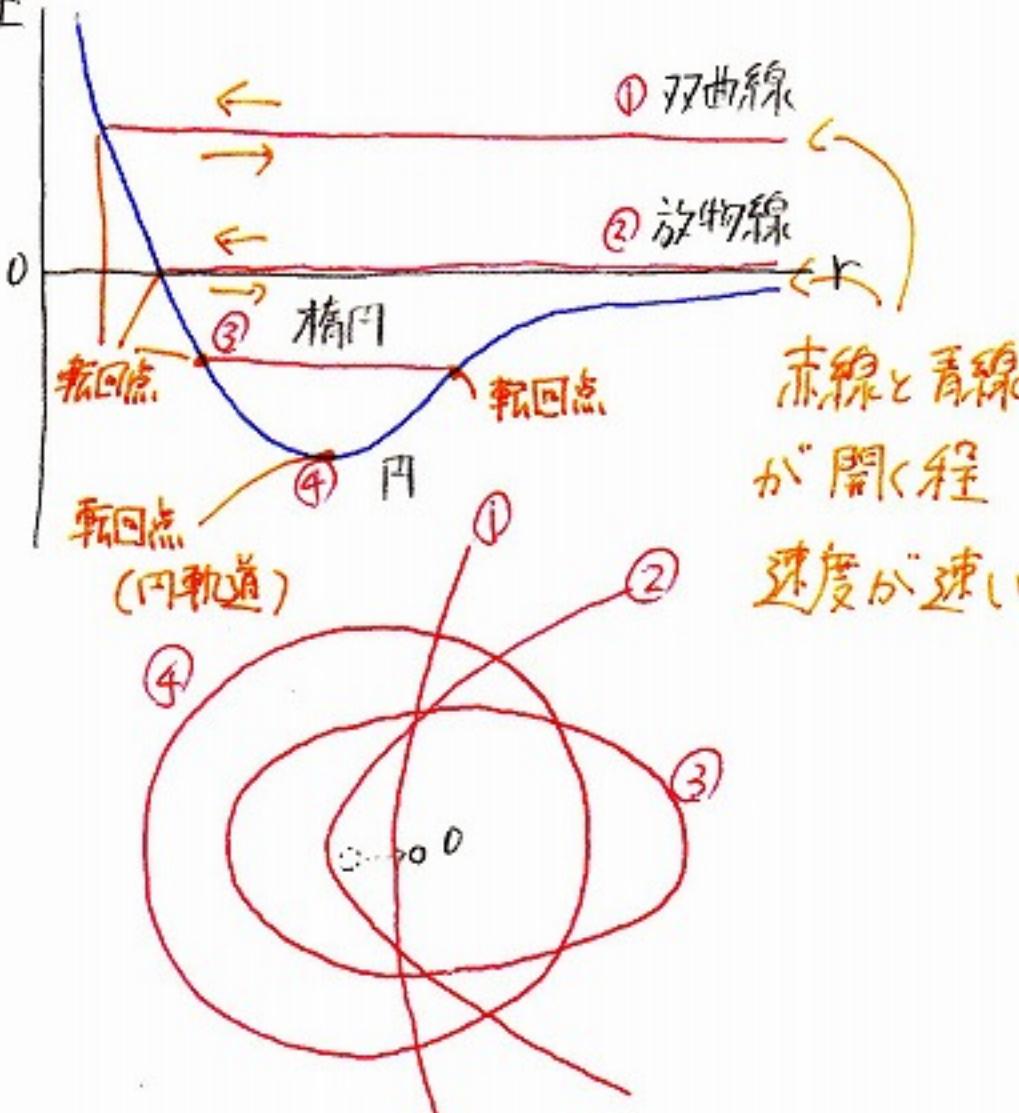
$$E = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{GM}{r} = \frac{1}{2} \dot{r}^2 + U_{\text{eff}} = \text{const.}$$

(∵ Coulomb 力は保存力)

→ 転回点 ( $\dot{r}=0$  となる点) は  $E=U_{\text{eff}}$  の転回点  
力学的エネルギー保存則による

$$\text{①} \rightarrow \ddot{r} = - GM \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad \text{①'}$$

$\vec{r} \times \text{①'} \ddot{r}$   $h \equiv r^2 \dot{\theta} = \text{const.}$  ② が得られる



7/8

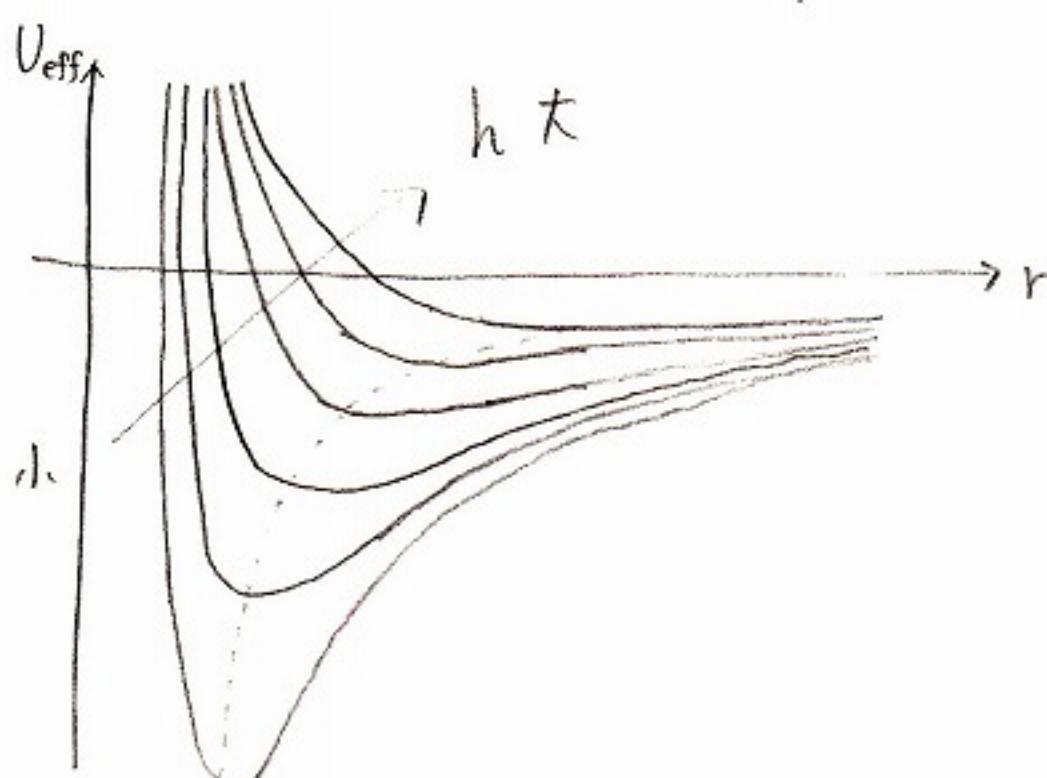
惑星(周期惑星)とスイングバイ

→ 惑星の軌道の内側を進むと角運動量を惑星に取られてしまう。

双曲線轨道は 楕円轨道になる  
(周期惑星)

→ 惑星の軌道の外側を進むと惑星から角運動量とエネルギーをもらう。

物体が加速する(スイングバイ)



### Keplerian Disk

$$U_{\text{eff}} = \frac{h^2}{2r^2} - \frac{GM}{r}$$

・ 円軌道 ( $r=r_c$ )

$U_{\text{eff}}$  の極小値

$$\rightarrow \frac{dU_{\text{eff}}}{dr} = 0 \quad \text{り}, \quad r_c = \frac{h^2}{GM}$$

角運動量が大きい程、大きめ半径

・ 円軌道の角速度、速度

$$r_c = \frac{h^2}{GM} = \frac{(r_c \dot{\theta})^2}{GM} \rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{GM}{r_c^3}} : \text{角速度}$$

$$r_c \dot{\theta} = \sqrt{\frac{GM}{r_c}} : \text{速度}$$

内側の円軌道ほど速く回転

$$\begin{aligned} \frac{dU_{\text{eff}}}{dt} &= \frac{-4h^2 r}{r^4} + \frac{GM}{r^2} \\ &= \frac{-4h^2 r + 2GMr^2}{r^4} = 0 \quad \text{り} \end{aligned}$$

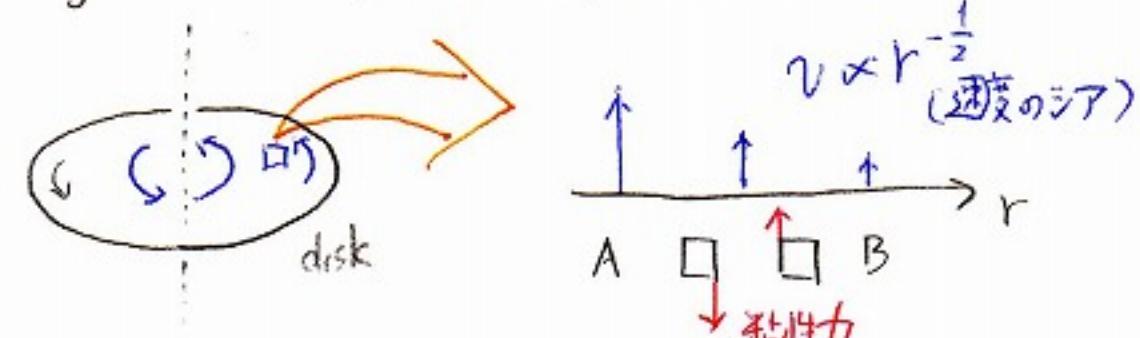
$$-4h^2 r + 2GMr^2 = 0$$

$$2GMr = 4h^2$$

$$\therefore r = \frac{h^2}{GM} = r_c$$

### Keplerian Disk

gas disk ⇌ たくさんのかつて惑星の集合(個々の運動)



外側のガスから粘性力を受ける →  $h \downarrow$

A:  $h \downarrow r \downarrow v \uparrow$  増や  $h$  を失い内側へ落下

B:  $h \uparrow r \uparrow v \downarrow$   $h$  を外側へ

↓

diskの2分化

- ・ 質量の大部分は 内側へ落下
- ・ 一部は外側へ膨らみ  $h$  を運び出す!

# 68 一般相対論的惑星運動

$$\text{Newton力学 } E = \frac{1}{2}r^2 + U_{\text{eff}}$$

$$\Downarrow U_{\text{eff}} = -\frac{GM}{r} + \frac{h^2}{2r^2}$$

一般相対論(G-R) Schwarzschild 時空での有効ポテンシャル

$$\frac{E^2}{c^2} = r^2 + U_{\text{eff}}, \quad U_{\text{eff}} = 2\left(-\frac{GM}{r} + \frac{h^2}{r^2} - \frac{GMh^2}{c^2r^3}\right) + C^2$$

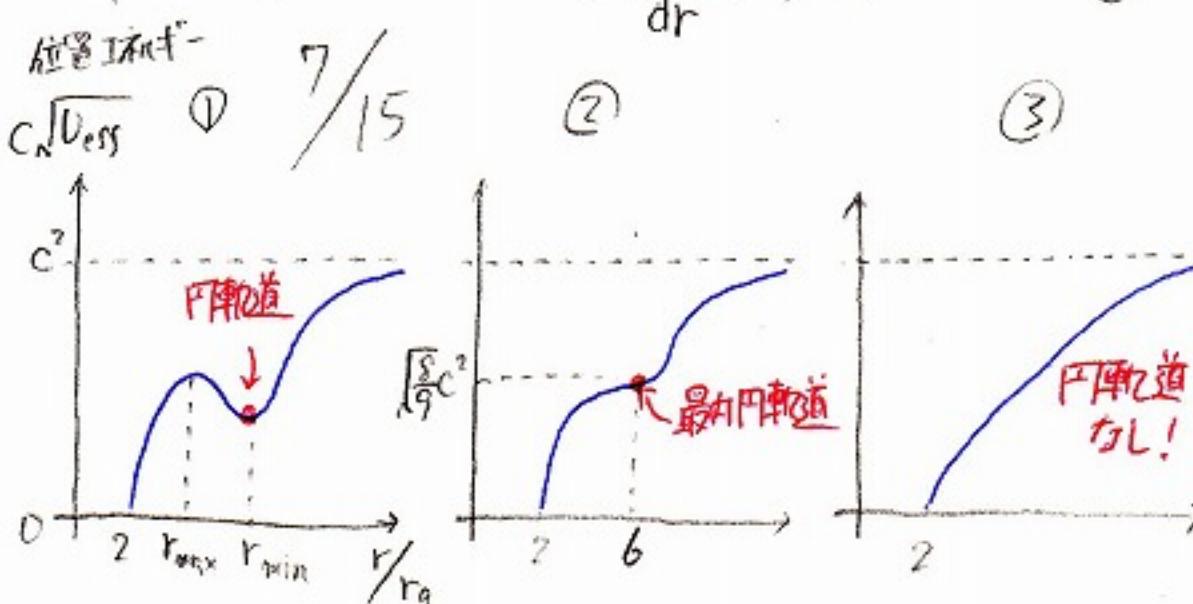
引力 励力 引力  
ケーブルツクルド  
GR補正項 静止  
エネルギー

軌道点 ( $r=0$ )  $\rightarrow E = C\sqrt{U_{\text{eff}}} : U_{\text{eff}} \text{ のケーブルを除く}$

$$\text{極値 } \frac{dU_{\text{eff}}}{dr} = 2\left(\frac{GM}{r^2} - \frac{h^2}{r^3} + 3\frac{GMh^2}{c^2r^4}\right) = 0$$

$$\rightarrow \text{極大 } r_{\max} = \frac{h^2 + \sqrt{h^2(h^2 - 12\frac{GM^2}{c^2})}}{2GM}$$

$$\begin{cases} > & : r_{\max}, r_{\min} \text{ が存在} \\ h^2 = 12\frac{GM^2}{c^2} & : \text{変曲点 } r_{\max} = r_{\min} = 6\frac{GM}{c^2} \\ < & : \frac{dU_{\text{eff}}}{dr} > 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} ① \\ ② \\ ③ \end{matrix}$$



$$r_g = \frac{GM}{c^2} : \text{重力半径}$$

- 惑星の角運動量を失う ( $h^2 \downarrow$ ) と内側に落下する
- $h^2 = 12GM^2/c^2$  で失うと  $r = 6r_g$  に来る  
(最内円軌道)

$\rightarrow$  ここでエネルギーの差  $AE = (1 - \sqrt{8/9})C^2 \sim 0.057C^2$  が外部に解放される。

- $h^2 < 12GM^2/c^2$  では円軌道が存在しない  
 $\rightarrow$  急速に BH に落下する。

ブラックホールからエネルギー！

ブラックホール(BH)の大衆的イメージ

- UFO, IC電現象と共に オカルト現象
- 天体進化の末期  $\Rightarrow$  何も吸収しない死の淵

but. 1970年代以降の宇宙物理学では

BH は死に絶えた天体ではない！

$\Rightarrow$  宇宙最強のエンジン

・エネルギー解放の原理？

・エンジンとしての性能？

BH の種類

3種類の BH

名称	特徴	サイズ	質量
原初 BH	宇宙創世時にできた? (ホーキング輻射)	原核並み	$10^{12} \text{ kg}$
小質量 BH	恒星進化の成れの果て (ハロウエーサ)	10km程度	太陽質量の 10倍程度
巨大 BH	銀河の中心核にみる (活動銀河, クエーサ)	太陽系並	太陽質量の 1億倍程度

本日は銀河中心の巨大 BH に注目！

活動銀河はものすごい！

e.g. 活動銀河核(AGN; 宇宙最強のエンジン)

サイズ  $\sim 1 \text{ AU}$

(地球軌道半径 [1億km], 太陽系の程度)

出力  $\sim 10^{39} \text{ W}$

(太陽100兆個分, 銀河1000個分の出力)

異常に小さく異常に高出力

太陽系に100兆個の太陽が輝くあなたの

新エネルギー機構でないと説明できない！

## 2種類の BH エンジン

本質は BH + 回転ガス円盤  
(回転によって重力とバランス)

## 1.) Fuel Engine ← 今回の主役

重力エネルギー解放型

ガス円盤の重力エネルギー解放

## 2.) Fly-Wheel Engine ← 新田の研究対象

回転エネルギー解放型

BH の回転エネルギー解放

7/22

## Fuel Engine の原理

落下を利用して重力の仕事を取り出す

～水力発電

ガス円盤内の粘性抵抗によるブレーキ  
(角運動量の減少)

⇒ ガスの落下 (重力による仕事)

⇒ 粘性によるガスの加熱

⇒ 热輻射 (解放したエネルギーを運び出す)

飛行しながらゆっくり落ちることが大切！

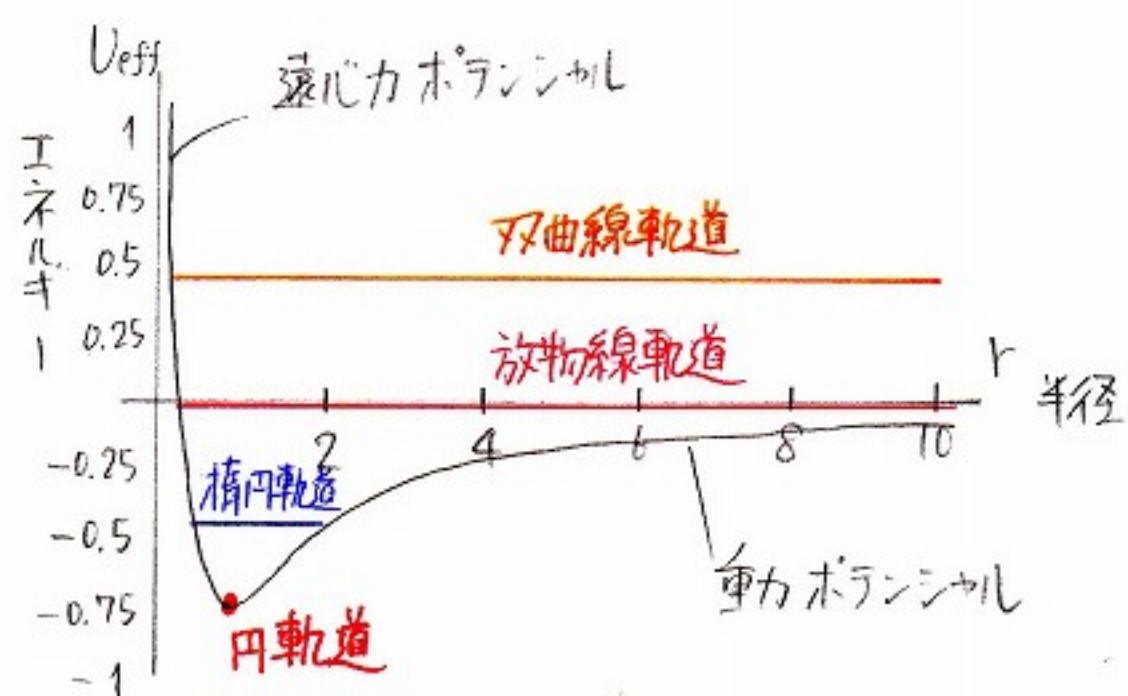
(速く落ちるとエネルギーを BH に持ち込むたり)

⇒ ほぼ円轨道を保つことが必要！

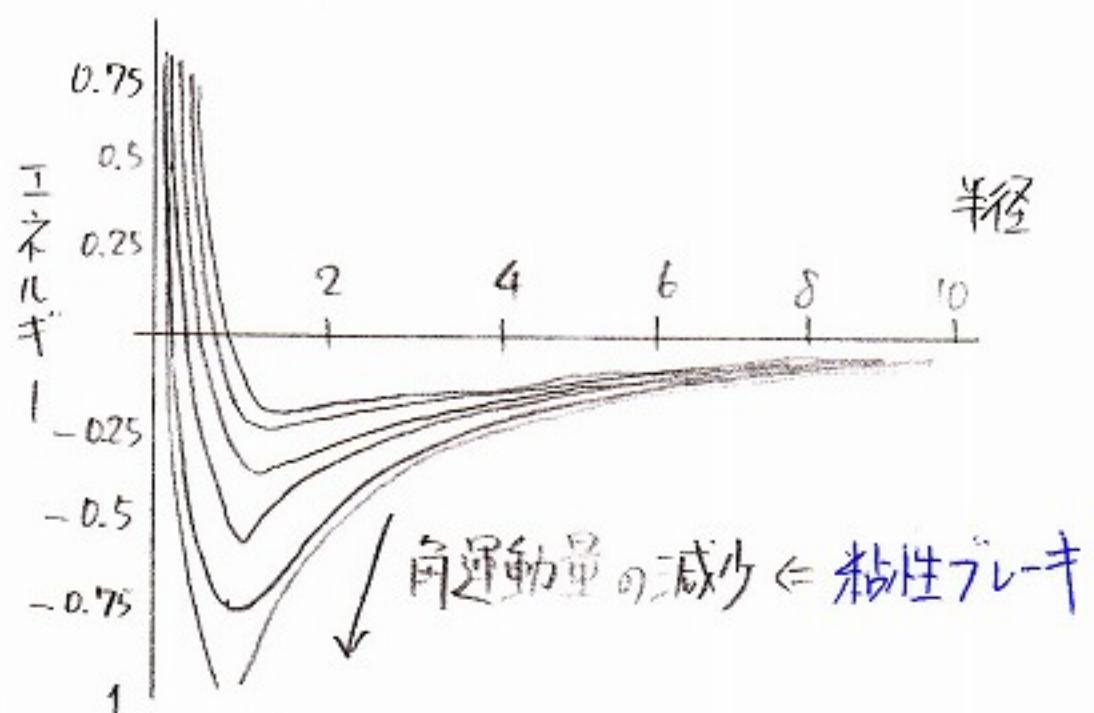
## 惑星運動の有効ポテンシャル (1)

Newton 力学の場合 (重力が弱い)

回転運動 ⇒ (重力 + 遠心力) のポテンシャル



## 惑星運動の有効ポテンシャル (2)



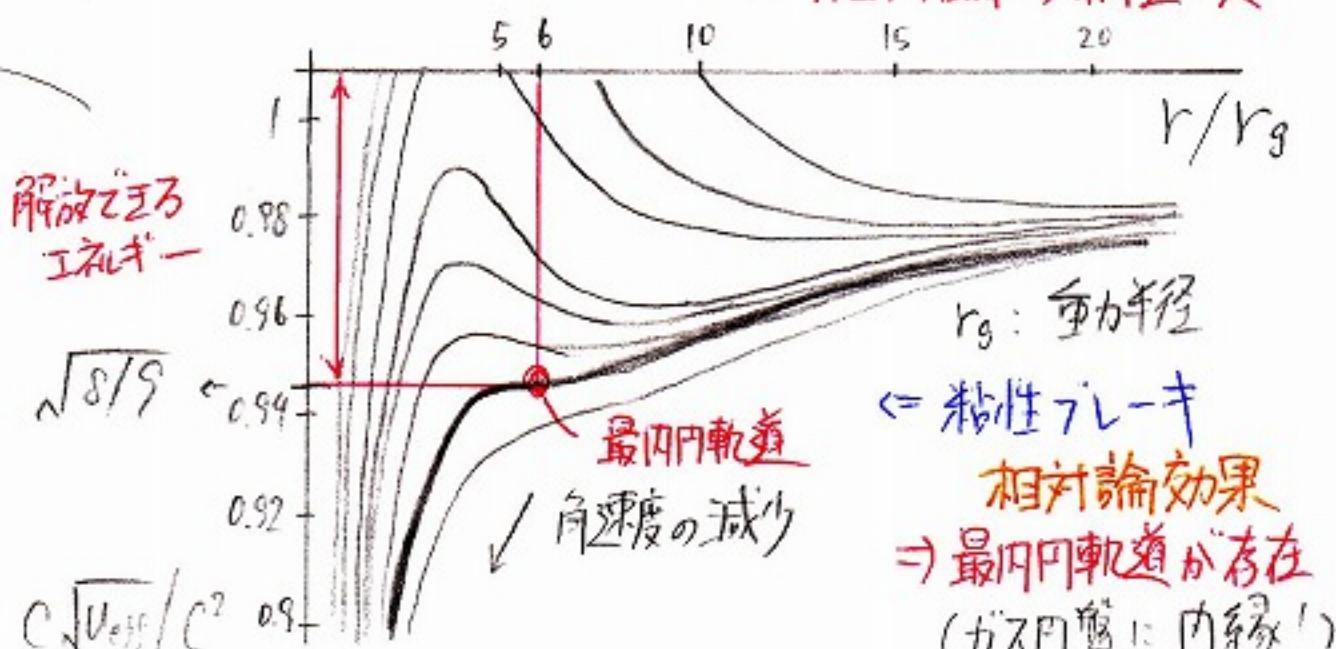
⇒ 重力が弱いので「谷」は深い

## 相対論的有効ポテンシャル (1)

BH ⇒ 一般相対論の場合 (重力が強い)

回転運動 ⇒ (重力 + 遠心力) のポテンシャル

+ 相対論的補正項



粘性によるブレーキ → 角運動量の減少  
円轨道半径 (有効ポテンシャルの極小)

解放される  
エネルギー

→ 最内円轨道  $r = 6r_g$  (ガス円盤の内縁)  $\sqrt{8/9}$

の縮小

 $\sqrt{8/9}$  $r_g$ : 重力半径

⇒ 粘性ブレーキ

相対論効果

⇒ 最内円轨道が存在  
(ガス円盤に内縁!)

## 相対論的有効ボテンシャル(2)

無限遠から最内円軌道までの落差分を解放

BHはとても小さく、動も強いて「谷」が深い  
↓

落ち込む物体の質量エネルギー(全エネルギー)の

$$5.7 - 42 \text{ eV}$$

Schwarzschild BH      Extreme Kerr BH  
(自転しないBH)      (極限的に自転するBH)

とてもスゴイ！

→ どのくらいスゴイのか？

BHエンジンは多燃料で超高出力

e.g. 1kgの物質(何でもいい)を投入

↓

$10^{15} \text{ J} \sim 1 \text{ Mt(TNT)} \text{ を解放}$

(広島型原爆100個分、日本の標準的  
10万世帯分の年間消費エネルギー)

e.g. 活動銀河核(宇宙最強のエンジン)

出力:  $\sim 10^{39} \text{ W} \leftarrow$  1年に太陽1個分のカス  
が落ちる

(太陽100兆個分、銀河1000個分の出力)

サイズ  $\sim 1 \text{ AU}$  (地球軌道半径)

まとめ:

Q. エネルギー解放の原理?

A. 1). ガスの動エネルギー解放(燃る)

2). BHの回転エネルギー解放

(高速プラズマ流と衝突)

「深く落ち込み輝くが(月)轟いて吐く」

Q. エンジンとしての性能?

A. 多燃料で高出力 & 極限的高効率

「何でも良く食べ激しく輝く、元気で吐く」

## 特別相対論 入門

§ 特別相対論とは

2つの原理に基づいて時間、空間、物理法則  
に関する観念を大きく変更させた

1.) 光速度不变の原理

「どんな運動状態にある観測者から  
見ても真空中の光速は等しい」

→ Maxwell理論と整合

2.) 特殊相対性原理

「どの慣性系においても全ての物理法則  
は同じ形で成立する」

→ 慣性系は同等

光速にはガリレイ変換が成立しない。

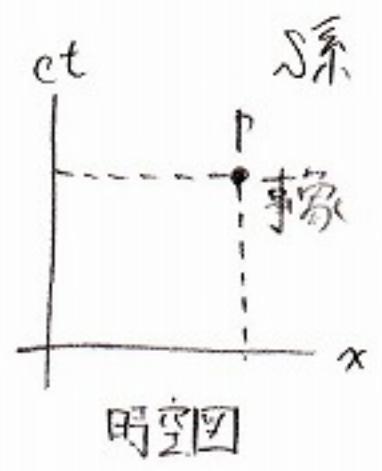
7/29

§ 光速度不变であるために  
時空のある点Pを

$S$ 系で観測する  $(ct, x)$

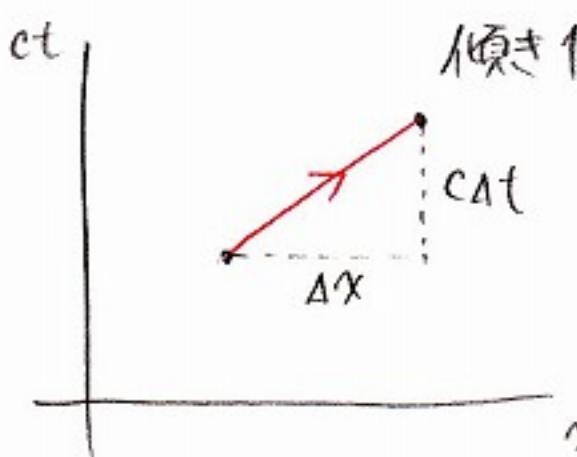
$S'$ 系で観測する  $(ct', x')$

とする。



$S$ に対して  $x$  方向に速度  $v$  で等速度運動する  
(注)  $S, S'$  は共に慣性系

・光の運動



$$U = \frac{\Delta x}{\Delta t} = C$$

$$\rightarrow \Delta x = C \Delta t$$

## • Lorentz 変換

光速度不变となる座標変換

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \underbrace{\gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}}_{\Lambda} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

- この変換で光速度が不变であることを示す。
- S系から見て光は c で運動  $\Delta x = c \Delta t$

$$\begin{pmatrix} c \Delta t' \\ \Delta x' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \Delta t \\ \Delta x \end{pmatrix}$$

$$= \gamma c \Delta t \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \gamma c \Delta t (1 - \beta) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$  右辺の 1 行目、2 行目は等しい。つまり  $c \Delta t' = \Delta x'$

∴ S'系から見た光の速度

$$c' \equiv \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = c$$

 $\rightarrow$  S'系でも光速度は c !

## • Lorentz 変換の性質

逆変換  $\beta \rightarrow -\beta$  ( $v \rightarrow -v$ ) を置き換える

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \underbrace{\gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix}}_{\Lambda^{-1}} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}$$

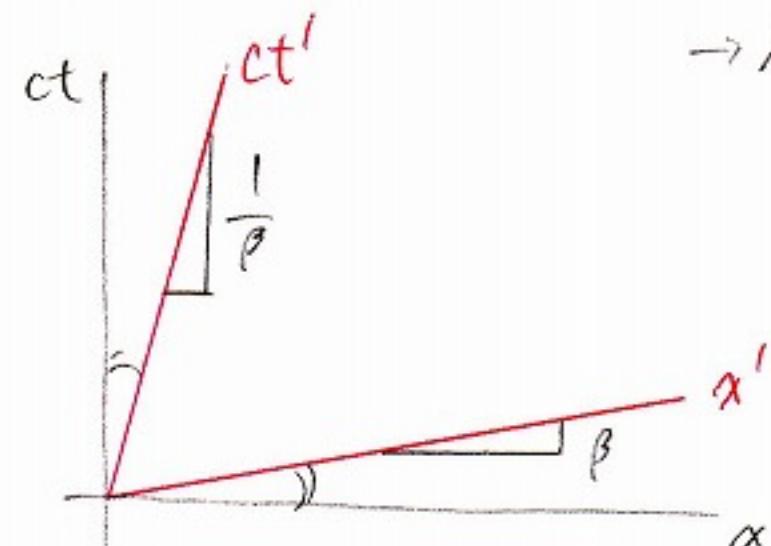
(HW)  $\Lambda^{-1}\Lambda = \Lambda\Lambda' = 1$

$$\begin{aligned} & \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \\ &= \gamma^2 \begin{pmatrix} 1 - \beta^2 & 0 \\ 0 & 1 - \beta^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1 - \beta^2} \begin{pmatrix} 1 - \beta^2 & 0 \\ 0 & 1 - \beta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \\ &= \gamma^2 \begin{pmatrix} 1 - \beta^2 & 0 \\ 0 & 1 - \beta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \end{aligned}$$

S'の時間軸( $ct'$ )

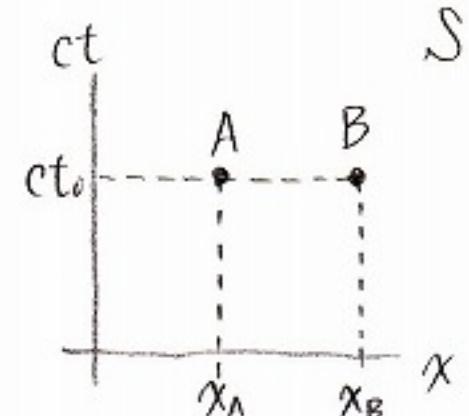
$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} \beta x' \\ x' \end{pmatrix} \rightarrow \text{傾き } \beta$$



## • 同時性の相対性

Sから見て「同時」の2事象

$$\begin{aligned} A &: (ct_0, x_A) \\ B &: (ct_0, x_B) \end{aligned}$$



S'から見る

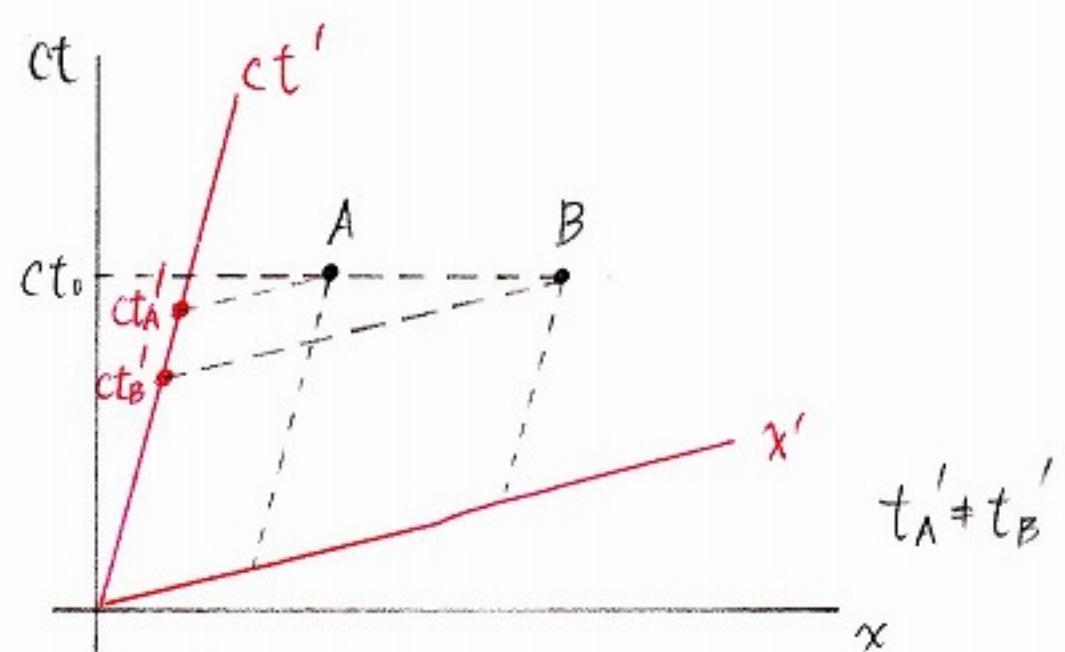
$$\begin{aligned} A' &: \begin{pmatrix} ct'_A \\ x'_A \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct_0 \\ x_A \end{pmatrix} \\ &= \gamma \begin{pmatrix} ct_0 - \beta x_A \\ -\beta ct_0 + x_A \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B' &: \begin{pmatrix} ct'_B \\ x'_B \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct_0 \\ x_B \end{pmatrix} \\ &= \gamma \begin{pmatrix} ct_0 - \beta x_B \\ -\beta ct_0 + x_B \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$ct'_A = \gamma(ct_0 - \beta x_A), ct'_B = \gamma(ct_0 - \beta x_B)$$

$\rightarrow$  つまり  $x_A \neq x_B$  なら  $t'_A \neq t'_B$  !

同時ではない！



↓ 動いてる時計の遅れ

$S'$ で静止している時計と  $S$  から見る

$$\left(\frac{ct}{\Delta x}\right) = \gamma \left(\frac{1}{\beta} \frac{\beta}{1}\right) \left(\frac{ct'}{0}\right) = \gamma \left(\frac{ct'}{\beta ct'}\right)$$

$$\rightarrow \Delta t = \gamma \Delta t' \quad \text{すなはち} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$S'$ での  $\Delta t' = 1$  サイクル。

$S$  での  $\Delta t = \gamma s$

∴  $S'$  の時計は遅れる見える

(時間がゆっくり流れれる!)

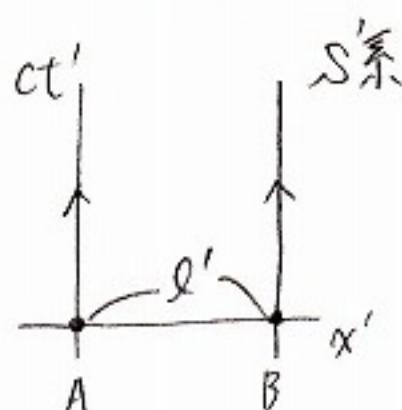
### Lorentz 收縮

$S'$ で静止している長さ  $l'$  の棒は  $S$  からはどう見えるか?

長さ = 同時刻での一端ともう一端の位置の差

$S'$ 見て.

$$A: \left(\frac{ct_A'}{0}\right), B: \left(\frac{ct_B'}{l'}\right)$$



$S$  に Lorentz 変換

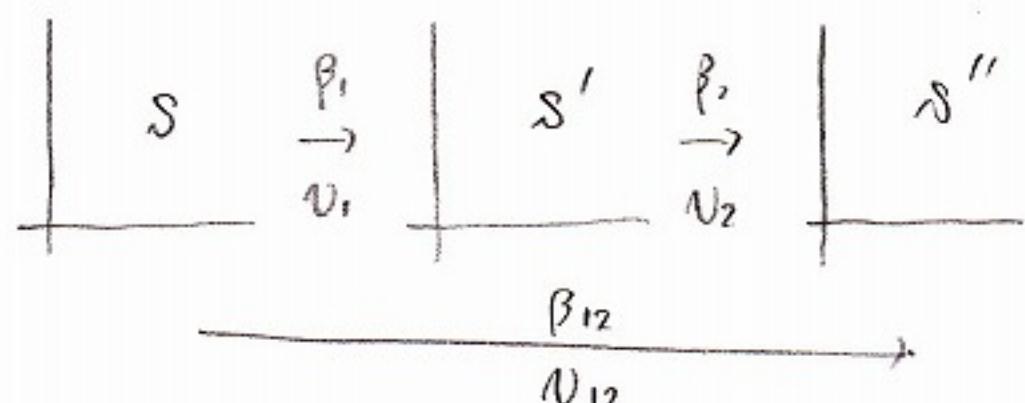
$$A: \left(\frac{ct_A}{x_A}\right) = \gamma \left(\frac{1}{\beta} \frac{\beta}{1}\right) \left(\frac{ct_A'}{0}\right) = \gamma \left(\frac{ct_A'}{\beta ct_A'}\right)$$

$$B: \left(\frac{ct_B}{x_B}\right) = \gamma \left(\frac{1}{\beta} \frac{\beta}{1}\right) \left(\frac{ct_B'}{l'}\right) = \gamma \left(\frac{ct_B' + \beta l'}{\beta ct_B' + l'}\right)$$

•  $v \rightarrow c$  の極限  
 $\lim_{v \rightarrow c} \gamma = \infty$

このとき.  $S'$  の時計は止まっている!  
(時間が流れない)

### 速度の合成則



$v_{12}$  と  $v_1, v_2$  の関係を求める

Lorentz 変換

$$\underbrace{\gamma_2 \left(\begin{array}{cc} 1 & -\beta_2 \\ -\beta_2 & 1 \end{array}\right)}_{S' \rightarrow S''} \underbrace{\gamma_1 \left(\begin{array}{cc} 1 & -\beta_1 \\ -\beta_1 & 1 \end{array}\right)}_{S \rightarrow S'} = \underbrace{\gamma_{12} \left(\begin{array}{cc} 1 & -\beta_{12} \\ \beta_{12} & 1 \end{array}\right)}_{S \rightarrow S''}$$

$$\text{LHS} = \gamma_1 \gamma_2 \begin{pmatrix} 1 + \beta_1 \beta_2 & -(\beta_1 + \beta_2) \\ -(\beta_1 + \beta_2) & 1 + \beta_1 \beta_2 \end{pmatrix}$$

⇒ 動いてる棒は短く見える!

11 成分と比較

$$\gamma_1 \gamma_2 (1 + \beta_1 \beta_2) = \gamma_{12} \quad \cdots \textcircled{1}$$

12 成分と比較

$$\gamma_1 \gamma_2 (\beta_1 + \beta_2) = \gamma_{12} \beta_{12} \quad \cdots \textcircled{2}$$

(1), (2) より  $\gamma_{12} \approx \gamma$ 

$$\beta_{12} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2} \rightarrow \underline{\gamma_{12} = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}}$$

 $\rightarrow v_1, v_2 \ll c$  ならば  $v_{12} \approx v_1 + v_2$ 

$\therefore$  光速に比べ十分速度が小さい  
場合には、ガリレイ変換が成立！

(HW)  $\beta_1, \beta_2 < 1$  のとき  $\beta_{12} < 1$