Chapitre 12 - Variables aléatoires - Résumé de cours

1 Moyenne et écart type d'une liste de nombres

- La moyenne d'une série statistique $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ s'obtient par la formule $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
- Sa variance est $V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ (moyenne des carrés des écarts des valeurs à la moyenne).
- Son écart type est alors $\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$.

Dans le cas d'une série donnée avec effectifs $(x_i; n_i)$ puis avec fréquences $(x_i; f_i)$, ces formules deviennent :

- La moyenne d'une série statistique donnée avec effectifs $(x_i; n_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ s'obtient par la formule $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i$ où n est l'effectif total : $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$.
- Sa variance est $V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \bar{x})^2$.
- La moyenne d'une série statistique donnée avec fréquences $(x_i; f_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ s'obtient par la formule $\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i$.
- Sa variance est $V(x) = \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - \bar{x})^2$.

Il faut savoir écrire une fonction *moyenne*(L) renvoyant la moyenne d'une liste de nombres L.

```
In [106]: def moyenne(L):
              s = 0
              for x in L:
                  s = s + x
              return s/len(L)
```

La fonction *ecarttype*(L) renvoie l'écart type d'une liste de nombres L.

```
In [107]: from math import sqrt

          def ecarttype(L):
              v = 0
              moy = moyenne(L)
              for x in L:
                  v += (x-moy)**2
              return sqrt(v/len(L))
```

2 Simulations d'expériences aléatoires

Plusieurs fonctions de la bibliothèque `random` permettent de simuler l'aléatoire en Python. Si n et p sont des entiers :

- *randrange*(n) renvoie un entier entre 0 et $n-1$.
- *randrange*(n, p) renvoie un entier entre n inclus et p exclu.
- *randint*(n, p) renvoie un entier entre n et p inclus.
  randint$(1, 6)$ renvoie un nombre entier entre 1 et 6 et permet de simuler le lancer d'un dé ordinaire à 6 faces.
- *random*$()$ renvoie un flottant de l'intervalle $[0; 1[$.
  random$() < 0.5$ renvoie un booléen True ou False et permet de simuler le lancer d'une pièce de monnaie.
  random$() < p$ permet de simuler un évènement de probabilité p.

3 Variables aléatoires réelles

Définition

On considère une expérience dont l'univers est un ensemble fini Ω. Une variable aléatoire X est une fonction définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exemples

- La variable X qui, à tout lancer d'un dé à six faces, associe le nombre obtenu sur la face supérieure est une variable aléatoire à valeurs dans $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

- La variable Y qui, à toute série de 10 tirs de Loic, associe le nombre de fois où il touche la pile est une variable aléatoire à valeurs dans $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

Définition

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est la donnée de la probabilité $P(X = x_i)$ de l'évènement $\{X = x_i\}$ pour chaque valeur x_i prise par X.

Exemples

- La loi de probabilité de la variable X est donnée par : $\forall n \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $P(X = n) = \frac{1}{6}$
- La loi de probabilité de la variable Yest plus complexe à déterminer mais peut être estimée statistiquement. On rappelle que la fréquence de réalisation d'un évènement lors de n expériences se rapproche de la probabilité de réalisation de cet évènement quand n est très grand.

Définition

On étend les notions de moyenne, de variance et d'écart type des séries statistiques aux variables aléatoires.

X étant une variable aléatoire prenant les valeurs x_i avec des probabilités p_i, on définit :

- L'espérance de X : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$
- La variance de X : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \bar{x})^2$ (moyenne des carrés des écarts des valeurs à la moyenne)
- L'écart type de X : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Exemples

$E(X) = \sum_{i=1}^{6} p_i x_i = \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3 + \frac{1}{6} \times 4 + \frac{1}{6} \times 5 + \frac{1}{6} \times 6 = \frac{21}{6} = 3,5$

$V(X) = \sum_{i=1}^{6} p_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{6} \times (1 - 3,5)^2 + \frac{1}{6} \times (2 - 3,5)^2 + \frac{1}{6} \times (3 - 3,5)^2 + \frac{1}{6} \times (4 - 3,5)^2 + \frac{1}{6} \times (5 - 3,5)^2 + \frac{1}{6} \times (6 - 3,5)^2 = \frac{35}{12}$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{35}{12}} \approx 1,7$

4 Quelques liens

Histoire des probabilités

Formule de König-Huygens : La formule de König-Huygens fournit une autre méthode pour calculer la variance.