12 - Variables+aleatoires-eleve-niveau-python-bon

April 20, 2020

1 1. Moyenne et écart type d'une liste de nombres

On va écrire dans un premier temps les fonctions *moyenne* et *ecarttype* que nous utiliserons ensuite.

- La moyenne d'une série statistique $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ s'obtient par la formule $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
- Sa variance est $V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ (moyenne des carrés des écarts des valeurs à la moyenne).
- Son écart type est alors $\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$.

Q1. Rappeler les formules de calculs de moyenne et de variance dans le cas d'une série donnée avec effectifs $(x_i; n_i)$ puis avec fréquences $(x_i; f_i)$.

Q2. Écrire une fonction $moyenne(L)$ renvoyant la moyenne d'une liste de nombres L.

```
In [5]: def moyenne(L):
            # à compléter
            return
```

La fonction $ecarttype(L)$ renvoie l'écart type d'une liste de nombres L.

```
In [3]: from math import sqrt

        def ecarttype(L):
            v = 0
            moy = moyenne(L)
            for x in L:
                v += (x-moy)**2
            return sqrt(v/len(L))
```

Q3. Tester dans la cellule ci-dessous les deux fonctions précédentes avec la série 15, 12, 10, 16.

```
In [ ]:
```

2 2. Simulations d'expériences aléatoires

Plusieurs fonctions de la bibliothèque `random` permettent de simuler l'aléatoire en Python. Si n et p sont des entiers :

- $randrange(n)$ renvoie un entier entre 0 et $n-1$.
- $randrange(n, p)$ renvoie un entier entre n inclus et p exclu.
- $randint(n, p)$ renvoie un entier entre n et p inclus.
- $random()$ renvoie un flottant de l'intervalle $[0; 1[$

2.1 2.1. Lancers de dés

$randint(1, 6)$ permet de simuler le lancer d'un dé ordinaire à 6 faces.

Q4. Quel est le rôle de la fonction suivante ?

```
In [7]: from random import randint

        def lancerdes(n):
            res = []
            for i in range(n):
                res.append(randint(1,6))
            return res
```

Q5. Dans la cellule ci-dessous, on simule une série de 10 000 lancers de dés. Déterminer sa moyenne et son écart type.

```
In [9]: serie = lancerdes(10000)
        moy = 0 # ligne à modifier
        et = 0 # ligne à modifier
        print("moyenne :", moy, "ecart-type: ",et)
```

Q6. Décrire le fonctionnement du code suivant.

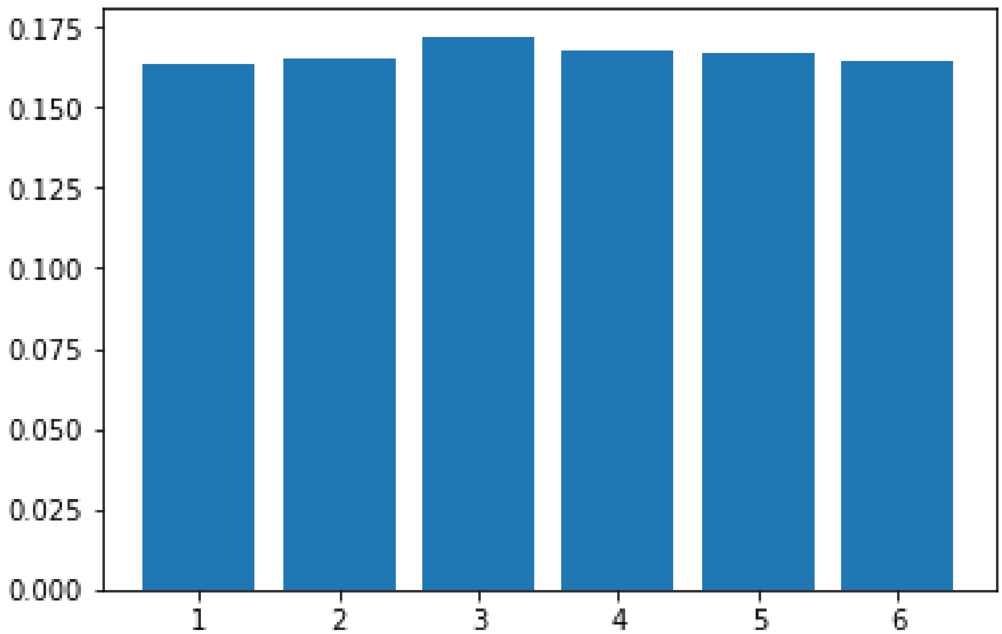
```
In [7]: def frequence(serie):
            freq = [0]*6
            for x in serie:
                freq[x-1] += 1     # même effet que freq[x-1] = freq[x-1] + 1
            for i in range(len(freq)):
                freq[i] = freq[i]/len(serie)
            return freq
```

On peut alors représenter cette série sous la forme d'un diagramme en barres.

```
In [9]: import matplotlib.pyplot as plt

        def diagramme(freq):
            u = plt.bar(range(1,7),freq)
            plt.show()

        diagramme(frequence(serie))
```



2.2 2.2. Lancers d'une pièce de monnaie

$random() < 0.5$ permet de simuler le lancer d'une pièce de monnaie.

Q7. Que renvoie l'expression $random() < 0.5$? Expliquer comment l'utiliser pour simuler le lancer d'une pièce.

Q8. Écrire une fonction effectuant une simulation de n lancers de pièces de monnaie et renvoyant la fréquence d'apparition de pile (ou face). On pourra la tester avec $n = 10\,000$ par exemple.

```
In [1]: def simulationLancers(n):
            return
```

2.3 2.3. Évènement de probabilité p

$random() < p$ permet de simuler un évènement de probabilité p.

2.3.1 Tir à l'arc V1

Loic tire 10 flèches sur une cible. A chaque tir, il a une probabilité de 0,7 de toucher la cible.

Q9. Écrire une fonction permettant de simuler cette expérience, renvoyant le nombre de fois où Loic a touché la cible lors de ses 10 tirs.

```
In [2]: from random import random

        def simulation10TirV1():
            return
```

2.3.2 Tir à l'arc V2

Lors du premier tir, Loic a une probabilité de 0,7 de toucher la cible. Ensuite, si Loic touche la cible, il a une probabilité de 0,8 de retoucher la cible au tir suivant, et s'il manque, il a une probabilité de 0,5 de toucher la cible au tir suivant.

Q10. Corriger la fonction permettant de simuler cette expérience, renvoyant le nombre de fois où Loic a touché la cible en 10 tirs.

```
In [5]: def simulation10TirV2():
            # Premier tir
            if random() < 0.7:
                nbr_touche = 0
                touche = True
            else:
                nbr_touche = 0
                touche = False
            # 9 tirs suivants
            for i in range(9):
                if touche:
                    proba = 0
                else:
                    proba = 0
                if random() < proba:
                    nbr_touche += 0
                    touche = True
                else:
                    touche = True
            return nbr_touche
```

Q11. Simuler n séries de 10 tirs, en retenant dans chaque série le nombre de fois où Loic touche la cible. En prenant $n = 1\ 000$, afficher la moyenne et l'écart type de cette série dans les deux situations précédentes (V1 et V2).

```
In [8]: def simulationTirsV1(n):
            res_series = []
            for i in range(n):
                nbr_touche = simulation10TirV1()
                res_series.append(nbr_touche)
            return moyenne(res_series), ecarttype(res_series)

        def simulationTirsV2(n):
            # Fonction à écrire
            return

        # Tester print(simulationTirsV1(1000))
        # Tester print(simulationTirsV2(1000))
```

2.4 2.4. Déplacement aléatoire d'un robot

Un robot se déplace dans une direction aléatoire définie par un angle entre 0ř et 360ř d'une distance aléatoire entre 20 et 100 centimètres.

Le script suivant permet de simuler un tel déplacement.

```
In [15]: from random import random

          def deplacement():
              angle = random()*360
              distance = random()*80 + 20
              return angle,distance
```

On souhaite effectuer une simulation de n déplacements consécutifs. Le robot démarre au point de coordonnées (0; 0).

Q12. Compléter le script suivant, qui affiche la trajectoire du robot, afin qu'il renvoie les coordonnées du robot après les déplacements.

```
In [1]: # Création des fonctions cosinus et sinus en degrés
        import numpy as np
        def cos(x):
            return np.cos(np.pi*x/180)

        def sin(x):
            return np.sin(np.pi*x/180)

        # Fonctions permettant d'afficher les déplacements du robot
        import turtle

        def simulationDeplacements(n):
            x,y = 0,0
            for i in range(n):
                angle,distance = deplacement()
                turtle.setheading(angle)
                turtle.forward(distance)
                # ligne à écrire pour mettre à jour la valeur de x après le déplacement
                # ligne à écrire pour mettre à jour la valeur de y après le déplacement
            turtle.exitonclick()
            return x,y

        # Les lignes suivantes exécutent la fonction simulationDeplacements.
        # Les instructions try et except ne présentent pas d'intérêt pour nous mais permettent

        try:
            print(simulationDeplacements(10))
        except:
            print(simulationDeplacements(10))
```

3 3. Variables aléatoires réelles

Définition

On considère une expérience dont l'univers est un ensemble fini Ω. Une variable aléatoire X est une fonction définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exemples - La variable X qui, à tout lancer d'un dé à six faces, associe le nombre obtenu sur la face supérieure est une variable aléatoire à valeurs dans {1; 2; 3; 4; 5; 6}. - La variable Y qui, à toute série de 10 tirs de Loic, associe le nombre de fois où il touche la pile est une variable aléatoire à valeurs dans {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10}. - La variable qui, à tout déplacement du robot, associe la distance parcourue en centimètres est une variable aléatoire à valeurs dans [20 ; 100]. Cet exemple dépasse le cadre du programme de première car l'ensemble des déplacements est infini.

Définition

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est la donnée de la probabilité $P(X = x_i)$ de l'évènement $\{X = x_i\}$ pour chaque valeur x_i prise par X.

Exemples - La loi de probabilité de la variable X est donnée par : $\forall n \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $P(X = n) = \frac{1}{6}$ - La loi de probabilité de la variable Y est plus complexe à déterminer mais peut être estimée statistiquement. On rappelle que la fréquence de réalisation d'un évènement lors de n expériences se rapproche de la probabilité de réalisation de cet évènement quand n est très grand.

Q13. Ecrire la fonction $simulationFreq(n)$ renvoyant la fréquence d'apparition de chaque résultat, les résultats étant $\{Y = 0\}$, $\{Y = 1\}$, ..., $\{Y = 10\}$. On utilisera, sans chercher à comprendre son fonctionnement, la fonction afficheResultat qui permet d'afficher les fréquences sous forme de tableau.

```
In [2]: from IPython.display import HTML, display

        def simulationFreq(n):
            """appelle n fois simulation10TirV2 et renvoie une liste freq contenant la fréquen
            d'obtiention de chaque résultat"""
            freq = [0] # ligne à compléter pour construire une liste de onze 0
            for i in range(n):
                nbr_touche = simulation10TirV2()
                # Écrire ici la ligne permettant d'incrémenter dans la liste freq le nombre d'
            for i in range(11):
                freq[i] = freq[i] # ligne à compléter
            return freq

        def afficheResultat(freq):
            data = [["n",0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10],
                ["P(Y=n)"]+freq]
            display(HTML(
               '<table><tr>{}</tr></table>'.format(
                   '</tr><tr>'.join(
                       '<td>{}</td>'.format('</td><td>'.join(str(_) for _ in row)) for row in d
                   )
            ))

        # Tester freq = simulationFreq(10000) une fois la fonction simululationFreq complétée
        # Tester afficheResultat(freq) une fois la fonction simululationFreq complétée
```

Définition

On étend les notions de moyenne, de variance et d'écart type des séries statistiques aux variables aléatoires.

X étant une variable aléatoire prenant les valeurs x_i avec des probabilités p_i, on définit :

- L'espérance de X : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$
- La variance de X : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \bar{x})^2$ (moyenne des carrés des écarts des valeurs à la moyenne)
- L'écart type de X : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Exemples

$E(X) = \sum_{i=1}^{6} p_i x_i = \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3 + \frac{1}{6} \times 4 + \frac{1}{6} \times 5 + \frac{1}{6} \times 6 = \frac{21}{6} = 3,5$

$V(X) = \sum_{i=1}^{6} p_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{6} \times (1 - 3,5)^2 + \frac{1}{6} \times (2 - 3,5)^2 + \frac{1}{6} \times (3 - 3,5)^2 + \frac{1}{6} \times (4 - 3,5)^2 + \frac{1}{6} \times (5 - 3,5)^2 + \frac{1}{6} \times (6 - 3,5)^2 = \frac{35}{12}$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{35}{12}} \approx 1,7$

4 Exercices

4.1 Exercice 1

La fonction *frequenceLettres* ci-dessous calcule pour l'instant le nombre d'apparitions de chaque lettre dans un texte. Compléter cette fonction pour qu'elle renvoie dans la liste *freq* la fréquence d'apparition de chaque lettre.

Les plus motivés pourront rajouter quelques lignes pour gérer les lettres accentuées (cette partie est plus proche de la NSI que des mathématiques).

```
In [3]: def frequenceLettres(texte):
            texmin = texte.casefold()  # convertit le texte en lettres minuscules
            freq = [0]*26
            for lettre in texmin:
                num = ord(lettre) - 97  # renvoie un nombre associé à chaque caractère entre 0
                if 0 <= num <= 25:
                    freq[num] += 1
            # compléter ici la fonction par une ou plusieurs lignes
            return freq
```

Tester la fonction précédente sur le petit chaperon rouge en français.

```
In [4]: text = """
        Il était une fois une petite fille de village, la plus éveillée quon eût su voir : sa 
        Un jour, sa mère ayant cuit et fait des galettes, lui dit : ń Va voir comment se porte
        Le petit Chaperon rouge partit aussitôt pour aller chez sa mère-grand, qui demeurait da
        Le Loup se mit à courir de toute sa force par le chemin qui était le plus court, et la
        Le Loup ne fut pas longtemps à arriver à la maison de la mère-grand ; il heurte : toc,
        Ensuite il ferma la porte, et salla coucher dans le lit de la mère-grand, en attendant
        Le Loup, la voyant entrer, lui dit en se cachant dans le lit, sous la couverture : Met
        """
        t2=text.casefold()  # convertit les majuscules en minuscules
```

```
# Écrire la ligne manquante appliquant la fonction frequenceLettres au texte t2 et ren
for i in range(len(lstfreq)):
    print("Fréquence de",chr(i+97)," : ",lstfreq[i])
```

Tester sur une traduction anglaise.

```
In [5]: text = """
Once upon a time there lived in a certain village a little country girl, the prettiest
One day her mother, having made some cakes, said to her, "Go, my dear, and see how you
Little Red Riding Hood set out immediately to go to her grandmother, who lived in anotl
As she was going through the wood, she met with a wolf, who had a very great mind to ea
"Does she live far off?" said the wolf
"Oh I say," answered Little Red Riding Hood; "it is beyond that mill you see there, at
"Well," said the wolf, "and I'll go and see her too. I'll go this way and go you that,
The wolf ran as fast as he could, taking the shortest path, and the little girl took a
"Who's there?"
"Your grandchild, Little Red Riding Hood," replied the wolf, counterfeiting her voice;
The good grandmother, who was in bed, because she was somewhat ill, cried out, "Pull tl
The wolf pulled the bobbin, and the door opened, and then he immediately fell upon the
"Who's there?"
Little Red Riding Hood, hearing the big voice of the wolf, was at first afraid; but bel
The wolf cried out to her, softening his voice as much as he could, "Pull the bobbin, a
Little Red Riding Hood pulled the bobbin, and the door opened.
The wolf, seeing her come in, said to her, hiding himself under the bedclothes, "Put tl
Little Red Riding Hood took off her clothes and got into bed. She was greatly amazed to
"All the better to hug you with, my dear." "Grandmother, what big legs you have!" "All
"Grandmother, what big ears you have!" "All the better to hear with, my child." "Grandm
"All the better to see with, my child." "Grandmother, what big teeth you have got!"
"All the better to eat you up with."
And, saying these words, this wicked wolf fell upon Little Red Riding Hood, and ate her
t2=text.casefold()
# Écrire la ligne manquante appliquant la fonction frequenceLettres au texte t2 et ren
for i in range(len(lstfreq)):
    print("Fréquence de",chr(i+97)," : ",lstfreq[i])
```

Expliquer comment un programme peut déterminer si un texte est en français ou en anglais.

4.2 Exercice 2

On considère la variable aléatoire X, qui à tout lancer de deux dés, associe $|a-b|$ où a et b sont les nombres obtenus sur chaque dé.
On rappelle que $|a-b|$, que l'on lit valeur absolue de $a-b$ est la distance entre les nombres a et b.
1. Déterminer la loi de probabilité de la variable X.
2. Calculer son espérance et son écart type σ au centième.
3. Écrire la fonction *unLancer* qui simule un lancer de deux dés et renvoie la valeur prise par X.

```
In [6]: from random import randint

def unLancer():
    return
```

4. Écrire la fonction *moyenneEchantillon* qui simule n lancers de deux dés et renvoie la valeur moyenne de X obtenue sur ces n lancers. Le résultat obtenu avec 100 000 lancers est-il proche du résultat théorique ?

```
In [7]: def moyenneEchantillon(n):
            return

        moyenneEchantillon(100000)
```

5. Écrire une fonction permettant d'estimer $P(X < 3)$, la probabilité de l'évènement $\{X < 3\}$. Vérifier que cette estimation correspond au résultat attendu.

```
In [9]: def estime(n):
            """ appelle n fois unLancer() et renvoie la proportion de résultats inférieurs à 3
            return
```

La fonction suivante simule N échantillons de taille n et renvoie les distances entre la moyenne de chaque échantillon et l'espérance de X.

```
In [50]: def distanceMoyenneEsperance(N, n, esp):
             distance = []
             for i in range(N):
                 dist = (moyenneEchantillon(n) - esp)
                 distance.append(dist)
             return distance
```

Le code suivant permet de représenter cet écart.

```
In [ ]: import matplotlib.pyplot as plt
        esp = 2 # remplacer 2 par la valeur de l'espérance trouvée dans la question 2.
        dist = distanceMoyenneEsperance(1000,1000,esp)
        plt.plot(dist)
        plt.show()
```

6. Compléter le code ci-dessous pour calculer la proportion des cas où l'écart entre la moyenne d'un échantillon et l'espérance de X est inférieur ou égal à $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ dans la liste *dist*.
7. Cette proportion varie-t-elle beaucoup lors de plusieurs simulations ?

```
In [ ]: from math import sqrt

        dist = distanceMoyenneEsperance(1000,1000,esp)
        sigma = 1 # remplacer 1 par la valeur trouvée dans la question 2
        n = 1000
        esp = 2   # remplacer 2 par la valeur trouvée dans la question 2
        c = 0     # variable comptant le nombre de cas vérifiant la condition
        for d in dist:
            # ligne à compléter
            # ligne à compléter
        print(c/len(dist))
```

4.3 Exercice 3

On s'intéresse au nombre de filles et de garçons dans des familles de n enfants.
On admet que la probabilité qu'un enfant soit un garçon est égale à 0,5.

1. Compléter la fonction $famille(n)$ simulant une famille à n enfants et renvoyant le nombre de garçons.

```
In [10]: from random import random

         def famille(n):
             return
```

2. Écrire une fonction $echantillon(nb, n)$ simulant un échantillon de nb familles à n enfants et renvoyant une liste contenant le nombre de garçons dans chaque famille.

```
In [1]: def echantillon(nb, n):
            return

        echantillon(20,4)
```

On prend maintenant $n = 4$.
On note X la variable aléatoire qui, à toute famille de n enfants, associe le nombre de garçons.

3. Écrire une fonction permettant de calculer la moyenne d'un échantillon de taille nb de valeurs prises par la variable aléatoire X. Le résultat obtenu avec $n = 10000$ par exemple vous semble-t-il cohérent ?

```
In [2]: def moyenneEchantillon(nb):
            lstgarcon = echantillon(nb, 4)
            # Calculer ici la moyenne des valeurs de lstgarcon puis la renvoyer

        moyenneEchantillon(100000)
```

4. A l'aide d'un arbre, déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
5. Calculer l'espérance μ et l'écart type σ de la variable aléatoire X.
6. Dans le code ci-dessous :

- Expliquer la ligne `ecarts = [abs(moyenneEchantillon(nb)-esp) for i in range(N)]`.
- Que représente la variable c ?

7. Simuler 1 000 échantillons de taille 50 de valeurs prises par la variable aléatoire X et calculer les écarts entre la moyenne m de chaque échantillon et l'espérance μ de X. Déterminer la proportion des cas où cet écart est inférieur ou égal à $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$.

```
In [76]: from math import sqrt

         esp = 0 # remplacer par la valeur de l'espérance calculée dans la question 5
         sigma = 0 # remplacer par la valeur de l'écart type calculée dans la question 5

         def simulation(N, nb):
             ecarts = [abs(moyenneEchantillon(nb)-esp) for i in range(N)]
             c = 0
```

```
    for e in ecarts:
        if e<=2*sigma/sqrt(nb):
            c += 1
    return c/N

simulation(1000, 50)
```

```
Out[76]: 0.962
```

7. Reprendre la question précédente avec des échantillons de différentes tailles. Qu'observe-t-on ?

8. En remarquant que $|m-\mu| \leq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow m \in [\mu - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}; \mu + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}]$, interpréter les observations précédentes en terme de fluctuation d'échantillonnage.

5 Quelques liens

Histoire des probabilités

Formule de König-Huygens : La formule de König-Huygens fournit une autre méthode pour calculer la variance.