Exercise 2: Matrix and Gradient

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

とする。

1. $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x} = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$ を示せ。
2. $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ を成分 $(x_i, a_{i,j})$ で表せ。
3. $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ を示せ。
4. $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} + b)^2$ を求めよ。

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{12}$$

とする。

1. $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x} = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$ を示せ。

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = \sum_i x_iy_i = \sum_i y_ix_i = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x} \tag{13}$$

2. $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ を成分 $(x_i, a_{i,j})$ で表せ。

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \sum_j \sum_i a_{ij}x_ix_j \tag{14}$$

3. $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ を示せ。
   $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}$ は n 次元列ベクトルであり、その第 k 要素は $\frac{\partial}{\partial x_k}\sum_i a_ix_i = a_k$. よって $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$.

4. $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} + b)^2$ を求めよ。
   $(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} + b)^2$ はスカラゆえ, $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} + b)^2$ は列ベクトル。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} + b)^2 &= \frac{\partial}{\partial z}z^2\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}z \text{ where } z = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} + b &(15) \\ &= 2(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} + b)\boldsymbol{a} &(16) \end{aligned}$$