Exercise 3:
Convex function optimization

$f(\boldsymbol{x}) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 5x_1 - 3x_2 + 4$ とする。$f(\boldsymbol{x})$ が凸関数であることは既知とする。

1. f の勾配 ∇f を求めよ
2. $(0,0), (1,2), (1,0.5), (1,1)$ における f の勾配を求めよ
3. f を最小にする $\boldsymbol{x}$ とその時の $f(\boldsymbol{x})$ を求めよ

$f(\boldsymbol{x}) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 5x_1 - 3x_2 + 4$ とする。$f(\boldsymbol{x})$ が凸関数であることは既知とする。

1. f の勾配 ∇f を求めよ

   $\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 + x_2 - 5 \\ x_1 + 2x_2 - 3 \end{pmatrix}$

2. $(0,0), (1,2), (1,0.5), (1,1)$ における f の勾配を求めよ

   $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき、$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 0+0-5 \\ 0+0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$

   $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ のとき、$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 4+2-5 \\ 1+4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

   $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ のとき、$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 4+0.5-5 \\ 1+1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -1 \end{pmatrix}$

   $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき、$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 4+1-5 \\ 1+2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. f を最小にする $\boldsymbol{x}$ とその時の $f(\boldsymbol{x})$ を求めよ

   $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき、$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となるため、f を最小にする $\boldsymbol{x}$ は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。また、その時の $f(\boldsymbol{x})$ の値は

   $$f(x) = 2 + 1 + 1 - 5 - 3 + 4 = 0$$

   となる。