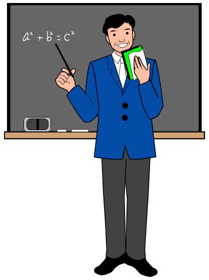
確率と統計（2）：
確率分布の例

杉山将・本多淳也
sugi@k.u-tokyo.ac.jp, jhonda@k.u-tokyo.ac.jp
http://www.ms.k.u-tokyo.ac.jp



講義の流れ

1. 離散型確率分布の例
   A) 一様分布
   B) 二項分布
   C) 超幾何分布
   D) ポアソン分布
2. 連続型確率分布の例

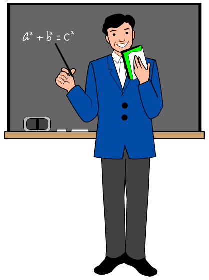
離散型の確率変数と確率関数

- 離散型(discrete type)確率変数: 可算集合の中の値をとる確率変数
- 離散型の確率変数の確率分布: 確率変数がそれぞれの値をとる確率

$$P(X=x)=f(x)$$

$f(x)$:確率質量関数(probability mass function)

$$f(x)\geq 0, \qquad \sum_{x} f(x) = 1$$



講義の流れ

1. 離散型確率分布の例
    A) 一様分布
    B) 二項分布
    C) 超幾何分布
    D) ポアソン分布
2. 連続型確率分布の例

一様分布

- 離散一様分布(discrete uniform distribution):
  N 通りの事象が等確率で起こる

$$f(x) = \frac{1}{N} \text{ for } x = 1, 2, \ldots, N$$

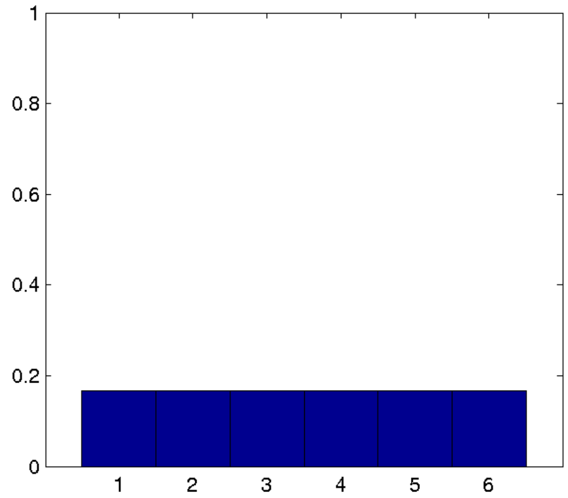
- 期待値:

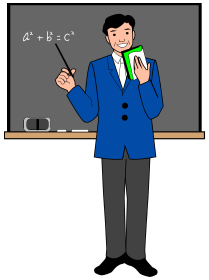
$$E(X) = \frac{N+1}{2}$$

- 分散:

$$V(X) = \frac{N^2-1}{12}$$

- 例:さいころの目 $(N = 6)$



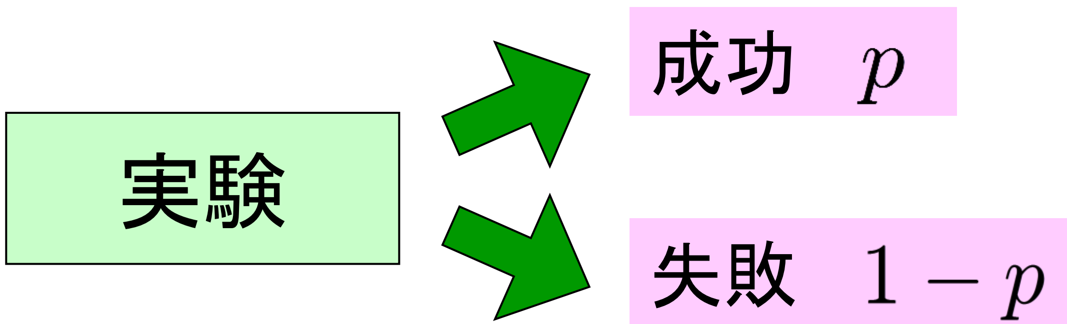


講義の流れ

1. 離散型確率分布の例
   A) 一様分布
   B) 二項分布
   C) 超幾何分布
   D) ポアソン分布
2. 連続型確率分布の例

ベルヌーイ試行

- ベルヌーイ試行(Bernoulli trials): 成功する確率p, 失敗する確率が$1-p$の実験を同じ条件で独立に繰り返す



- 例: コインを投げて表が出るか裏が出るか

$$p = 0.5$$

二項分布

- 二項分布(binomial distribution):
  n 回のベルヌーイ試行に対して，実験が成功する回数 X の確率分布
  - x 回成功・ $n-x$ 回失敗:　$p^x(1-p)^{n-x}$
  - 順番を入れ替えたときの組み合わせ数:　${}_nC_x$

$$f(x) = {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x}$$
$$\text{for } x = 0, 1, \ldots, n$$

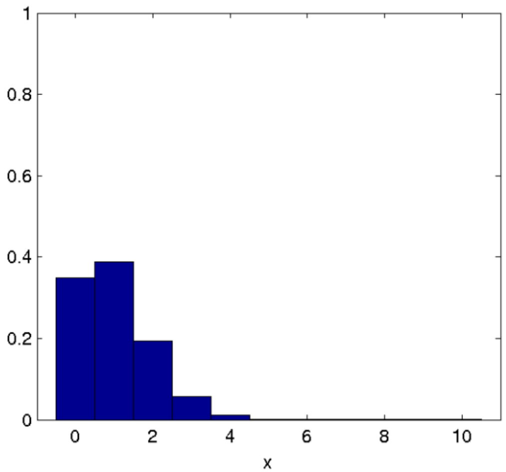
$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- 二項分布を $Bi(n,p)$ で表す.
- $Bi(1,p)$ を特にベルヌーイ分布(Bernoulli distribution)と呼ぶ.

二項分布の例

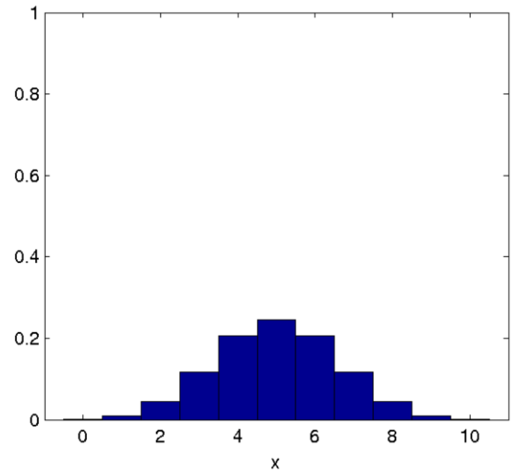
実験の成功率を変えたとき

$n = 10$



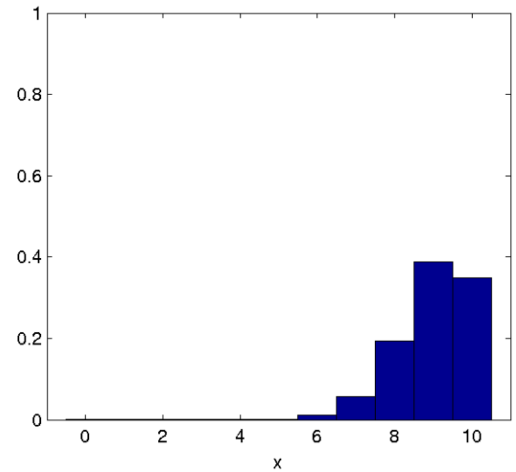
$p = 0.1$

成功率が低い



$p = 0.5$

五分五分



$p = 0.9$

成功率が高い

二項分布の性質

■ 積率母関数:

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = (pe^t + q)^n$$

$$q = 1 - p$$

証明:二項定理

$$\sum_{x=0}^{n} {}_nC_x p^x q^{n-x} = (p+q)^n$$

より

$$M_X(t) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} {}_nC_x p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} {}_nC_x (pe^t)^x q^{n-x} = (pe^t + q)^n$$

二項分布の性質(続き)

- 期待値: $E(X) = np$

  X が n 回ベルヌーイ試行を行ったときの成功回数の合計であることからも明らか

- 分散: $V(X) = np(1-p)$

  分散は $p = 0.5$ のとき最大になる. これは,
  成功と失敗の確率が五分五分のときに予想が難しいという直感と合っている

期待値と分散の導出

- 積率母関数は $M_X(t) = (pe^t + q)^n$ $\quad q = 1 - p$
- この1階，2階微分はそれぞれ

$$M'_X(t) = npe^t(pe^t + q)^{n-1}$$

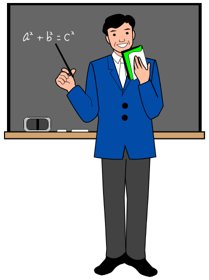
$$M''_X(t) = npe^t(pe^t + q)^{n-1} + n(n-1)p^2e^{2t}(pe^t + q)^{n-2}$$

これより

$$E[X] = M'_X(0) = np$$

$$V(X) = E[X^2] - \{E[X]\}^2 = M''_X(0) - M'_X(0)^2$$

$$= np + n(n-1)p^2 - n^2p^2 = np(1-p)$$

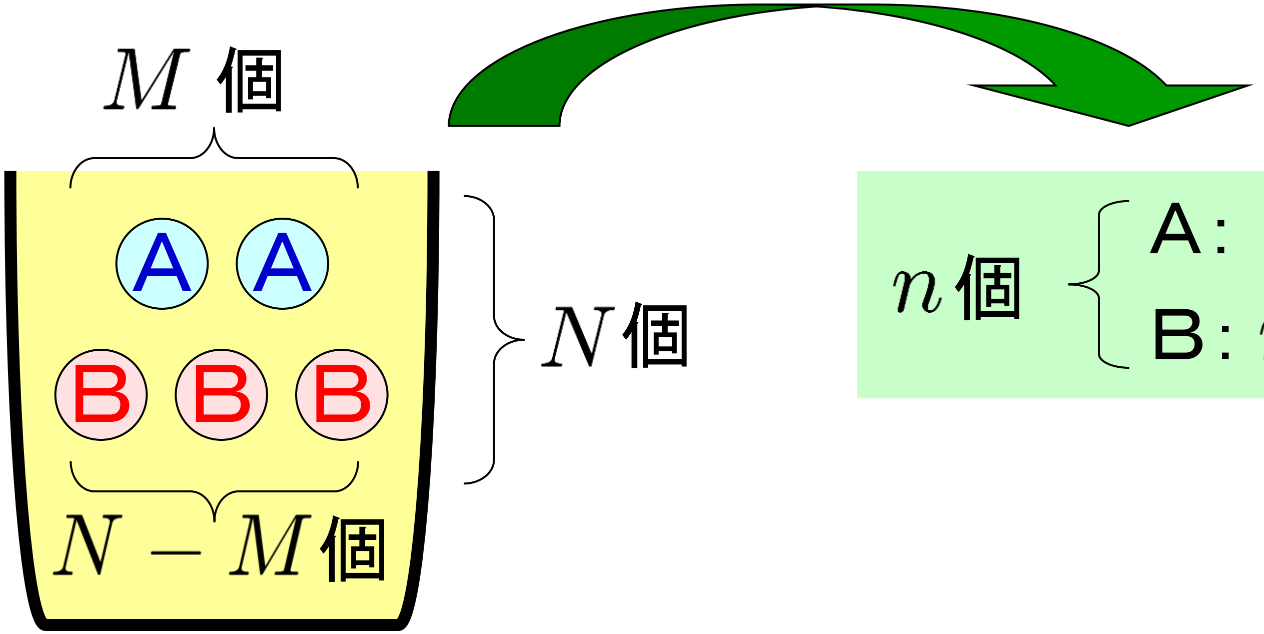


講義の流れ

1. 離散型確率分布の例
   - A) 一様分布
   - B) 二項分布
   - C) 超幾何分布
   - D) ポアソン分布
2. 連続型確率分布の例

復元抽出と非復元抽出

- AがM個, Bが $N-M$個, 合計N個の玉が入っている袋から無作為に玉を n 個取り出す.



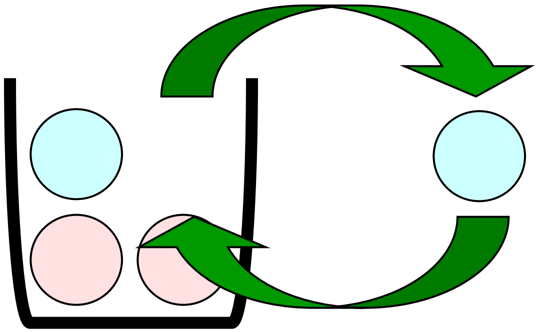
n個 $\begin{cases} \text{A}: x \text{ 個} \\ \text{B}: n-x \text{ 個} \end{cases}$

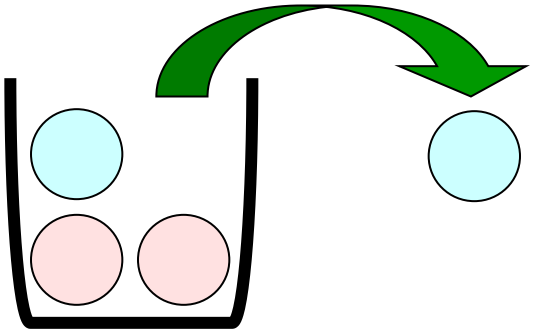
復元抽出と非復元抽出（続き）

- 復元抽出(sampling with replacement):
ひとつ玉を取り出したら，それを元に戻してから次の玉を取り出す

⇒ Aが出てくる個数は
二項分布 $Bi(n, M/N)$ に従う

- 非復元抽出(sampling without replacement):
ひとつ玉を取り出したら，それを元に戻さずに次の玉を取り出す





超幾何分布

- 超幾何分布(hypergeometric distribution)：
  非復元抽出したときに, Aが出てくる個数 X の分布
  - Aが x 個出てくる組み合わせ数：$_{M}C_{x}$
  - Bが $n-x$ 個出てくる組み合わせ数：$_{N-M}C_{n-x}$
  - 合計 n 個取り出す総組み合わせ数：$_{N}C_{n}$

$$f(x)=\frac{_{M}C_{x}\times {_{N-M}C_{n-x}}}{_{N}C_{n}}$$

“$_{N}C_{n}$ 通りのうちの $_{M}C_{x}\times {_{N-M}C_{n-x}}$ 通り”

- 名称は確率の和や積率母関数といった量が
  超幾何級数によって表されることに由来.

超幾何分布の性質

- X は 0 から n までの全ての値をとるとは限らない.
  - Xの最大値: $x_{\max} = \min\{n, M\}$
  - Xの最小値: $x_{\min} = \max\{0, n - (N - M)\}$
- 期待値:

$$E(X) = n\frac{M}{N}$$

- 分散:

$$V(X) = n\frac{M(N-M)}{N^2}\frac{N-n}{N-1}$$

- 以下, 期待値を証明する.

分散の証明は宿題

超幾何分布の期待値の証明

$$E[X] = \frac{1}{{}_N C_n} \sum_{x=0}^{n} x \; {}_M C_x \; {}_{N-M} C_{n-x}$$

（$x=0$ の項はゼロ）

$$= \frac{1}{{}_N C_n} \sum_{x=1}^{n} x \; {}_M C_x \; {}_{N-M} C_{n-x}$$

$${}_M C_x = \frac{M}{x} {}_{M-1} C_{x-1}$$

$$= \frac{M}{{}_N C_n} \sum_{x=1}^{n} {}_{M-1} C_{x-1} \; {}_{N-M} C_{n-x}$$

$$x' \leftarrow x - 1$$

$$= \frac{M}{{}_N C_n} \sum_{x'=0}^{n-1} {}_{M-1} C_{x'} \; {}_{N-M} C_{n-x'-1}$$

$${}_N C_n = \frac{N}{n} {}_{N-1} C_{n-1}$$

$$= \frac{nM}{N} \frac{1}{{}_{N-1} C_{n-1}} \sum_{x=0}^{n-1} {}_{M-1} C_x \; {}_{N-M} C_{n-x-1}$$

超幾何分布の期待値の証明(続き)

- 確率質量関数の性質 $\sum_x f(x) = 1$ より,

$$\sum_{x=0}^{n} \frac{{}_M C_x \; {}_{N-M} C_{n-x}}{{}_N C_n} = 1$$

- この式で

$$M \leftarrow M-1, N \leftarrow N-1, n \leftarrow n-1$$

とおけば,

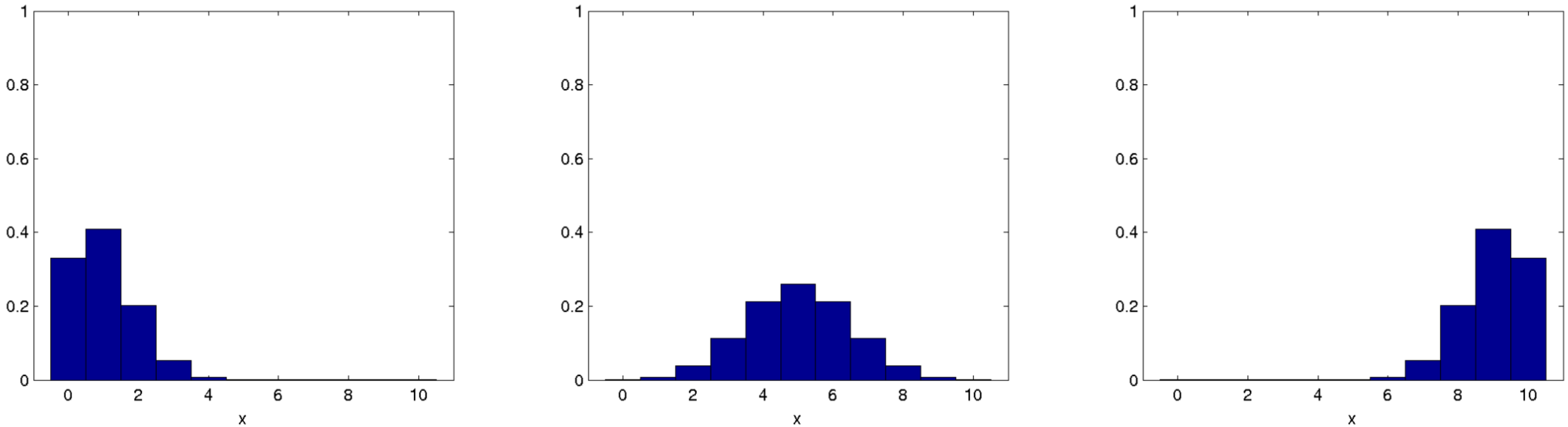
$$\sum_{x=0}^{n-1} \frac{{}_{M-1} C_x \; {}_{N-M} C_{n-x-1}}{{}_{N-1} C_{n-1}} = 1$$

となり, $E(X) = \dfrac{nM}{N}$ を得る.

超幾何分布の例

袋に入っている玉Aの数を変えたとき

$N = 100, n = 10$



$M = 10$

Aが少ない

$M = 50$

A＝B

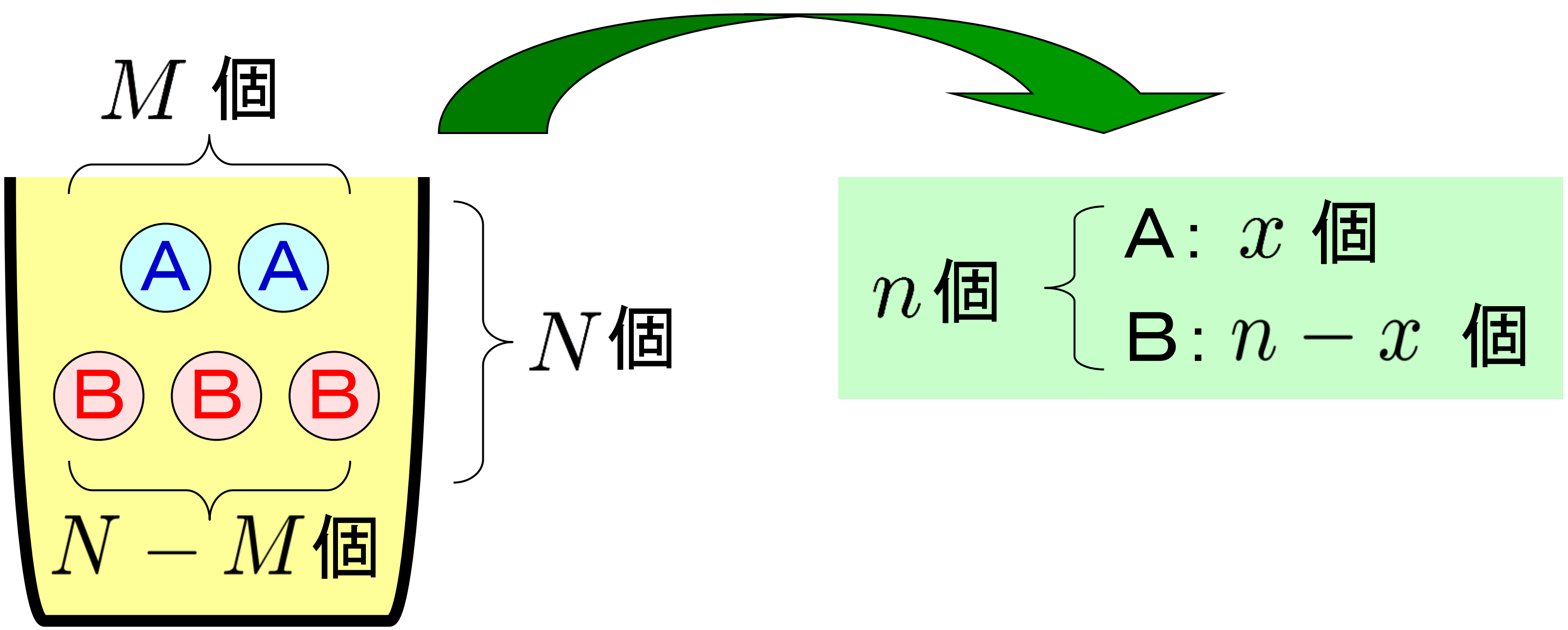
$M = 90$

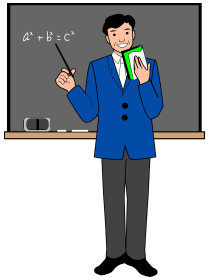
Aが多い

この例では，見た目は二項分布とそれほど変わらないが分散がやや小さい

超幾何分布と二項分布

- N が十分に大きいとき，玉を袋に戻しても戻さなくても大して変わらない．
- 実際，$N \to \infty$, $M/N \to p$ のとき，超幾何分布は二項分布と一致する．





講義の流れ

1. 離散型確率分布の例
   - A) 一様分布
   - B) 二項分布
   - C) 超幾何分布
   - D) ポアソン分布
2. 連続型確率分布の例

成功確率の低い場合の二項分布

- 二項分布で，実験の成功率 p が非常に小さい場合，めったに実験は成功しない．
- しかしいくら p が小さくても，実験の回数 n が非常に大きい場合，ある程度の回数は実験が成功する．
- 例：成功率が $p = 0.00003$，実験回数が $n = 100000$ の二項分布の期待値は

$$E(X) = np = 100000 \times 0.00003 = 3$$

- このとき，$x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$くらいの生起確率はそれほど小さくなさそう？
- しかし，その確率の計算は大変！

$$f(5) = {}_{100000}C_5 (0.00003)^5 (0.99997)^{99995}$$

二項分布の極限

- ポアソンの少数の法則(Poisson’s law of small numbers): $p = \lambda/n$ に対して,

$$ {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x} \longrightarrow \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad (n \to \infty) $$

- 証明:

$$ \lim_{n\to\infty} {}_nC_x \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} $$

$$ = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{x!(n-x)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} $$

$$ = \frac{\lambda^x}{x!} \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-x)!n^x} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x} $$

次頁へ続く

二項分布の極限(続き)

前頁からのつづき:

- $$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n-x)!n^x} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}\times\frac{n-1}{n}\times\cdots\times\frac{n-x+1}{n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} 1\times\frac{1-\frac{1}{n}}{1}\times\cdots\times\frac{1-\frac{x}{n}+\frac{1}{n}}{1} = 1$$
- 自然対数の底の定義 $e=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$ で, $t=-\frac{\lambda}{n}$ とおけば,
$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$$
- $$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x} = 1$$

これらより,
$$\lim_{n\to\infty} {}_nC_x\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

ポアソン分布

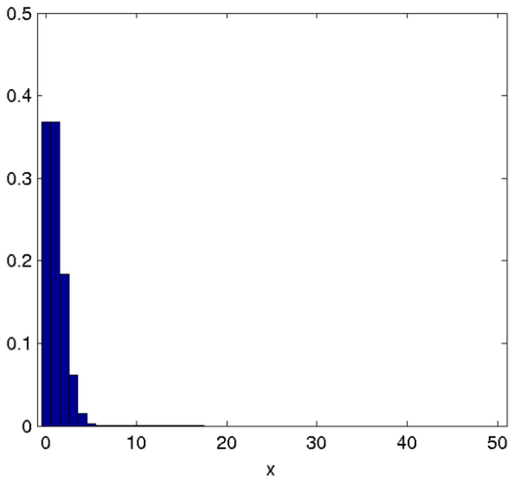
- ポアソン分布(Poisson distribution)： $f(x) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$
  - 単位時間中に平均 λ 回起こる事象が，単位時間中に起こる回数の確率分布
  - $Po(\lambda)$ と表す
- $f(x)$ が確率質量関数であることの証明
  - $f(x) \geq 0$ は明らか
  - 指数関数の原点周りでのテーラー展開

$$e^{\lambda} = 1 + \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \cdots = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$$

より，$\displaystyle\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$

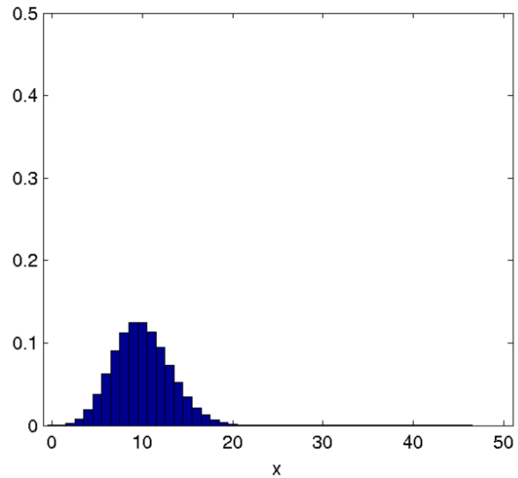
ポアソン分布の例

- 実験の平均成功回数を変えたとき

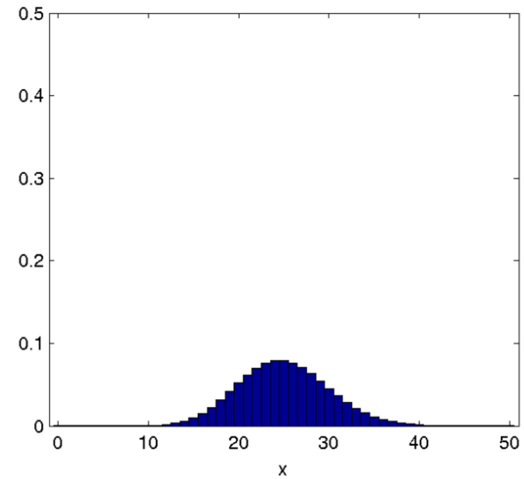


$$\lambda = 1$$

平均成功回数少ない



$$\lambda = 10$$



$$\lambda = 25$$

平均成功回数多い

ポアソン分布の性質

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

- 積率母関数: $M_X(t) = E[e^{tX}] = \exp\{\lambda(e^t - 1)\}$
- 期待値: $E(X) = \lambda$
- 分散: $V(X) = \lambda$

証明は演習

- 二項分布の期待値と分散は $np, np(1-p)$

$$p = \lambda / n$$

解答例

$$e^{\lambda} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$$

- ポアソン分布の積率母関数は

$$M_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} e^{-\lambda} \lambda^x / x! = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} (\lambda e^t)^x / x!$$

$$= e^{-\lambda} \exp\{\lambda e^t\} = \exp\left\{\lambda(e^t - 1)\right\}$$

- 積率母関数の一階，二階微分はそれぞれ

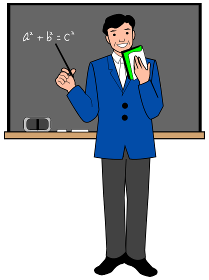
$$M'_X(t) = \lambda e^t \exp\left\{\lambda(e^t - 1)\right\}$$

$$M''_X(t) = \lambda e^t \exp\left\{\lambda(e^t - 1)\right\} + \lambda^2 e^2 t \exp\left\{\lambda(e^t - 1)\right\}$$

- 従って，期待値と分散はそれぞれ

$$E[X] = M'_X(0) = \lambda$$

$$V(X) = M''_X(0) - M'_X(0)^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda$$



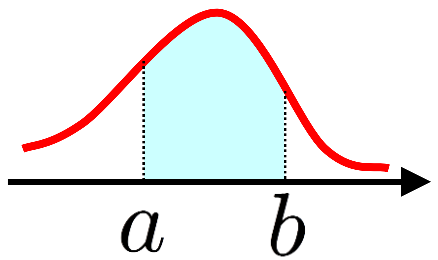
講義の流れ

1. 離散型確率分布の例
2. 連続型確率分布の例
   - A) 正規分布
   - B) ガンマ分布
   - C) ベータ分布

連続型の確率変数と確率密度関数

- 連続型(continuous type)確率変数:連続値をとる確率変数
- 連続型の確率変数の確率分布:確率変数が a 以上 b 以下の値をとる確率

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$$

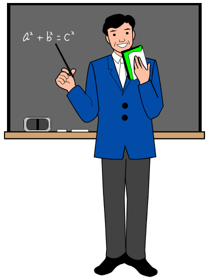


$f(x)$:確率密度関数(probability density function)

$$f(x) \ge 0, \quad \int f(x)dx = 1$$

- 注意:連続型の確率変数がある値 a をとる確率はゼロ!

$$P(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0$$



講義の流れ

1. 離散型確率分布の例
2. 連続型確率分布の例
   A) 正規分布
   B) ガンマ分布
   C) ベータ分布

正規分布

$$\sigma > 0$$

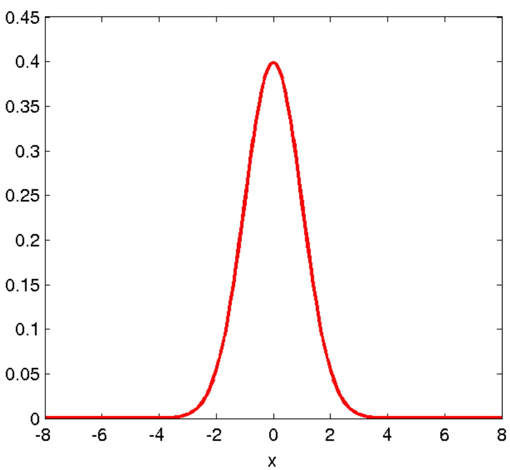
$$\mu \in (-\infty, \infty)$$

■ 正規分布(normal distribution)

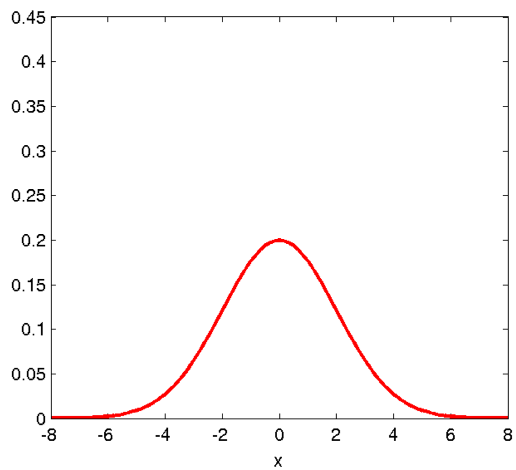
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right) \quad \text{for } x \in (-\infty, \infty)$$

- ガウス分布(Gaussian distribution)とも呼ぶ.

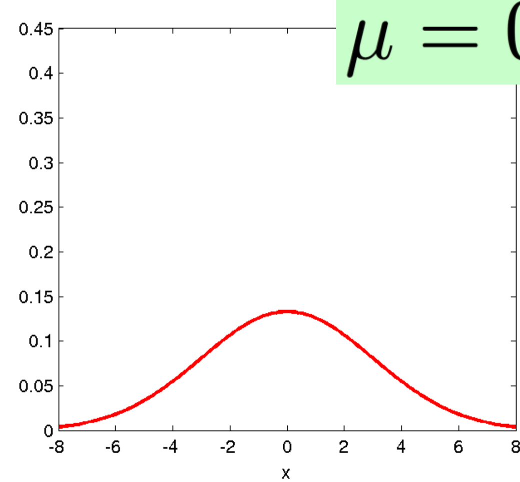
$$\mu = 0$$



$\sigma = 1$



$\sigma = 2$



$\sigma = 3$

正規分布の正規化定数

- $f(x)$ が確率密度関数であることの証明
  - $f(x) \geq 0$ は明らか
  - ガウス積分の公式 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ を用いれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

$$= \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-r^2\right) dr = 1$$

$$r = \frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}$$

正規分布の性質

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{for } x \in (-\infty, \infty)$$

- 積率母関数: $M_X(t) = E[e^{tX}] = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$
- 期待値: $E(X) = \mu$
- 分散: $V(X) = \sigma^2$

証明は演習

- 期待値 μ , 分散 σ^2 の正規分布を $N(\mu, \sigma^2)$ で表す

解答例

- 積率母関数:

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} + tx\right) dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{x^2 - 2(\mu+\sigma^2 t)x + \mu^2\right\}\right) dx$$

平方完成

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\left\{x-(\mu+\sigma^2 t)\right\}^2}{2\sigma^2} + \mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) dx$$

$$= \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\left\{x-(\mu+\sigma^2 t)\right\}^2}{2\sigma^2}\right) dx}_{N(\mu+\sigma^2 t,\, \sigma^2)\text{ の確率密度関数の積分}(=1)}$$

$$= \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

解答例

- $$M_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$
  $$M'_X(t) = (\mu + \sigma^2 t) M_X(t)$$
  $$M''_X(t) = \sigma^2 M_X(t) + (\mu + \sigma^2 t) M'_X(t)$$

- $$M_X(0) = 1,\ M'_X(0) = \mu,\ M''_X(0) = \sigma^2 + \mu^2$$

- $$E[X] = M'_X(0) = \mu$$
- $$V(X) = M''_X(0) - M'_X(0)^2 = \sigma^2$$

正規分布の標準化

- 一般に $E(X)=\mu,\ V(X)=\sigma^2$ のとき，X の線形変換 $Y=aX+b$ に対して

$$E(Y)=a\mu+b,\ \ V(Y)=a^2\sigma^2$$

- 更に X が正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ に従うとき，Y も正規分布に従う

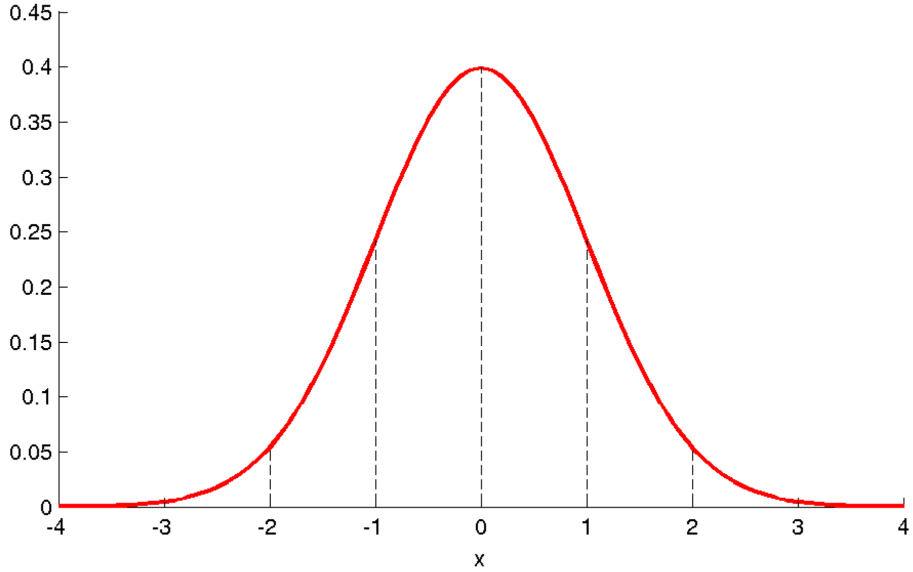
$$Y\sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$$

従って，標準化変数 $Z=(X-\mu)/\sigma$ も正規分布に従う

$$Z\sim N(0,1)$$

- $N(0,1)$ を標準正規分布(standard normal distribution)と呼ぶ

標準正規分布



- $N(0,1)$ に対して,
  - [-1,1]の範囲に約68．27%
  - [-2,2]の範囲に約95．45%
  - [-3,3]の範囲に約99．73%

2次元正規分布(標準正規形)

- $X, Y \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0,1)$, すなわち X, Y が独立に標準正規分布に従うとき,
  (i.i.d.: independently and identically distributed)
  同時確率密度関数は

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{\boldsymbol{z}^\top \boldsymbol{z}}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

- 期待値: $E(\boldsymbol{Z}) = \boldsymbol{0}$
- 分散共分散行列:

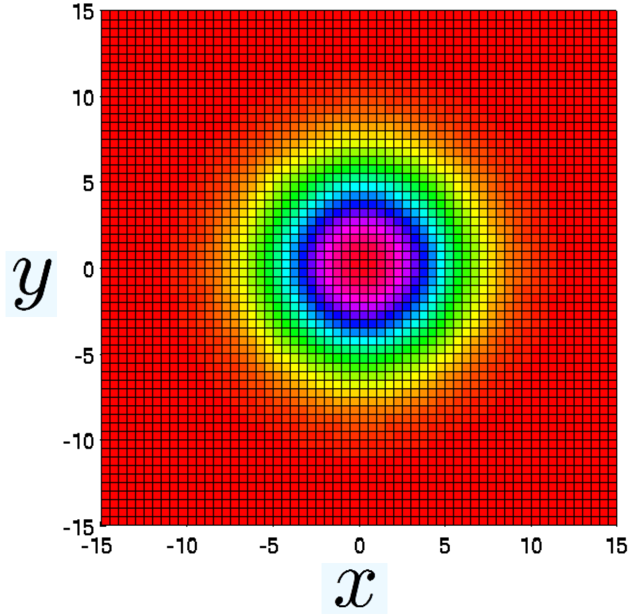
$$V(\boldsymbol{Z}) = E\{\ [\boldsymbol{Z} - E(\boldsymbol{Z})][\boldsymbol{Z} - E(\boldsymbol{Z})]^\top\}$$

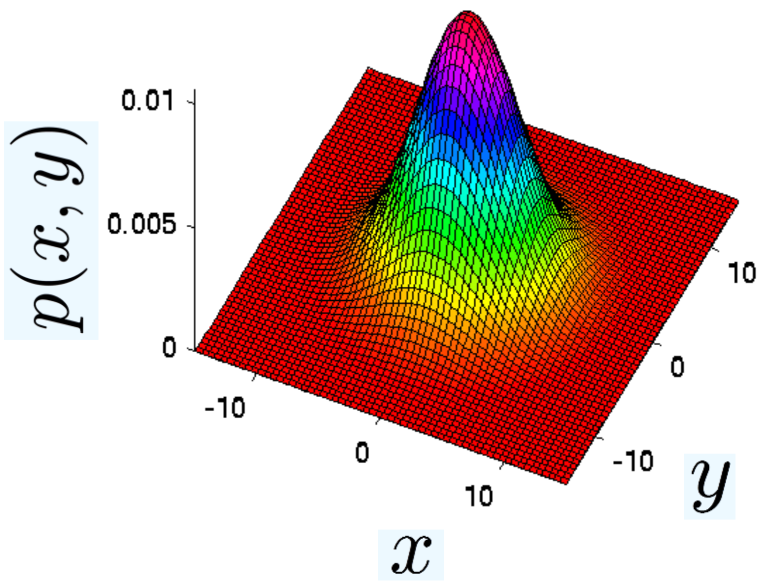
$$= \boldsymbol{I}$$

$\boldsymbol{I}$:単位行列

２次元正規分布（標準正規形）

$$f(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{\boldsymbol{z}^\top\boldsymbol{z}}{2}\right) \qquad \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$





- 丸い形をしている.

2次元正規分布(一般形)

- 各要素が独立に標準正規分布に従う $\boldsymbol{Z}$ を
  - 2×2正則行列 $\boldsymbol{T}$
  - 2次元ベクトル $\boldsymbol{\mu}$

  を用いて $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{\mu}$ と変換する.

- $\boldsymbol{W}$ の確率密度関数は,

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{W} - \boldsymbol{\mu})$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{\top}$$

$$l(\boldsymbol{w}) \propto f(\boldsymbol{z}) = f(\boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{\mu}))$$

$$= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{\mu})^{\top} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{w} - \boldsymbol{\mu}) \right)$$

$$l(\boldsymbol{w}) = \frac{1}{2\pi |\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{\mu})^{\top} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{w} - \boldsymbol{\mu}) \right)$$

$|\boldsymbol{\Sigma}|$: $\boldsymbol{\Sigma}$の行列式

2次元正規分布(一般形)

$$l(\boldsymbol{w}) = \frac{1}{2\pi|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{\mu})\right)$$

- 期待値:

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{\mu}$$

$$E(\boldsymbol{W}) = E(\boldsymbol{T}\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{T}E(\boldsymbol{Z}) + \boldsymbol{\mu}$$

$$= \boldsymbol{\mu}$$

$$E(\boldsymbol{Z}) = \boldsymbol{0}$$

- 分散共分散行列:

$$V(\boldsymbol{W}) = E\{\,[\boldsymbol{W}-\boldsymbol{\mu}][\boldsymbol{W}-\boldsymbol{\mu}]^\top\}$$

$$= \boldsymbol{T}E[\boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}^\top]\boldsymbol{T}^\top = \boldsymbol{T}V(\boldsymbol{Z})\boldsymbol{T}^\top$$

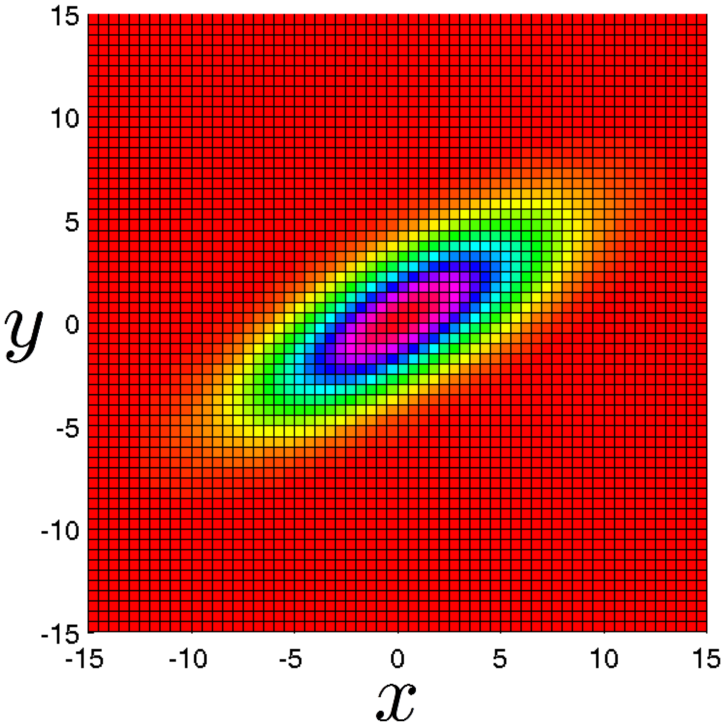
$$= \boldsymbol{\Sigma}$$

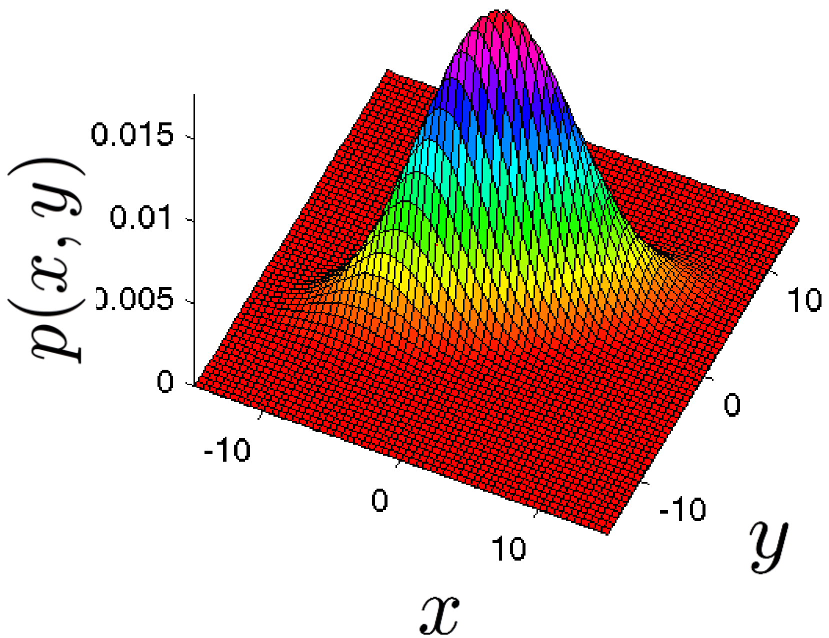
$$V(\boldsymbol{Z}) = \boldsymbol{I}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^\top$$

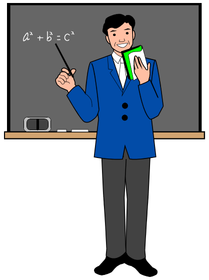
2次元正規分布(一般形)

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}$$





- 楕円形をしている.



講義の流れ

1. 離散型確率分布の例
2. 連続型確率分布の例
   A) 正規分布
   B) ガンマ分布
   C) ベータ分布

ガンマ分布

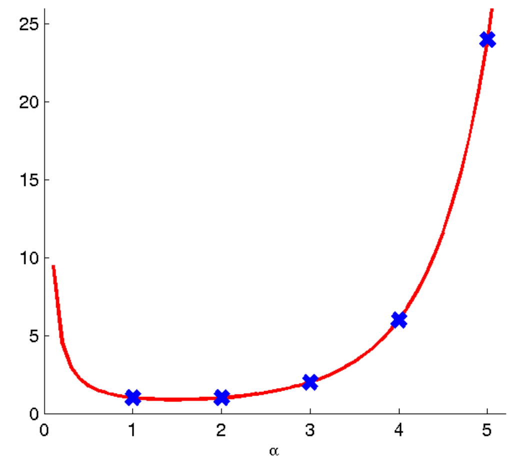
- ガンマ分布(gamma distribution): $\alpha, \lambda > 0$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

  - ガンマ関数: $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx > 0$

  - ガンマ関数は階乗の一般化: 整数の α に対して

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$$



- α, λで指定されるガンマ分布を $Ga(\alpha, \lambda)$ で表す

ガンマ分布の性質

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

- 積率母関数: $M_X(t) = E[e^{tX}] = \left(\dfrac{\lambda}{\lambda - t} \right)^\alpha$
- 期待値: $E(X) = \alpha/\lambda$
- 分散: $V(X) = \alpha/\lambda^2$

証明は演習

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx > 0$$

解答例

■ ガンマ分布の積率母関数，期待値，分散：

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-(\lambda-t)x} dx$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \left(\frac{y}{\lambda - t}\right)^{\alpha-1} \exp(-y) \frac{1}{\lambda - t} dy$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)}{(\lambda - t)^\alpha} = \lambda^\alpha (\lambda - t)^{-\alpha}$$

$$y = (\lambda - t)x$$

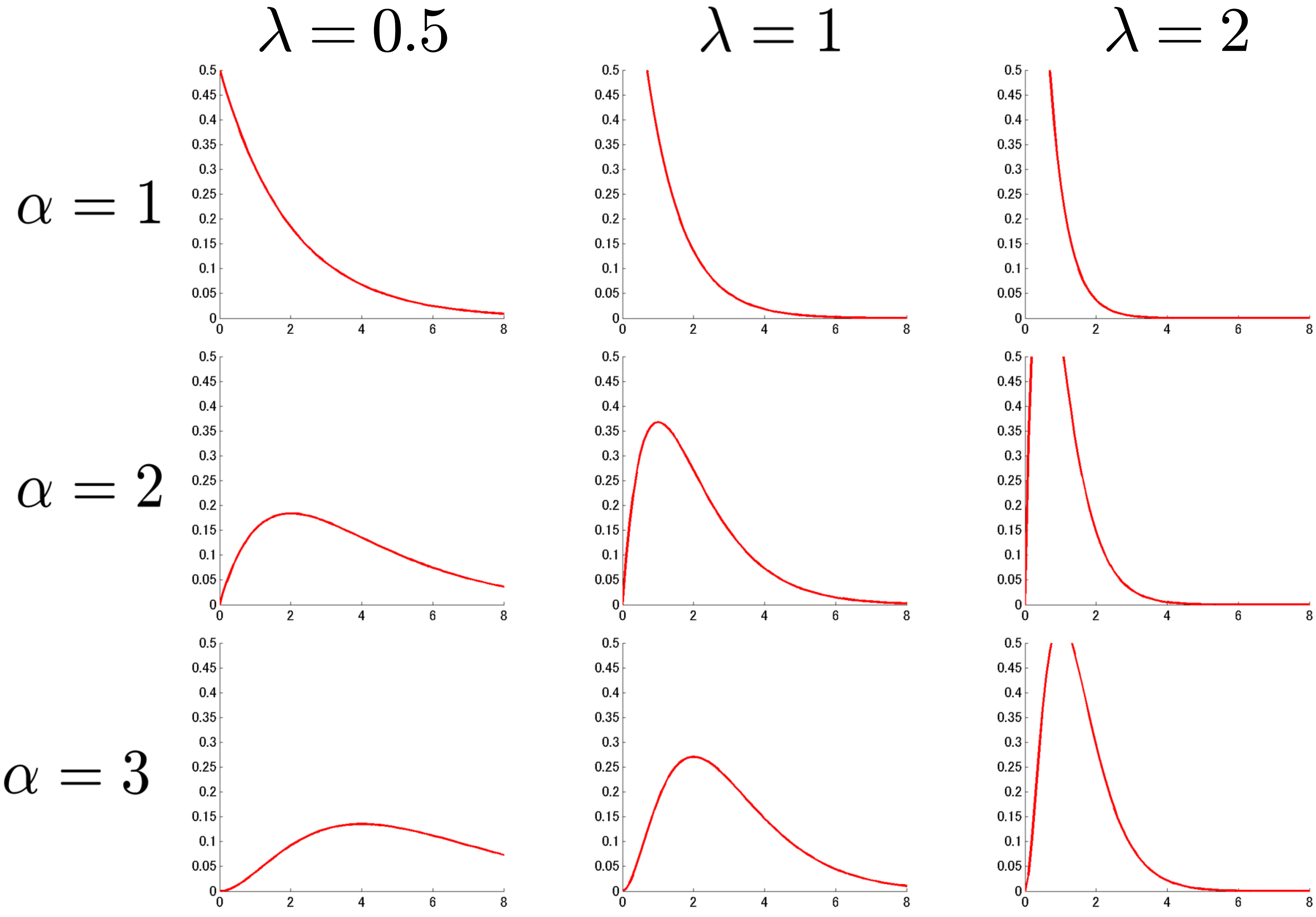
$$M'_X(t) = \alpha\lambda^\alpha(\lambda - t)^{-\alpha-1}$$

$$M''_X(t) = \alpha(\alpha+1)\lambda^\alpha(\lambda - t)^{-\alpha-2}$$

$$E(X) = M'_X(0) = \alpha/\lambda$$

$$V(X) = M''_X(0) - M'_X(0)^2 = \alpha(\alpha+1)/\lambda^2 - \alpha^2/\lambda^2 = \alpha/\lambda^2$$

ガンマ分布の例



指数分布

指数分布(exponential distribution)

- $\alpha = 1$ のガンマ分布に対応

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

- 単位時間に平均 λ 回起こる事象が，初めて起こるまでの時間 X の分布
- ポアソン分布（復習）：単位時間に平均 λ 回起こる事象が単位時間中に起こる回数 Y の分布

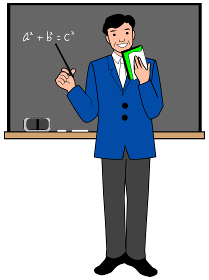
カイ二乗分布

- 確率変数 X_i が独立に標準正規分布 $N(0,1)$ に従うとき，

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

  はガンマ分布 $Ga(n/2, 1/2)$に従う
- このガンマ分布 $Ga(n/2, 1/2)$を特に，自由度 n の χ^2（カイ二乗）分布(chi-squared distribution)と呼ぶ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$



講義の流れ

1. 離散型確率分布の例
2. 連続型確率分布の例
   A) 正規分布
   B) ガンマ分布
   C) ベータ分布

ベータ分布

- ベータ分布(beta distribution): $\alpha, \beta > 0$

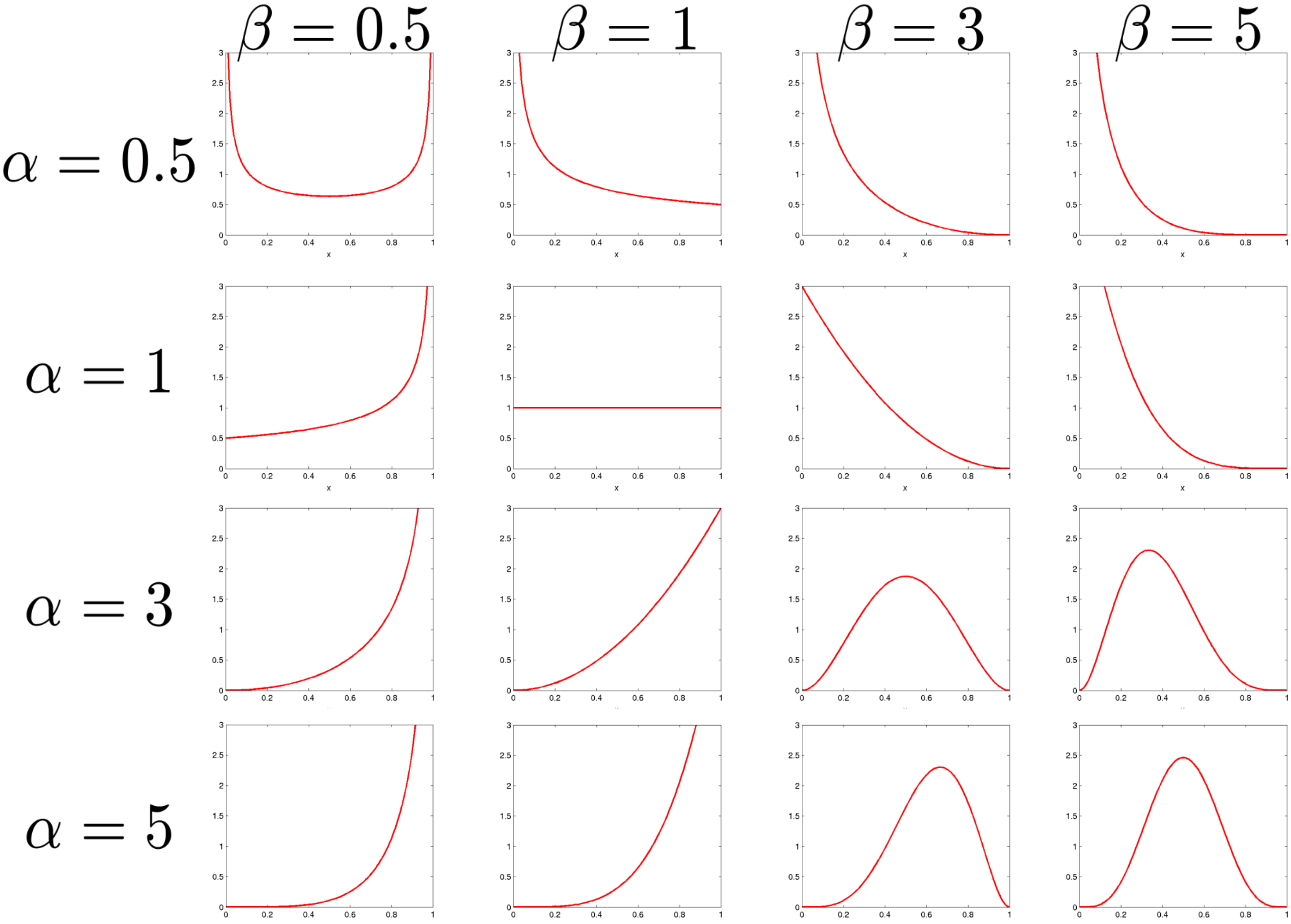
$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}/B(\alpha,\beta) & (0 < x < 1) \\ 0 & (\mathrm{otherwise}) \end{cases}$$

  - ベータ関数:

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

- α, βで指定されるベータ分布を $Be(\alpha,\beta)$ で表す
- $\alpha = \beta = 1$ のとき，特に連続一様分布(uniform distribution of continuous type)と呼び，$U(0,1)$ で表す

ベータ分布の例



順序統計量

- n 個の標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ があるとき，それらのうち k 番目に小さい標本を第 k 順序統計量という
  - 最小値：第1順序統計量
  - 最大値：第 n 順序統計量
  - 中央値：第 $(n+1)/2$ 順序統計量
- X_i がそれぞれ独立に [0,1] 上の一様分布に従うとき，その第 k 順序統計量はベータ分布 $Be(k, n-k+1)$ に従う

ベータ分布の性質

- 期待値:

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

- 分散:

$$V(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

- 特に一様分布の場合は

$$E(X) = 1/2, \quad V(X) = 1/12$$

証明

$$E(X) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \int_0^1 x x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx$$

$$= \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1} dx$$

$$(1-x)^{\beta-1} = \frac{d}{dx}\left\{-\frac{(1-x)^{\beta}}{\beta}\right\}$$

$$= \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \left\{ \left[x^{\alpha}\left(-\frac{(1-x)^{\beta}}{\beta}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \alpha x^{\alpha-1}\left(-\frac{(1-x)^{\beta}}{\beta}\right) dx \right\}$$

（部分積分）

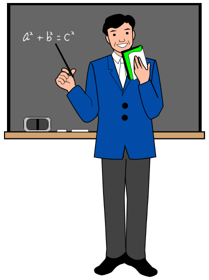
$$= \frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{B(\alpha,\beta)} \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}(1-x) dx$$

$$= \frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{B(\alpha,\beta)} \left\{ \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx - \int_0^1 x x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx \right\}$$

$$= \frac{\alpha}{\beta}\{1 - E(X)\}$$

これより, $E(X) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$

分散の証明は宿題



講義の流れ

1. 離散型確率分布の例
2. 連続型確率分布の例

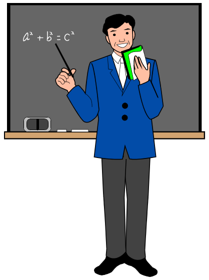
まとめ

■ 離散型確率分布

- 一様分布：さいころ投げ
- 二項分布：コイン投げ，復元抽出
- 超幾何分布：非復元抽出
- ポアソン分布：二項分布の極限，ポアソンの少数の法則

■ 連続型確率分布

- 正規分布：最も重要な連続型確率分布
- ガンマ分布，ベータ分布：様々な形状を表現できる



次回の予告

- 確率不等式
- 大数の法則
- 中心極限定理
- 仮説検定

宿題1

■ 超幾何分布の分散が次式で与えられることを示せ.

$$V(X) = \frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$$

ヒント: 分散は

$$V[X] = E[X(X-1)] + E[X] - (E[X])^2$$

と表すことができる. 期待値のときと同様な計算をすれば,

$$E[X(X-1)] = \frac{n(n-1)M(M-1)}{N(N-1)}$$

が成り立つ. また恒等式

$$_N C_n = \sum_{x=0}^{n} {_M C_x} \; {_{N-M} C_{n-x}}$$

も役立つ.

宿題2

1. X の確率密度関数が $f(x)$，$X=t(Y)$ のとき，($t(\cdot)$ は微分可能・単調増加) Y の確率密度関数 $g(y)$ が次式で与えられることを示せ．

$$g(y)=f(t(y))\frac{dt(y)}{dy}$$

ヒント：確率変数 Y の確率密度関数が $g(y)$
$\Leftrightarrow$ 任意の実数 y に対して

$$\Pr(Y\leq y)=\int_{-\infty}^{y}g(u)du$$

宿題3

- ベータ分布 $Be(\alpha, \beta)$の分散が
次式で与えられることを示せ

$$V(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

- ヒント: $E(X)$ と同様にして（あるいは

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \qquad \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$$

を使って）$E(X^2)$ を求め,

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

を使う

宿題4

- 以下の手順で自由度が1～10のカイ二乗分布に従う標本を発生させ，ヒストグラムを作成せよ．
- 自由度 n のカイ二乗分布に従う標本 Y_n は，
標準正規分布に独立に従う n 個の標本$X_1, \ldots, X_n$を用いて

$$Y_n = X_1^2 + \cdots + X_n^2$$

によって生成できる