Exercise 2: Matrix and Gradient

$$oldsymbol{x} = egin{pmatrix} x_1 \ x_2 \ dots \ x_n \end{pmatrix}, oldsymbol{y} = egin{pmatrix} y_1 \ y_2 \ dots \ y_n \end{pmatrix}, oldsymbol{A} = egin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \ dots & dots & dots \ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

とする。

1.
$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{x} = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$
 を示せ。

2.
$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$
 を成分 $(x_i, a_{i,j})$ で表せ。

$$3. \ \frac{\partial}{\partial x} a^T x = a を示せ。$$

$$4. \frac{\partial}{\partial x}(a^Tx+b)^2$$
を求めよ。

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
(12)

とする。

1. $x^T y = y^T x = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ を示せ。

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} = \sum_{i} x_i y_i = \sum_{i} y_i x_i = \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{x}$$
 (13)

2. $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ を成分 $(x_i, a_{i,j})$ で表せ。

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} = \sum_{i} \sum_{i} a_{ij} x_i x_j \tag{14}$$

- 3. $\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}^T \mathbf{x} = \mathbf{a}$ を示せ。 $\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}^T \mathbf{x}$ は n 次元列ベクトルであり、その第 k 要素は $\frac{\partial}{\partial x_k} \sum_i a_i x_i = a_k$. よって $\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}^T \mathbf{x} = \mathbf{a}$.
- 4. $\frac{\partial}{\partial x}(a^Tx+b)^2$ を求めよ。 $(a^Tx+b)^2$ はスカラゆえ, $\frac{\partial}{\partial x}(a^Tx+b)^2$ は列ベクトル。

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{a}^T \mathbf{x} + b)^2 = \frac{\partial}{\partial z} z^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} z \text{ where } z = \mathbf{a}^T \mathbf{x} + b$$

$$= 2(\mathbf{a}^T \mathbf{x} + b) \mathbf{a}$$
(15)