

連続最適化(2): 制約付き最適化

佐藤 一誠

sato@k.u-tokyo.ac.jp

<http://www.ms.k.u-tokyo.ac.jp>

制約付き最適化問題

2

- 制約付き最適化問題(constrained optimization problem): $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^d$ 上に定義される関数 $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ の最小値を求めよ

$$\min_{x \in \mathcal{X}} f(x) \quad \text{subject to } g(x) = 0, h(x) \leq 0$$

$$g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))^T$$

$$h(x) = (h_1(x), \dots, h_n(x))^T$$

- “subject to...”は「...を条件として」という意味
- ベクトルの等式・不等式は要素毎に適用
- g_i, h_i は互いに一次独立(linearly independent)であると仮定

実行可能性と凸性

3

$$\min_{x \in \mathcal{X}} f(x)$$

$$\text{subject to } g(x) = 0, h(x) \leq 0$$

- x が全ての制約条件を満たすとき, x を
実行可能解(feasible solution)という
 - 最適解は, 実行可能解の中で目的関数を最小にする
- 凸最適化問題(convex optimization problem):
関数 f が凸, 集合 \mathcal{X} が凸, 制約条件 g, h が凸
 - 最適値が一意に定まる
- 以下, 凸最適化問題を考える

講義の流れ



1. 等式制約付き最適化問題

- A) ラグランジュ未定乗数法
- B) 双対上昇法
- C) 乗数法

2. 不等式制約付き最適化問題

等式制約付き最適化問題

■ 等式制約付き最適化問題

$$\min_{x \in \mathcal{X}} f(x) \quad \text{subject to } g(x) = 0$$

$$g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))^T$$

■ 罰則法(penalty method):

- 初期値を x_k に設定して, 勾配法や準ニュートン法などで以下の制約なし最適化問題を解く:

$$x_{k+1} = \operatorname{argmin}_{x \in \mathcal{X}} f(x) + c_k \|g(x)\|^2$$

- c_k の値を徐々に増やしていく:

$$0 < c_1 < c_2 < \dots$$

■ c_k の決め方が難しい

講義の流れ



1. 等式制約付き最適化問題

A) ラグランジュ未定乗数法

B) 双対上昇法

C) 乗数法

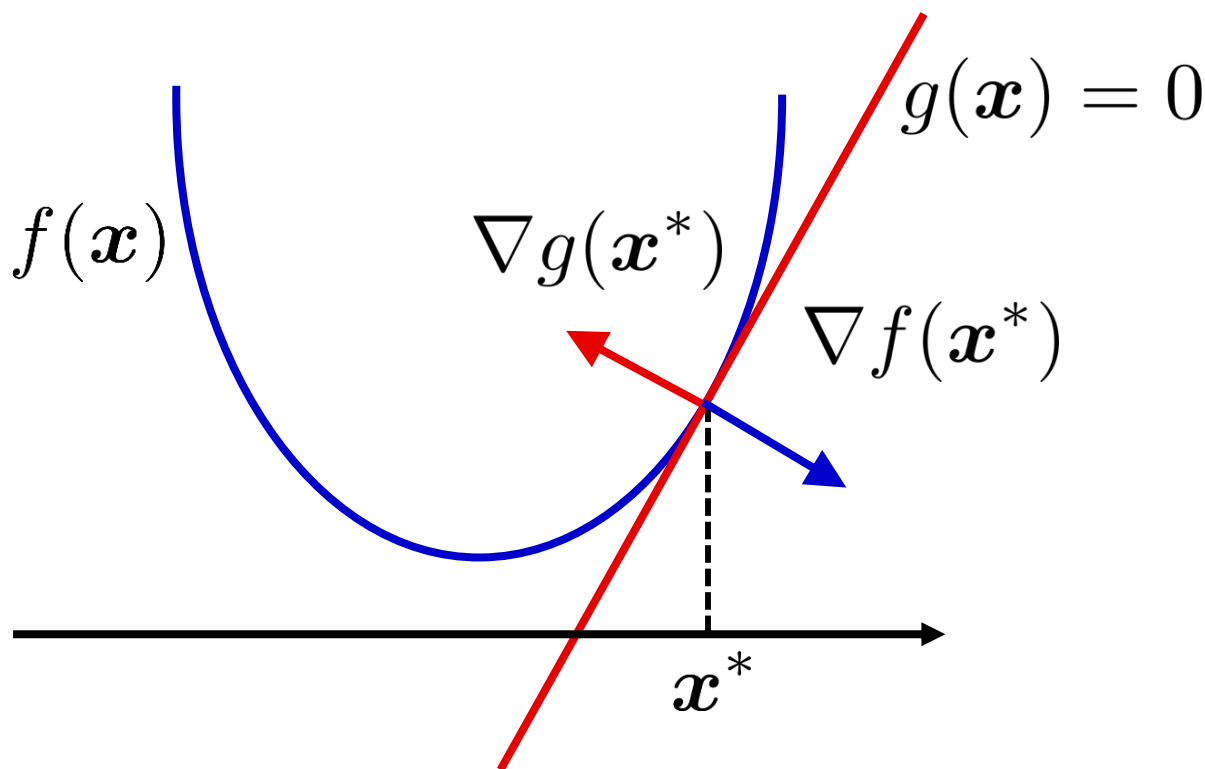
D) 交互方向乗数法

2. 不等式制約付き最適化問題

最適性条件

$$\min_{x \in \mathcal{X}} f(x) \quad \text{subject to } g(x) = 0$$

■ 最適解 x^* では, $\nabla f(x^*)$ と $\nabla g(x^*)$ が平行になる



最適性条件

$$\min_{x \in \mathcal{X}} f(x) \quad \text{subject to } g(x) = 0$$

$$g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))^{\top}$$

- 凸最適化問題に対して, x^* が最適解となるための必要条件は, ある λ^* に対して, 以下の2条件が成り立つこと:

- $\nabla f(x^*) + \nabla g(x^*)^{\top} \lambda^* = 0$

$$\nabla g(x) = (\nabla g_1(x), \dots, \nabla g_m(x))^{\top}$$

m個の等式制約

- $g(x^*) = 0$

$$\nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j^* \nabla g_j(x^*) = 0$$

ラグランジュ未定乗数法

$$\min_{x \in \mathcal{X}} f(x) \quad \text{subject to } g(x) = 0$$

■ ラグランジュ関数(Lagrangian):

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^\top g(x)$$

■ 最適解は以下の方程式を満たす(最適性条件):

$$\nabla_\lambda L(x, \lambda) = 0$$

$$\nabla_x L(x, \lambda) = 0$$

■ この方程式を解くことによって解を求める方法を
ラグランジュ未定乗数法(method of Lagrange
multipliers)とよぶ

- 以下の最適化問題の解を, ラグランジュ未定乗数法を用いて求めよ

$$\min_{x,y \in \mathbb{R}} 3x^2 + 2y^2$$

$$\text{subject to } x + y = 1$$

解答例

11

$$\min_{x,y \in \mathbb{R}} 3x^2 + 2y^2 \quad \text{subject to } x + y = 1$$

■ ラグランジュ関数は

$$L(x, y, \lambda) = 3x^2 + 2y^2 + \lambda(x + y - 1)$$

■ これより,

$$\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial x} = 6x + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial y} = 4y + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial \lambda} = x + y - 1 = 0$$

■ これらを解けば $(x, y) = (0.4, 0.6)$

講義の流れ



1. 等式制約付き最適化問題

- A) ラグランジュ未定乗数法
- B) 双対上昇法
- C) 乗数法

2. 不等式制約付き最適化問題

ラグランジュ双対問題

13

$$f^* = \min_{x \in \mathcal{X}} f(x) \quad \text{subject to } g(x) = 0$$

$$g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))^{\top}$$

■ ラグランジュ双対問題(Lagrange dual problem):

$$f^* = \max_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \omega(\lambda) \quad \omega(\lambda) = \inf_{x \in \mathcal{X}} L(x, \lambda)$$

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^{\top} g(x)$$

- 凸最適化問題に対しては最適解が一致
- 双対問題は制約なしになる

- 以下の最適化問題のラグランジュ双対問題を求め、最適解を求めよ

$$\min_{x,y \in \mathbb{R}} 3x^2 + 2y^2$$

$$\text{subject to } x + y = 1$$

解答例

15

$$\min_{x,y \in \mathbb{R}} 3x^2 + 2y^2 \quad \text{subject to } x + y = 1$$

■ $L(x, y, \lambda) = 3x^2 + 2y^2 + \lambda(x + y - 1)$

● $\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial x} = 6x + \lambda = 0 \quad \longrightarrow \quad x = -\frac{\lambda}{6}$

● $\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial y} = 4y + \lambda = 0 \quad \longrightarrow \quad y = -\frac{\lambda}{4}$

■ $\omega(\lambda) = \inf_{x,y \in \mathbb{R}} L(x, y, \lambda) = -\frac{5}{24}\lambda^2 - \lambda$

■ $\operatorname{argmax}_{\lambda \in \mathbb{R}} \omega(\lambda) = -\frac{12}{5} \quad \longrightarrow \quad (x, y) = (0.4, 0.6)$

双対変数の最適化

$$f^* = \max_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \omega(\lambda) \quad \omega(\lambda) = \inf_{x \in \mathcal{X}} L(x, \lambda)$$

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^\top g(x)$$

- 双対変数 λ を勾配法で最適化:

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + \varepsilon_k \nabla \omega(\lambda_k) \quad \varepsilon_k > 0 : \text{ステップ幅}$$

- $x_{k+1} = \operatorname{argmin}_{x \in \mathcal{X}} L(x, \lambda_k)$ とおけば,

$$\omega(\lambda_k) = f(x_{k+1}) + \lambda_k^\top g(x_{k+1}) \quad \text{より}$$

$$\nabla \omega(\lambda_k) = g(x_{k+1})$$

$$f^* = \max_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \omega(\lambda) \quad \omega(\lambda) = \inf_{x \in \mathcal{X}} L(x, \lambda)$$

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^\top g(x)$$

- 双対上昇法(dual ascent method): 適当な初期値から, ラグランジュ関数の最小化と双対変数の勾配上昇を交互に実行

- $x_{k+1} = \operatorname{argmin}_{x \in \mathcal{X}} L(x, \lambda_k)$
- $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \varepsilon_k g(x_{k+1})$

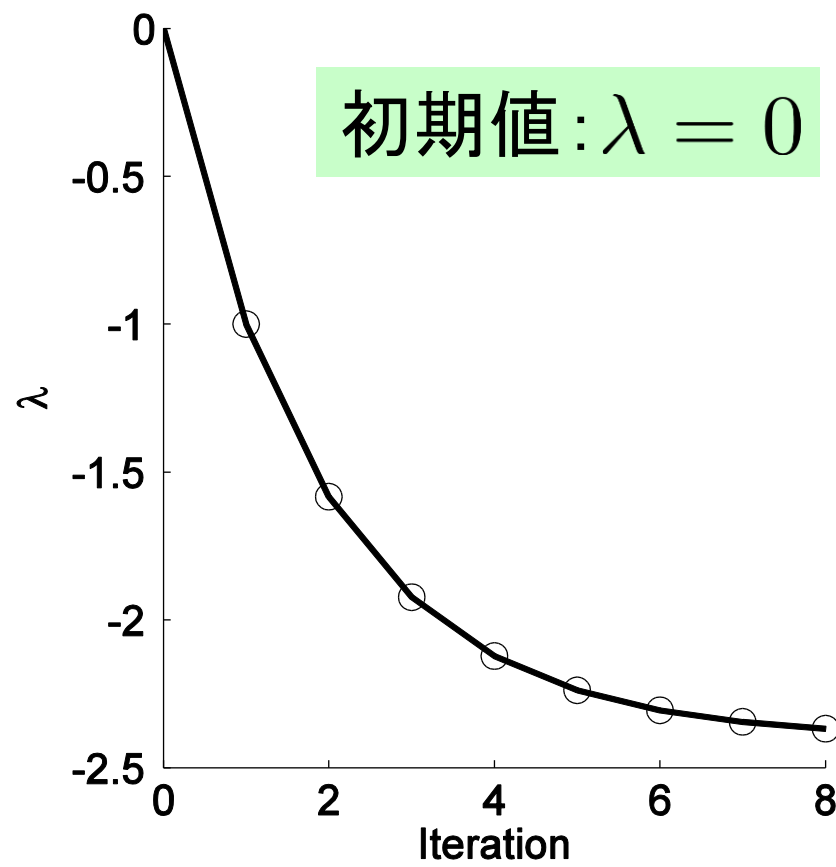
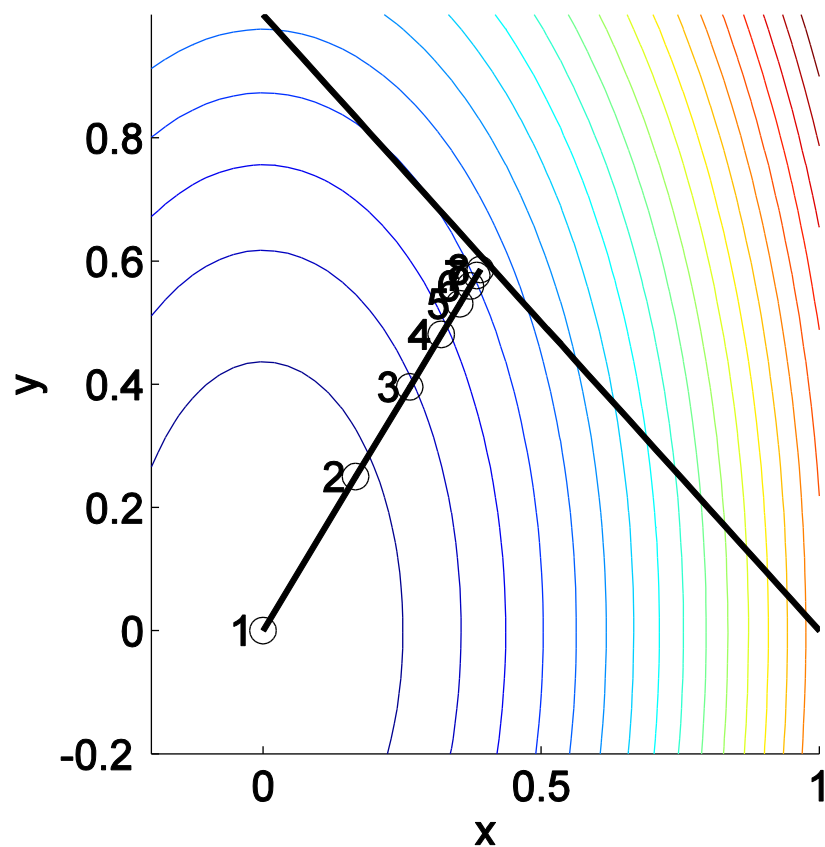
$\varepsilon_k > 0$: ステップ幅

実行例

18

$$\min_{x,y \in \mathbb{R}} 3x^2 + 2y^2 \quad \text{subject to } x + y = 1$$

■ 最適解 $(x, y) = (0.4, 0.6)$, $\lambda = -\frac{12}{5}$ に収束



講義の流れ



1. 等式制約付き最適化問題

- A) ラグランジュ未定乗数法
- B) 双対上昇法
- C) 乗数法

2. 不等式制約付き最適化問題

■ 拡張ラグランジュ関数(augmented Lagrangian):

$$L_c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\lambda}^\top \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) + \frac{c}{2} \|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\|^2 \quad c \geq 0$$

- 二次の項を加える事により凸性が増す

■ 双対上昇法と同様に, 双対変数 $\boldsymbol{\lambda}$ を勾配法で最適化:

$$\boldsymbol{\lambda}_{k+1} = \boldsymbol{\lambda}_k + \varepsilon_k \nabla \omega_c(\boldsymbol{\lambda}_k)$$

$$\varepsilon_k > 0 : \text{ステップ幅}$$

$$\omega_c(\boldsymbol{\lambda}) = \inf_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}} L_c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$$

双対変数の最適化

$$\boldsymbol{\lambda}_{k+1} = \boldsymbol{\lambda}_k + \varepsilon_k \nabla \omega_c(\boldsymbol{\lambda}_k)$$

$$L_c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\lambda}^\top \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) + \frac{c}{2} \|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\|^2 \quad c \geq 0$$

■ $\boldsymbol{x}_{k+1} = \operatorname{argmin}_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}} L_c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}_k)$ とおけば,

$$\omega_c(\boldsymbol{\lambda}_k) = \inf_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}} L_c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}_k)$$

$$= f(\boldsymbol{x}_{k+1}) + \boldsymbol{\lambda}_k^\top \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{k+1}) + \frac{c}{2} \|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{k+1})\|^2$$

より $\nabla \omega_c(\boldsymbol{\lambda}_k) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{k+1})$

■ 乗数法(method of multipliers):

適当な初期値から,
拡張ラグランジュ関数の最小化と
双対変数の勾配上昇を交互に実行:

- $$\mathbf{x}_{k+1} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} L_c(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}_k)$$

- $$\boldsymbol{\lambda}_{k+1} = \boldsymbol{\lambda}_k + c\mathbf{g}(\mathbf{x}_{k+1})$$

■ ステップ幅は $\varepsilon_k = c$ と設定すると,

$$\mathbf{x}_{k+1} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}_{k+1})$$

の最適性条件が満たされる(次ページ参照)

乗数法のステップ幅の選択

23

$$L_c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\lambda}^\top \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) + \frac{c}{2} \|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\|^2$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{k+1} = \boldsymbol{\lambda}_k + c\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{k+1})$$

■ $\boldsymbol{x}_{k+1} = \operatorname{argmin}_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}} L_c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}_k)$ の最適性条件より

$$\mathbf{0} = \nabla_{\boldsymbol{x}} L_c(\boldsymbol{x}_{k+1}, \boldsymbol{\lambda}_k)$$

$$= \nabla_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}_{k+1}) + \nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{k+1})^\top (\boldsymbol{\lambda}_k + c\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{k+1}))$$

$$= \nabla_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}_{k+1}) + \nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{k+1})^\top \boldsymbol{\lambda}_{k+1} \quad \leftarrow$$

$$= \nabla_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}_{k+1}, \boldsymbol{\lambda}_{k+1}) \quad L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\lambda}^\top \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$$

➡ $\boldsymbol{x}_{k+1} = \operatorname{argmin}_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}_{k+1})$ の最適性条件も満たす

$$\min_{x, y \in \mathbb{R}} 3x^2 + 2y^2 \quad \text{subject to } x + y = 1$$

■ $L_c(x, y, \lambda) = 3x^2 + 2y^2 + \lambda(x + y - 1) + \frac{c}{2}(x + y - 1)^2$

● $\frac{\partial L_c(x, y, \lambda)}{\partial x} = 6x + \lambda + c(x + y - 1) = 0 \Rightarrow x = \frac{c - \lambda}{6 + 5c/2}$

● $\frac{\partial L_c(x, y, \lambda)}{\partial y} = 4y + \lambda + c(x + y - 1) = 0 \Rightarrow y = \frac{c - \lambda}{4 + 5c/3}$

■ 乗数法のアルゴリズム:

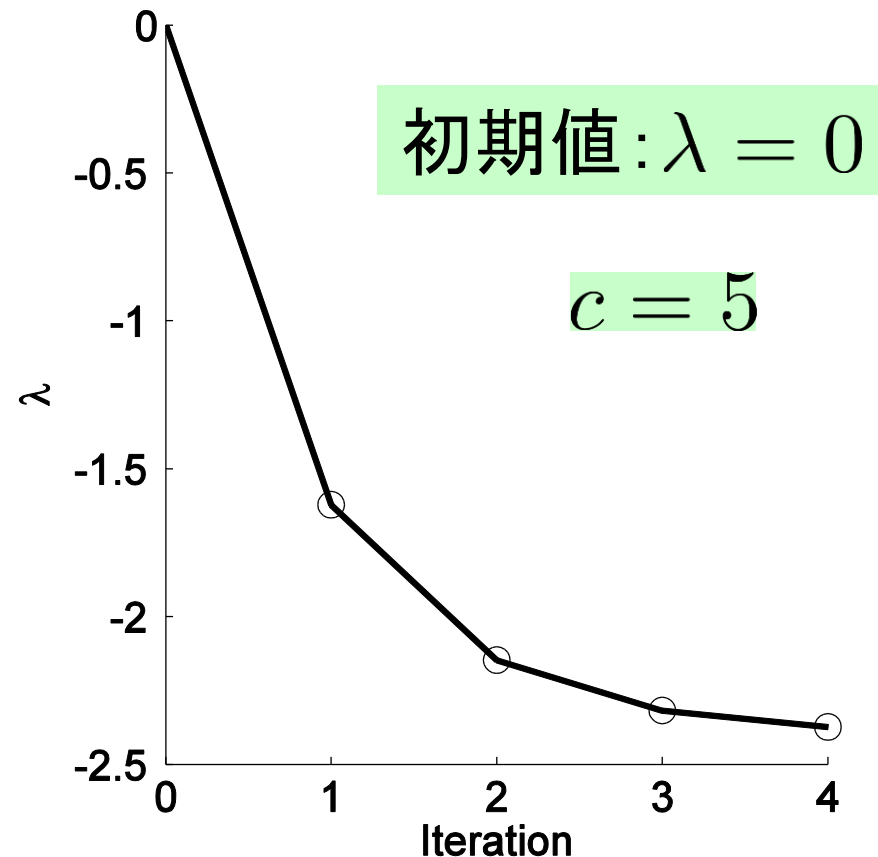
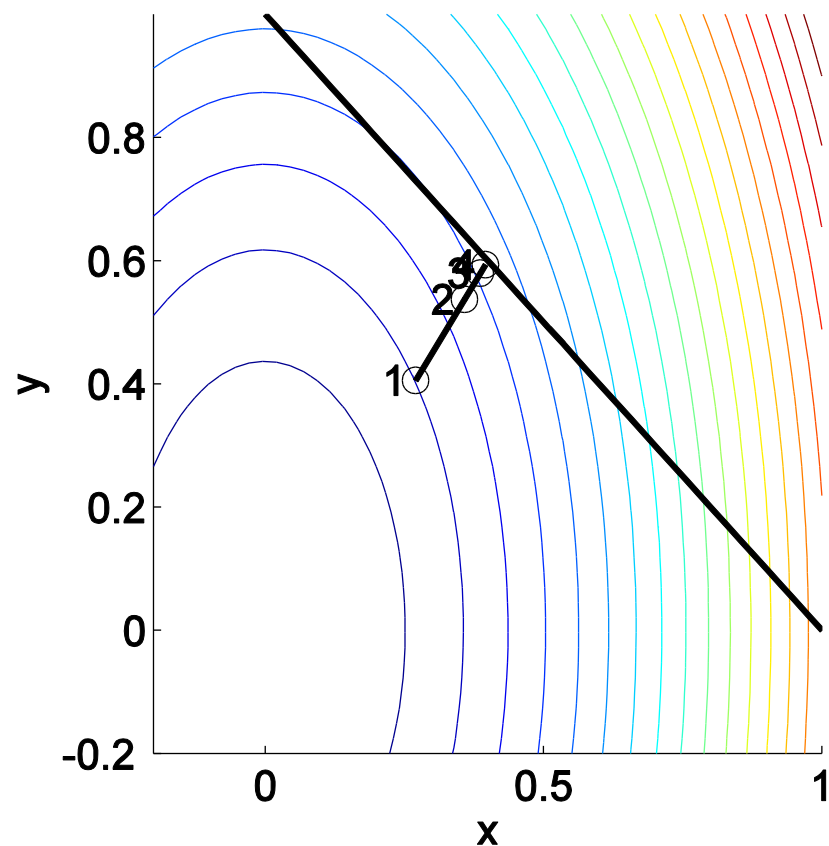
● $x_{k+1} = \frac{c - \lambda_k}{6 + 5c/2}, \quad y_{k+1} = \frac{c - \lambda_k}{4 + 5c/3}$

● $\lambda_{k+1} = \lambda_k + c(x + y - 1)$

実行例

$$\min_{x,y \in \mathbb{R}} 3x^2 + 2y^2 \quad \text{subject to } x + y = 1$$

■ この例では双対上昇法より速く収束



講義の流れ



1. 等式制約付き最適化問題
2. 不等式制約付き最適化問題
 - A) 最適性条件
 - B) 双対問題

■ 不等式制約付き最適化問題

$$\min_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}} f(\boldsymbol{x}) \quad \text{subject to } \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) \leq \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = (h_1(\boldsymbol{x}), \dots, h_n(\boldsymbol{x}))^\top$$

- $h_i(\boldsymbol{x}) = 0$ のとき, この制約を有効制約 (active constraint) とよぶ

制約なし最適化問題への変換

28

$$\min_{x \in \mathcal{X}} f(x) \quad \text{subject to } h(x) \leq 0$$

■ 障壁法(barrier method):

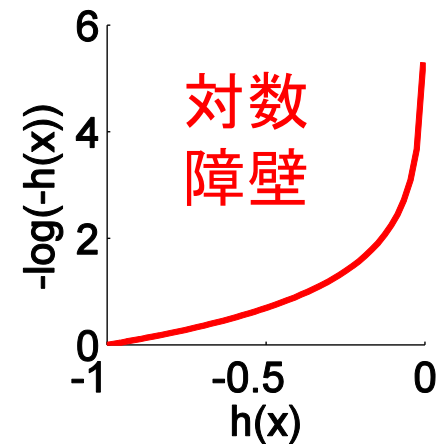
- 初期値を x_k に設定して,
勾配法や準ニュートン法などで
以下の制約なし最適化問題を解く:

$$x_{k+1} = \operatorname{argmin}_{x \in \mathcal{X}} f(x) - c_k \log(-h(x))$$

- c_k の値を徐々に減らしていく: $c_1 > c_2 > \dots > 0$

■ 途中の解 x_{k+1} が常に $h(x_{k+1}) \leq 0$ を満たす (つまり, 実行可能領域の内側にある)ことから, 内点法(interior-point method)ともよばれる

■ c_k の決め方が難しい



制約なし最適化問題への変換

29

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} f(\mathbf{x}) \quad \text{subject to } h(\mathbf{x}) \leq 0$$

■ 罰則法(penalty method):

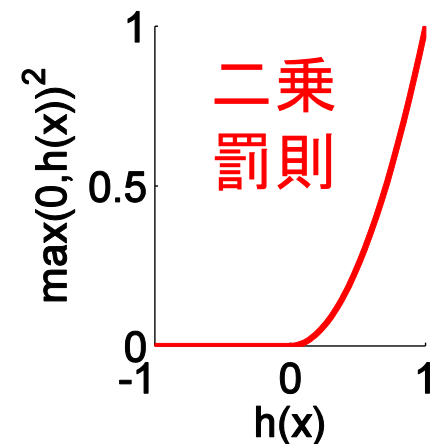
- 初期値を \mathbf{x}_k に設定して,
勾配法や準ニュートン法などで
以下の制約なし最適化問題を解く:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} f(\mathbf{x}) + c_k \max(0, h(\mathbf{x}))^2$$

- c_k の値を徐々に増やしていく: $0 < c_1 < c_2 < \dots$

■ 途中の解 \mathbf{x}_{k+1} が一般に $h(\mathbf{x}_{k+1}) > 0$ を満たす (つまり, 実行可能領域の外側にある)ことから, 外点法(exterior-point method)ともよばれる

■ c_k の決め方が難しい

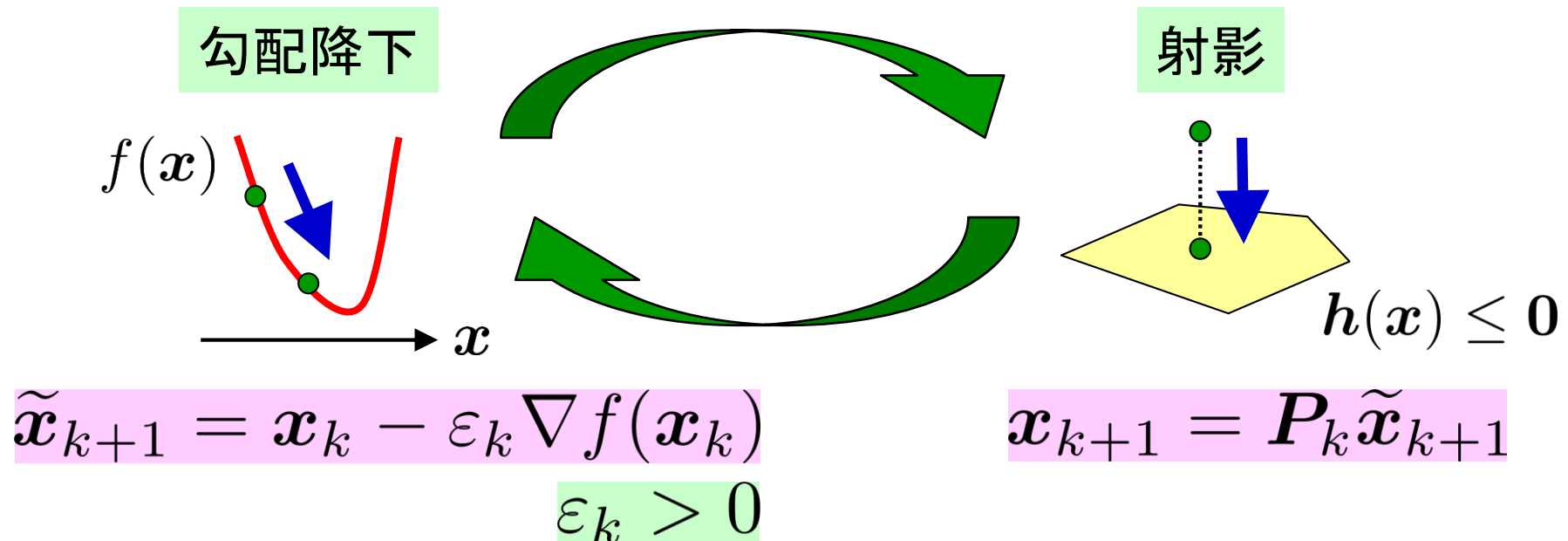


射影勾配法

$$\min_{x \in \mathcal{X}} f(x) \quad \text{subject to } h(x) \leq 0$$

■ 射影勾配法(projected gradient method):

- 勾配降下と実行可能領域への射影を繰り返す



- まとめると $x_{k+1} = P_k(x_k - \varepsilon_k \nabla f(x_k))$
- 射影が簡単に計算できるとき、効率が良い

講義の流れ



1. 等式制約付き最適化問題
2. 不等式制約付き最適化問題
 - A) 最適性条件
 - B) 双対問題

有効な制約と有効でない制約

32

$$\min_{x \in \mathcal{X}} f(x) \quad \text{subject to } h(x) \leq 0$$

- 許容解 x において $h(x)=0$ である制約を有効な制約(active constraint)
- 許容解 x において $h(x)<0$ である制約を有効でない制約(inactive constraint)

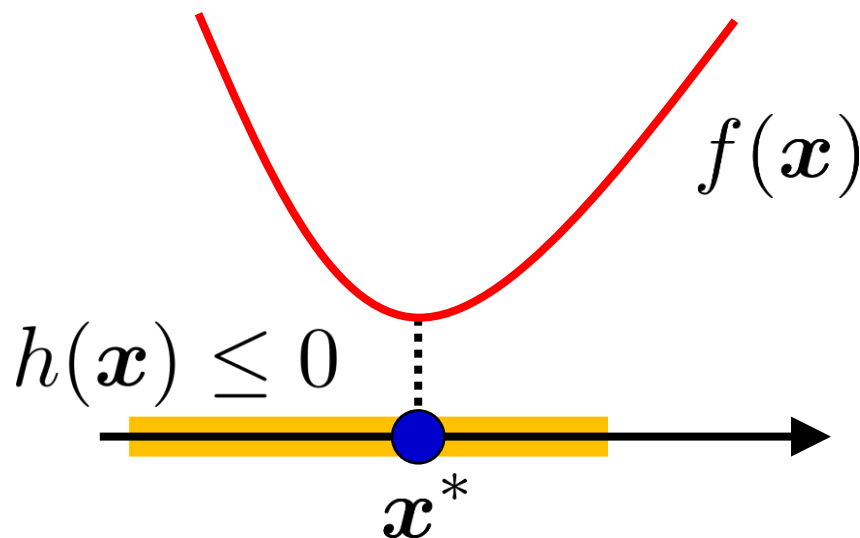
と呼ぶ

最適性条件

$$\min_{x \in \mathcal{X}} f(x) \quad \text{subject to } h(x) \leq 0$$

- 最適解 x^* において制約が有効でないとき、最適解は制約なし最適化問題 $\min_{x \in \mathcal{X}} f(x)$ を解くことによって得られる

➡ $\nabla f(x^*) = 0$

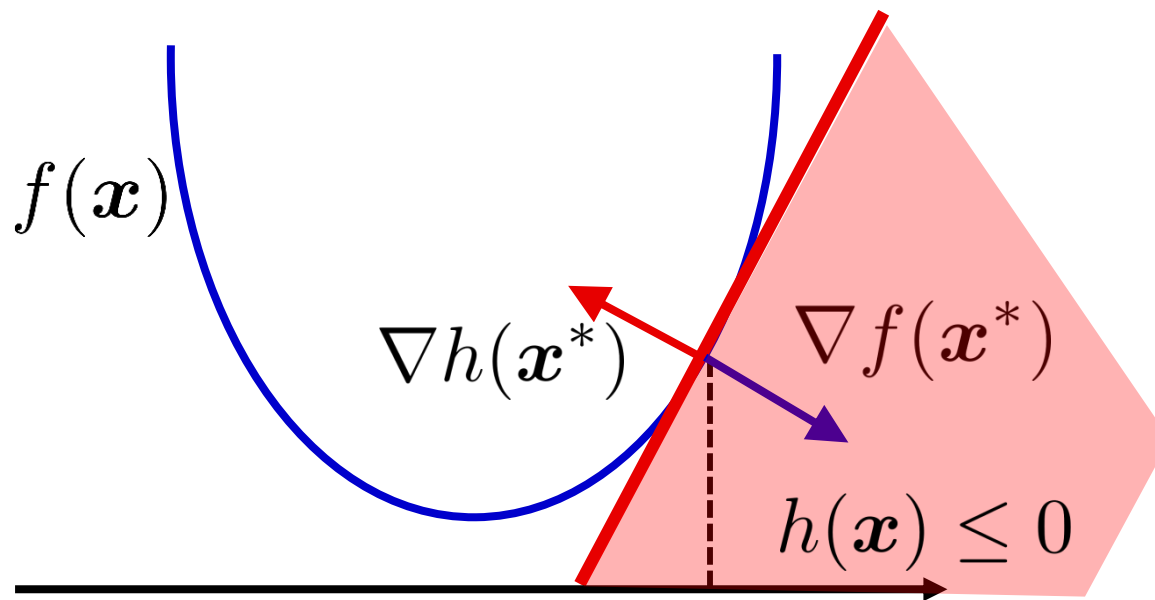


最適性条件

$$\min_{x \in \mathcal{X}} f(x) \quad \text{subject to } h(x) \leq 0$$

- 最適解 x^* において制約が有効なとき,
ラグランジュの未定乗数法より, 次式を得る:

$$\nabla f(x^*) + \mu^* \nabla h(x^*) = 0 \quad h(x^*) = 0$$



- また, $\nabla h(x^*)$ の向きより $\mu^* \geq 0$

最適性条件

■ まとめると,

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) + \mu^* \nabla h(\boldsymbol{x}^*) = \mathbf{0}$$

- $h(\boldsymbol{x}^*) < 0$ ならば $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \mathbf{0}$ より $\mu^* = 0$
- $h(\boldsymbol{x}^*) = 0$ ならば $\mu^* \geq 0$

■ 更にまとめると

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) + \mu^* \nabla h(\boldsymbol{x}^*) = \mathbf{0}$$

$$h(\boldsymbol{x}^*) \leq 0$$

$$\mu^* \geq 0$$

$$\mu^* h(\boldsymbol{x}^*) = 0$$

(相補性条件とよぶ.
どちらかは必ずゼロ)

KKT条件

$$\min_{x \in \mathcal{X}} f(x) \quad \text{subject to } g(x) = 0, \quad h(x) \leq 0$$

$$g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))^{\top}$$

$$h(x) = (h_1(x), \dots, h_n(x))^{\top}$$

■ 最適解の必要条件 (凸の場合は必要十分条件):

$$\bullet \quad \nabla f(x^*) + \lambda^{*\top} \nabla g(x^*) + \mu^{*\top} \nabla h(x^*) = 0$$

$$\bullet \quad g(x^*) = 0$$

$$\bullet \quad h(x^*) \leq 0$$

$$\bullet \quad \mu^* \geq 0$$

$$\bullet \quad \mu_i^* h_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

カルーシュ・キューン・タッカー
(KKT)条件

(Karush-Kuhn-Tucker conditions)

- 以下の最適化問題の解を, KKT条件を用いて求めよ

$$\min_{x,y \in \mathbb{R}} 3x^2 + 2y^2$$

$$\text{subject to } x + y \geq 1$$

解答例

38

$$\min_{x, y \in \mathbb{R}} 3x^2 + 2y^2 \quad \text{subject to } x + y \geq 1$$

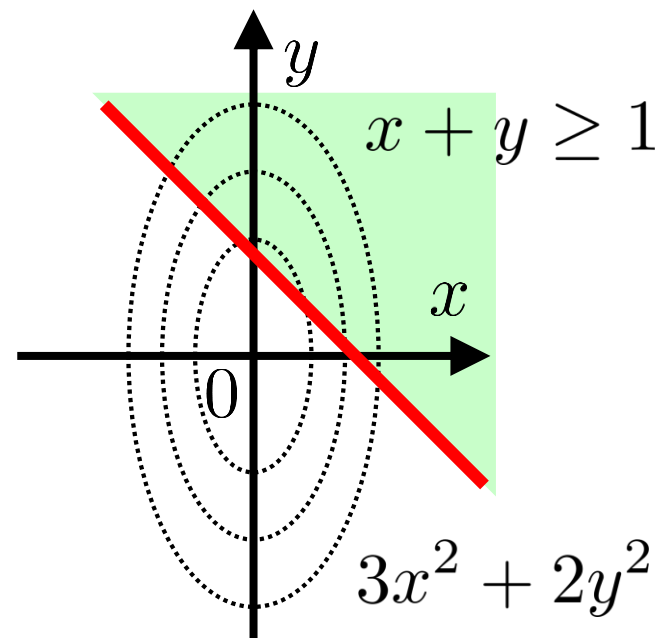
■ KKT条件は

$$6x - \mu = 0$$

$$4y - \mu = 0$$

$$x + y \geq 1$$

$$\mu(1 - x - y) = 0$$



■ $\mu = 0$ のとき $x = y = 0$ となり, $x + y \geq 1$ を満たさないので実行可能解でない

■ $1 - x - y = 0$ のとき $(x, y) = (0.4, 0.6)$ となり, $x + y \geq 1$ を満たすので最適解である

講義の流れ



1. 等式制約付き最適化問題
2. 不等式制約付き最適化問題
 - A) 最適性条件
 - B) 双対問題

■ 主問題(primal problem):

$$\min_{x \in \mathcal{X}} f(x) \quad \text{subject to } g(x) = 0, \quad h(x) \leq 0$$

$$g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))^T$$

$$h(x) = (h_1(x), \dots, h_n(x))^T$$

■ 双対問題(dual problem):

- 目的関数と制約条件を入れ換えたような形式の問題を考える
- 制約条件から目的関数を作る
- 目的関数から制約条件を作る

$$f^* = \min_{x \in \mathcal{X}} f(x) \quad \text{subject to } g(x) = 0, \quad h(x) \leq 0$$

■ ラグランジュ双対問題(Lagrange dual problem):

$$f^* = \max_{\lambda, \mu} \omega(\lambda, \mu) \\ \text{subject to } \mu \geq 0$$

$$\omega(\lambda, \mu) = \inf_{x \in \mathcal{X}} L(x, \lambda, \mu)$$

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda^\top g(x) + \mu^\top h(x)$$

- 凸最適化問題に対しては最適解が一致
- 双対問題の方が制約が単純

- 以下の最適化問題のラグランジュ双対問題を求め、最適解を求めよ

$$\min_{x,y \in \mathbb{R}} 3x^2 + 2y^2$$

$$\text{subject to } x + y \geq 1$$

解答例

43

$$\min_{x,y \in \mathbb{R}} 3x^2 + 2y^2 \quad \text{subject to } x + y \geq 1$$

$$\blacksquare L(x, y, \mu) = 3x^2 + 2y^2 + \mu(1 - x - y)$$

$$\frac{\partial L(x, y, \mu)}{\partial x} = 6x - \mu = 0 \quad \longrightarrow \quad x = \frac{\mu}{6}$$

$$\frac{\partial L(x, y, \mu)}{\partial y} = 4y - \mu = 0 \quad \longrightarrow \quad y = \frac{\mu}{4}$$

$$\blacksquare \omega(\mu) = \inf_{x,y} L(x, y, \mu) = -\frac{5}{24}\mu^2 + \mu$$

$$\blacksquare \operatorname{argmax}_{\mu \geq 0} \omega(\mu) = \frac{12}{5} \quad \longrightarrow \quad (x, y) = (0.4, 0.6)$$

射影勾配法

$$\min_{x \in \mathcal{X}} f(x) \quad \text{subject to } g(x) = 0, \quad h(x) \leq 0$$

■ 双対問題:

$$\max_{\lambda, \mu} \omega(\lambda, \mu) \quad \text{subject to } \mu \geq 0$$

$$\omega(\lambda, \mu) = \inf_{x \in \mathcal{X}} L(x, \lambda, \mu)$$

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda^\top g(x) + \mu^\top h(x)$$

■ 射影勾配法:

- $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \varepsilon_k \nabla_{\lambda} \omega(\lambda_k)$
- $\mu_{k+1} = \max(0, \mu_k + \varepsilon_k \nabla_{\mu} \omega(\mu_k))$

$$\varepsilon_k > 0$$

ベクトルに対するmaxは要素毎の最大

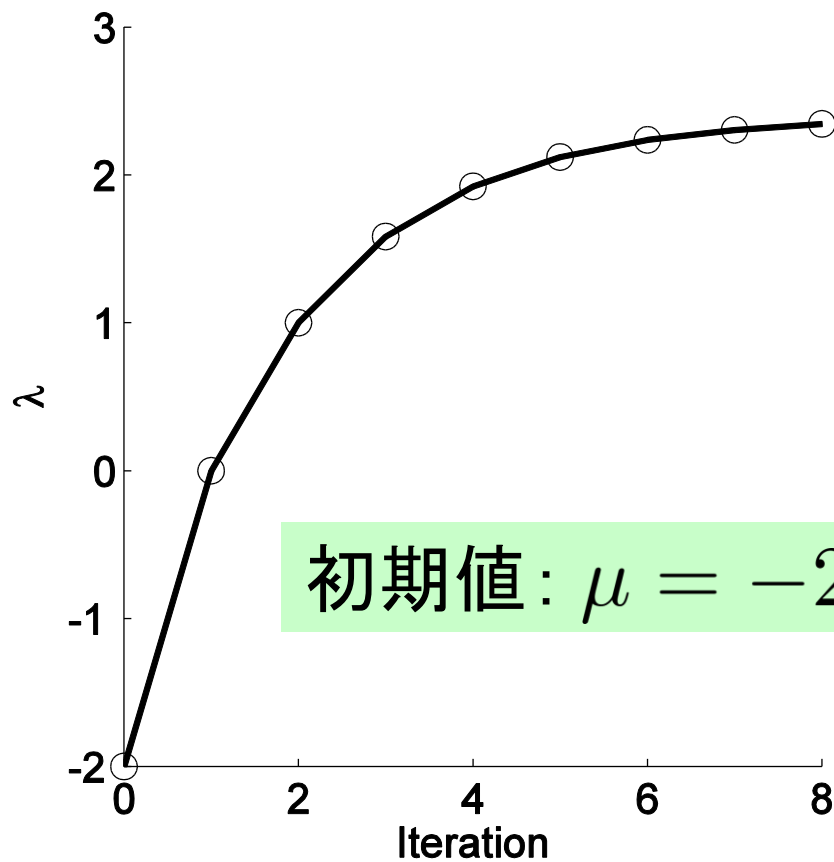
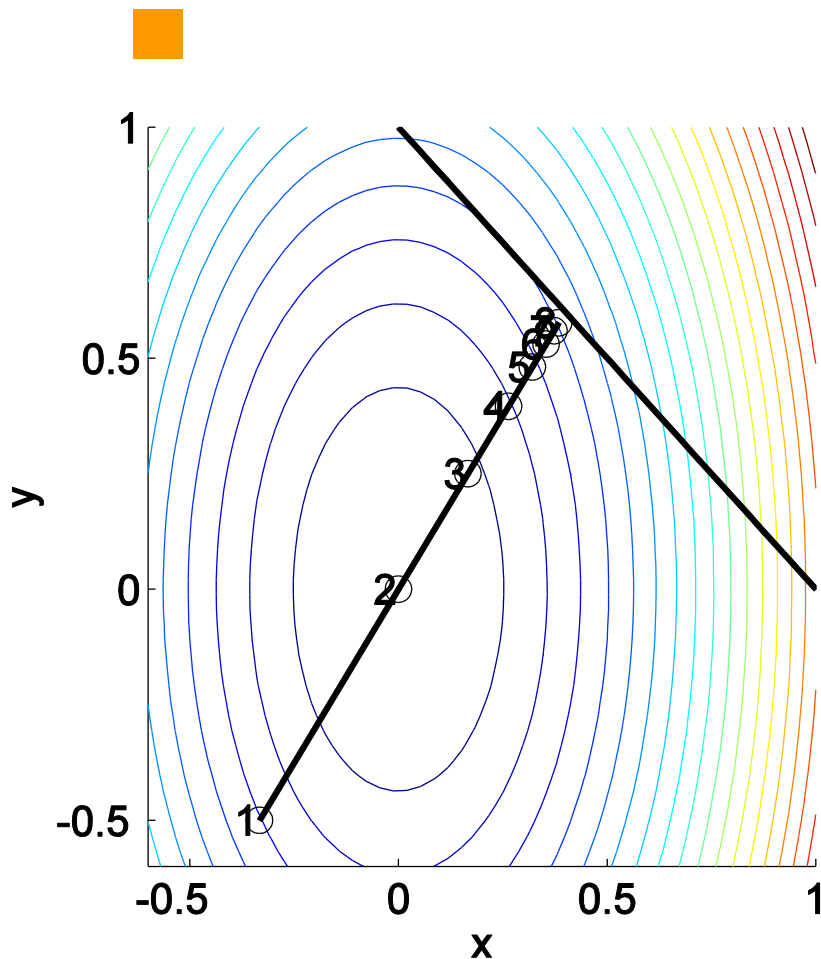
実行例

45

$$\min_{x,y \in \mathbb{R}} 3x^2 + 2y^2$$

subject to $x + y \geq 1$

$$\omega(\mu) = -\frac{5}{24}\mu^2 + \mu$$



■ 制約付き最適化問題:

$$\min_{x \in \mathcal{X}} f(x) \quad \text{subject to } g(x) = 0, \quad h(x) \leq 0$$

● ラグランジュ関数:

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda^\top g(x) + \mu^\top h(x)$$

● 双対問題:

$$\max_{\lambda, \mu} \inf_{x \in \mathcal{X}} L(x, \lambda, \mu) \quad \text{subject to } \mu \geq 0$$

● KKT条件:

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0$$

$$\nabla_\lambda L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0 \quad \mu^* \geq 0$$

$$\nabla_\mu L(x^*, \lambda^*, \mu^*) \leq 0 \quad \mu_i^* h_i(x^*) = 0, \quad \forall i$$

■ 二次計画(quadratic programming)問題

$$\min_x \frac{1}{2} x^\top A x + b^\top x \quad \text{subject to } Cx = d \\ Ex \leq f$$

のKKT条件を求めよ

- ベクトルの不等式は要素毎の不等式

■ $A = O$ のとき, 線形計画(linear programming)問題とよぶ

- 障壁法と罰則法を実装し、以下の最適化問題の解を数値的に求めよ:

$$\min_{x,y \in \mathbb{R}} 3x^2 + 2y^2 \quad \text{subject to } x + y \geq 1$$

- 障壁法:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} f(\mathbf{x}) - c_k \log(-h(\mathbf{x}))$$

$$c_1 > c_2 > \cdots > 0$$

- 罰則法:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} f(\mathbf{x}) + c_k \max(0, h(\mathbf{x}))^2$$

$$0 < c_1 < c_2 < \cdots$$

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} f(\mathbf{x}) \quad \text{subject to } h(\mathbf{x}) \leq 0$$