# 解析数理要論課題 1

航空宇宙工学専攻 荒居秀尚 37-186305

2018 年 5 月 29 日

## 1　問題 1

### 1.1　Young の不等式

Jensen の不等式を用いる。Jensen の不等式は以下のようなものである。

$f(x)$ を $\mathcal{R}$ 上の凸関数とする。$p_i \in \mathcal{R}$ $(i = 1, 2, 3...)$、$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ とし、$x_1, x_2, x_3...$ を実数の列とする。このとき、

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i f(x_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i\right) \tag{1}$$

となる、というのが Jensen の不等式の主張である。
Young の不等式は、$a, b, p, q \in \mathcal{R}$、$a, b \geq 0$、$1 < p < \infty$、$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ としたとき、

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{2}$$

と表される。これを示す。

$f(x) = e^x$ とするとこれは $\mathcal{R}$ 上の凸関数である。Jensen の不等式より $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たすような $p, q \in \mathcal{R}$、$p, q > 1$ について $x, y \in \mathcal{R}$ をとって

$$\frac{e^x}{p} + \frac{e^y}{q} \geq e^{\frac{x}{p} + \frac{y}{q}} \tag{3}$$

となる。ここで、$x = p \log a$、$y = q \log b$ とすると、

$$\frac{e^{p \log a}}{p} + \frac{e^{q \log b}}{q} \geq e^{\frac{p \log a}{p} + \frac{q \log b}{q}} \tag{4}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{e^{\log a^p}}{p} + \frac{e^{\log b^q}}{q} \geq e^{\log a + \log b} \tag{5}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab \tag{6}$$

## 1.2 Hölder の不等式

$p, q \in \mathcal{R}$、$1 < p < \infty$、$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たす数とする。$u \in L^p(a,b)$、$v \in L^q(a,b)$ とする。このとき $uv \in L^1(a,b)$ であり

$$\int_a^b |uv| dx \leq \|u\|_p \|v\|_q \tag{7}$$

となる、というのが Hölder の不等式の主張である。
$s = \frac{|u|}{\|u\|_p}$、$t = \frac{|v|}{\|v\|_q}$ とすると、Young の不等式により

$$\frac{|uv|}{\|u\|_p \|v\|_q} = \frac{|u||v|}{\|u\|_p \|v\|_q} \leq \frac{|u|^p}{p\|u\|_p^p} + \frac{|v|^q}{q\|v\|_q^q} \tag{8}$$

となる。ここで両辺を積分すると

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{|uv|}{\|u\|_p \|v\|_q} dx &\leq \int_a^b \frac{|u|^p}{p\|u\|_p^p} dx + \int_a^b \frac{|v|^q}{q\|v\|_q^q} dx && (9)\\
&= \frac{1}{p\|u\|_p^p} \int |u|^p dx + \frac{1}{q\|v\|_q^q} \int |v|^q dx && (10)\\
&= \frac{1}{p\|u\|_p^p} \|u\|_p^p + \frac{1}{q\|v\|_q^q} \|v\|_q^q && (11)\\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} && (12)\\
&= 1 && (13)
\end{aligned}$$

したがって、両辺に $\|u\|_p \|v\|_q$ を掛けることで、

$$\int_a^b |uv| dx \leq \|u\|_p \|v\|_q \tag{14}$$

を得る。

## 1.3 Minkowski の不等式

$1 < p < \infty$ とするとき、$u, v \in L^p(a,b)$ ならば $u + v \in L^p(a,b)$ であり、

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p \tag{15}$$

となる、というのが Minkowski の不等式の主張である。

まず、$|u(x) + v(x)|^p \leq (|u(x)| + |v(x)|^p \leq 2^{p-1}(|u(x)|^p + |v(x)|^p))$ であるから、

$$\|u + v\|_{L^p} = \left( \int_a^b |u + v|^p dx \right)^{1/p} < \infty \tag{16}$$

より、$u + v \in L^p(a,b)$ である。ここで、$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たすような $q$ を考えると、$q = p/(p-1)$ であるから、

$$\||u + v|^{p-1}\|_{L^q} = \left( \int_a^b |u + v|^{(p-1)\frac{p}{p-1}} \right)^{1-1/p} < \infty \tag{17}$$

ゆえに $|u+v|^{p-1} \in L^q$ である。

$$\|u+v\|_p^p = \int_a^b |u+v|^p dx \leq \int_a^b |u+v|^{p-1}|u|dx + \int_a^b |u+v|^{p-1}|v|dx \tag{18}$$

の右辺第一項に Hölder の不等式を適用すると、

$$\int_a^b |u+v|^{p-1}|u|dx \leq \left(\int_a^b |u|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |u+v|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \tag{19}$$

$$\iff \int_a^b |u+v|^{p-1}|u|dx \leq \left(\int_a^b |u|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |u+v|^p\right)^{1/q} \tag{20}$$

同様にして右辺第二項も

$$\int_a^b |u+v|^{p-1}|v|dx \leq \left(\int_a^b |v|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |u+v|^p\right)^{1/q} \tag{21}$$

となる。式 (18) に式 (20, 21) を適用することにより

$$\|u+v\|_p^p \leq \left(\int_a^b |u|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |u+v|^p\right)^{1/q} + \left(\int_a^b |v|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |u+v|^p\right)^{1/q} \tag{22}$$

$$\iff \|u+v\|_p^p \leq \|u\|_p \left(\int_a^b |u+v|^p\right)^{(p-1)/p} + \|v\|_q \left(\int_a^b |u+v|^p\right)^{(p-1)/p} \tag{23}$$

$$\iff \frac{\|u+v\|_p^p}{\|u+v\|_p^{p-1}} \leq \|u\|_p + \|v\|_p \tag{24}$$

$$\iff \|u+v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p \tag{25}$$

を得る。

# 2 問題 2

Banach 空間 $X$ の点列 $\{x_n\} \subset X$ に対し、部分和 $S_N := \sum_{n=1}^N x_n$ の列 $\{S_N\}_{N=1}^\infty$ を考える。これが $X$ で収束するとき「級数 $\sum_{n=1}^\infty$ は $X$ において和を持つ」という。

## 2.1 (1)

$X$:Banach 空間とする。$X$ の点列 $\{x_n\}$ が $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\| < \infty$ を満たすとき級数 $\sum_{n=1}^\infty x_n$ は $X$ で和を持つことを示す。

ここで、$\sum_{n=1}^N \|x_n\| \to 0$ とする。このとき $N > M$ として三角不等式より

$$\|S_N - S_M\| = \| \sum_{n=1}^N x_n - \sum_{m=1}^M x_m\| = \| \sum_{n=M+1}^N x_n\| \leq \sum_{n=M+1}^N \|x_n\| \tag{26}$$

であるが左辺は収束するため $\{S_N\}$ は Cauchy 列である。ここで $X$ は Banach であるから $X$ の全ての Cauchy 列は収束する。
したがって $\{S_N\}$ は収束するため、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ は $X$ で和を持つ。

## 2.2 (2)

ノルム空間 $X$ の点列で $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ を満たす任意の点列について、その級数が $X$ で常に和を持つ、すなわち $S_N = \sum_{n=1}^{N} x_n$ の列 $\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$ が収束するとき、$X$ が完備であることを示す。$X$ の完備性を示すためには $X$ から任意に選んだコーシー列 $z_n$ が $X$ の一点に収束することを示せば良い。

しかし、$z_n$ $(n = 1, 2, ...)$ を示すためには、$z_n$ の部分列 $z_{\nu(k)}$ $(k = 1, 2, ...)$ が $X$ の一点に収束することを示せば良い。なぜならば、この部分列が収束するとき任意の $\epsilon > 0$ に対して、ある $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$ が存在し、$z_n$ がコーシー列であることから

$$\|z_i - z_j\| < \frac{\epsilon}{2}, \ \forall i, j \geq N_1 \tag{27}$$

が成り立つ。また、部分列 $z_{\nu(k)}$ の収束性より

$$\|z_{\nu(k)} - z^*\| < \frac{\epsilon}{2}, \ \forall k \geq N_2, \ \forall \nu(k) \geq N_1 \tag{28}$$

以上の二式から以下のようにコーシー列 $z_n$ の収束性が示される。

$$\|z_i - z^*\| \leq \|z_i - z_{\nu(k)}\| + \|z_{\nu(k)} - z^*\| < \epsilon, \ \forall i \geq N_1, \forall k \geq N_2 \tag{29}$$

したがって以下では、コーシー列 $z_n$ に X に収束する部分列 $z_{\nu(k)}$ が存在することを示す。

任意の $k \in \mathcal{N}$ に対しある $\nu(k) \in \mathcal{N}$ が存在し、

$$i, j \geq \nu(k) \Rightarrow \|z_i - z_j\| < \frac{1}{2^k} \tag{30}$$

となる。このとき

$$i, j \geq \nu(k-1) \Rightarrow \|z_i - z_j\| < \frac{1}{2^{k-1}} \tag{31}$$

であるから、

$$\|z_{\nu(k)} - z_{\nu(k-1)}\| < \frac{1}{2^{k-1}} \ (k = 2, 3, ...) \tag{32}$$

を満たす。ここで、

$$x_k := \begin{cases} z_{\nu(k)} & (k = 1) \\ z_{\nu(k)} - z_{\nu(k-1)} & (k = 2, 3...) \end{cases} \tag{33}$$

とすると、

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| = \|z_{\nu(1)}\| + \sum_{i=2}^{\infty} \|z_{\nu(i)} - z_{\nu(i-1)}\| \tag{34}$$

$$\leq 1 + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} = 2 < \infty \tag{35}$$

一方、ある $z^* \in X$ として

$$z_{\nu(k)} = \sum_{i=1}^{k} x_i = z_{\nu(1)} + \sum_{i=2}^{k} (z_{\nu(i)} - z_{\nu(i-1)}) \to z^* \in X \quad (k \to \infty) \tag{36}$$

となるため部分列 $z_{\nu(k)}$ は収束するから任意の Cauchy 列 $z_n$ は収束するため $X$ は Banach である。

## 3 参考文献


1. 山田功 (2009) 工学のための関数解析. サイエンス社

2. 黒田成俊 (1980) 関数解析. 共立出版