解析数理要論課題 1

2018 年 5 月 23 日

1　問題 1

1.1　Young の不等式

Jensen の不等式を用いる。Jensen の不等式は以下のようなものである。

$f(x)$ を $\mathcal{R}$ 上の凸関数とする。$p_i \in \mathcal{R}$ $(i = 1, 2, 3...)$、$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ とし、$x_1, x_2, x_3...$ を実数の列とする。このとき、

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i f(x_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i\right) \tag{1}$$

となる、というのが Jensen の不等式の主張である。
Young の不等式は、$a, b, p, q \in \mathcal{R}$、$a, b \geq 0$、$1 < p < \infty$、$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ としたとき、

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{2}$$

または、

$$ab \leq \epsilon a^p + (1 - \epsilon) b^q \tag{3}$$

と表される。これを示す。

$f(x) = e^x$ とするとこれは $\mathcal{R}$ 上の凸関数である。Jensen の不等式より $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たすような $p, q \in \mathcal{R}$、$p, q > 1$ について $x, y \in \mathcal{R}$ をとって

$$\frac{e^x}{p} + \frac{e^y}{q} \geq e^{\frac{x}{p} + \frac{y}{q}} \tag{4}$$

となる。ここで、$x = p \log a$、$y = q \log b$ とすると、

$$\frac{e^{p \log a}}{p} + \frac{e^{q \log b}}{q} \geq e^{\frac{p \log a}{p} + \frac{q \log b}{q}} \tag{5}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{e^{\log a^p}}{p} + \frac{e^{\log b^q}}{q} \geq e^{\log a + \log b} \tag{6}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab \tag{7}$$

1.2 Hölder の不等式

$p, q \in \mathcal{R}$、$1 < p < \infty$、$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たす数とする。$u \in L^p(a,b)$、$v \in L^q(a,b)$ とする。このとき $uv \in L^1(a,b)$ であり

$$\int_a^b |uv| dx \leq \|u\|_p \|v\|_q \tag{8}$$

となる、というのが Hölder の不等式の主張である。
$s = \frac{|u|}{\|u\|_p}$、$t = \frac{|v|}{\|v\|_q}$ とすると、Young の不等式により

$$\frac{|uv|}{\|u\|_p \|v\|_q} = \frac{|u||v|}{\|u\|_p \|v\|_q} \leq \frac{|u|^p}{p\|u\|_p^p} + \frac{|v|^q}{q\|v\|_q^q} \tag{9}$$

となる。ここで両辺を積分すると

$$\int_a^b \frac{|uv|}{\|u\|_p \|v\|_q} dx \leq \int_a^b \frac{|u|^p}{p\|u\|_p^p} dx + \int_a^b \frac{|v|^q}{q\|v\|_q^q} dx \tag{10}$$

$$= \frac{1}{p\|u\|_p^p} \int |u|^p dx + \frac{1}{q\|v\|_q^q} \int |v|^q dx \tag{11}$$

$$= \frac{1}{p\|u\|_p^p} \|u\|_p^p + \frac{1}{q\|v\|_q^q} \|v\|_q^q \tag{12}$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \tag{13}$$

$$= 1 \tag{14}$$

したがって、両辺に $\|u\|_p \|v\|_q$ を掛けることで、

$$\int_a^b |uv| dx \leq \|u\|_p \|v\|_q \tag{15}$$

を得る。

1.3 Minkowski の不等式

$1 < p < \infty$ とするとき、$u, v \in L^p(a,b)$ ならば $u + v \in L^p(a,b)$ であり、

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p \tag{16}$$

となる、というのが Minkowski の不等式の主張である。

まず、$|u(x) + v(x)|^p \leq (|u(x)| + |v(x)|^p \leq 2^{p-1}(|u(x)|^p + |v(x)|^p))$ であるから、

$$\|u + v\|_{L^p} = \left(\int_a^b |u + v|^p dx \right)^{1/p} < \infty \tag{17}$$

より、$u + v \in L^p(a,b)$ である。ここで、$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たすような q を考えると、$q = p/(p-1)$ であるから、

$$\| |u + v|^{p-1} \|_{L^q} = \left(\int_a^b |u + v|^{(p-1)\frac{p}{p-1}} \right)^{1-1/p} < \infty \tag{18}$$

ゆえに $|u+v|^{p-1} \in L^q$ である。

$$\|u+v\|_p^p = \int_a^b |u+v|^p dx \leq \int_a^b |u+v|^{p-1}|u|dx + \int_a^b |u+v|^{p-1}|v|dx \tag{19}$$

の右辺第一項に Hölder の不等式を適用すると、

$$\int_a^b |u+v|^{p-1}|u|dx \leq \left(\int_a^b |u|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |u+v|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \tag{20}$$

$$\Longleftrightarrow \int_a^b |u+v|^{p-1}|u|dx \leq \left(\int_a^b |u|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |u+v|^{p}\right)^{1/q} \tag{21}$$

同様にして右辺第二項も

$$\int_a^b |u+v|^{p-1}|v|dx \leq \left(\int_a^b |v|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |u+v|^{p}\right)^{1/q} \tag{22}$$

となる。式 (19) に式 (21, 22) を適用することにより

$$\|u+v\|_p^p \leq \left(\int_a^b |u|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |u+v|^{p}\right)^{1/q} + \left(\int_a^b |v|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |u+v|^{p}\right)^{1/q} \tag{23}$$

$$\Longleftrightarrow \|u+v\|_p^p \leq \|u\|_p \left(\int_a^b |u+v|^{p}\right)^{(p-1)/p} + \|v\|_q \left(\int_a^b |u+v|^{p}\right)^{(p-1)/p} \tag{24}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\|u+v\|_p^p}{\|u+v\|_p^{p-1}} \leq \|u\|_p + \|v\|_p \tag{25}$$

$$\Longleftrightarrow \|u+v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p \tag{26}$$

を得る。

2　問題 2

Banach 空間 X の点列 $\{x_n\} \subset X$ に対し、部分和 $S_N := \sum_{n=1}^N x_n$ の列 $\{S_N\}_{N=1}^\infty$ を考える。これが X で収束するとき「級数 $\sum_{n=1}^\infty$ は X において和を持つ」という。

2.1　(1)

X:Banach 空間とする。X の点列 $\{x_n\}$ が $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\| < \infty$ を満たすとき級数 $\sum_{n=1}^\infty x_n$ は X で和を持つことを示す。

ここで、$\sum_{n=1}^N \|x_n\| \to 0$ とする。このとき $N > M$ として三角不等式より

$$\|S_N - S_M\| = \|\sum_{n=1}^N x_n - \sum_{m=1}^M x_m\| = \|\sum_{n=M+1}^N x_n\| \leq \sum_{n=M+1}^N \|x_n\| \tag{27}$$

であるが左辺は収束するため $\{S_N\}$ は Cauchy 列である。ここで X は Banach であるから X の全ての Cauchy 列は収束する。
したがって $\{S_N\}$ は収束するため、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ は X で和を持つ。