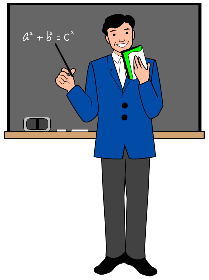
確率と統計(3)：確率不等式，大数の法則，中心極限定理，仮説検定

杉山将・本多淳也
sugi@k.u-tokyo.ac.jp, jhonda@k.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.k.u-tokyo.ac.jp



講義の流れ

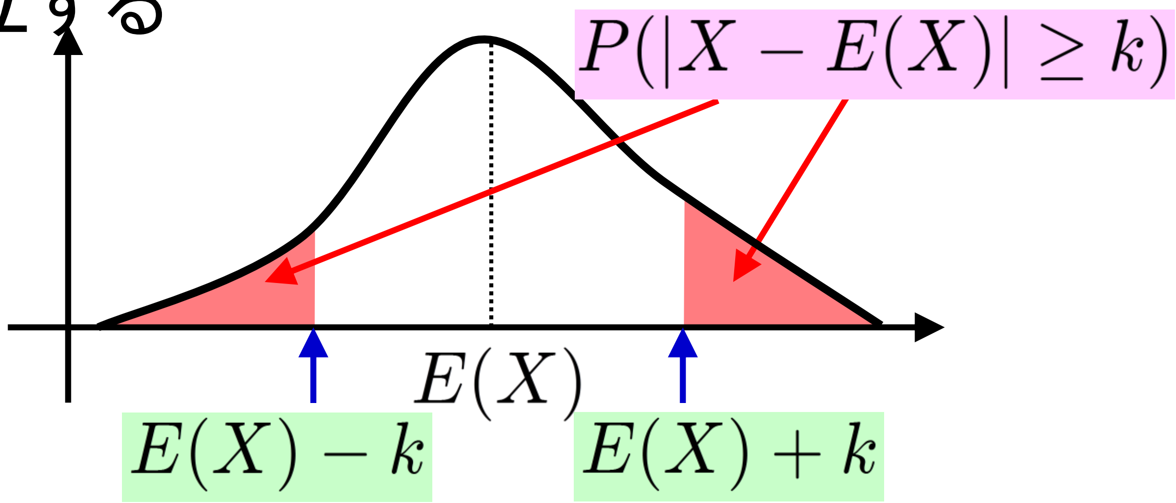
1. 確率不等式
2. 大数の法則
3. 中心極限定理
4. 仮説検定

チェビシェフの不等式

- チェビシェフの不等式(Chebyshev’s inequality)

$$P(|X - E(X)| \geq k) \leq \frac{V(X)}{k^2} \qquad k > 0$$

- 確率分布の具体的な形は分からないが期待値と分散が分かるとき，チェビシェフの不等式によって確率の上限が計算できる
- 分散をもつ任意の確率変数に対してチェビシェフの不等式は成立する



チェビシェフの不等式（証明）

$$P(|X - E(X)| \geq k) \leq \frac{V(X)}{k^2}$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x)dx$$

$$\geq \int_I (x - E(X))^2 f(x)dx$$

$$I = \{x : |x - E(X)| \geq k\}$$

$$\geq k^2 \int_I f(x)dx$$

$$= k^2\ P(|X - E(X)| \geq k)$$

演習

1. ある試験の点数の平均が60点，標準偏差が4点であった．65点以上または55点以下の人は全体の何パーセント以下か？
2. ある試験の点数の平均が60点，標準偏差が5点であった．点数が50点より高く70点より低い人は全体の何パーセント以上か？

$$P(|X - E(X)| \geq k) \leq \frac{V(X)}{k^2}$$

解答例

1. ６０±５点の範囲外の人の割合は

$$P(|X-60|\geq 5)\leq \frac{4^2}{25}=0.64$$

2. ６０±１０点の範囲外の人の割合は

$$P(|X-60|\geq 10)\leq \frac{5^2}{100}=0.25$$

よって，６０±１０点の範囲に入っている人の割合は

$$P(|X-60|<10)=1-P(|X-60|\geq 10)$$

$$\geq 1-0.25=0.75$$

- なお，正規分布の場合の割合はそれぞれ0.21, 0.95

その他の便利な不等式

- マルコフの不等式(Markov’s inequality):

$$P(X \geq a) \leq \frac{1}{a} E[X] \ \text{ for any } a > 0$$

$X \geq 0$

- イェンセンの不等式(Jensen’s inequality):

$$E[h(X)] \geq h(E[X])$$

$h(x)$: 凸関数（次頁）

- ヘルダーの不等式(Hölder’s inequality):

$$E[|XY|] \leq \left(E[|X|^p]\right)^{1/p} \left(E[|Y|^q]\right)^{1/q}$$

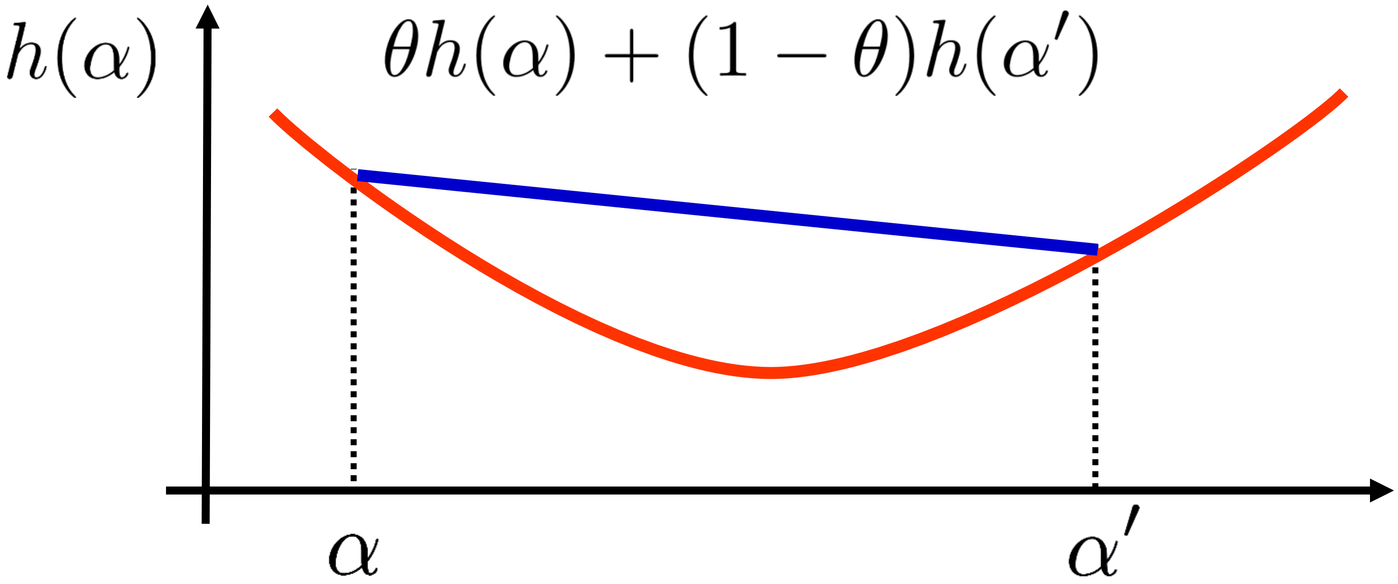
$$\text{for any } p, q > 0 \text{ such that } 1/p + 1/q = 1$$

特に $p = q = 2$ の場合をコーシー・シュワルツの不等式(Cauchy-Schwarz’s inequality)とよぶ

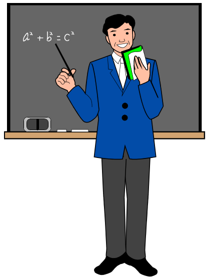
凸関数

- 任意の α, α' と任意の $\theta \in (0,1)$ に対して以下の式が成り立つとき，$h(\alpha)$ は凸関数(convex function)であるという

$$\theta h(\alpha) + (1-\theta)h(\alpha') \geq h(\theta\alpha + (1-\theta)\alpha')$$



$$E[h(X)] \geq h(E[X])$$



講義の流れ

1. 確率不等式
2. 大数の法則
3. 中心極限定理
4. 仮説検定

独立同一分布

- 同じ分布から独立に n 個の標本

$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

を取り出したとき，これらは独立同一分布に従う (independently and identically distributed, i.i.d.)という

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の同時確率密度関数は

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(x_1)g(x_2)\cdots g(x_n)$$

$g(x)$: 各標本の確率密度関数

i.i.d確率変数の標本平均

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$:期待値 μ, 分散 σ^2 のi.i.d.標本
- 標本平均 $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ の性質:

証明は演習

- 期待値は変わらない: $E(\overline{X}_n) = \mu$
- 分散は $1/n$ になる: $V(\overline{X}_n) = \dfrac{\sigma^2}{n}$

⇒ 標本平均を取れば値が安定する！

解答例

- $$E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E[X_i]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu=\mu$$

- $$V\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}V\left[X_i\right]=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$$

大数の弱法則

- 大数の弱法則(weak law of large numbers): 任意の正の定数 ε に対して，$n \to \infty$ のとき

$$P(|\overline{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) \to 0$$

- 確率論の用語ではこれを，$\overline{X}_n$ が μ に確率収束(convergence in probability)するという
- 解釈: 標本を十分たくさん取れば，標本平均を真の期待値とみなしても良い

証明

- 各標本の期待値を μ , 分散を σ^2とすれば,

$$E(\overline{X}_n) = \mu \qquad V(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

- チェビシェフの不等式を使うと

$$P(|\overline{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2/n}{\varepsilon^2}$$

- $n \to \infty$ のとき, 右辺はゼロに収束する.
（実際は分散が存在しなくても成り立つ）

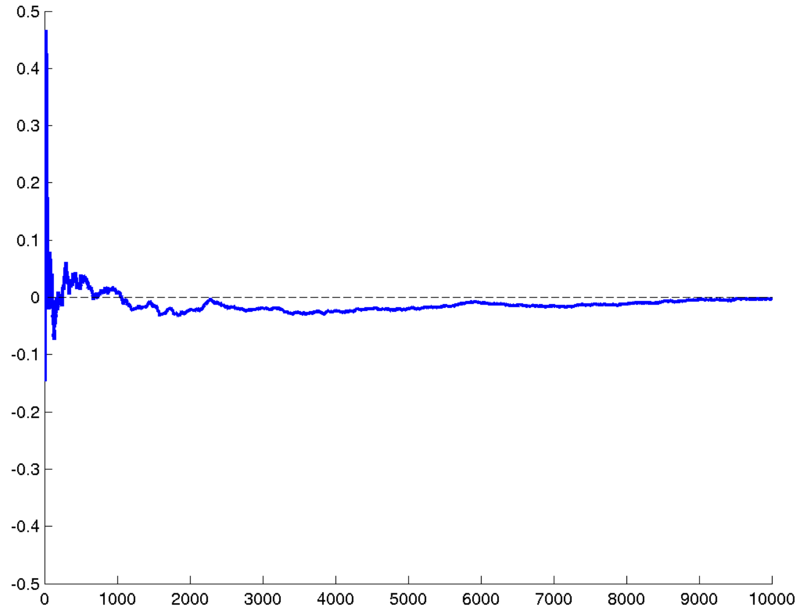
大数の強法則

- 大数の強法則(strong law of large numbers): $n \to \infty$で $\overline{X}_n$ は μ に概収束(almost sure convergence)する

$$\overline{X}_n \to \mu \quad \text{with probability 1}$$

- 例: $\{X_i\}_{i=1}^n$ が標準正規分布に独立に従うとき

$\overline{X}_n$



n

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

標本平均は確かに母平均0に収束していく

確率収束と概収束の違い

- 確率収束は X_n の確率分布を n ごとに考えるのに対し, 概収束では無限列 $\{X_n\}$ の確率分布を考える
- 例えば, 互いに独立な以下の確率変数列を考える:

$$X_n = \begin{cases} 0, & \text{with probability } 1 - 1/n \\ 1, & \text{with probability } 1/n \end{cases}$$

  - $\lim_{n\to\infty} \Pr(|X_n| > \epsilon) = 0$: X_n は0に確率収束
  - $\sum_{n=1}^{\infty} \Pr(|X_n| = 1) = \infty$: $\{X_n\}$ は(確率1で)無限個の n について値1をとる→概収束しない
(厳密にはボレル・カンテリの補題を用いる)

コーシー分布

- コーシー分布(Cauchy distribution)

$\alpha > 0$

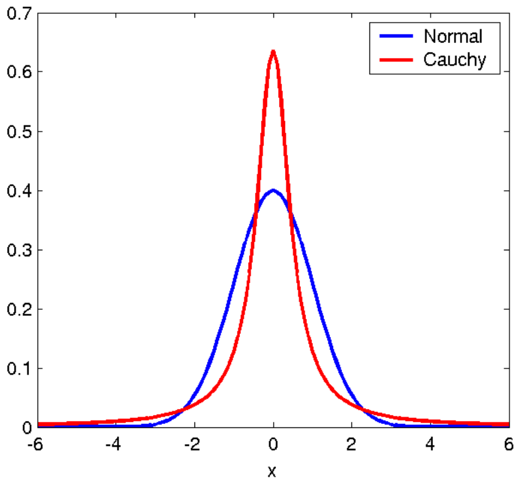
$$f(x) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + (x - \lambda)^2)}$$

- 標準正規分布に独立に従う確率変数 X, Y の比 X/Y は $\alpha = 1, \lambda = 0$ のコーシー分布に従う

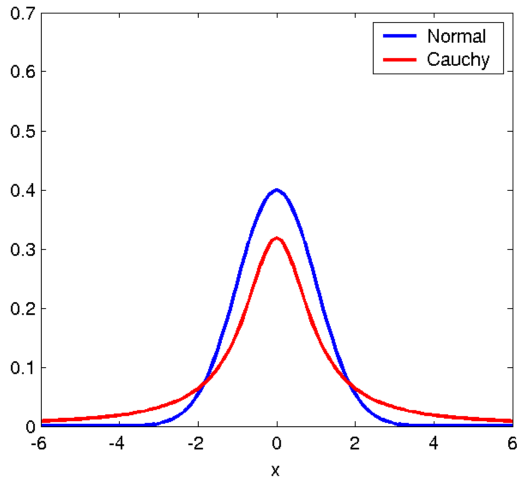
コーシー分布の性質

- コーシー分布は見た目が正規分布と似ているが，正規分布と異なり**期待値と分散が存在しない**

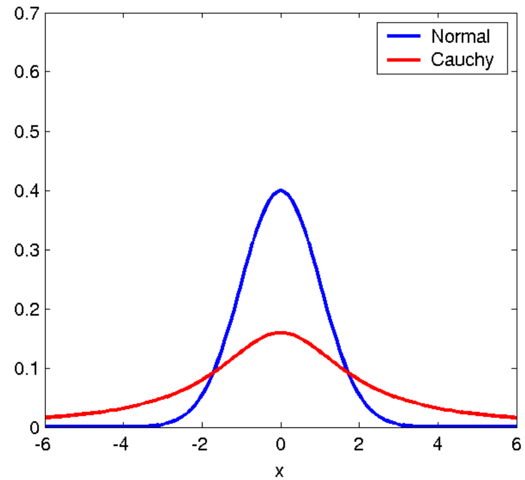
$\lambda = 0$



$\alpha = 0.5$



$\alpha = 1$



$\alpha = 2$

コーシー分布の期待値について

- 定義より，コーシー分布の期待値は

$\alpha = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)}dx$$

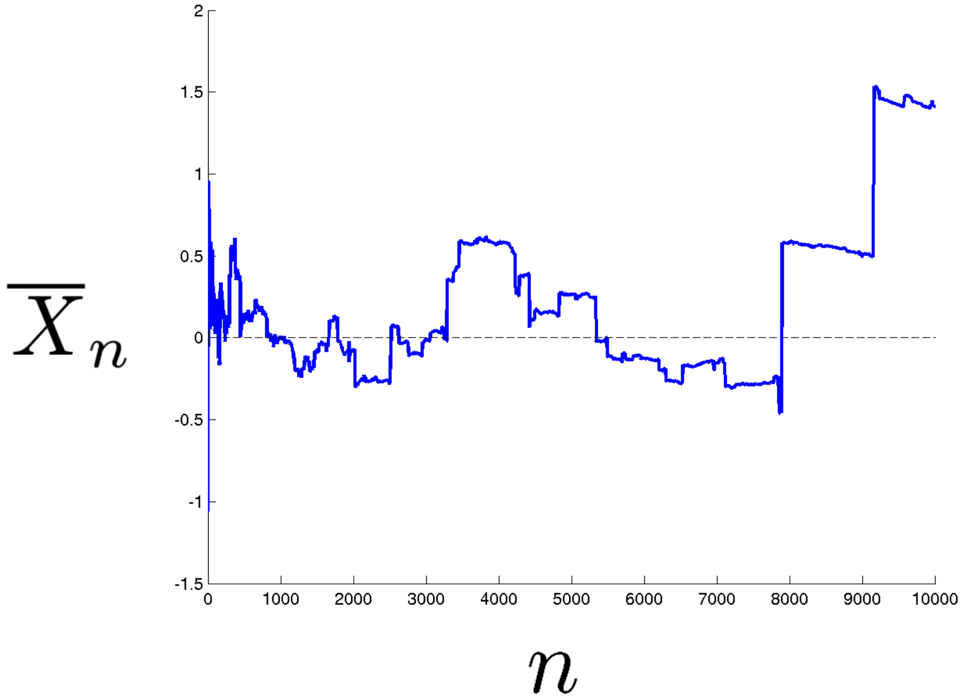
- 被積分関数は奇関数なので一見期待値はゼロに見えるが，実際には期待値は存在しない．なぜなら以下の広義積分が共に存在しないからである

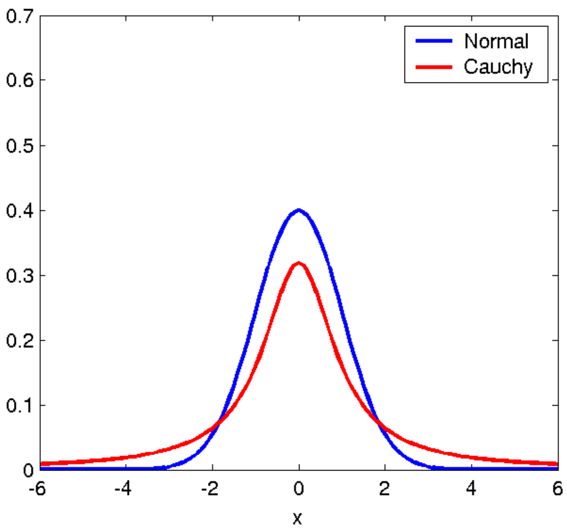
$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{\pi(1+x^2)}dx \qquad \int_{0}^{\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)}dx$$

大数の法則の例(2)

- $\{X_i\}_{i=1}^n$ が"中心"0のコーシー分布に独立に従うとき

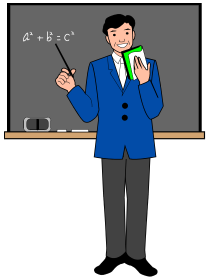
$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$





標本平均は収束しない

⇒ コーシー分布の期待値は存在しない



講義の流れ

1. 確率不等式
2. 大数の法則
3. 中心極限定理
4. 仮説検定

標本平均の分布

- 大数の法則から，標本平均が真の期待値に近づいていくことがわかった
- 大標本の極限の少し手前では，標本平均はどのように分布しているのであろうか？

中心極限定理

- 標本平均を標準化する:

$$Z_n = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \qquad E[Z_n] = 0, \ \ V[Z_n] = 1$$

- 中心極限定理(central limit theorem):
（任意に固定した $a < b$ に対して）$n \to \infty$ のとき

$$P(a \leq Z_n \leq b) \to \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

中心極限定理(続き)

- 確率論の用語ではこれを, Z_n の分布が標準正規分布に弱収束(weak convergence), または分布収束(convergence in distribution)するという.
- また, Z_n は漸近的(asymptotically)に標準正規分布に従うともいう.
  - Z_nが Z に弱収束⇔ $\lim_{n\to\infty} M_{Z_n}(t) = M_Z(t)$
    (積率母関数が各点収束)

中心極限定理の解釈

n が大きいとき, 標本平均 $\overline{X}_n$ は,
期待値 μ, 分散 σ^2/n の正規分布にほぼ従う

- 通常は特性関数 $E[e^{itZ}]$ を用いて証明される

中心極限定理の証明

- 標準正規分布の積率母関数は $e^{t^2/2}$ なので，次式を示す

$$\lim_{n\to\infty} M_{Z_n}(t) = e^{t^2/2}$$

- $Y_i = \dfrac{X_i - \mu}{\sigma}$ は期待値0，分散1なので，積率母関数は

$$M_{Y_i}(t) = E[e^{tY_i}] = 1 + \mu_1 t + \frac{\mu_2}{2!}t^2 + \frac{\mu_3}{3!}t^3 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{\mu_3}{3!}t^3 + \cdots$$

$\mu_1 = 0$

$\mu_2 = 1$

- 演習: $Z_n = \dfrac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ を Y_i を用いて表せ

解答例

- $$Z_n = \frac{\sqrt{n}\,\overline{X}_n - \sqrt{n}\mu}{\sigma} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\mu}{\sigma}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i - \mu}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

中心極限定理の証明(続き)

- Z_nの積率母関数は

$$M_{Z_n}(t) = \left[M_{Y_i/\sqrt{n}}(t)\right]^n$$

$$= \left[M_{Y_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n$$

$$= \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2 + \frac{\mu_3}{3!}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^3 + \cdots\right]^n$$

$$= (1 + u_n)^n$$

独立ならば

$$M_{Y_1+Y_2}(t) = M_{Y_1}(t)M_{Y_2}(t)$$

一般に

$$M_{aY}(t) = E(e^{taY}) = M_Y(at)$$

$$u_n = \frac{t^2}{2n} + \frac{\mu_3}{3!}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^3 + \cdots$$

- これが $e^{t^2/2}$ に収束することを示せばよい

中心極限定理の証明(続き)

- 以下, $\lim_{n\to\infty} \log M_{Z_n}(t) = t^2/2$ を示す
- $n \to \infty$ のとき $|u_n| < 1$ なので, テーラー展開すると

$$\log(1 + u_n) = u_n - u_n^2/2 + u_n^3/3 - \cdots$$

- 従って $\log M_{Z_n}(t) = n \log(1 + u_n)$

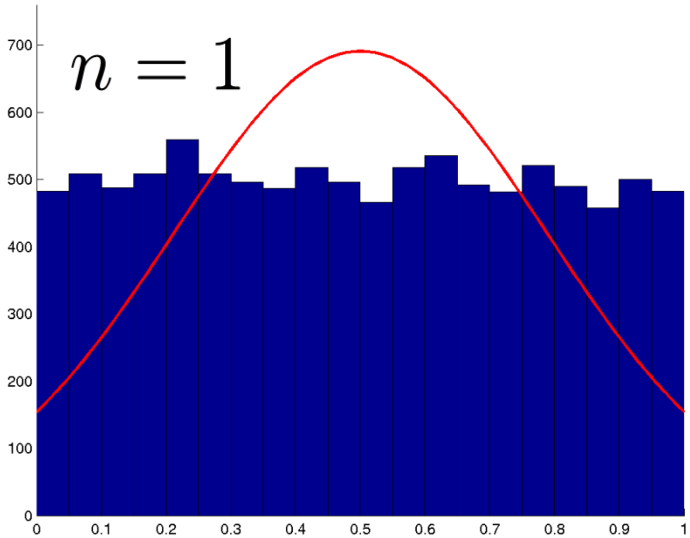
$$= n(u_n - u_n^2/2 + u_n^3/3 - \cdots)$$

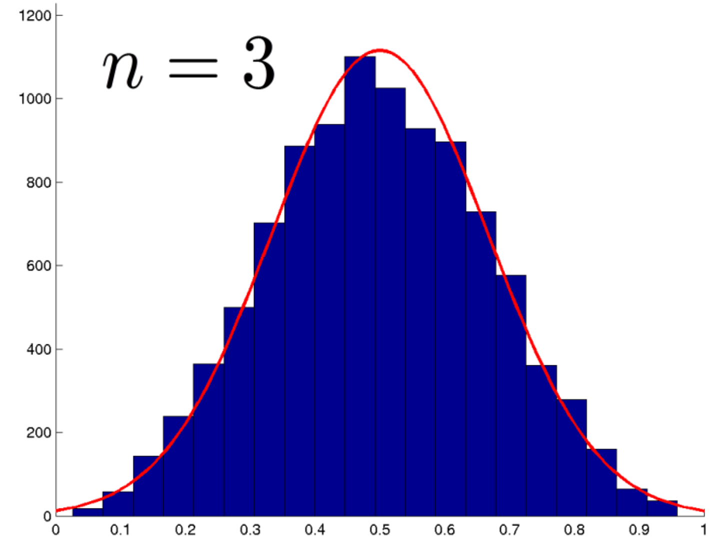
- $nu_n = \frac{t^2}{2} + \frac{\mu_3}{3!} \frac{t^3}{n^{1/2}} + \cdots$ より $\lim_{n\to\infty} nu_n = t^2/2$
- また $\lim_{n\to\infty} n| - u_n^2/2 + u_n^3/3 - \cdots | = 0$
- 従って $\lim_{n\to\infty} \log M_{Z_n}(t) = t^2/2$

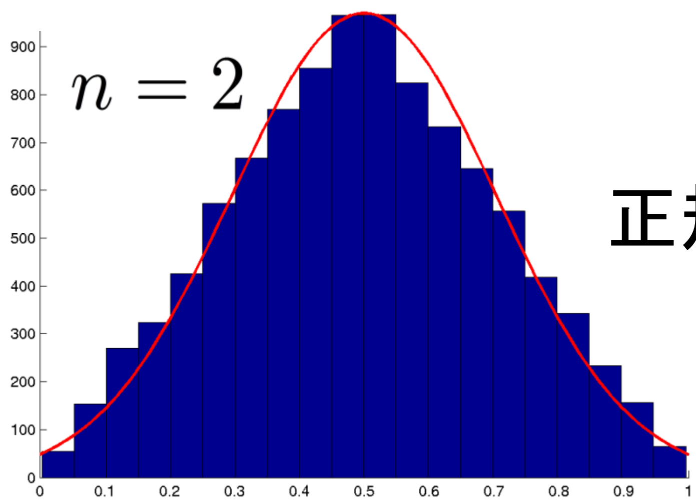
$$u_n = \frac{t^2}{2n} + \frac{\mu_3}{3!} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^3 + \cdots$$

中心極限定理の例（１）

- （０，１）上の一様分布



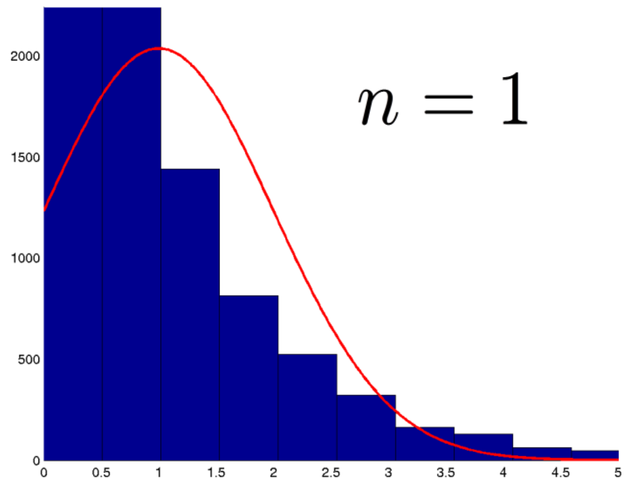


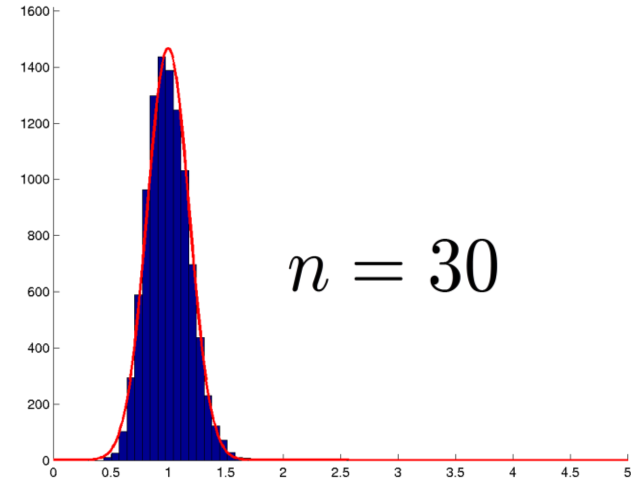


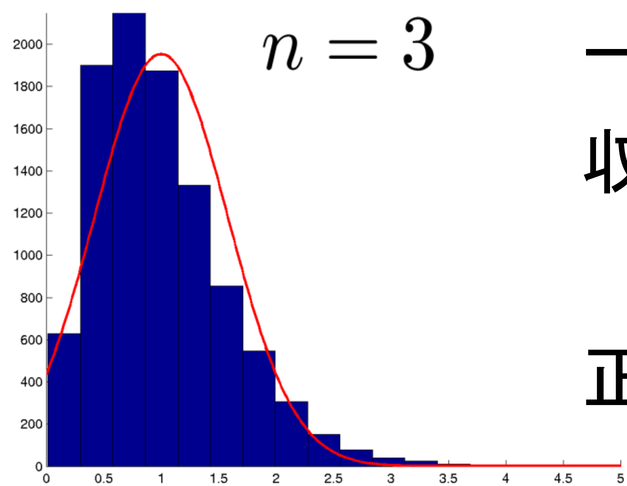
$n = 2, 3$ 程度で正規分布に似てくる

中心極限定理の例（２）

- 指数分布　　$f(x) = e^{-x}$



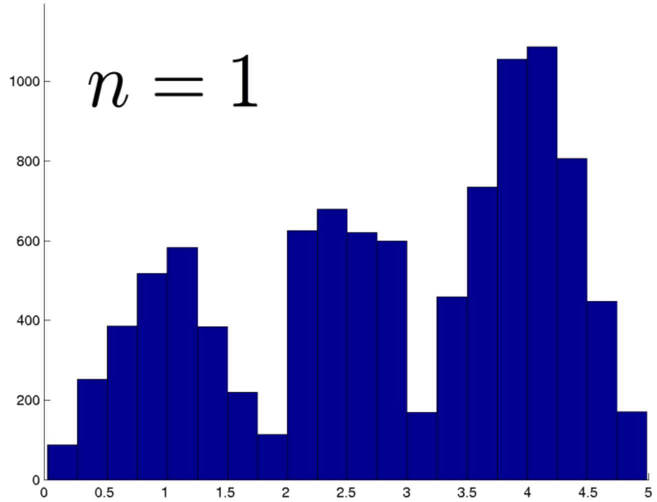


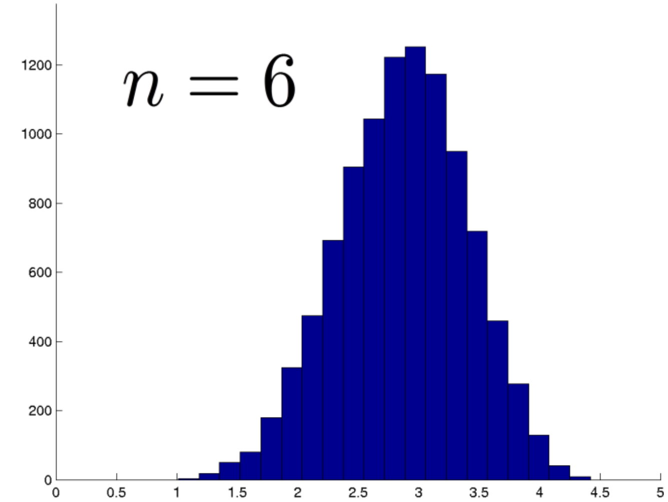


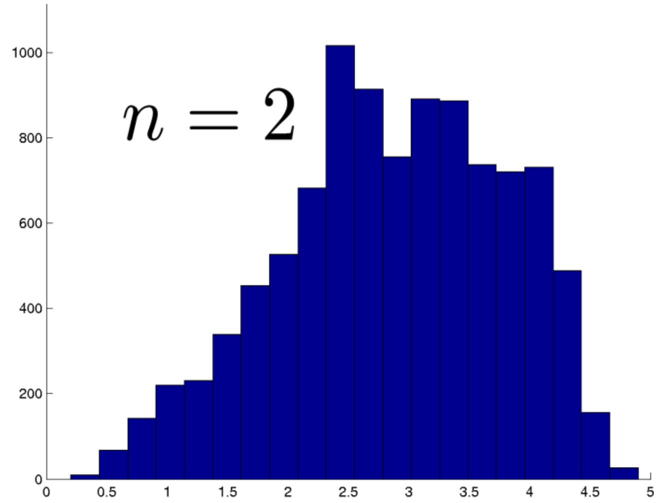
一様分布の場合より収束が若干遅いが，$n = 30$ 程度で正規分布に似てくる

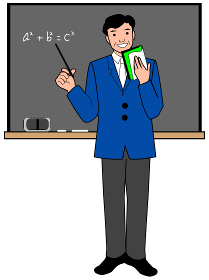
中心極限定理の例(3)

- 適当な分布









講義の流れ

1. 確率不等式
2. 大数の法則
3. 中心極限定理
4. 仮説検定
   - A) 枠組み
   - B) 両側検定と片側検定
   - C) 二標本検定

仮説検定

- 仮説検定(hypothesis testing) : 母集団についての何らかの命題を，標本に基づいて検証すること

（例）コインを20回投げて表が17回出た.
　　　この結果から表が出やすいといえるか？

- 帰無仮説(null hypothesis) : もとの仮説

（例）コインは歪んでいない（表が出る確率 $p = 1/2$ ）

- 対立仮説(alternative hypothesis) : 帰無仮説と対立する仮説

（例）表が出やすい　$p > 1/2$

仮説検定の手順

- 帰無仮説のもとで成り立つ確率が高々αであるような事象(例:「20回中17回以上表が出る」)を考える
  - α は有意水準(significance level)とよばれ，5%か1%に設定することが多い．
- 標本を観測し，その事象が成り立っているかを調べる
  - その事象が成り立っていれば帰無仮説を棄却(reject)し，成り立っていなければ帰無仮説を採択(accept)する．
- 順番が前後するのは厳密にはダメ

仮説検定の例

- コインが歪んでいない($p=1/2$)と仮定すれば，「20回中17回以上表が出る」という事象の確率は

$$({}_{20}C_{17}+{}_{20}C_{18}+{}_{20}C_{19}+{}_{20}C_{20})\times(1/2)^{20}\approx 0.0013$$

- 「20回中17回以上表が出たら帰無仮説を棄却する」という手順は有意水準1% ($\alpha=0.01$)での仮説検定の要件を満たす．
  - 表が17回出た場合には，この手順のもと，有意水準1%で表が出やすい($p>1/2$)と結論づける．
  - 対立仮説のもとで帰無仮説がどれくらい棄却されやすいか(検出力)は棄却する条件による

棄却／採択と誤り

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">真実</td></tr>
<tr><td>帰無仮説が正しい</td><td>対立仮説が正しい</td></tr>
<tr><td rowspan="2">検定の結果</td><td>帰無仮説を採択</td><td>正解</td><td>第二種誤り
(type-II error)</td></tr>
<tr><td>帰無仮説を棄却</td><td>第一種誤り
(type-I error)</td><td>正解</td></tr>
</table>

- 第一種誤り

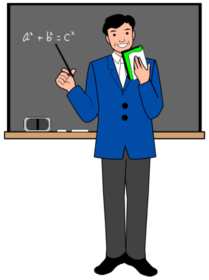
  歪んでいないコインを歪んでいると判断してしまう（有意水準で制御）

- 第二種誤り

  歪んでいるコインを歪んでいないと判断してしまう

帰無仮説の採択について

- 仮説検定で帰無仮説を棄却するときは，帰無仮説がほとんど起こらないことを証明している．
- しかし帰無仮説を採択するときは，積極的に帰無仮説が起こることを証明しているのではなく，帰無仮説が現実と矛盾することを証明するだけの十分な根拠がないと言っているだけである．



講義の流れ

1. 確率不等式
2. 大数の法則
3. 中心極限定理
4. 仮説検定
   - A) 枠組み
   - B) 両側検定と片側検定
   - C) 二標本検定

両側検定と片側検定

- 両側検定(two-sided test):

  あるパラメータが目標値と等しいかどうかを調べる

  （例）ある装置の複製を作ったとき，もとの装置と同じ性能が得られるかを調べる

- 片側検定(one-sided test):

  あるパラメータが比較対象より大きいかどうかを調べる

  （例）新しく開発した装置の性能が従来の装置よりもよいかどうかを調べる

例: 正規母集団の平均の検定

- 分散が既知の正規母集団に従う標本

$$X_i \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$$

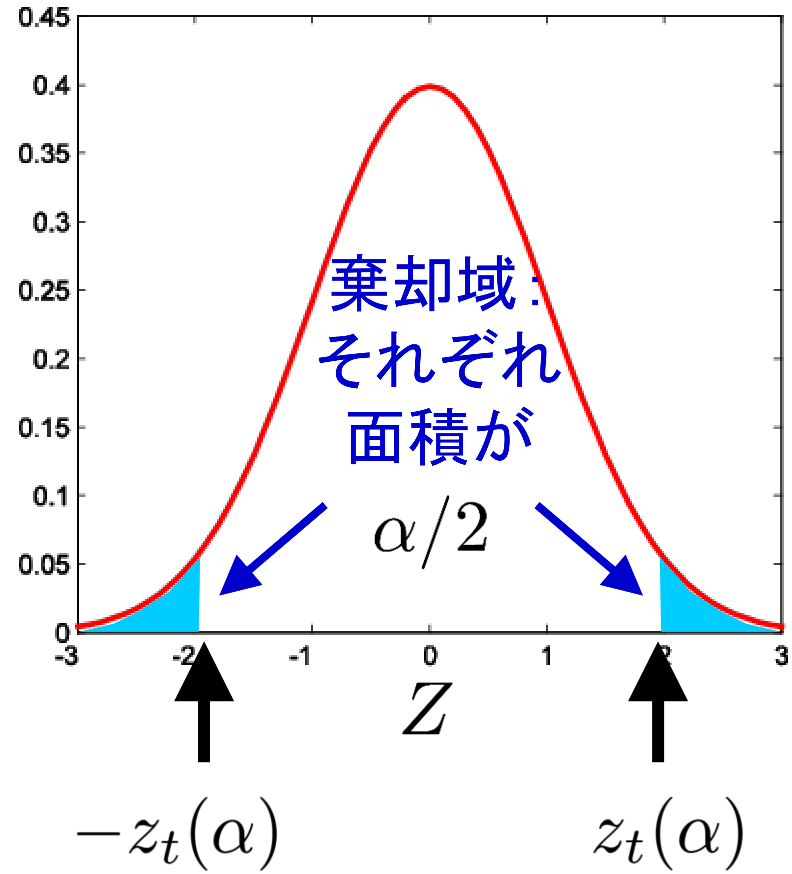
から, 帰無仮説「母集団の平均は $\mu = 10$ である」を有意水準 α で検定する.

- 標本平均の分布を計算し, その出現確率を調べる:
  - 標本平均の分布は, $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$
  - 標準化すれば, $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$

両側検定

$$Z = \frac{\overline{X} - 10}{\sigma/\sqrt{n}}$$

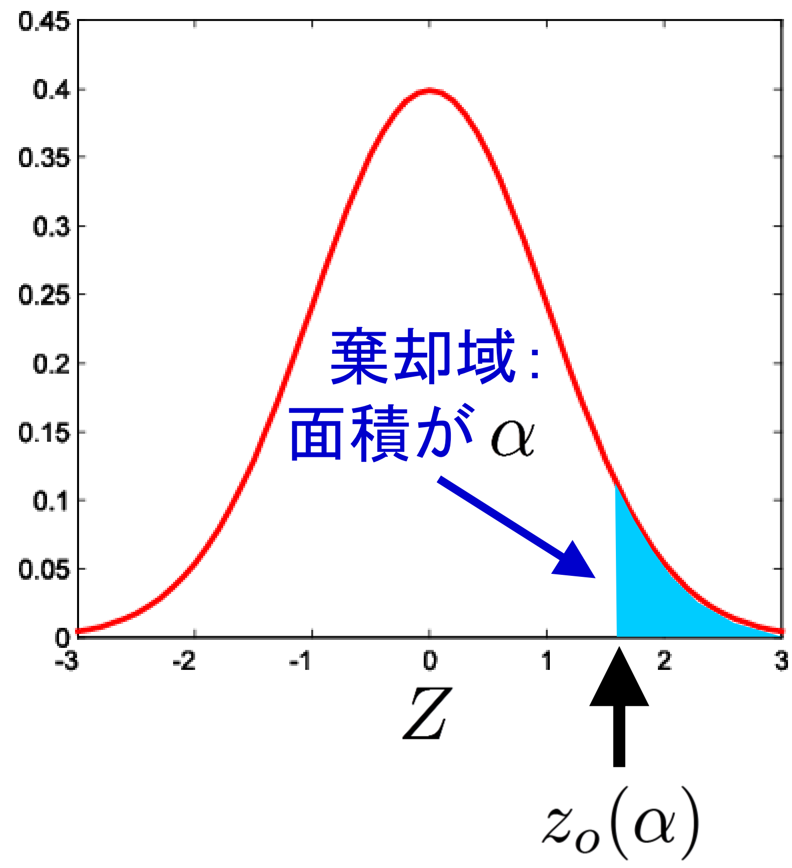
- 帰無仮説: $\mu = 10$
- 対立仮説: $\mu \neq 10$
- 棄却域(rejection region):
  有意水準 α に対して,
  確率分布の両端の面積が
  $\alpha/2$ の領域
- 現実の正規化標本平均 Z が棄却域に入ったら，帰無仮説を棄却する．即ち，
  $|Z| > z_t(\alpha)$ ならば $\mu \neq 10$ と判断する

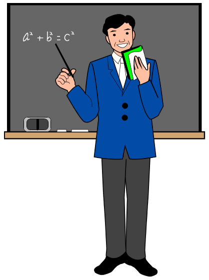


片側検定

$$Z = \frac{\overline{X} - 10}{\sigma / \sqrt{n}}$$

- 帰無仮説: $\mu = 10$
- 対立仮説: $\mu > 10$
- 棄却域(rejection region):
  有意水準 α に対して,
  確率分布の右端の面積が
  α の領域
- 現実の正規化標本平均 Z が棄却域に入ったら，帰無仮説を棄却する．即ち，
  $Z > z_o(\alpha)$ ならば $\mu > 10$
  と判断する





講義の流れ

1. 確率不等式
2. 大数の法則
3. 中心極限定理
4. 仮説検定
   A) 枠組み
   B) 両側検定と片側検定
   C) 二標本検定

二標本検定

- 二標本検定(two-sample test):

  期待値がそれぞれ μ_X, μ_Y の二つの分布に従って取り出したi.i.d.標本

$$\{X_i\}_{i=1}^{n_X}, \quad \{Y_i\}_{i=1}^{n_Y}$$

  から, 帰無仮説 $\mu_X = \mu_Y$ を検定する.

二標本検定の例

- ある反応での化合物の生成量を予測する問題を考える.
- 触媒Aと触媒Bでそれぞれ何度か実験を行い，それぞれの生成量を調べてみると，
  - 触媒Aでの平均生成量は16g
  - 触媒Bでの平均生成量は18g

  であった.
- 触媒Bのほうが平均生成量が大きいので，触媒Aよりも優れていると単純に結論づけて良いか？
- 触媒Aとの平均生成量の差が有意(significant)かどうかを調べたい.

正規母集団の母平均の差の検定

- 仮定：標本はそれぞれ正規分布に従う

$$X_i \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu_X, \sigma^2) \qquad Y_i \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu_Y, \sigma^2)$$

- このとき，標本平均の差は以下の正規分布に従う.

$$\overline{X} - \overline{Y} \sim N\left(\mu_X - \mu_Y, \frac{\sigma^2}{n_X} + \frac{\sigma^2}{n_Y}\right)$$

$$\overline{X} = \frac{1}{n_X}\sum_{i=1}^{n_X} X_i \qquad \overline{Y} = \frac{1}{n_Y}\sum_{i=1}^{n_Y} Y_i$$

証明は宿題

正規母集団の母平均の差の検定（母分散が既知のとき）

- 標本平均の差を標準化すると，標準正規分布に従う.

$$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n_X}+\frac{\sigma^2}{n_Y}}} \sim N(0,1)$$

- 標準正規分布の棄却域は計算できるので，次の Z が棄却域に入るかどうかを調べればよい.

$$Z=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n_X}+\frac{\sigma^2}{n_Y}}}$$

正規母集団の母平均の差の検定（母分散が未知のとき）

- 分散 σ^2 を標本から推定:

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_X}(X_i - \overline{X})^2 + \sum_{i=1}^{n_Y}(Y_i - \overline{Y})^2}{n_X + n_Y - 2}$$

- $\widehat{Z} = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\widehat{\sigma}^2}{n_X} + \dfrac{\widehat{\sigma}^2}{n_Y}}}$ は自由度 $\phi = n_X + n_Y - 2$ の**t分布**に従う.

- t分布の棄却域は計算できるので, $\widehat{Z}$ が棄却域に入るかどうかを調べればよい！
- これを**t検定(t-test)**と呼ぶ.

t分布

- t分布(t-distribution)：　$\phi = 1, 2, \ldots$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\phi}B(\frac{\phi}{2}, \frac{1}{2})}\left(1 + \frac{x^2}{\phi}\right)^{-\frac{\phi+1}{2}}$$

- X を標準正規分布に従う確率変数，Y を自由度 ϕ のカイ二乗分布に従う独立な確率変数としたとき，

$$X/\sqrt{Y/\phi}$$

  は自由度 ϕ のt分布に従う.

- 発見者のペンネームにちなんで，スチューデントのt分布(Student’s t-distribution)と呼ぶこともある.

t分布の性質

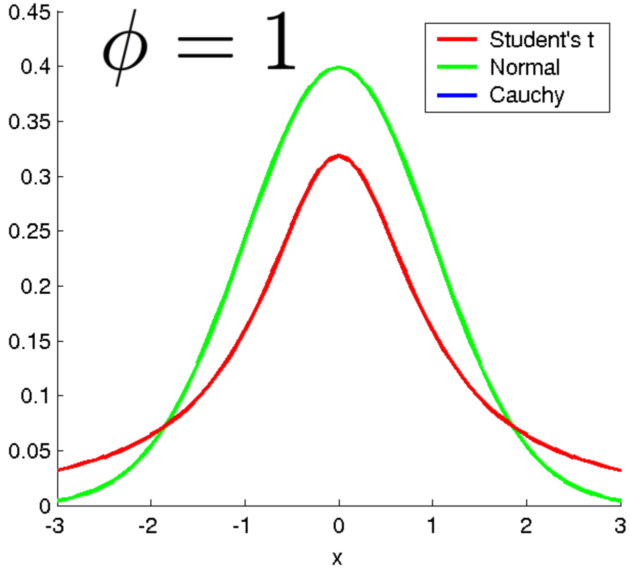
- 自由度 ϕ が1のとき，t分布はコーシー分布になる.
- 自由度 ϕ が無限大のとき，t分布は正規分布になる.
- 自由度 ϕ が2以上のとき，期待値は

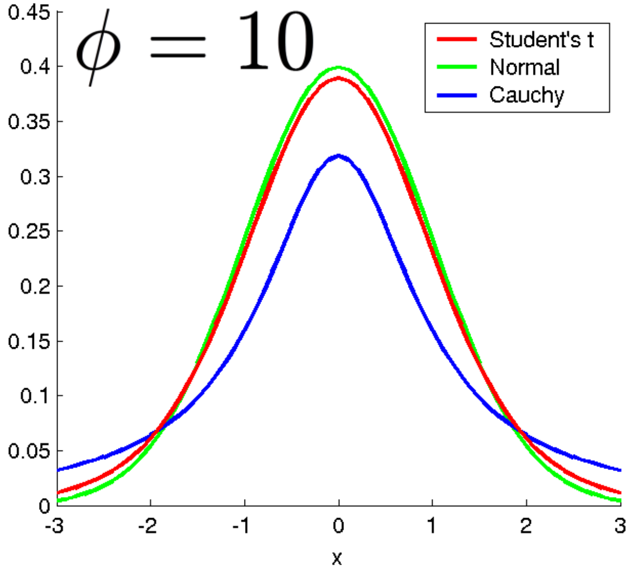
$$E(X) = 0$$

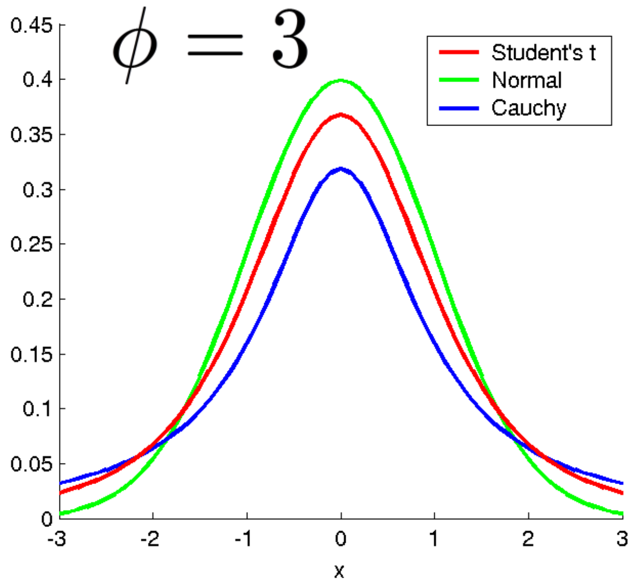
- 自由度 ϕ が3以上のとき，分散は

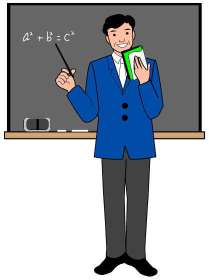
$$V(X) = \frac{\phi}{\phi - 2}$$

t分布の例


$\phi = 1$
Student's t
Normal
Cauchy
x


$\phi = 10$
Student's t
Normal
Cauchy
x


$\phi = 3$
Student's t
Normal
Cauchy
x



講義の流れ

1. 確率不等式
2. 大数の法則
3. 中心極限定理
4. 仮説検定

まとめ

確率不等式

- 確率分布がわからなくても確率の上限・下限がわかる

大数の法則

- 標本平均は真の期待値に収束

中心極限定理

- 標本平均は漸近的に正規分布に従う

仮説検定

- 帰無仮説と対立仮説
- 有意水準
- 両側検定と片側検定
- 二標本検定

今後の予定

1. 9月27日：導入（杉山）
2. 10月 4日：確率と統計1（本多）
3. 10月11日：確率と統計2（本多）
4. 10月18日：確率と統計3（本多）
5. 10月25日：最適化1（佐藤）
6. 11月 1日：最適化2（佐藤）
7. 11月15日：機械学習1（本多）
8. 11月22日：機械学習2（佐藤）
9. 11月29日：機械学習3（杉山）
10. 12月 6日：最適化3（本多）
11. 12月13日：自然言語処理1（宮尾）
12. 12月20日：自然言語処理2（宮尾）
13. 12月27日：自然言語処理3（宮尾）
14. 2018年1月10日：試験

宿題1

- 次式を証明せよ

$$\overline{X} - \overline{Y} \sim N\left(\mu_X - \mu_Y, \frac{\sigma^2}{n_X} + \frac{\sigma^2}{n_Y}\right)$$

$$\overline{X} = \frac{1}{n_X}\sum_{i=1}^{n_X} X_i \qquad \overline{Y} = \frac{1}{n_Y}\sum_{i=1}^{n_Y} Y_i$$

$$X_i \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu_X, \sigma^2) \qquad Y_i \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu_Y, \sigma^2)$$

- ヒント: 正規分布の再生性を用いる(＊は畳み込み)

$$N(\mu_a, \sigma_a^2) * N(\mu_b, \sigma_b^2) = N(\mu_a + \mu_b, \sigma_a^2 + \sigma_b^2)$$

（正規分布の和の分布は正規分布）

宿題2（旧）

- 歪んだ6面体のさいころ（出る目は1，2，3，4，5，6）がある．この変なさいころの出る目は
  - 期待値が2．2
  - 分散が1

  であるという．チェビシェフの不等式を用いて以下の上下界（のうち非自明なもの）をそれぞれ挙げよ．

A) 6が出る確率の上界

B) 1，2，3のいずれかがが出る確率の下界

~~C) 2が出る確率の下界~~

宿題2（正）

- 歪んだ6面体のさいころ（出る目は1，2，3，4，5，6）がある．この変なさいころの出る目は
  - 期待値が2．2
  - 分散が0．7

  であるという．チェビシェフの不等式を用いて以下の上下界（のうち非自明なもの）をそれぞれ挙げよ．

A) 6が出る確率の上界
B) 1，2，3のいずれかがが出る確率の下界
C) 2が出る確率の下界

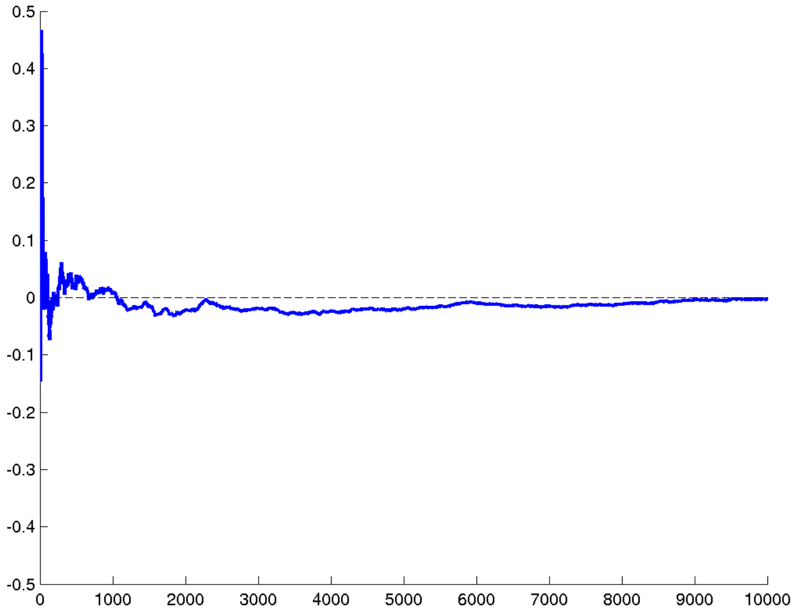
宿題3

- 自由度2のカイ二乗分布に従う標本を生成し，大数の強法則および中心極限定理が成り立つことを数値的に確認せよ
- 同様に，自由度2のt分布に従う標本について，大数の強法則は成り立つが中心極限定理は成り立たないことを $(\overline{X}_n - \mu)/(1/\sqrt{n})$ の分布を調べて数値的に確認せよ
- ヒント：
  - 自由度2のカイ二乗分布に従う標本 Y は，標準正規分布に独立に従う2つの標本 X, X' から $Y = X^2 + X'^2$ によって生成できる
  - 自由度2のt分布に従う標本 Z は，標準正規分布に従う標本 X と自由度2のカイ二乗分布に従う標本 Y から $Z = X/\sqrt{Y/2}$ によって生成できる

大数の強法則（再掲）

- 大数の強法則(strong law of large numbers):
  $n \to \infty$ のとき
  $$\overline{X}_n \to \mu \quad \text{with probability } 1$$
- 例: $\{X_i\}_{i=1}^n$ が標準正規分布に独立に従うとき

$\overline{X}_n$



n

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

標本平均は確かに母平均0に収束していく

中心極限定理の例(再掲)

- 適当な分布