

12 - Variables+aleatoires-eleve-niveau-python-faible

April 20, 2020

1 1. Moyenne et écart type d'une liste de nombres

On va écrire dans un premier temps les fonctions *moyenne* et *ecarttype* que nous utiliserons ensuite.

- La moyenne d'une série statistique $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ s'obtient par la formule $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$.
- Sa variance est $V(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ (moyenne des carrés des écarts des valeurs à la moyenne).
- Son écart type est alors $\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$.

Q1. Rappeler les formules de calculs de moyenne et de variance dans le cas d'une série donnée avec effectifs $(x_i; n_i)$ puis avec fréquences $(x_i; f_i)$.

Q2. Compléter la fonction *moyenne*(L) renvoyant la moyenne d'une liste de nombres L.

```
In [4]: def moyenne(L):  
        s = 0  
        for x in L:  
            s = s # ligne à compléter  
        return s/len(L)
```

La fonction *ecarttype*(L) renvoie l'écart type d'une liste de nombres L.

```
In [5]: from math import sqrt  
  
        def ecarttype(L):  
            v = 0  
            moy = moyenne(L)  
            for x in L:  
                v += (x-moy)**2  
            return sqrt(v/len(L))
```

Q3. Tester dans la cellule ci-dessous les deux fonctions précédentes avec la série 15, 12, 10, 16.

```
In [7]: moyenne([15, 12, 10, 16]), ecarttype([15, 12, 10, 16])
```

2. Simulations d'expériences aléatoires

Plusieurs fonctions de la bibliothèque `random` permettent de simuler l'aléatoire en Python. Si n et p sont des entiers :

- `randrange(n)` renvoie un entier entre 0 et $n - 1$.
- `randrange(n, p)` renvoie un entier entre n inclus et p exclu.
- `randint(n, p)` renvoie un entier entre n et p inclus.
- `random()` renvoie un flottant de l'intervalle $[0; 1[$

2.1. Lancers de dés

`randint(1,6)` permet de simuler le lancer d'un dé ordinaire à 6 faces.

Q4. Quel est le rôle de la fonction suivante ?

```
In [9]: from random import randint
```

```
def lancerdes(n):  
    res = []  
    for i in range(n):  
        res.append(randint(1,6))  
    return res
```

Q5. Dans la cellule ci-dessous, on simule une série de 10 000 lancers de dés. Déterminer sa moyenne et son écart type.

```
In [11]: serie = lancerdes(10000)  
         moy = moyenne(serie)  
         et = 0 # ligne à modifier pour calculer l'écart type de la série.  
         print("moyenne :", moy, "ecart-type: ", et)
```

Q6. Comprendre le fonctionnement du code suivant à l'aide des commentaires et des explications qui suivent.

```
In [13]: def frequence(serie):  
         freq = [0]*6 # On crée une liste freq contenant six 0.  
         for x in serie: # On parcourt la serie de nombres en comptant  
             freq[x-1] = freq[x-1] + 1 # le nombre d'apparitions de chaque valeur.  
         for i in range(len(freq)): # On parcourt la liste freq en divisant les eff  
             freq[i] = freq[i]/len(serie) # par l'effectif total pour calculer les fréq  
         return freq
```

La fonction `frequence` renvoie une liste contenant la fréquence d'apparition de chaque résultat, dans l'ordre croissant. Par exemple, `[0.2, 0.25, 0.1, 0.15, 0.3, 0]` signifie qu'il y a 20% de 1, 25% de 2, 10% de 3, 15% de 4, 30% de 5 et 0% de 6.

Pour cela, on crée une liste `freq` contenant six 0 : `[0, 0, 0, 0, 0, 0]`. Dans un premier temps, cette liste va indiquer le nombre d'apparitions de chaque valeur. La deuxième boucle `for` divise ces effectifs par le nombre de valeurs (`len(serie)`) pour calculer les fréquences correspondantes.

On rappelle qu'on accède aux éléments d'une liste avec le nom de la liste suivi de l'indice de l'élément entre crochet. Ainsi `freq[0]` correspond au premier élément de la liste, donc au nombre de 1; `freq[1]` au deuxième élément de la liste, donc au nombre de 2, ...

Dans la première boucle `for`, la variable `x` parcourt la série. `x` est un nombre entre 1 et 6 et les indices de la liste `freq` vont de 0 à 5.

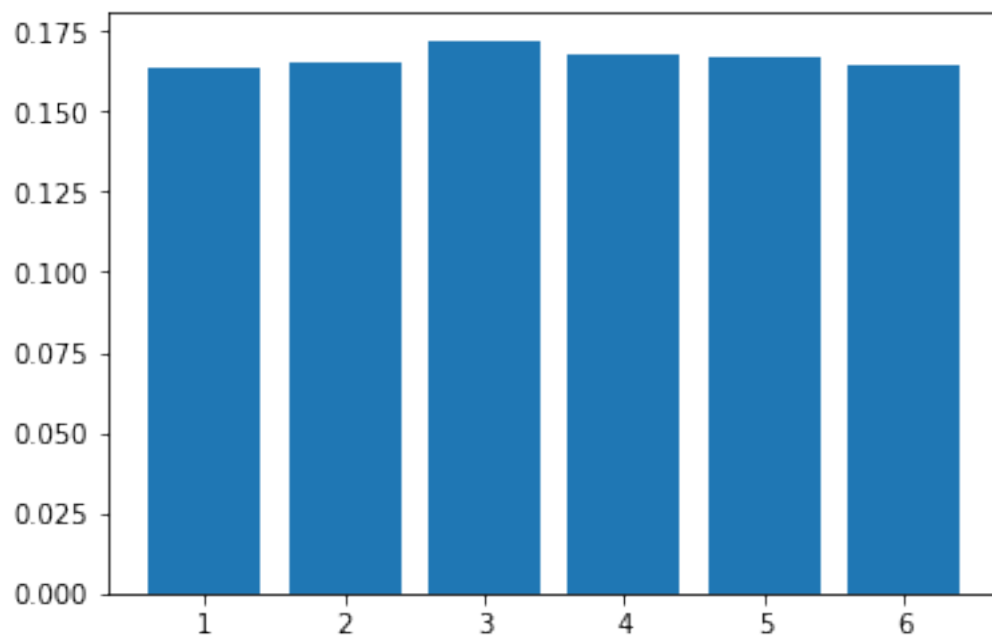
Ainsi, si `x` prend la valeur 3 par exemple, `freq[2]` qui correspond au nombre de 3, doit augmenter de 1. Si `x` prend la valeur 5 par exemple, `freq[4]` qui correspond au nombre de 5 doit augmenter de 1. D'où la ligne `freq[x-1] += 1`.

On peut alors représenter cette série sous la forme d'un diagramme en barres.

```
In [9]: import matplotlib.pyplot as plt
```

```
def diagramme(freq):  
    u = plt.bar(range(1,7),freq)  
    plt.show()
```

```
diagramme(frequence(serie))
```



2.2. Lancers d'une pièce de monnaie

`random() < 0.5` permet de simuler le lancer d'une pièce de monnaie.

Q7. Que renvoie l'expression `random() < 0.5` ? Tester dans une console Python si besoin. Expliquer comment l'utiliser pour simuler le lancer d'une pièce.

Q8. Compléter la fonction ci-dessous effectuant une simulation de n lancers de pièces de monnaie et renvoyant la fréquence d'apparition de pile (ou face). On pourra la tester avec $n = 10\,000$ par exemple.

```
In [1]: def simulationLancers(n):
        # Écrire la ligne initialisant la variable nbr_pile comptant le nombre de piles
        for i in range(n):
            if random() < 0.5:
                # Écrire la ligne incrémentant de 1 le nombre de piles
        return nbr_pile/n

        # Tester la fonction avec simulationLancers(10000)
```

2.3 2.3. Évènement de probabilité p

$random() < p$ permet de simuler un évènement de probabilité p .

2.3.1 Tir à l'arc V1

Loic tire 10 flèches sur une cible. A chaque tir, il a une probabilité de 0,7 de toucher la cible.

Q9. Corriger la fonction permettant de simuler cette expérience, renvoyant le nombre de fois où Loic a touché la cible lors de ses 10 tirs.

```
In [3]: from random import random

        def simulation10TirV1():
            nbr_touche = 0
            for i in range(2):          # Corriger cette ligne
                if random() < 0.5:      # Corriger cette ligne
                    nbr_touche += 1
            return nbr_touche
```

2.3.2 Tir à l'arc V2

Lors du premier tir, Loic a une probabilité de 0,7 de toucher la cible. Ensuite, si Loic touche la cible, il a une probabilité de 0,8 de retoucher la cible au tir suivant, et s'il manque, il a une probabilité de 0,5 de toucher la cible au tir suivant.

Q10. Corriger la fonction permettant de simuler cette expérience, renvoyant le nombre de fois où Loic a touché la cible en 10 tirs.

```
In [5]: def simulation10TirV2():
        # Premier tir
        if random() < 0.7:
            nbr_touche = 1
            touche = True
        else:
            nbr_touche = 0
            touche = False
        # 9 tirs suivants
        for i in range(9):
            if touche:
                proba = 0          # Corriger cette ligne
            else:
```

```

        proba = 0          # Corriger cette ligne
    if random() < proba:
        nbr_touche += 0    # Corriger cette ligne
        touche = True
    else:
        touche = False
    return nbr_touche

```

Q11. Simuler n séries de 10 tirs, en retenant dans chaque série le nombre de fois où Loic touche la cible. En prenant $n = 1\,000$, afficher la moyenne et l'écart type de cette série dans les deux situations précédentes (V1 et V2).

```

In [6]: def simulationTirsV1(n):
        res_series = []
        for i in range(n):
            nbr_touche = simulation10TirV1()
            res_series.append(nbr_touche)
        return moyenne(res_series), ecarttype(res_series)

    def simulationTirsV2(n):
        res_series = []
        for i in range(n):
            nbr_touche = simulation10TirV2()
            res_series.append(nbr_touche)
        return moyenne(res_series), ecarttype(res_series)

    # Tester avec print(simulationTirsV1(1000))
    # Tester avec print(simulationTirsV2(1000))

```

2.4 2.4. Déplacement aléatoire d'un robot

Un robot se déplace dans une direction aléatoire définie par un angle entre 0° et 360° d'une distance aléatoire entre 20 et 100 centimètres.

Le script suivant permet de simuler un tel déplacement.

```

In [2]: from random import random

    def deplacement():
        angle = random()*360
        distance = random()*80 + 20
        return angle,distance

```

On souhaite effectuer une simulation de n déplacements consécutifs. Le robot démarre au point de coordonnées (0; 0).

Q12. Compléter le script suivant, qui affiche la trajectoire du robot, afin qu'il renvoie les coordonnées du robot après les déplacements.

```

In [4]: # Création des fonctions cosinus et sinus en degrés
        import numpy as np

```

```

def cos(x):
    return np.cos(np.pi*x/180)

def sin(x):
    return np.sin(np.pi*x/180)

# Fonctions permettant d'afficher les déplacements du robot
import turtle

def simulationDeplacements(n):
    x,y = 0,0
    for i in range(n):
        angle,distance = deplacement()
        turtle.setheading(angle)
        turtle.forward(distance)
        x = x + distance * np.cos(angle) # calcul de la nouvelle valeur de x après le
        # ligne à écrire pour calculer la nouvelle valeur de y après le déplacement
    turtle.exitonclick()
    return x,y

# Les lignes suivantes exécutent la fonction simulationDeplacements.
# Les instructions try et except ne présentent pas d'intérêt pour nous mais permettent

try:
    print(simulationDeplacements(10))
except:
    print(simulationDeplacements(10))

```

3. Variables aléatoires réelles

Définition

On considère une expérience dont l'univers est un ensemble fini Ω . Une variable aléatoire X est une fonction définie sur Ω et à valeurs dans \mathbb{R} .

Exemples - La variable X qui, à tout lancer d'un dé à six faces, associe le nombre obtenu sur la face supérieure est une variable aléatoire à valeurs dans $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. - La variable Y qui, à toute série de 10 tirs de Loic, associe le nombre de fois où il touche la pile est une variable aléatoire à valeurs dans $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$. - La variable qui, à tout déplacement du robot, associe la distance parcourue en centimètres est une variable aléatoire à valeurs dans $[20; 100]$. Cet exemple dépasse le cadre du programme de première car l'ensemble des déplacements est infini.

Définition

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est la donnée de la probabilité $P(X = x_i)$ de l'évènement $\{X = x_i\}$ pour chaque valeur x_i prise par X .

Exemples - La loi de probabilité de la variable X est donnée par : $\forall n \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $P(X = n) = \frac{1}{6}$ - La loi de probabilité de la variable Y est plus complexe à déterminer mais peut être estimée statistiquement. On rappelle que la fréquence de réalisation d'un évènement lors de n expériences se rapproche de la probabilité de réalisation de cet évènement quand n est très grand.

Q13. Compléter la fonction *simulationFreq(n)* renvoyant la fréquence d'apparition de chaque

résultat, les résultats étant $\{Y = 0\}, \{Y = 1\}, \dots, \{Y = 10\}$.

On utilisera, sans chercher à comprendre son fonctionnement, la fonction `afficheResultat` qui permet d'afficher les fréquences sous forme de tableau.

In [6]: `from IPython.display import HTML, display`

```
def simulationFreq(n):
    """appelle n fois simulation10TirV2 et renvoie une liste freq contenant la fréquence
    d'obtention de chaque résultat"""
    freq = [0]*11
    for i in range(n):
        nbr_touche = simulation10TirV2()
        freq[nbr_touche] += 1
    for i in range(11):
        freq[i] = freq[i] # ligne à compléter
    return freq

def afficheResultat(freq):
    data = [["n",0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10],
            ["P(Y=n)"+freq]]
    display(HTML(
        '<table><tr>{</tr></table>'.format(
            '</tr><tr>'.join(
                '<td>{</td>'.format('</td><td>'.join(str(_) for _ in row)) for row in data
            )
        ))

# Tester freq = simulationFreq(10000) une fois la fonction simulationFreq complétée
# Tester afficheResultat(freq) une fois la fonction simulationFreq complétée
```

Définition

On étend les notions de moyenne, de variance et d'écart type des séries statistiques aux variables aléatoires.

X étant une variable aléatoire prenant les valeurs x_i avec des probabilités p_i , on définit :

- L'espérance de X : $E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$
- La variance de X : $V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - \bar{x})^2$ (moyenne des carrés des écarts des valeurs à la moyenne)
- L'écart type de X : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Exemples

$$E(X) = \sum_{i=1}^6 p_i x_i = \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3 + \frac{1}{6} \times 4 + \frac{1}{6} \times 5 + \frac{1}{6} \times 6 = \frac{21}{6} = 3,5$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^6 p_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{6} \times (1 - 3,5)^2 + \frac{1}{6} \times (2 - 3,5)^2 + \frac{1}{6} \times (3 - 3,5)^2 + \frac{1}{6} \times (4 - 3,5)^2 + \frac{1}{6} \times (5 - 3,5)^2 + \frac{1}{6} \times (6 - 3,5)^2 = \frac{35}{12}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{35}{12}} \approx 1,7$$

4 Exercices

4.1 Exercice 1

La fonction *frequenceLettres* ci-dessous calcule pour l'instant le nombre d'apparitions de chaque lettre dans un texte. Compléter cette fonction pour qu'elle renvoie dans la liste *freq* la fréquence d'apparition de chaque lettre.

Les plus motivés pourront rajouter quelques lignes pour gérer les lettres accentuées (cette partie est plus proche de la NSI que des mathématiques).

```
In [12]: def frequenceLettres(texte):
    texmin = texte.casefold() # convertit le texte en lettres minuscules
    freq = [0]*26
    for lettre in texmin:
        num = ord(lettre) - 97 # renvoie un nombre associé à chaque caractère entre 0 et 25
        if 0 <= num <= 25:
            freq[num] += 1
    # Rajouter la ligne permettant de définir n
    for i in range(len(freq)):
        freq[i] = freq[i]/n
    return freq
```

Tester la fonction précédente sur le petit chaperon rouge en français.

```
In [14]: text = """
    Il était une fois une petite fille de village, la plus éveillée qu'on eût su voir : sa mère.
    Un jour, sa mère ayant cuit et fait des galettes, lui dit : "Va voir comment se porte le petit
    Le petit Chaperon rouge partit aussitôt pour aller chez sa mère-grand, qui demeurait au bout du
    Le Loup se mit à courir de toute sa force par le chemin qui était le plus court, et le plus sûr.
    Le Loup ne fut pas longtemps à arriver à la maison de la mère-grand ; il heurte : toc, toc, toc.
    Ensuite il ferma la porte, et salla coucher dans le lit de la mère-grand, en attendant qu'elle
    Le Loup, la voyant entrer, lui dit en se cachant dans le lit, sous la couverture : "Mère-grand,
    """
    t2=text.casefold() # convertit les majuscules en minuscules
    lstfreq = frequenceLettres(t2)
    for i in range(len(lstfreq)):
        print("Fréquence de",chr(i+97)," : ",lstfreq[i])
```

Tester sur une traduction anglaise.

```
In [15]: text = """
    Once upon a time there lived in a certain village a little country girl, the prettiest
    One day her mother, having made some cakes, said to her, "Go, my dear, and see how your grandmother
    Little Red Riding Hood set out immediately to go to her grandmother, who lived in another village.
    As she was going through the wood, she met with a wolf, who had a very great mind to eat her.
    "Does she live far off?" said the wolf
    "Oh I say," answered Little Red Riding Hood; "it is beyond that mill you see there, at the foot of
    "Well," said the wolf, "and I'll go and see her too. I'll go this way and go you that way."
    The wolf ran as fast as he could, taking the shortest path, and the little girl took the other.
```



```

"Who's there?"
"Your grandchild, Little Red Riding Hood," replied the wolf, counterfeiting her voice.
The good grandmother, who was in bed, because she was somewhat ill, cried out, "Pull the
The wolf pulled the bobbin, and the door opened, and then he immediately fell upon the
"Who's there?"
Little Red Riding Hood, hearing the big voice of the wolf, was at first afraid; but he
The wolf cried out to her, softening his voice as much as he could, "Pull the bobbin,
Little Red Riding Hood pulled the bobbin, and the door opened.
The wolf, seeing her come in, said to her, hiding himself under the bedclothes, "Put the
Little Red Riding Hood took off her clothes and got into bed. She was greatly amazed to
"All the better to hug you with, my dear." "Grandmother, what big legs you have!" "All
"Grandmother, what big ears you have!" "All the better to hear with, my child." "Grand
"All the better to see with, my child." "Grandmother, what big teeth you have got!"
"All the better to eat you up with."
And, saying these words, this wicked wolf fell upon Little Red Riding Hood, and ate her
t2=text.casefold()
lstfreq = frequenceLettres(t2)
for i in range(len(lstfreq)):
    print("Fréquence de",chr(i+97)," : ",lstfreq[i])

```

Expliquer comment un programme peut déterminer si un texte est en français ou en anglais.

4.2 Exercice 2

On considère la variable aléatoire X , qui à tout lancer de deux dés, associe $|a - b|$ où a et b sont les nombres obtenus sur chaque dé.

On rappelle que $|a - b|$, que l'on lit valeur absolue de $a - b$ est la distance entre les nombres a et b .

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable X .
2. Calculer son espérance et son écart type σ au centième.
3. Compléter la fonction `unLancer` qui simule un lancer de deux dés et renvoie la valeur prise par X .

$|a - b|$ s'écrit `abs(a-b)` en Python.

```
In [17]: from random import randint
```

```

def unLancer():
    de1 = randint(1,6)
    # à compléter
    return # à compléter

```

4. Corriger la fonction `moyenneEchantillon` qui simule n lancers de deux dés et renvoie la valeur moyenne de X obtenue sur ces n lancers. Le résultat obtenu avec 100 000 lancers est-il proche du résultat théorique ?

```
In [20]: def moyenneEchantillon(n):
    xmoy = 0
    for i in range(n):
        xmoy = xmoy
    xmoy = xmoy/n

```

```

        return xmoy

moyenneEchantillon(100000)

```

5. Compléter la fonction suivante permettant d'estimer $P(X < 3)$, la probabilité de l'évènement $\{X < 3\}$. Vérifier que cette estimation correspond au résultat attendu.

```

In [ ]: def estime(n):
        c = 0
        for i in range(n):
            # Tester à chaque fois si le résultat d'un lancer X est inférieur à 3. Si c'es
            #         augmenter c de 1.
        return c/n

estime(100000)

```

La fonction suivante simule N échantillons de taille n et renvoie les distances entre la moyenne de chaque échantillon et l'espérance de X .

```

In [50]: def distanceMoyenneEsperance(N, n, esp):
        distance = []
        for i in range(N):
            dist = (moyenneEchantillon(n) - esp)
            distance.append(dist)
        return distance

```

Le code suivant permet de représenter cet écart.

```

In [23]: import matplotlib.pyplot as plt
        esp = 2 # remplacer 2 par la valeur de l'espérance trouvée dans la question 2.
        dist = distanceMoyenneEsperance(1000,1000,esp)
        plt.plot(dist)
        plt.show()

```

6. Compléter le code ci-dessous pour calculer la proportion des cas où l'écart entre la moyenne d'un échantillon et l'espérance de X est inférieur ou égal à $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ dans la liste *dist*.

7. Cette proportion varie-t-elle beaucoup lors de plusieurs simulations ?

```

In [ ]: from math import sqrt

        dist = distanceMoyenneEsperance(1000,1000,esp)
        sigma = 1 # remplacer 1 par la valeur trouvée dans la question 2
        n = 1000
        esp = 2 # remplacer 2 par la valeur trouvée dans la question 2
        c = 0 # variable comptant le nombre de cas vérifiant la condition
        for d in dist:
            if abs(d) < 2*sigma/sqrt(n):
                c += 1
        print(c/len(dist))

```

4.3 Exercice 3

On s'intéresse au nombre de filles et de garçons dans des familles de n enfants.

On admet que la probabilité qu'un enfant soit un garçon est égale à 0,5.

1. Compléter la fonction *famille*(n) simulant une famille à n enfants et renvoyant le nombre de garçons.

```
In [25]: from random import random
```

```
def famille(n):
    nbg = 0
    for i in range(n):
        if # compléter cette ligne avec une condition vérifiée avec une probabilité d
            # Compléter cette ligne pour incrémenter nbg si la condition est vérifiée
    return nbg
```

2. On donne deux versions d'une fonction *echantillon*(nb, n) simulant un échantillon de nb familles à n enfants. Quelles différence y a-t-il entre ces deux versions ? Que font-elles ?

```
In [1]: def echantillon(nb, n):
    lstgarcons = []
    for i in range(nb):
        lstgarcons.append(famille(n))
    return lstgarcons

def echantillon(nb, n):
    return [famille(n) for i in range(nb)]
```

On prend maintenant $n = 4$.

On note X la variable aléatoire qui, à toute famille de n enfants, associe le nombre de garçons.

3. Que renvoie la fonction ci-dessous ? On attend une interprétation précise. Le résultat obtenu avec $n = 10000$ vous semble-t-il cohérent ?

```
In [57]: def moyenneEchantillon(nb):
    lstgarcon = echantillon(nb, 4)
    moy = 0
    for x in lstgarcon:
        moy += x
    return moy/len(lstgarcon)

moyenneEchantillon(100000)
```

```
Out [57]: 1.99928
```

4. A l'aide d'un arbre, déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

5. Calculer l'espérance μ et l'écart type σ de la variable aléatoire X .

6. Dans le code ci-dessous :

- Expliquer la ligne `ecarts = [abs(moyenneEchantillon(nb)-esp) for i in range(N)]`.

- Que représente la variable c ?

7. Simuler 1 000 échantillons de taille 50 de valeurs prises par la variable aléatoire X et calculer les écarts entre la moyenne m de chaque échantillon et l'espérance μ de X . Déterminer la proportion des cas où cet écart est inférieur ou égal à $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$.

```
In [76]: from math import sqrt

        esp = 0 # remplacer par la valeur de l'espérance calculée dans la question 5
        sigma = 0 # remplacer par la valeur de l'écart type calculée dans la question 5

        def simulation(N, nb):
            ecarts = [abs(moyenneEchantillon(nb)-esp) for i in range(N)]
            c = 0
            for e in ecarts:
                if e<=2*sigma/sqrt(nb):
                    c += 1
            return c/N

        simulation(1000, 50)
```

Out [76]: 0.962

7. Reprendre la question précédente avec des échantillons de différentes tailles. Qu'observe-t-on ?

8. En remarquant que $|m - \mu| \leq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow m \in [\mu - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}; \mu + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}]$, interpréter les observations précédentes en terme de fluctuation d'échantillonnage.

5 Quelques liens

[Histoire des probabilités](#)

[Formule de König-Huygens](#) : La formule de König-Huygens fournit une autre méthode pour calculer la variance.