Ηλεκτρομαγνητικά Πεδία Α

3η εργασία

03120116
Κουρής Γεώργιος

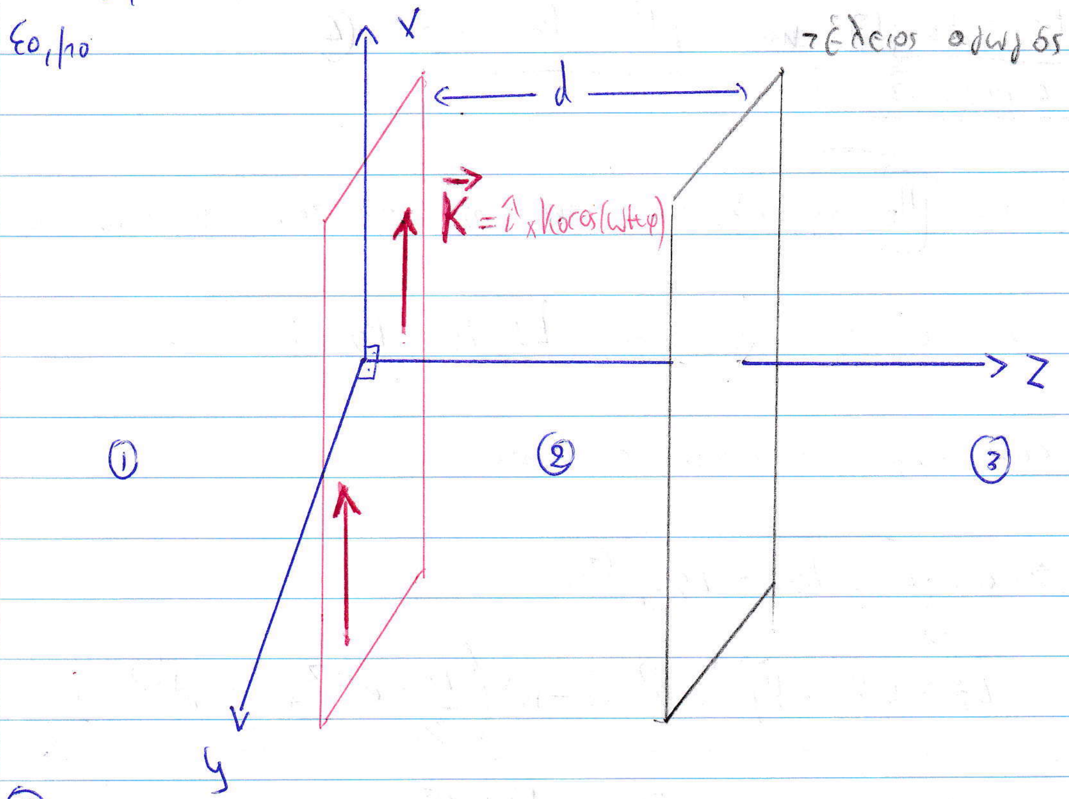
Μάιος-Ιούνιος 2022

Κουρής Γεώργιος 03120116

el20116

3η Σειρά ασκήσεων

Άσκηση (8):



(α)

Στην περιοχή (1):

$$\boxed{\vec{E_1} = \hat{i}_x E_1 e^{jk_0 z}} \quad (1) \quad \text{και} \quad \vec{k_1} = (\hat{i}_z)(-k_0)$$

$$\vec{H_1} = \frac{1}{Z_0}(\vec{k_1} \times \vec{E_1}) = \frac{1}{Z_0}\begin{vmatrix} \hat{i}_x & \hat{i}_y & \hat{i}_z \\ 0 & 0 & -1 \\ E_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}_y\left(-\frac{E_1}{Z_0} e^{jk_0 z}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{H_1} = \hat{i}_y\left(-\frac{E_1}{Z_0} e^{jk_0 z}\right)} \quad (2)$$

Στην περιοχή ②:

$\vec{E}_{2^-} = \hat{i}_x\left(E_{2^-} e^{jk_0 z}\right)$ και $\vec{H}_{2^-} = \hat{i}_y\left(-\frac{E_{2^-}}{Z_0} e^{jk_0 z}\right)$

$\vec{E}_{2+} = \hat{i}_x\left(E_{2+} e^{-jk_0 z}\right)$ και $\vec{H}_{2+} = \hat{i}_y\left(\frac{E_{2+}}{Z_0} e^{-jk_0 z}\right)$

$\boxed{\vec{E}_2 = \vec{E}_{2^-} + \vec{E}_{2+}}$ ③ και $\boxed{\vec{H}_2 = \vec{H}_{2+} + \vec{H}_{2^-}}$ ④

Στην περιοχή ③:

$\boxed{\vec{E}_3 = 0}$ και $\boxed{\vec{H}_3 = 0}$, εξαιτίας της επίδρασης του τέλειου αγωγού

Αρκεί να υπολογίσουμε τα E_1, E_{2-}, E_{2+}:

Θα εφαρμόσουμε τις οριακές συνθήκες.

Για $z=0$: $\boxed{E_1 = E_{2+} + E_{2-}}$ ⑤

Αυτόματη: $\overset{\hat{i}_z}{\hat{i}_n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K} \Rightarrow (-i_x)\cdot\left(\frac{E_{2+}}{Z_0}e^{jk_0 z} - \frac{E_{2^-}}{Z_0}e^{jk_0 z} + \frac{E_1}{Z_0}e^{jk_0 z}\right) = \vec{K}$

$\Rightarrow \boxed{-E_{2+} + E_{2^-} - E_1 = Z_0 k_0 e^{j\varphi}}$ ⑥

Για $z=d$: $E_{2+} e^{-jk_0 d} + E_{2-} e^{+jk_0 d} = \cancel{E_3}^{0} \Rightarrow \boxed{E_{2+} = -E_{2-} e^{2jk_0 d}}$ ⑦

$$⑤,⑥ \xRightarrow{⑦} \begin{cases} E_1 = E_{2-} - E_{2-} e^{2jk_0 d} \\ -E_1 + E_{2-} + E_{2-} e^{2jk_0 d} = Z_0 k_0 e^{j\varphi} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_1 = -\frac{1}{2} Z_0 k_0 e^{j\varphi} + \frac{1}{2} Z_0 k_0 e^{j\varphi} e^{-2jk_0 d} \\ E_{2^-} = \frac{1}{2} Z_0 k_0 e^{j\varphi} e^{-2jk_0 d} \\ E_{2+} = -\frac{1}{2} Z_0 k_0 e^{j\varphi} \end{cases}$$

Τα $\vec{E}_1, \vec{H}_1, \vec{E}_2, \vec{H}_2$ προκύπτουν από τις ①, ②, ③, ④ με αντικατάσταση

(β)

Για τον φασιθέτη του επαγόμενου επιφανειακού ρεύματος του PC:

$$\hat{i}_z \times (\vec{H_3} - \vec{H_2})\Big|_{z=d} = \vec{K_{Ta}} \Rightarrow \vec{K_{Ta}} = -\hat{i}_z \times \vec{H_2}\Big|_{z=d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{K_{Ta}} = \hat{i}_x \left(\frac{E_{2+}}{Z_0} e^{-jk_0 d} - \frac{E_{2-}}{Z_0} e^{jk_0 d} \right) \overset{@}{=} \hat{i}_x \left(-K_0 e^{j(-k_0 d + \varphi)} \right)$$

Για τον φασιθέτη του επαγόμενου επιφανειακού φορτίου πάνω στον PC:

$$\sigma_{Ta} = \underset{\parallel \hat{i}_z}{\hat{i}_n} \cdot (\vec{D}_3^{+} - \vec{D}_2^{-}) = 0$$

(γ) Για το διάνυσμα Poynting στην περιοχή 1:

$$\vec{P}_{avg_1} = \frac{1}{2Z_0} |\vec{E}'|^2 \hat{k}' = -\frac{1}{2Z_0}\left(\frac{1}{4} Z_0^2 k_0^2 \sin^2(k_0 d)\right) \hat{i}_z = -\frac{1}{2} Z_0 k_0^2 \sin^2(k_0 d)\, \hat{i}_z$$

Για ελαχιστοποίηση: $\sin^2(k_0 d) = 0 \Rightarrow k_0 d_{min} = n\pi \Rightarrow \boxed{d_{min} = \frac{n\pi}{k_0},\ n \in \mathbb{N}^*}$

Για μεγιστοποίηση: $\sin^2(k_0 d) = 1 \Rightarrow k_0 d_{max} = (2n-1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{d_{max} = \frac{(2n-1)\pi}{2k_0},\ n \in \mathbb{N}^*}$$

Λόγω τέλειας ανάκλασης από τον PC θα ισχύει ότι ο χρονικός μέσος όρος του διανύσματος Poynting στην περιοχή 2 θα είναι μηδενικός.

$$\vec{E_2} = \vec{E_{2+}} + \vec{E_{2-}} = \left(E_{2+}\, e^{-jk_0 z} + E_{2-}\, e^{jk_0 z}\right)\hat{i}_x =$$

$$= \hat{i}_x\left(-\frac{1}{2} Z_0 k_0\, e^{j\varphi} e^{-jk_0 z} + \frac{1}{2} Z_0 k_0\, e^{-2jk_0 d} e^{j\varphi} e^{jk_0 z}\right) =$$

$$= \hat{i}_x\left(\frac{1}{2} Z_0 k_0\, e^{j(-k_0 d+\varphi)}\, 2j \sin(k_0(z-d))\right) \quad (8)$$

$$\vec{H_2} = \vec{H_{2+}} + \vec{H_{2-}} = \hat{i}_y\left(\frac{E_{2+}}{Z_0} e^{-jk_0 z} - \frac{E_{2-}}{Z_0} e^{jk_0 z}\right) =$$

$$= \hat{i}_y\left(-\frac{1}{2} k_0\, e^{j(-k_0 d+\varphi)}\, 2\cos(k_0(z-d))\right) \quad (9)$$

$$\vec{P}_{avg_2} = Re\left\{\frac{1}{2}\vec{E_2} \times \vec{H_2}^*\right\} \overset{(8)}{\underset{(9)}{=}} \hat{i}_z\left(-\frac{1}{2} Z_0 k_0^2\, Re\{j \sin(k_0(z-d))\cos(k_0(z-d))\}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{P}_{avg_2} = 0}$$

(δ) $\vec{E_1} = \hat{i}_x\left[\frac{1}{2} Z_0 k_0 e^{j\varphi}\left(-1 + e^{-2jk_0 d}\right) e^{jk_0 z}\right]$

$\vec{H_1} = \hat{i}_y\left[-\frac{1}{2} k_0 e^{j\varphi}\left(-1 + e^{-2jk_0 d}\right) e^{jk_0 z}\right]$

$\vec{E_2} = \hat{i}_x\left[\frac{1}{2} Z_0 k_0\, e^{j(-k_0 d+\varphi)}\, 2j\sin(k_0(z-d))\right]$

$\vec{H_2} = \hat{i}_y\left[-\frac{1}{2} k_0\, e^{j(-k_0 d+\varphi)}\, 2\cos(k_0(z-d))\right]$

$\vec{E_3} = 0$

$\vec{H_3} = 0$

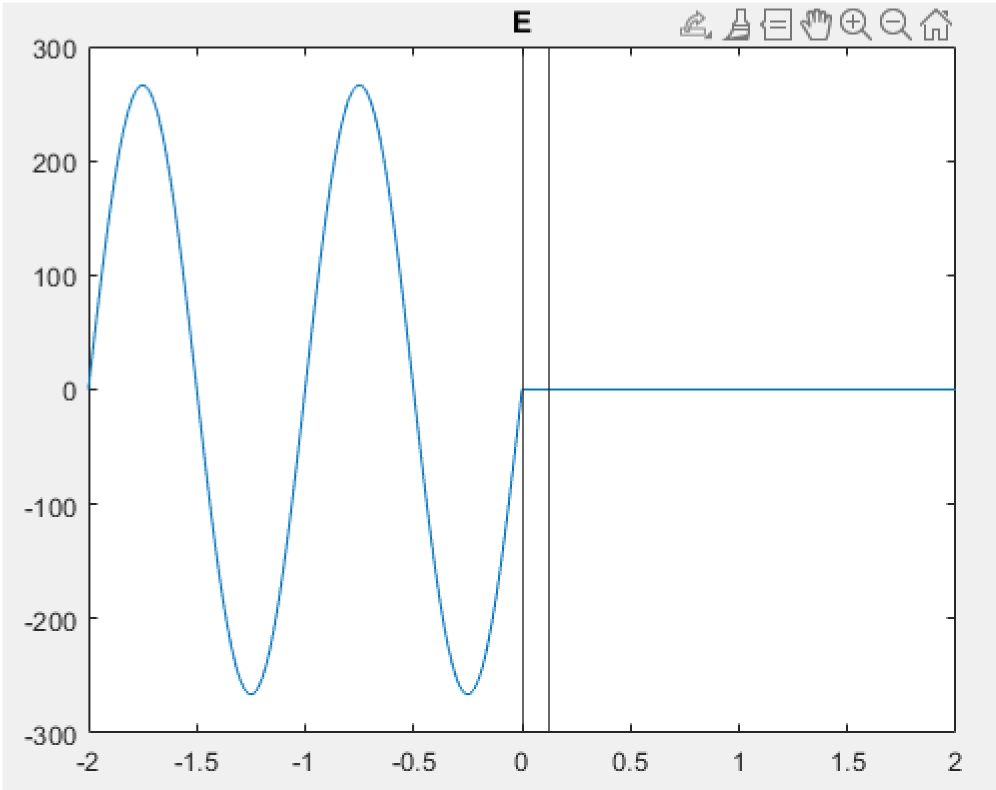
Άσκηση 8 – Matlab:

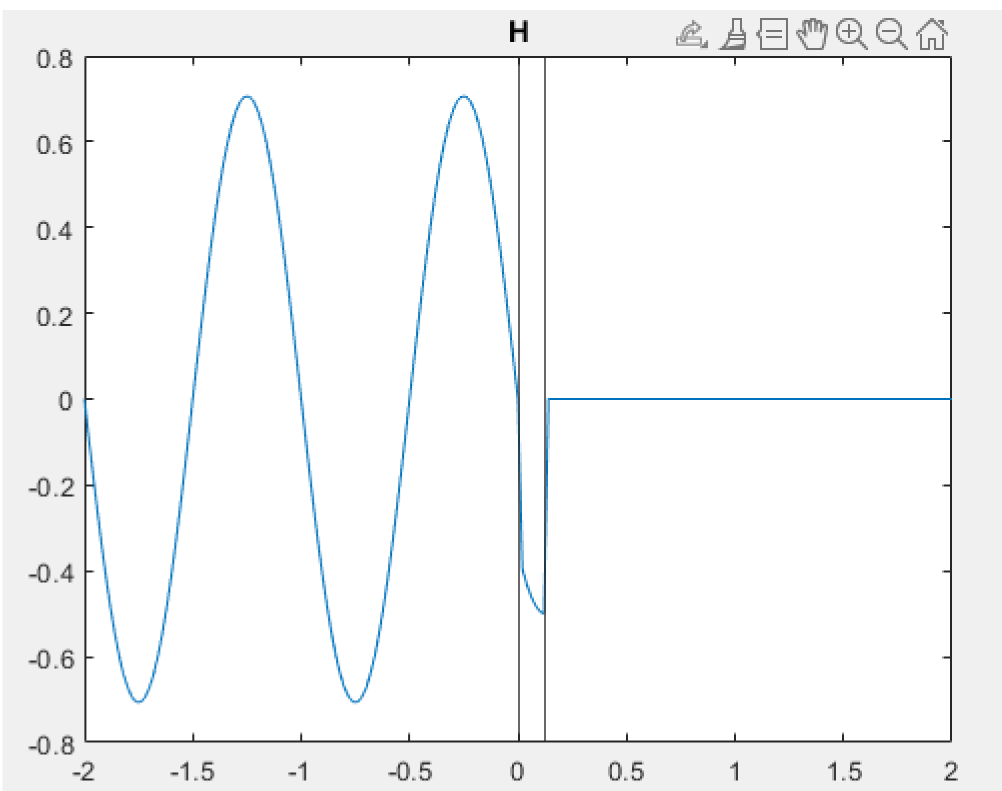
Παρακάτω βλέπουμε τη γραφική παράσταση του στιγμιαίου ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου την χρονική στιγμή t = 0, για διάφορες τιμές του d. Να σημειωθεί ότι επιλέξαμε να κάνουμε τις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεις του z/λ.

Ο κώδικας:

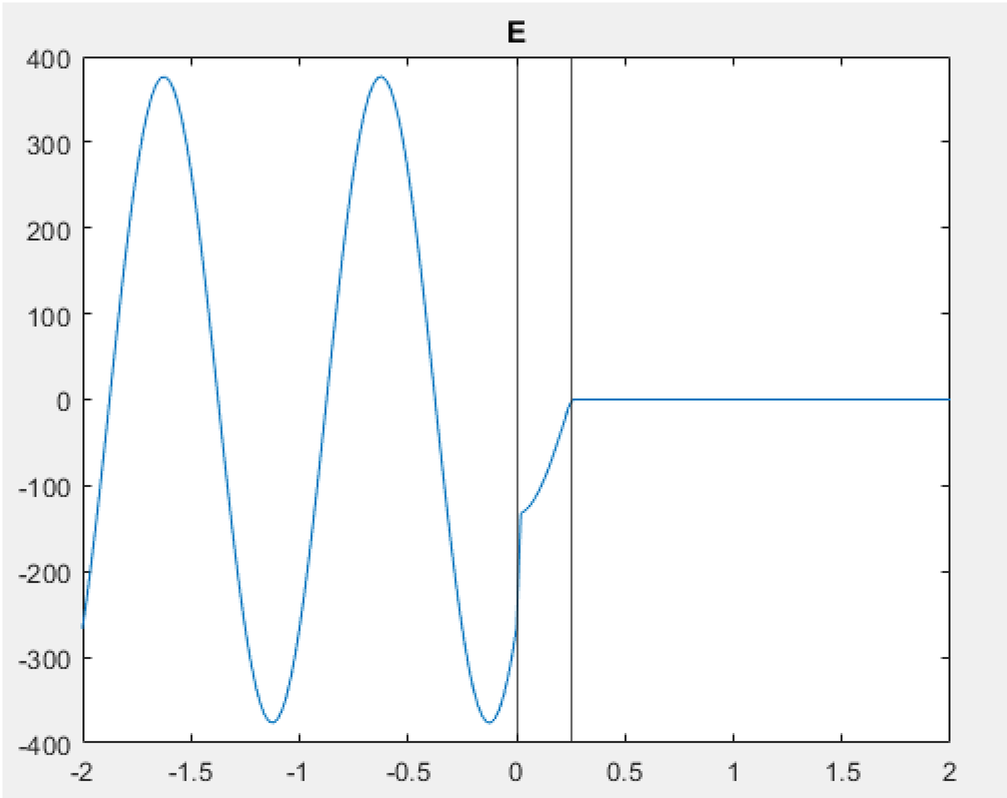
```
z=(-2:0.02:2); %z/λ

Z0=376.73;
K0=1;
fi=pi./4;

d=0.125;

E1 = (1/2).*Z0.*K0.*exp(1i.*(fi+2.*pi.*z)).*(-1+exp(-
2.*1i.*2.*pi.*d));

E2 = (1/2).*Z0.*K0.*exp(1i.*(fi-
2.*pi.*d)).*1i.*sin(2.*pi.*(z-d));

E = (z<=0).*E1 + (z>0).*(z<=d).*E2;

H1 = (-1/2).*K0.*exp(1i.*(fi+2.*pi.*z)).*(-1+exp(-
2.*1i.*2.*pi.*d));

H2 = (-1/2).*K0.*exp(1i.*(fi-2.*pi.*d)).*cos(2.*pi.*(z-d));

H = (z<=0).*H1 + (z>0).*(z<=d).*H2;

figure(1)
plot(z,E);
hold on
title("E");
xline(0);
xline(d);

figure(2)
plot(z,H);
hold on
title("H");
xline(0);
xline(d);
```

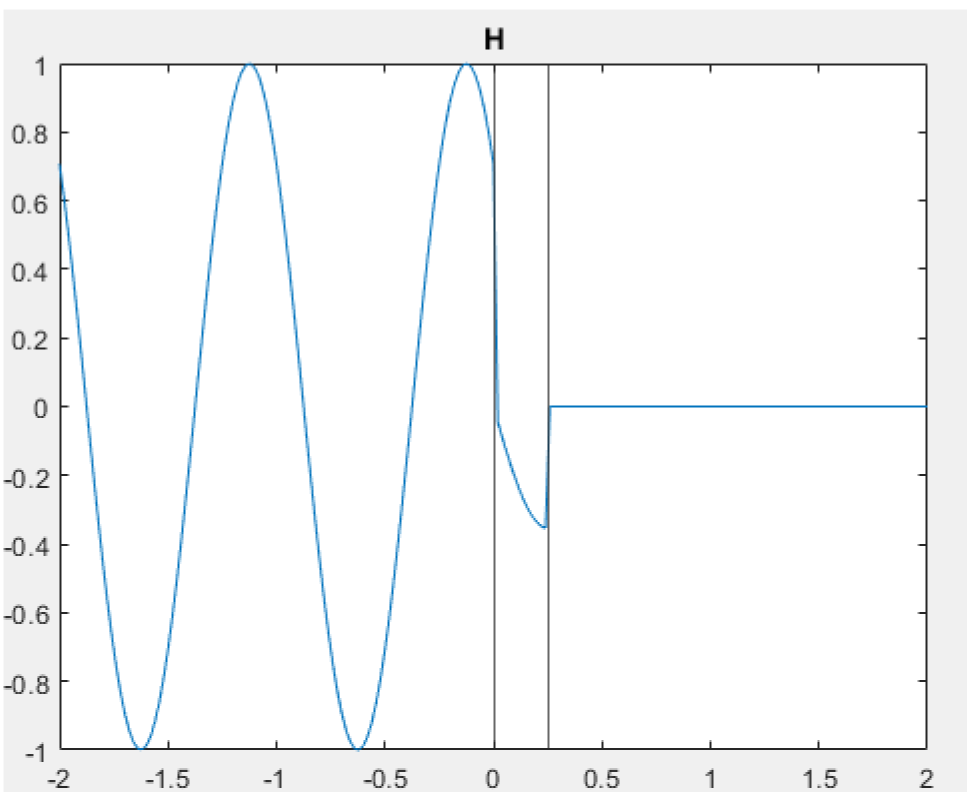
➔ Για d = 0.125 λ:


E
300
200
100
0
-100
-200
-300
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

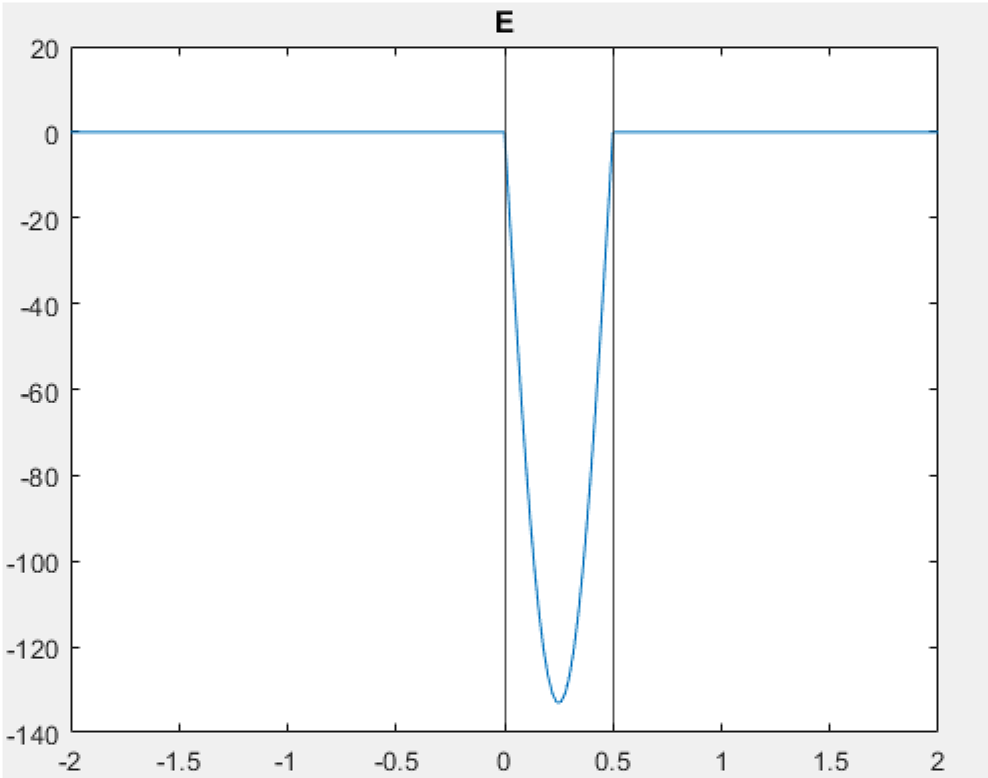

H
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

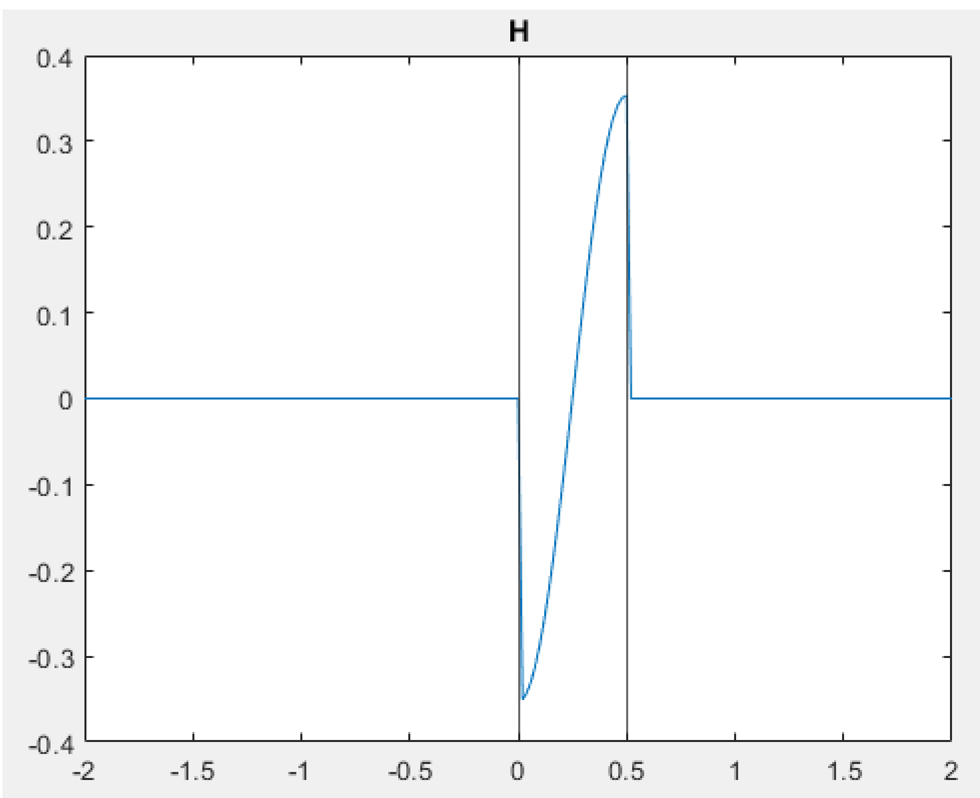
➔ Για d = 0.250 λ:


E
400
300
200
100
0
-100
-200
-300
-400
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2


H
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

➔ Για d = 0.500 λ:


E
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
-120
-140
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

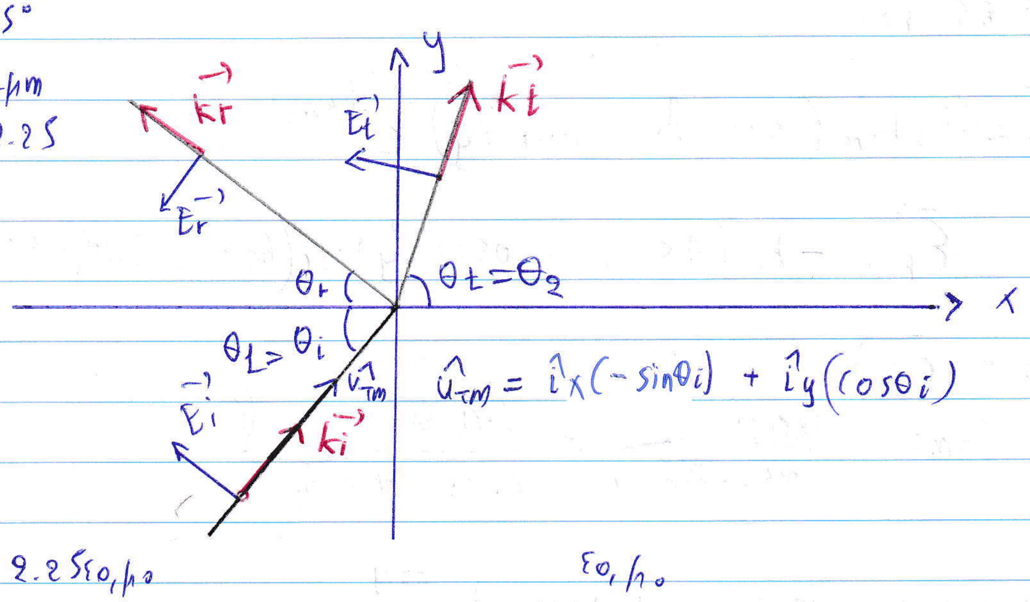

H
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

Άσκηση 9:

$\theta_i = 55^\circ$

$\lambda_0 = 1\mu m$

$\varepsilon_r = 2.25$



(a)

Η γωνία ολικής ανάκλασης είναι: $\theta_{cr} = \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{\mu_2\varepsilon_2}{\mu_1\varepsilon_1}}\right) = 41.8^\circ < 55^\circ$

Για το ηλ πεδίο του προσπίπτοντος επιπέδου κύματος:

$$\vec{E_i} = E_0 \hat{u}_{TM} e^{-j\vec{k_i}\vec{r}} = (-E_0 \sin\theta_i \hat{i}_x + E_0\cos\theta_i \hat{i}_y) e^{-jk_0 n_1(x\cos\theta_i + y\sin\theta_i)}$$

Για το σημείο: $w = \frac{2\pi c}{\lambda_0} = 6\pi\cdot 10^{14} \frac{rad}{s}$, $\begin{cases}\cos\theta_i = 0.574 \\ \sin\theta_i = 0.819\end{cases}$, $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = 2\pi\cdot 10^{6} m^{-1}$

άρα $\boxed{\vec{\mathcal{E}_i} = E_0(-0.819\hat{i}_x + 0.574\hat{i}_y)\cos(6\pi\cdot 10^{14}t - 3\pi\cdot 10^{-6}(0.574x + 0.819y))}$

(β) $\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2 = 1 \Rightarrow \cos^2\theta_2 + \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2\theta_1 = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} n_1\cos\theta_2 = -\frac{n_1}{n_2} j(n_1^2\sin^2\theta_1 - n_2^2) = -1.107097j \quad (1) \\ n_2\cos\theta_1 = 0.574 \end{cases}$$

άρα $r_{TM} = \frac{Z_1\cos\theta_i - Z_2\cos\theta_t}{Z_1\cos\theta_i + Z_2\cos\theta_t} \simeq -0.5763 + 0.8173j = e^{+2.185j}$

Άρα διαφορά φάσης προσπίπτοντος/ανακλώμενου κύματος +2.185 rad

$$\vec{E_r} = -E_0 r_{TM} (\sin\theta_i \, \hat{i}_x + \cos\theta_i \, \hat{i}_y) e^{-j\vec{k_r}\vec{r_r}}$$

άρα $$\boxed{\vec{\mathcal{E}_r} = -E_0 (0.819 \hat{i}_x + 0.574 \hat{i}_y)\cos(6\pi 10^{14} t - 3\pi 10^{6}(-0.574x + 0.819y) + 2.185)}$$

(γ) $$t_{TM} = \frac{2Z_2\cos\theta_i}{Z_1\cos\theta_i + Z_2\cos\theta_t} = \frac{2n_1\cos\theta_1}{n_2\cos\theta_1 + n_1\cos\theta_2} \overset{(\beta)}{=}$$

$$\simeq 0.669 + j1.249 \simeq 1.4169 e^{j1.0791}$$

$\cos\theta_2 \overset{(1)}{=} -0.714j$ και $\sin\theta_2 = 1.2287$

άρα: $$\vec{E_t} = t_{TM} E_0 (-\sin\theta_2 \, \hat{i}_x + \cos\theta_2 \, \hat{i}_y) e^{-j\vec{k_t}\vec{r_t}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E_t} = 1.4169 e^{j1.0791} E_0(-1.2287\hat{i}_x - 0.714j \, \hat{i}_y) \cdot e^{-j2\pi 10^{-6}(-0.714j x + 1.2287 y)}}$$

$$\boxed{\vec{\mathcal{E}_t} = 1.4169 e^{-2\pi 10^{-6} 0.714x} \left[0.714 \hat{i}_y \cos(6\pi 10^{14} t - 3\pi 10^{-6} \cdot 1.2287y - \frac{\pi}{2} + 1.0791) + (-1.2287 \hat{i}_x (\cos(6\pi 10^{14} t - 3\pi 10^{-6} 1.2287y + 1.0791) \right.}$$

(δ)

$$\vec{S}_t = \frac{1}{2}\left(\vec{E}_t \times \vec{H}_t^{*}\right)$$

$$\vec{H}_t = -\frac{1}{j\omega\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{E}_t = -\frac{1}{j\omega\mu_0}\begin{vmatrix} \hat{i}_x & \hat{i}_y & \hat{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ E_{tx} & E_{ty} & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}_z\left[-\frac{1}{j\omega\mu_0}\left(\frac{\partial E_{ty}}{\partial x} - \frac{\partial E_{tx}}{\partial y}\right)\right] =$$

$$= \hat{i}_z\left(\frac{E_0 t_{TM} k_0 n_2}{\underbrace{\omega\mu_0}_{\frac{1}{Z_2}=\frac{1}{Z_t}}} e^{\underbrace{-jk_0 n_2(x\cos\theta_t + y\sin\theta_t)}_{A}}\right)$$

Όμοια προκύπτει ότι $\begin{cases} E_{tx} = -E_0 t_{TM}\sin\theta_2 A \\ E_{ty} = E_0 t_{TM}\cos\theta_2 A \end{cases}$

άρα $$\vec{S}_t = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \hat{i}_x & \hat{i}_y & \hat{i}_z \\ -E_0 t_{TM}\sin\theta_2 & E_0 t_{TM}\cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{t_{TM}^{*} E_0^{*}}{Z_2} \end{vmatrix} A =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\hat{i}_x \frac{|E_0|^2 |t_{TM}|^2 \cos\theta_2}{Z_2} - \hat{i}_y \frac{-|E_0|^2 |t_{TM}|^2 \sin\theta_2}{Z_2}\right] e^{-jk_0 n_2(x\cos\theta_2 - x_1\cos^{*}\theta_2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{S}_t = \frac{1}{2}\left[\hat{i}_x \frac{|E_0|^2 |t_{TM}|^2 \cos\theta_2}{2Z_2} - \hat{i}_y \frac{|E_0|^2 |t_{TM}|^2 \sin\theta_2}{2Z_2}\right] e^{-xk_0 2\left[n_1^2 \sin^2\theta_1 - n_2^2\right]^{\frac{1}{2}}}}$$

$$\boxed{\vec{P}_{2x} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\vec{S}_t\} = 0}$$

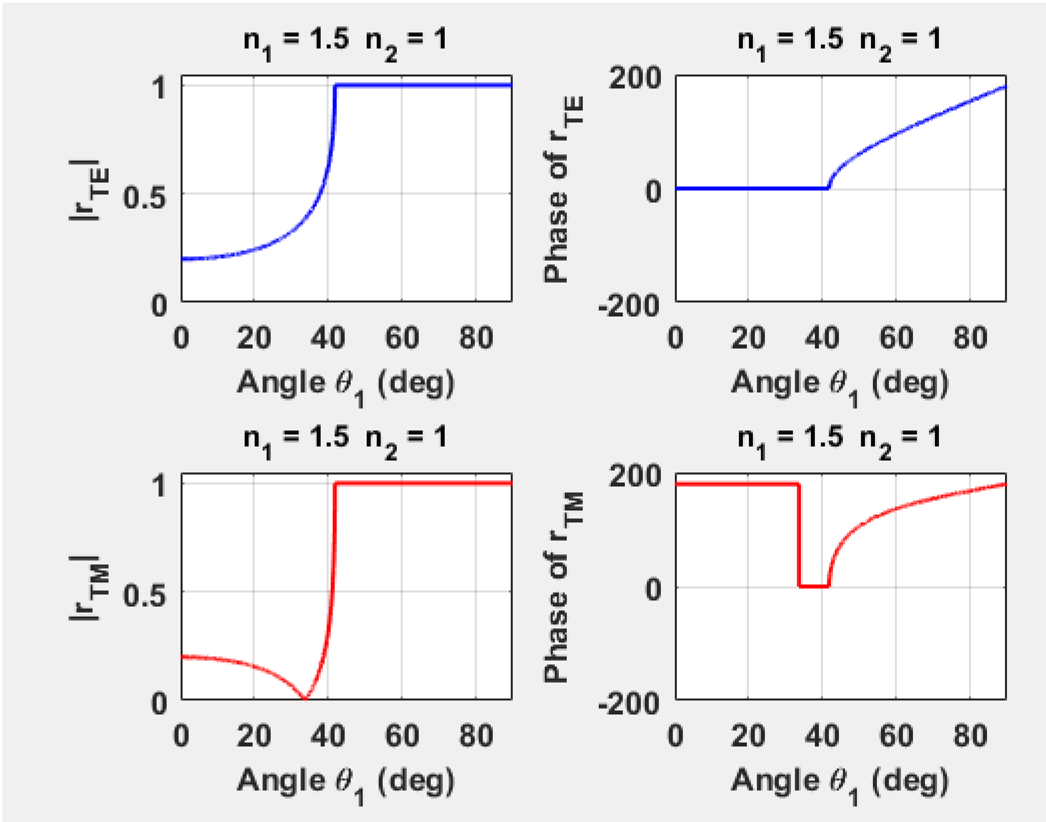
(ε) Άρα: $\boxed{P_r = 100\%}$ και $\boxed{P_t = 0\%}$

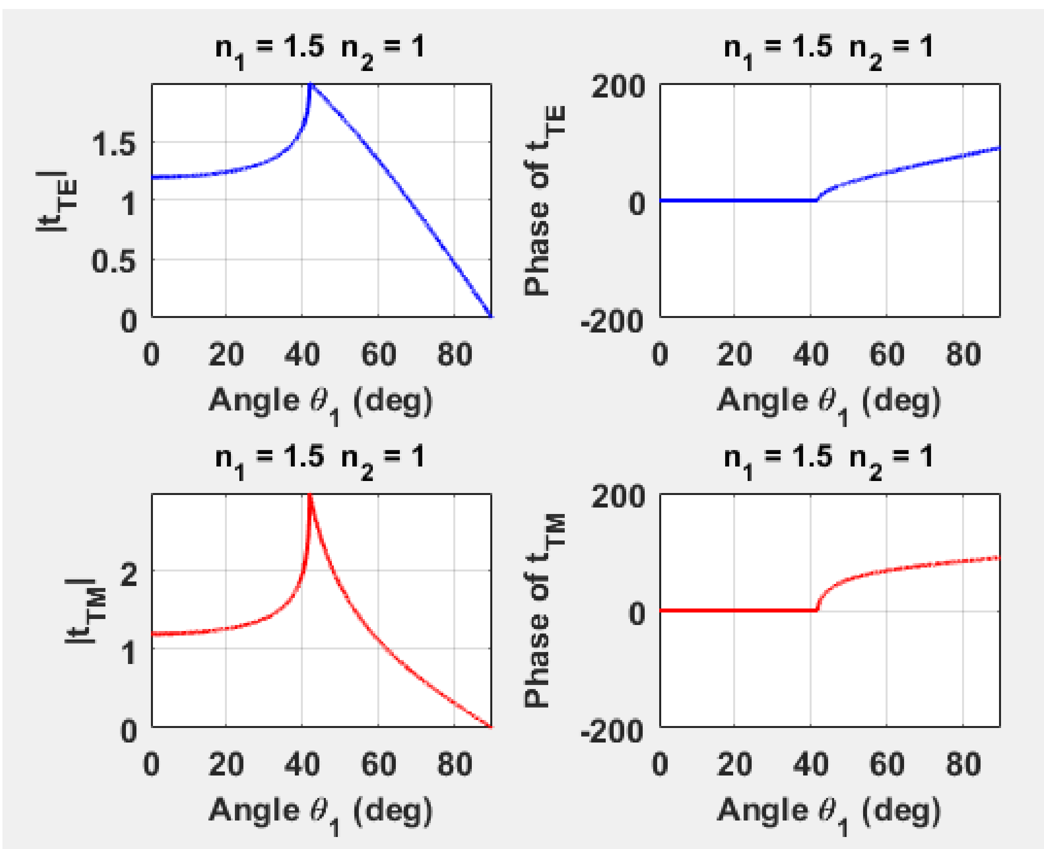
Άσκηση 9 – Matlab:

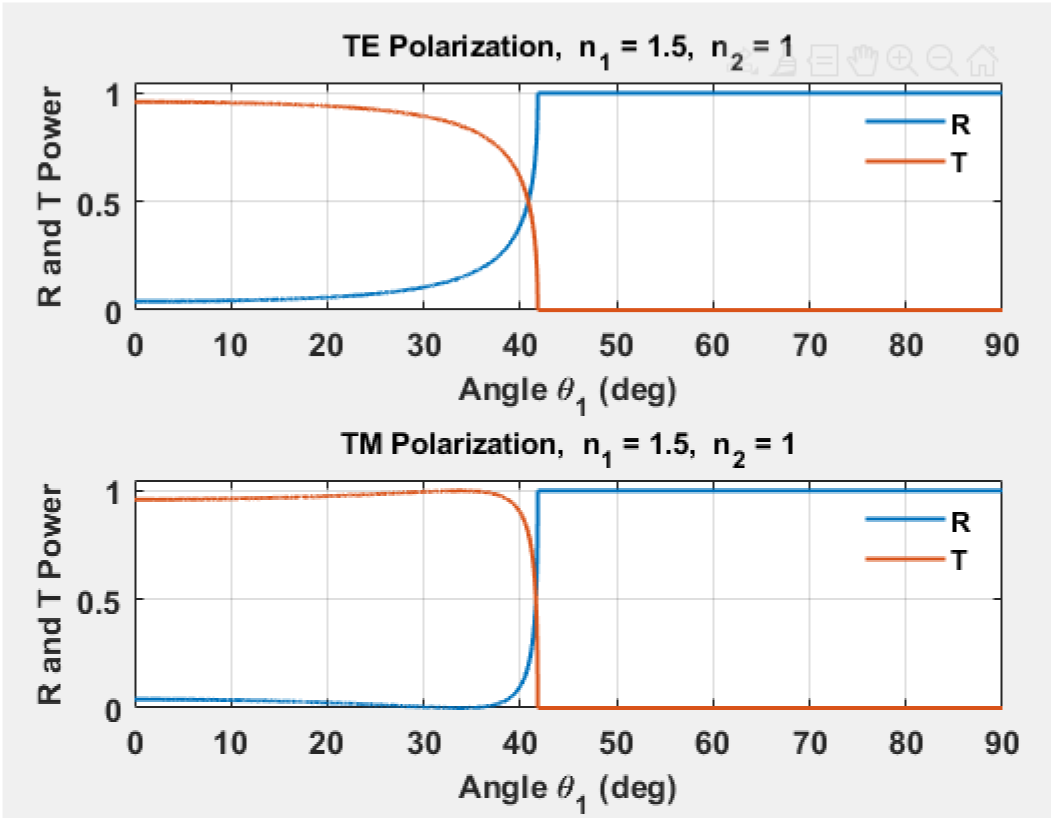
Έγινε χρήση της συνάρτησης fresnel_equations από την ιστοσελίδα του μαθήματος.

Ο κώδικας:

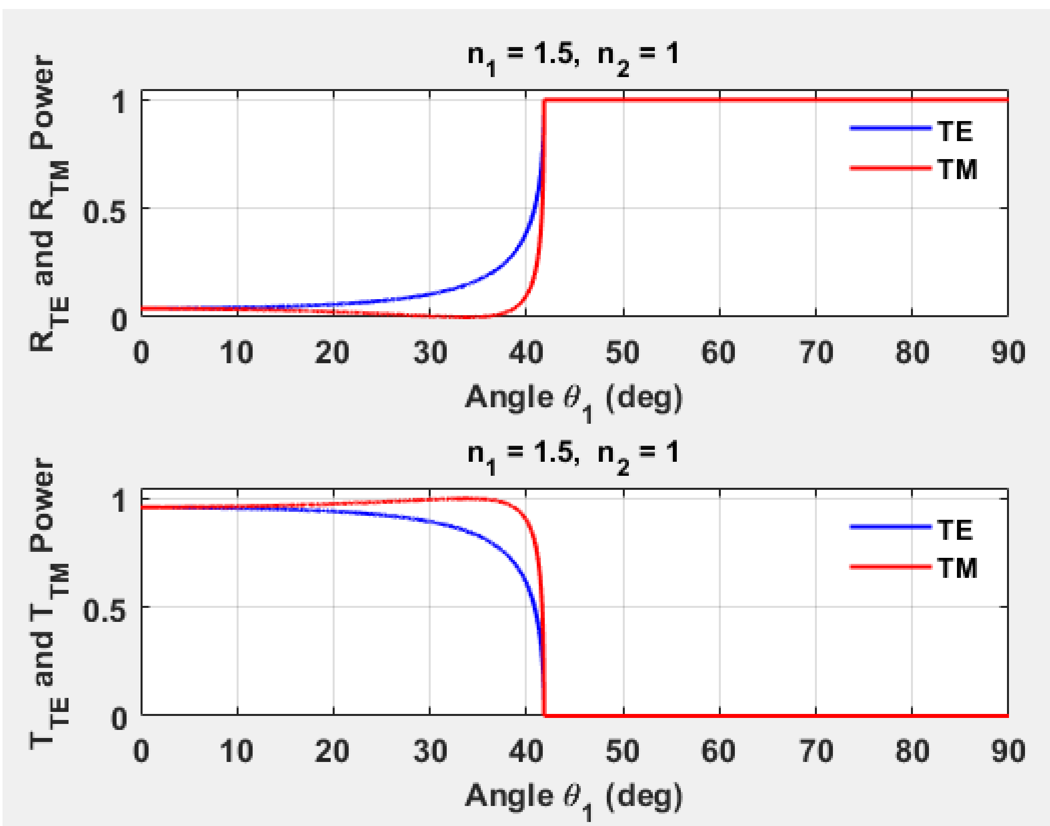
```
fresnel_equations([0:0.01:89.99],2.25,1,1);
```


n1 = 1.5 n2 = 1
|rTE|
Phase of rTE
|rTM|
Phase of rTM
Angle θ1 (deg)
0
20
40
60
80
0.5
1
200
-200


n1 = 1.5 n2 = 1
|tTE|
Phase of tTE
|tTM|
Phase of tTM
Angle θ1 (deg)
0
20
40
60
80
0.5
1
1.5
2
200
-200

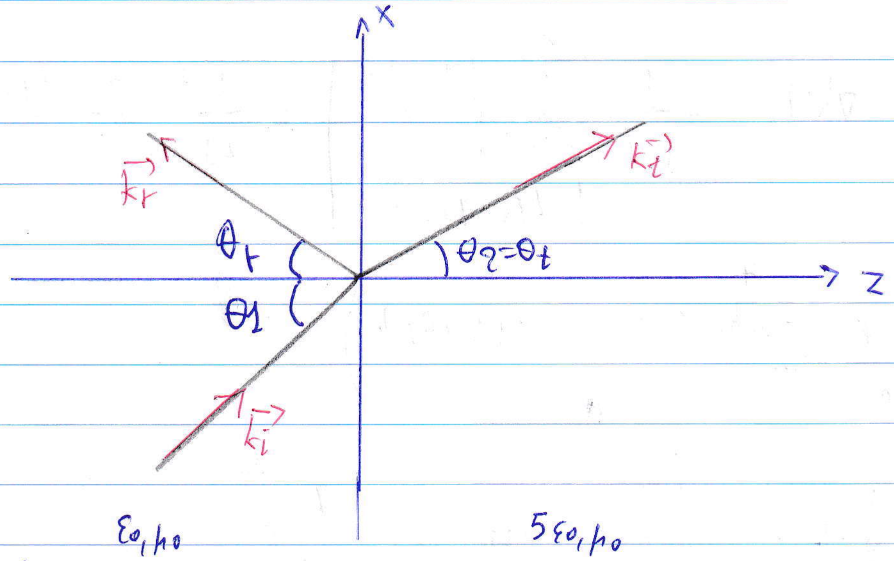


TE Polarization, n_1 = 1.5, n_2 = 1
R and T Power
Angle θ_1 (deg)
R
T
TM Polarization, n_1 = 1.5, n_2 = 1
R and T Power
Angle θ_1 (deg)
R
T



n_1 = 1.5, n_2 = 1
R_{TE} and R_{TM} Power
Angle θ_1 (deg)
TE
TM
n_1 = 1.5, n_2 = 1
T_{TE} and T_{TM} Power
Angle θ_1 (deg)
TE
TM

Άσκηση 10:



$\lambda_0 = 1\mu m$

$\vec{E} = (2\cos\theta \, \hat{i}_x - j3\, \hat{i}_y - 2\sin\theta \, \hat{i}_z) \exp(-j\vec{k}\cdot\vec{r})$

(α) Γωνία Brewster: $\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \simeq 1.1503$ rad $\simeq 65.905°$

$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = 2\pi \cdot 10^{-6} \frac{1}{m^{-1}}$

άρα $\vec{k_i} = \hat{i}_x (k_0 \sin\theta) + \hat{i}_z (k_0\cos\theta) \Rightarrow \boxed{\vec{k_i} = 2\pi 10^{-6}(0.9129\,\hat{i}_x + 0.4082\,\hat{i}_z)}$

(β) $\vec{E_i} = (E_{i_{TE}}\, \hat{u}_{TE} + E_{i_{TM}}\, \hat{u}_{TM})\, e^{-j\vec{k_i}\vec{r}}$

με $\begin{cases} E_{i_{TE}} = 2 \\ E_{i_{TM}} = -3j \end{cases}$ και $\begin{cases} \hat{u}_{TE} = \cos\theta\, \hat{i}_x - \sin\theta\, \hat{i}_z \\ \hat{u}_{TM} = \hat{i}_y \end{cases}$

Εξισώσεις Fresnel:

$r_{TE} = \frac{E_r}{E_i} = \frac{Z_2\cos\theta_1 - Z_1\cos\theta_2}{Z_2\cos\theta_1 + Z_1\cos\theta_2} = \frac{n_1\cos\theta_1 - n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2}$

ισχύει ότι $\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2 = 1 \Rightarrow \cos^2\theta_2 = 1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2\theta_1$

άρα $\theta_2 \simeq 24.096° \simeq 0.42055$ rad

$\theta_B + \theta_2 \simeq 90°$ (αναμενόμενο) οπότε τελικά:

$$r_{TE} = \frac{0.4082 - \sqrt{5}\left(\sqrt{1 - \frac{1}{5} \cdot 0.9129^2}\right)}{0.4082 + \sqrt{5}\left(\sqrt{1 - \frac{1}{5} 0.9129^2}\right)} \simeq -0.667$$

όμοια:

$t_{TE} = 0.334$

$r_{TM} = 0$ (λόγω γωνίας Brewster)

$t_{TM} = 0.447$

$$\vec{E_r} = \hat{i}_y r_{TE} E_{iTE} + (-\cos\theta \hat{i}_x - \sin\theta \hat{i}_z) r_{TM} E_{iTM}) e^{-j\vec{k_r}\vec{r}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{E_r} = 2j \hat{i}_y \exp(-j 2\pi \cdot 10^6 (-.4082z - .9129x))}$$

$$\vec{E_t} = \left[\hat{i}_y t_{TE} E_{iTE} + t_{TM} E_{iTM} (\cos\theta_2 \hat{i}_x - \sin\theta_2 \hat{i}_z)\right] e^{-j\vec{k_t}\vec{r}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E_t} = \left(-j\hat{i}_y + 0.447 \cdot 2 (0.91286 \hat{i}_x - 0.4082 \hat{i}_z)\right) \cdot e^{-j 2\pi \cdot 10^6 \sqrt{5} (0.91286z + 0.4082x)}}$$

(γ)

$$\vec{H_i} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left(\vec{k_i} \times \vec{E_i}\right) = \frac{1}{Z_0}\begin{vmatrix} \hat{i}_x & \hat{i}_y & \hat{i}_z \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ E_{ix} & E_{iy} & E_{iz} \end{vmatrix} e^{-jk_i \vec{r}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{H_i} = \frac{1}{Z_0}\left[3j\left(\hat{i}_x \cos\theta_1 - \hat{i}_z \sin\theta_1\right) + \hat{i}_y \cdot 2\right] e^{-jk_i \vec{r}}$$

$$\vec{H_r} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left(\vec{k_r} \times \vec{E_r}\right) = \frac{1}{Z_0}\begin{vmatrix} \hat{i}_x & \hat{i}_y & \hat{i}_z \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ 0 & E_{ry} & 0 \end{vmatrix} e^{-jk_r \vec{r}} \Rightarrow$$

$$\vec{H_r} = \frac{1}{Z_0}\left[2j\left(\hat{i}_x \cos\theta_1 + \hat{i}_z \sin\theta\right)\right] e^{-jk_r \vec{r}}$$

Άρα:

$$\boxed{\vec{H} = \vec{H_i} + \vec{H_r}}$$

(δ) προσπίπτον κύμα:

$$\begin{cases} \hat{i}_x' = \cos\theta_1 \hat{i}_x - \sin\theta_1 \hat{i}_z \\ \hat{i}_y' = \hat{i}_y \\ \hat{i}_z' = \sin\theta_1 \hat{i}_x + \cos\theta_1 \hat{i}_z \end{cases}$$

ανακλώμενο κύμα:

πόλωση στην κατακόρυφη διεύθυνση (y), αφού έχουμε πρόσπτωση υπό γωνία Brewster

διαδιδόμενο κύμα:

$$\begin{cases} \hat{i}_x'' = \cos\theta_2 \hat{i}_x - \sin\theta_2 \hat{i}_z \\ \hat{i}_y'' = \hat{i}_y \\ \hat{i}_z'' = \sin\theta_2 \hat{i}_x + \cos\theta_2 \hat{i}_z \end{cases}$$

(ε) ποσοστό ανακλώμενης ισχύος

$$\frac{P_r}{P_i} = \frac{|r_{TE}|^2 |E_{iTE}|^2 + \cancel{|r_{TM}|^2}^{\,0} |E_{iTM}|^2}{|E_{iTE}|^2 + |E_{iTM}|^2} = \frac{4 \cdot \frac{4}{9}}{9+4} \simeq 0.13675$$

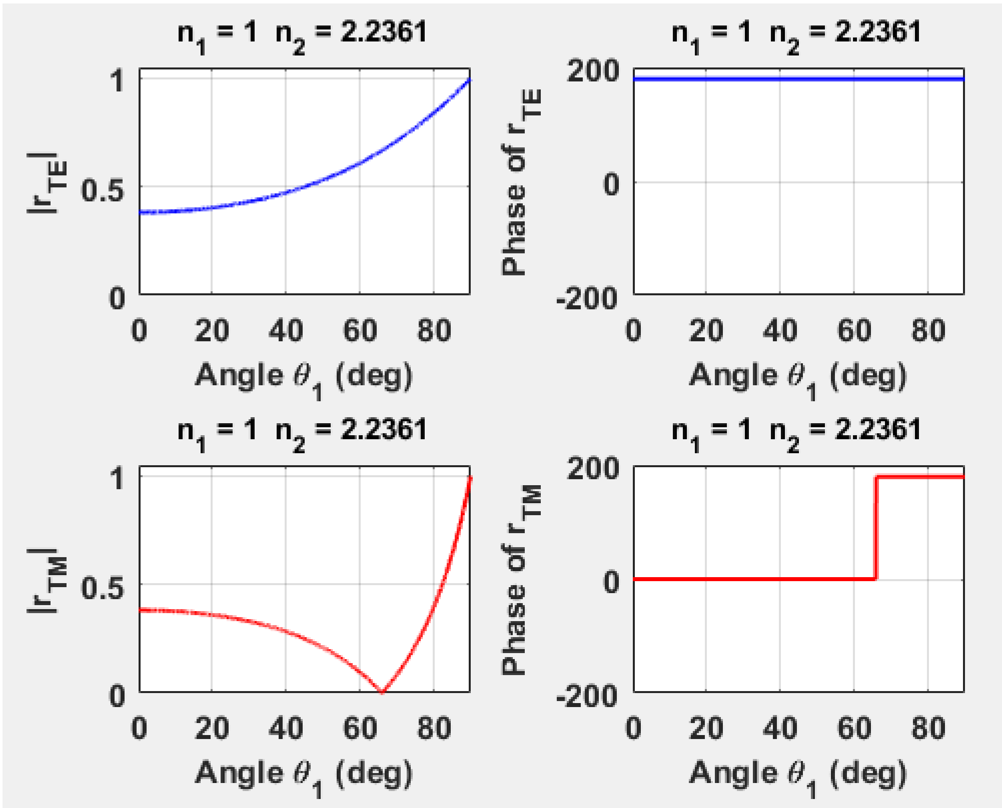
$$\frac{P_t}{P_i} = 1 - \frac{P_r}{P_i} = 0.86325$$

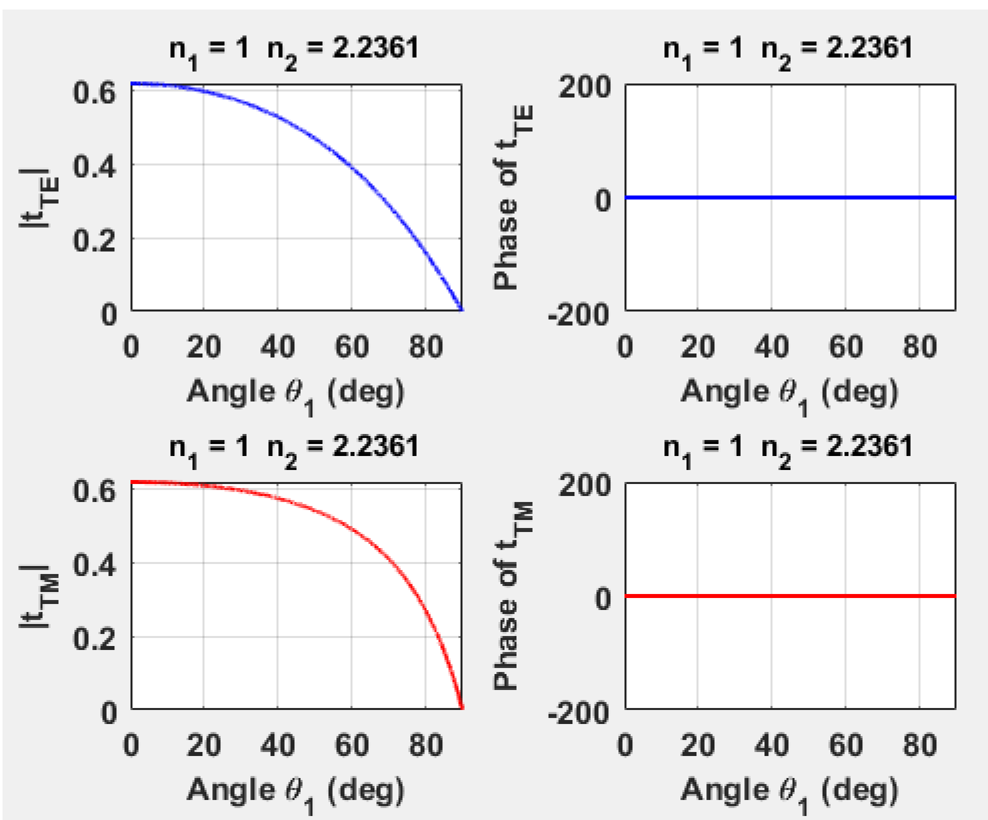
<u>Άσκηση 10 – Matlab:</u>

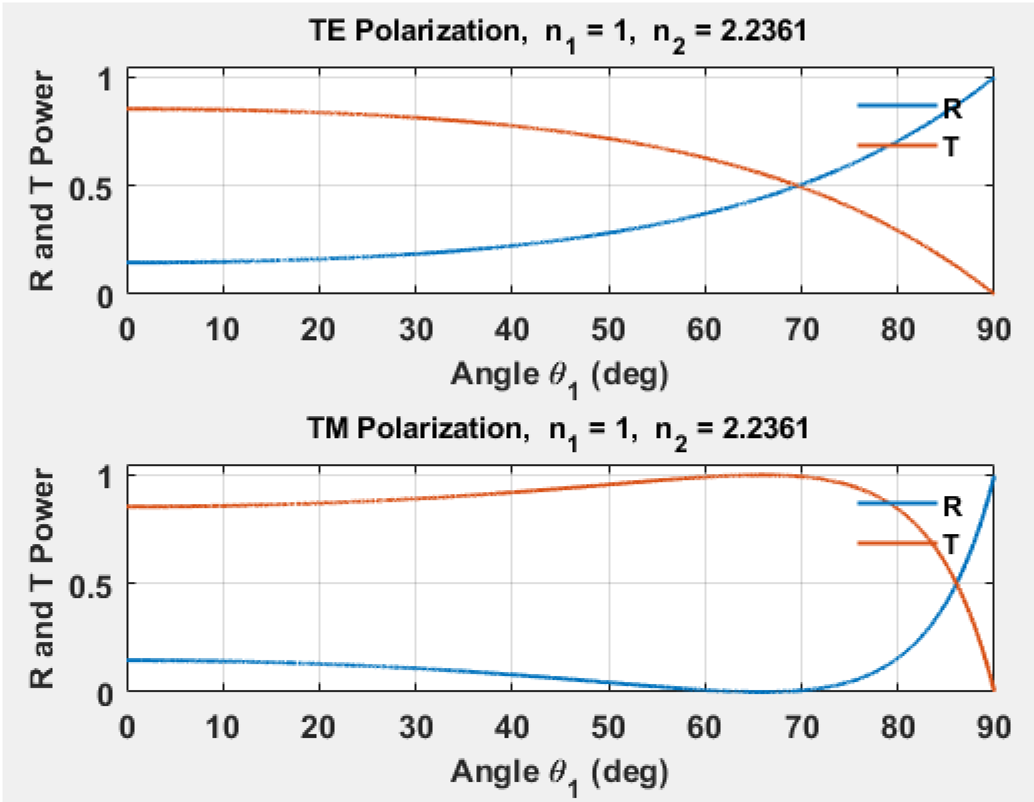
Έγινε χρήση της συνάρτησης fresnel_equations από την ιστοσελίδα του μαθήματος.

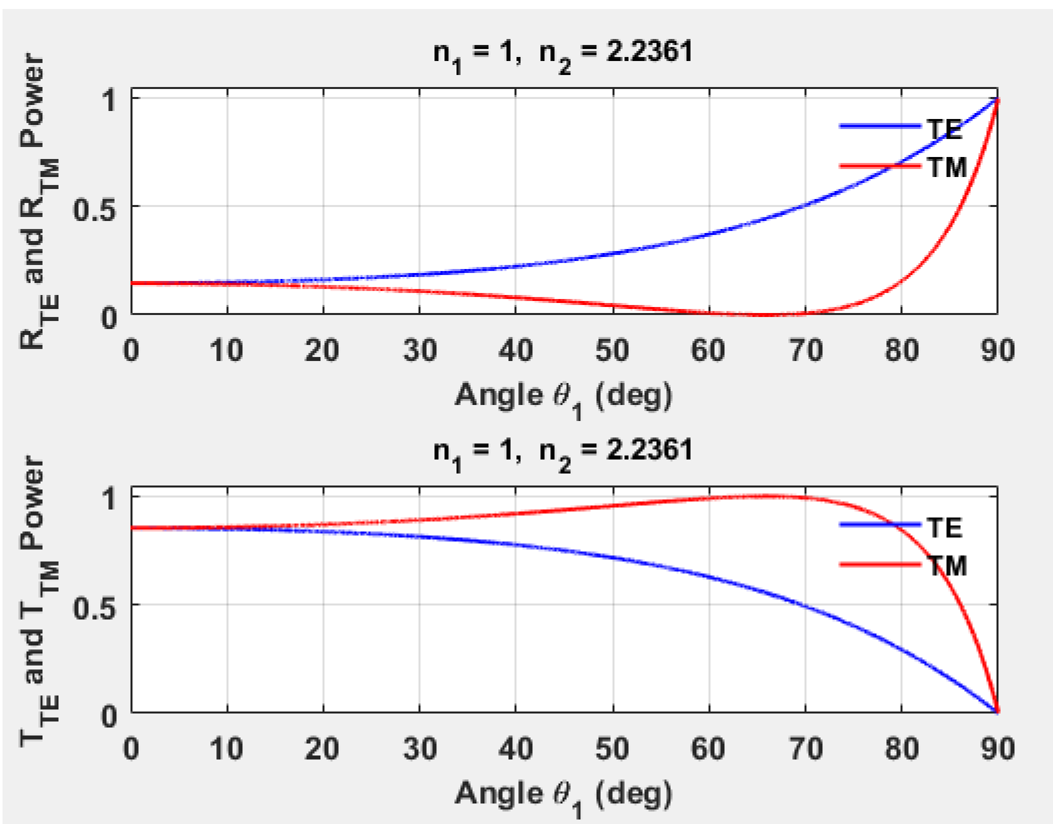
Ο κώδικας:

```
fresnel_equations([0:0.01:89.99],1,5,1);
```


n1 = 1 n2 = 2.2361
|rTE|
Angle θ1 (deg)
Phase of rTE
|rTM|
Phase of rTM

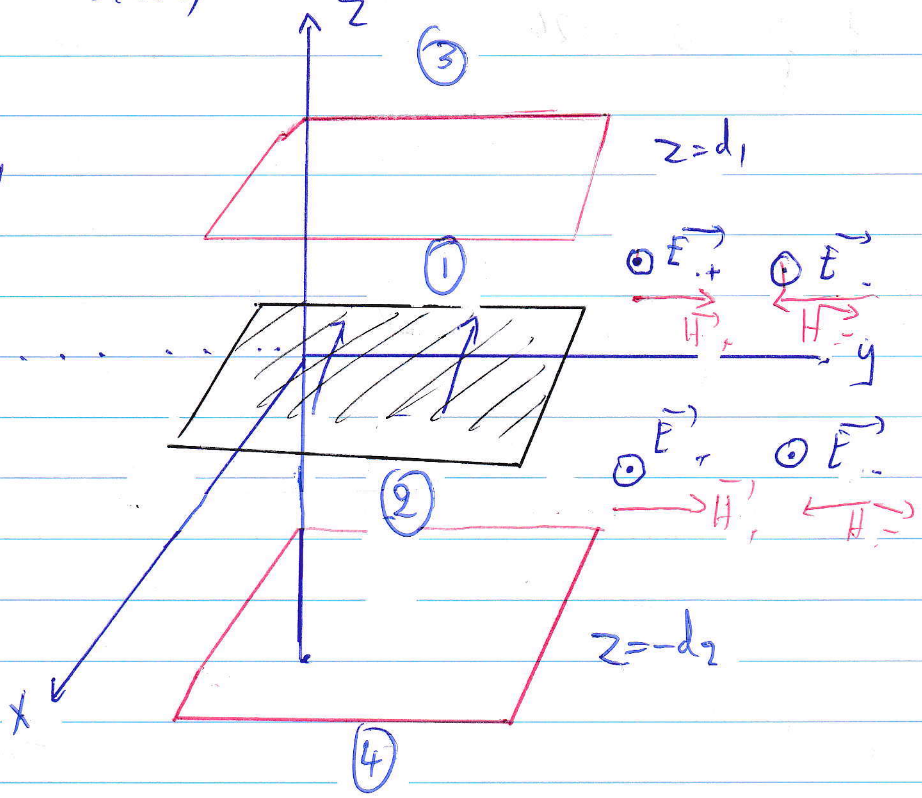

n1 = 1 n2 = 2.2361
|tTE|
Angle θ1 (deg)
Phase of tTE
|tTM|
Phase of tTM


TE Polarization, n1 = 1, n2 = 2.2361
R and T Power
Angle θ1 (deg)
R
T
TM Polarization, n1 = 1, n2 = 2.2361
R and T Power
Angle θ1 (deg)
R
T


n1 = 1, n2 = 2.2361
RTE and RTM Power
Angle θ1 (deg)
TE
TM
n1 = 1, n2 = 2.2361
TTE and TTM Power
Angle θ1 (deg)
TE
TM

Άσκηση (11):

$\vec{K} = -\hat{i}_x K_0 \cos(\omega t)$



(a)

(3) → $z>d_1$, (1) → $0<z<d_1$, (2) → $-d_2<z<0$, (4) → $z<-d_2$

$\vec{E_3}=0$ και $\vec{H_3}=0$, $\vec{E_4}=0$ και $\vec{H_4}=0$, αφού
τα επίπεδα $z=d_1$ και $z=-d_2$ έχουμε τέλειους αγωγούς

$\vec{E_1} = \vec{E_{1+}} + \vec{E_{1-}} = \hat{i}_x E_{1+} e^{-jk_1 z} + \hat{i}_x E_{1-} e^{+jk_1 z}$

$\vec{E_2} = \vec{E_{2+}} + \vec{E_{2-}} = \hat{i}_x E_{2+} e^{-jk_2 z} + \hat{i}_x E_{2-} e^{+jk_2 z}$

$\vec{H_1} = \vec{H_{1+}} + \vec{H_{1-}} = \hat{i}_y \frac{E_{1+}}{Z_1} e^{-jk_1 z} - \hat{i}_y \frac{E_{1-}}{Z_1}$

$\vec{H_2} = \vec{H_{2+}} + \vec{H_{2-}} = \hat{i}_y \frac{E_{2+}}{Z_2} e^{-jk_2 z} - \hat{i}_y \frac{E_{2-}}{Z_2}$

4 άγνωστοι

Επίσης, έχουμε ότι: $k_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$

$k_2 = \omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}$

και $Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}$, $Z_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}$

Συνθήκη στον τέλειο αγωγό στο $z = d_1$:

$$\boxed{E_{1+}e^{-jk_1d_1} + E_{1-}e^{+jk_1d_1} = 0} \quad (1)$$

Συνθήκη ανάμεσα στα (1),(2), στην διαχωριστική επιφάνεια $z=0$:

$$\boxed{E_{1+} + E_{1-} = E_{2+} + E_{2-}} \quad (2)$$

Συνθήκη στον τέλειο αγωγό στο $z=-d_2$:

$$\boxed{E_{2+}e^{+jk_2d_2} + E_{2-}e^{-jk_2d_2} = 0} \quad (3)$$

Συνθήκη για $z=0$ για το ρεύμα, προκύπτει τελικά ότι:

$$\boxed{\frac{1}{Z_1}(E_{1+} - E_{1-}) - \frac{1}{Z_2}(E_{2+} - E_{2-}) = K_0} \quad (4)$$

Άρα: 4 εξισώσεις για 4 αγνώστους:

$$\begin{bmatrix} e^{-jk_1d_1} & e^{+jk_1d_1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & e^{+jk_2d_2} & e^{-jk_1d_1} \\ \frac{1}{Z_1} & -\frac{1}{Z_1} & -\frac{1}{Z_2} & +\frac{1}{Z_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{1+} \\ E_{1-} \\ E_{2+} \\ E_{2-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ K_0 \end{bmatrix}$$

(β) φασιθέτης επαγόμενου επιφανειακού ρεύματος του $z=d_1$:

$$\hat{i}_z(\cancel{\vec{H}_3}^{\,0}-\vec{H}_1)\Big|_{z=d_1}=\vec{K}_{PC_1} \Rightarrow \vec{K}_{PC_1}=-\hat{i}_z\times\vec{H}_1\Big|_{z=d_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{K}_{PC_1}=\hat{i}_x\left(\frac{E_{1+}}{Z_1}e^{-jk_1d_1}-\frac{E_{1-}}{Z_1}e^{jk_1d_1}\right)}$$

(δώσαμε η απλοποίηση με σχέση (1))

φασιθέτης επαγόμενου επιφανειακού ρεύματος του $z=-d_2$:

$$\hat{i}_z(\cancel{\vec{H}_4}^{\,0}-\vec{H}_2)\Big|_{z=-d_2}=\vec{K}_{PC_2} \Rightarrow \vec{K}_{PC_2}=-\hat{i}_z\times\vec{H}_2\Big|_{z=-d_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{K}_{PC_2}=\hat{i}_x\left(\frac{E_{2+}}{Z_2}e^{jk_2d_2}-\frac{E_{2-}}{Z_2}e^{-jk_2d_2}\right)}$$

(απλοποιείται μέσω της (3))

φασιθέτης επαγόμενου επιφανειακού φορτίου για PC_1, PC_2:

$$\boxed{\sigma_1=\hat{i}_z\cdot(\vec{D}_3-\vec{D}_1)=0}\,,\quad \boxed{\sigma_2=\hat{i}_z(\vec{D}_4-\vec{D}_2)=0}$$

γ) Αντικαθιστούμε:

$$\begin{bmatrix} e^{-jkd} & e^{+jkd} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & e^{+jkd} & e^{-jkd} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{1+} \\ E_{1-} \\ E_{2+} \\ E_{2-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$k = 2\pi\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\cdot f$, $Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$, $d = 1m$

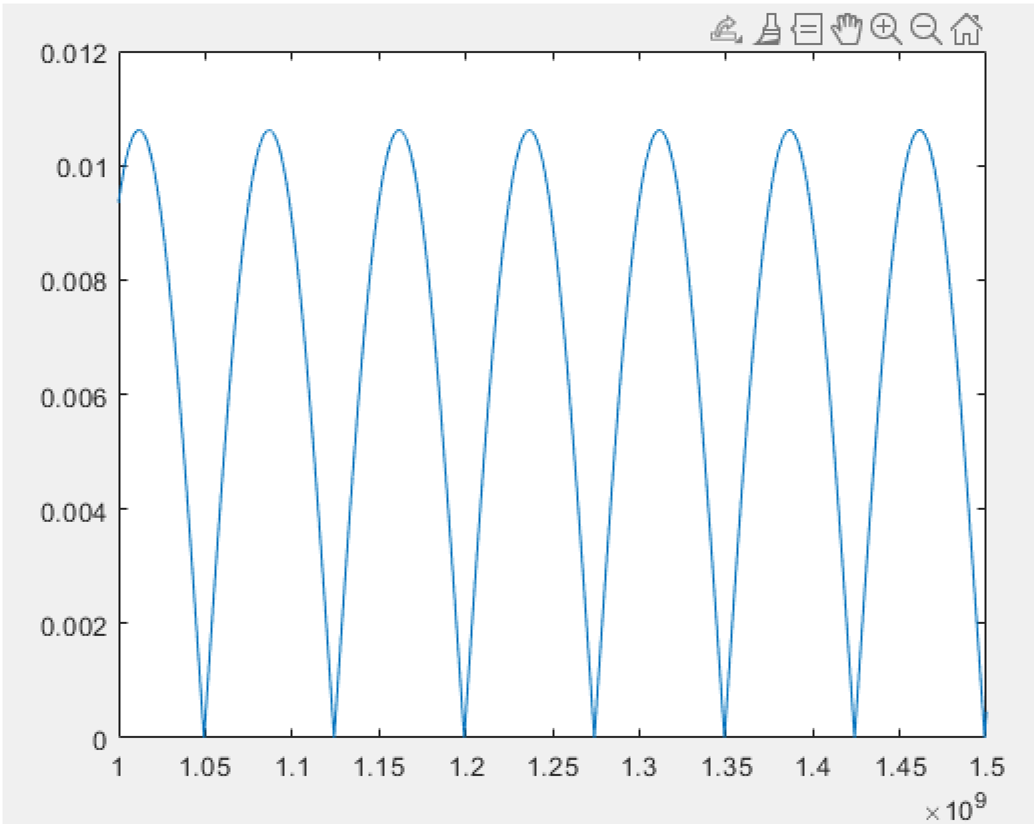
Άσκηση 11 – Matlab:

Ο κώδικας:

```
e0 = 8.85419e-12;
m0 = pi*4e-7;
f = (1e9:1e4:1.5e9);
d = 1;
k = 2*pi*sqrt(e0*m0).*f;
Z = sqrt(m0/e0);
num=size(k,2);
A(1,1,:) = exp(-j*d.*k);
A(1,2,:) = exp(j*d.*k);
A(1,3,:) = zeros(1,num);
A(1,4,:) = zeros(1,num);
A(2,1,:) = ones(1,num);
A(2,2,:) = ones(1,num);
A(2,3,:) = -ones(1,num);
A(2,4,:) = -ones(1,num);
A(3,1,:) = zeros(1,num);
A(3,2,:) = zeros(1,num);
A(3,3,:) = exp(j*d.*k);
A(3,4,:) = exp(-j*d.*k);
A(4,1,:) = 1/Z.*ones(1,num);
A(4,2,:) = -1/Z.*ones(1,num);
A(4,3,:) = -1/Z.*ones(1,num);
A(4,4,:) = 1/Z.*ones(1,num);

for i=1:num
        deter(i)=det(A(:,:,i));
end

figure(1)
plot(f,abs(deter));

B = [0; 0; 0; 1];
for i=1:num
    X(i,:) = B \ A(:,:,i);
end

E2_pos=X(:,2);

figure(2)
plot(f,E2_pos);

f1=1.05e9;
k1 = 2*pi*sqrt(e0*m0).*f1;
```

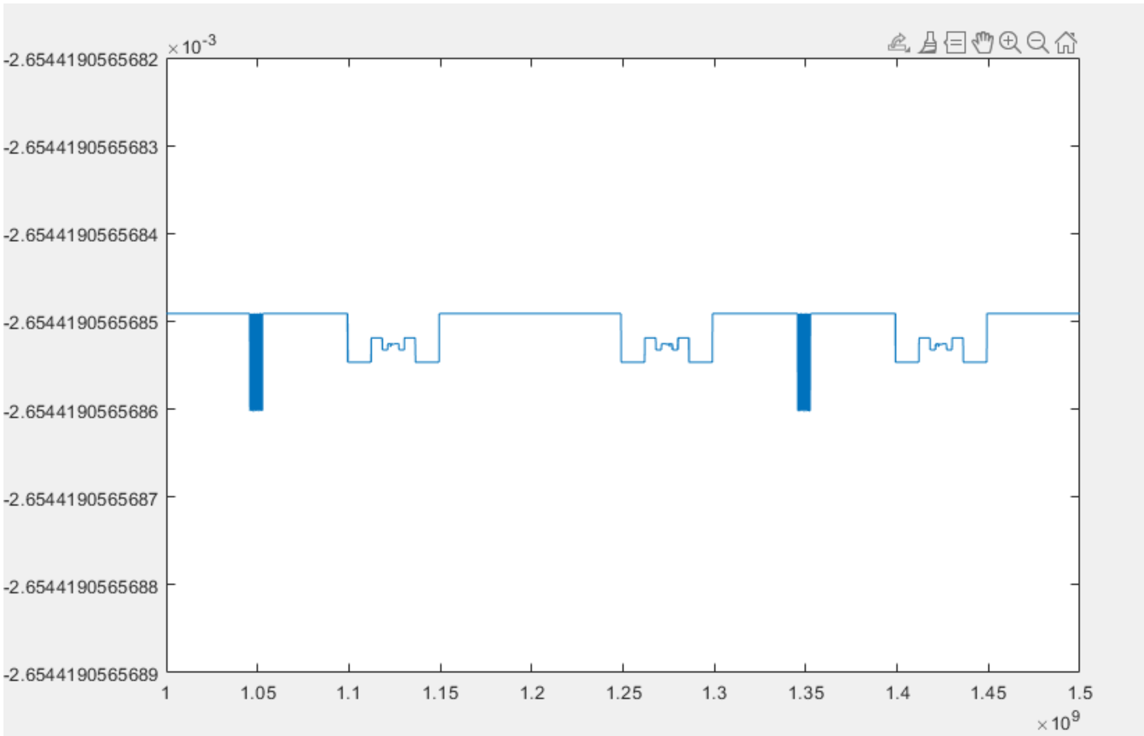
```
A1=[exp(-j*d*k1) exp(j*d*k1) 0 0; 1 1 -1 -1; 0 0
exp(j*d*k1) exp(-j*d*k1); 1/Z -1/Z -1/Z 1/Z];
x1=B\A1;

z=(-1.5:0.001:1.5);
E1 = x1(1).*exp(-j*k1.*z) + x1(2).*exp(j*k1.*z);
E2 = x1(3).*exp(-j*k1.*z) + x1(4).*exp(j*k1.*z);
E = (z>=0).*(z<=d).*E1 + (z<0).*(z>=-d).*E2;
H1 = x1(1)./Z.*exp(-j*k1.*z) - x1(2)./Z.*exp(j*k1.*z);
H2 = x1(3)./Z.*exp(-j*k1.*z) - x1(4)./Z.*exp(j*k1.*z);
H = (z>=0).*(z<=d).*H1 + (z<0).*(z>=-d).*H2;

figure(3)
plot(z,real(E));
hold on
title("Re{E}");
xline(-d);
xline(0);
xline(d);

figure(4)
plot(z,imag(E));
hold on
title("Im{E}");
xline(-d);
xline(0);
xline(d);

figure(5)
plot(z,real(H));
hold on
title("Re{H}");
xline(-d);
xline(0);
xline(d);

figure(6)
plot(z,imag(H));
hold on
title("Im{H}");
xline(-d);
xline(0);
xline(d);
```

(γ) Παρακάτω βλέπουμε τη γραφική παράσταση του μέτρου της ορίζουσας που σημειώσαμε στο χειρόγραφο, παραπάνω. Εξετάζουμε φάσμα συχνοτήτων από 1 GHz έως 1.5 GHz.



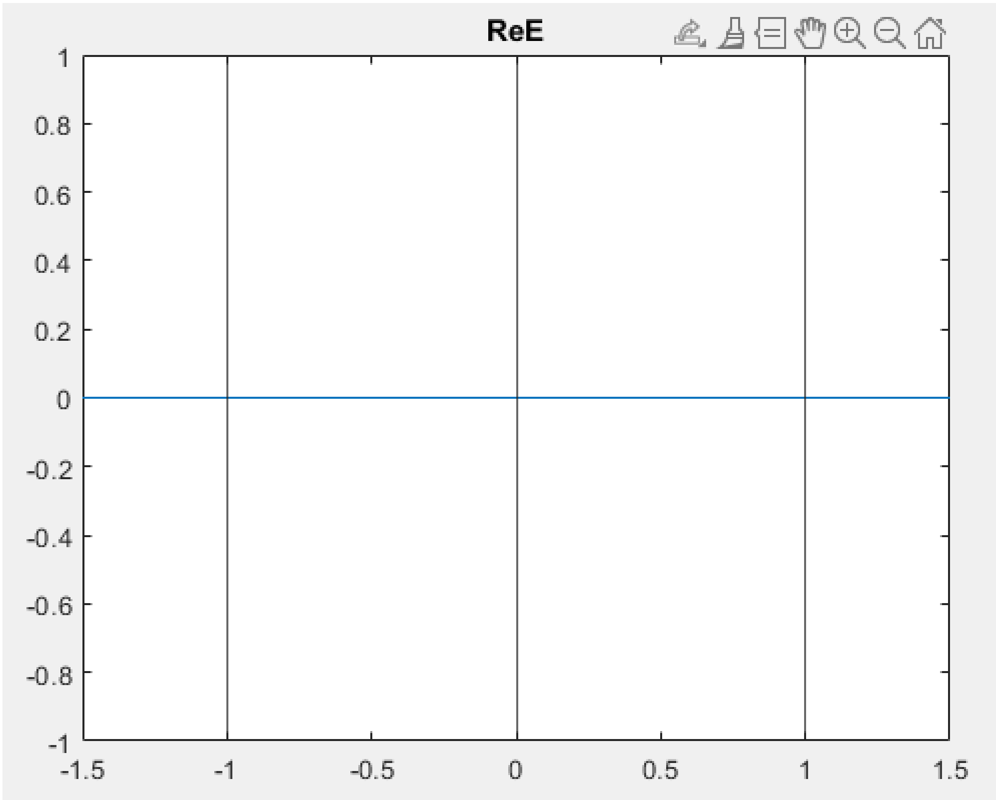
Παρατηρούμε ότι φαίνονται καθαρά τα σημεία συντονισμού. Η πρώτη συχνότητα συντονισμού είναι περίπου 1.05 GHz (η πληροφορία αυτή θα χρησιμοποιηθεί αργότερα).

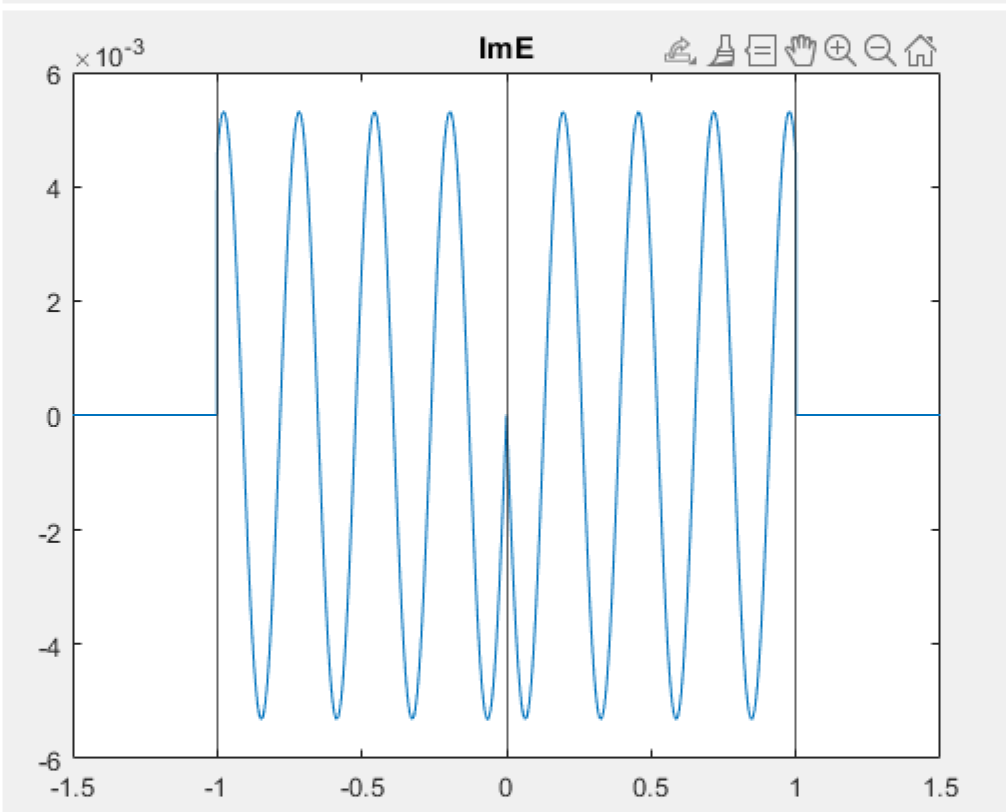
Στη συνέχεια σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της απόλυτης τιμής του πλάτους του κύματος της περιοχής 2 ($z < 0$), |E2+|, που αντιστοιχεί στο κύμα που οδεύει στα θετικά z.

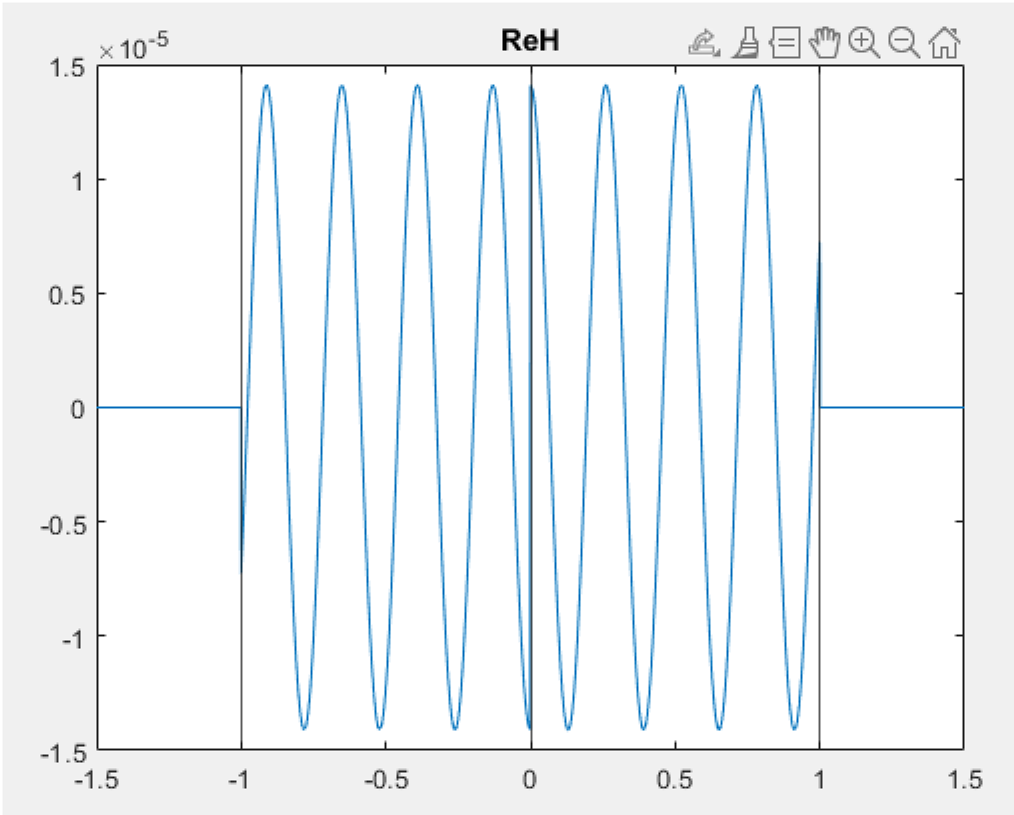
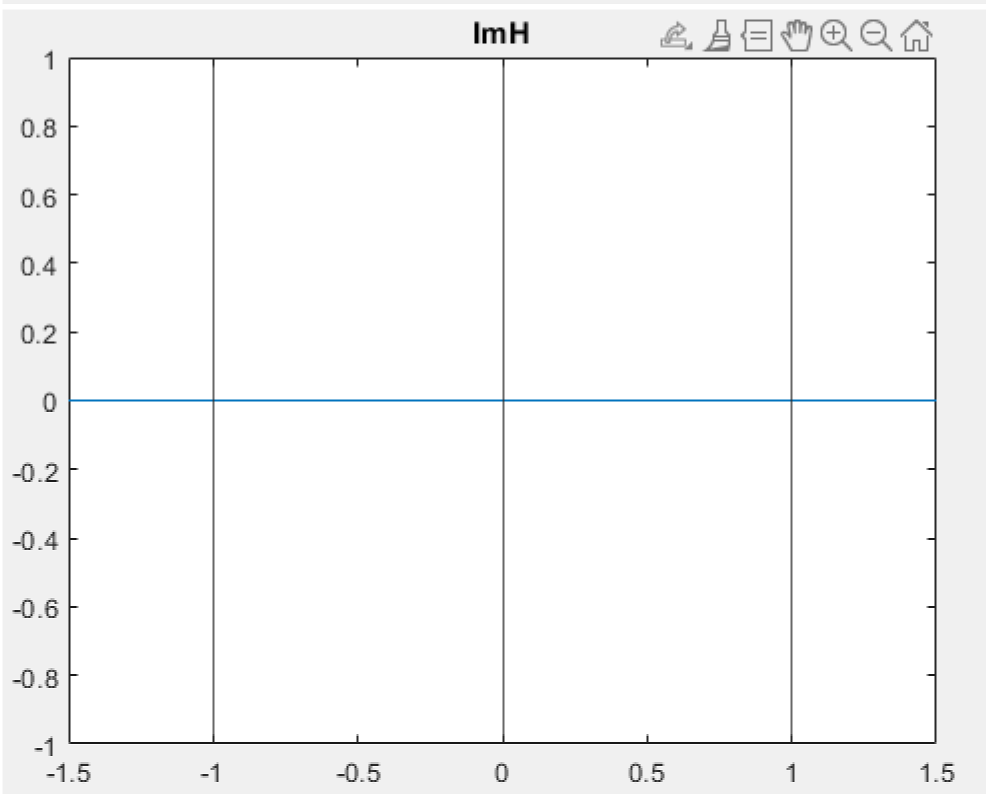


Παρατηρούμε και πάλι τα σημεία συντονισμού., τα οποία, κατά προσέγγιση, συμπίπτουν με όσα βρήκαμε στην πρώτη γραφική παράσταση.
Οπότε επαληθεύονται όσα γνωρίζουμε από τη θεωρία.

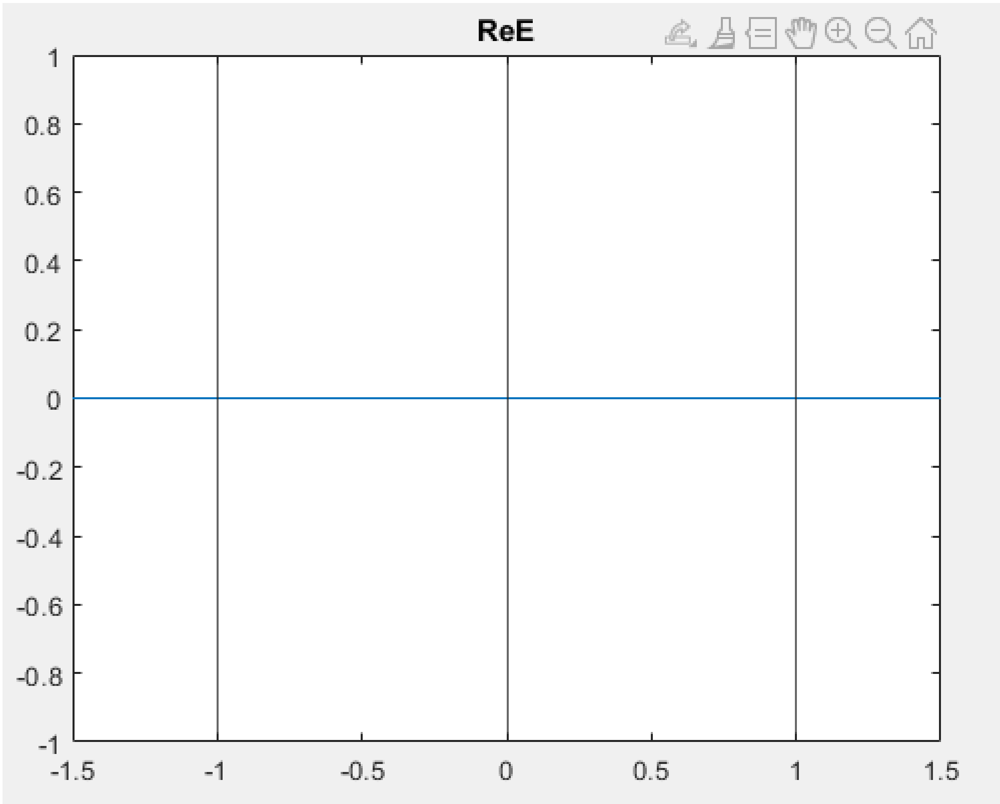
(δ) Για f = 1.15 GHz:

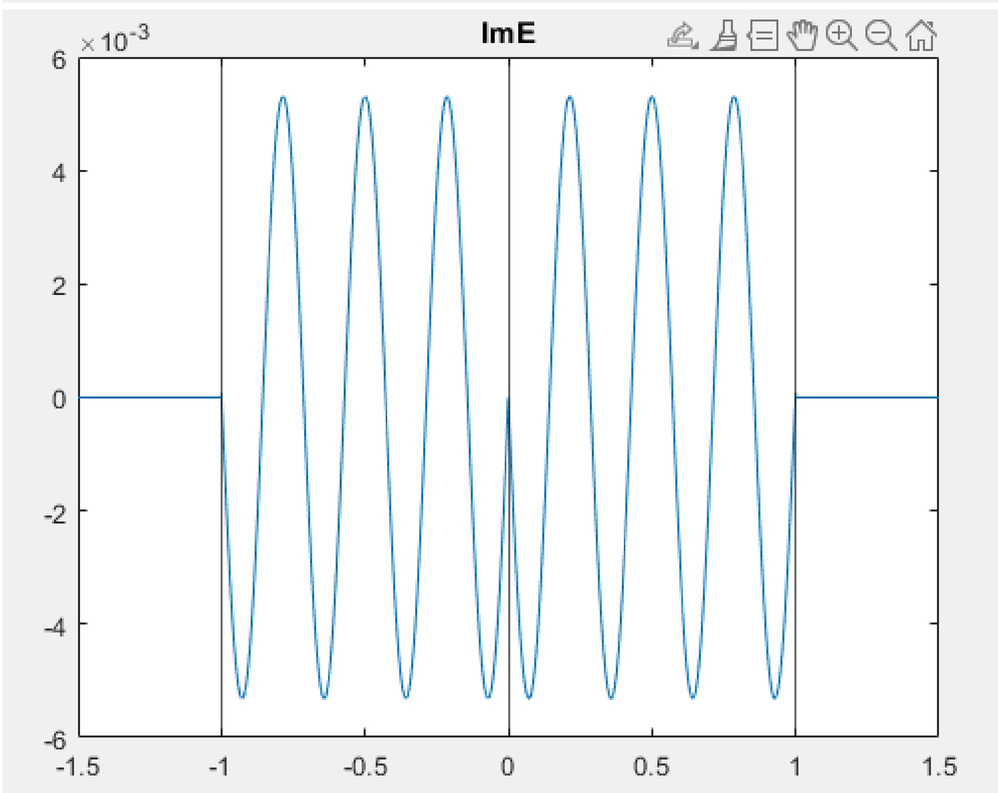


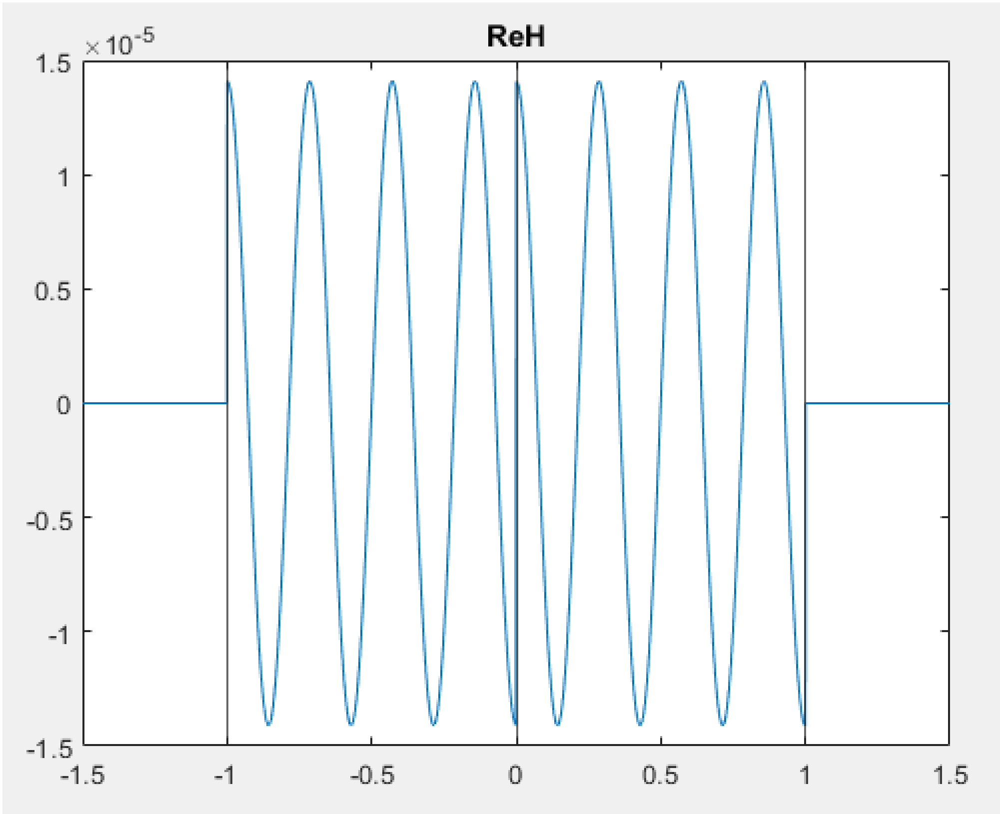


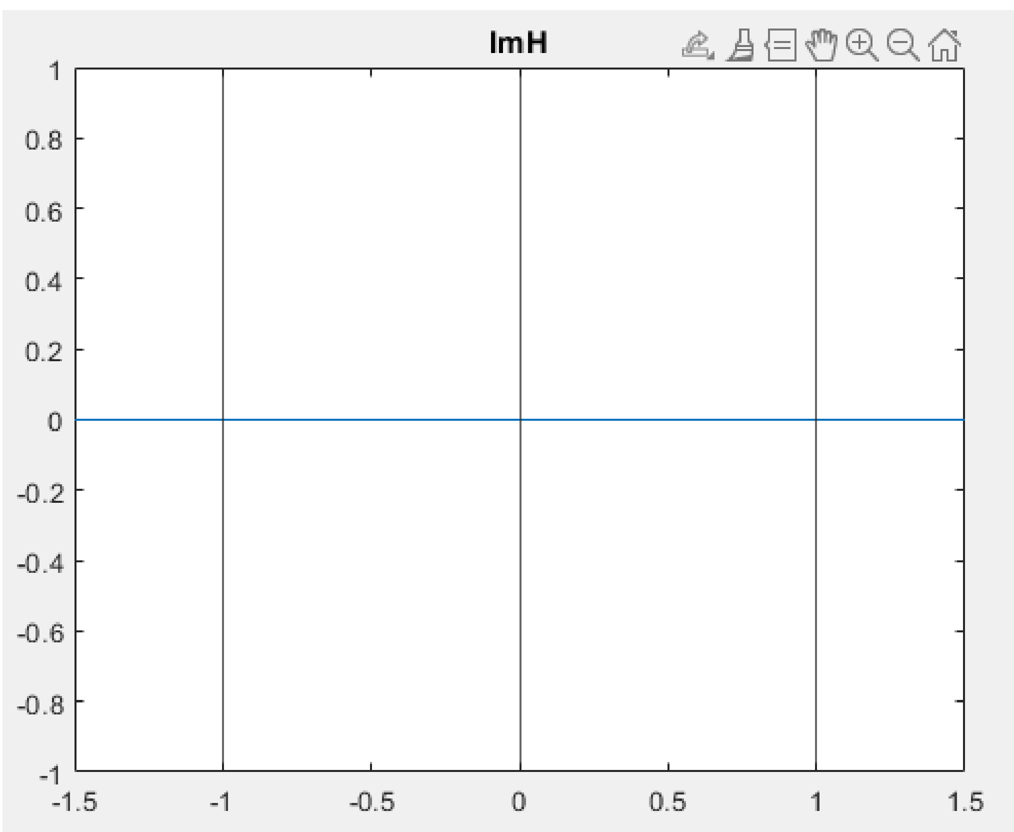

ReH
×10^-5
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5

ImH
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5

Για f = 1.05 GHz (πρώτη συχνότητα μηδενισμού της ορίζουσας):

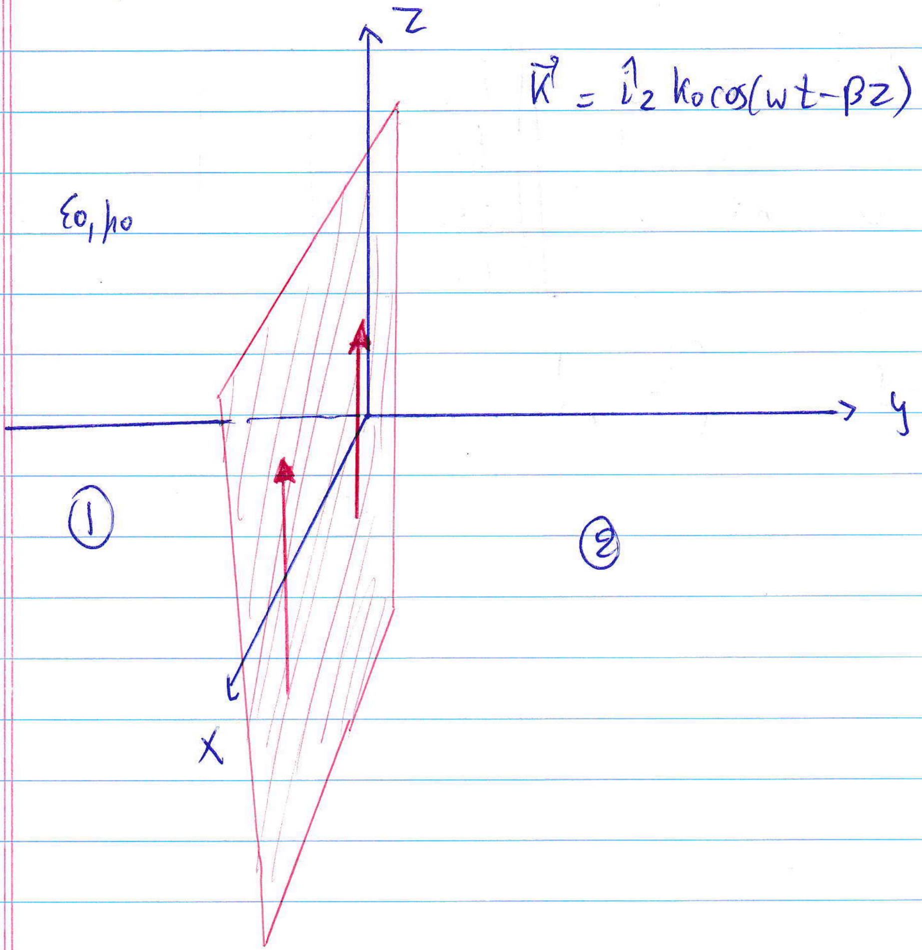





ReH
×10^-5
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5


ImH
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5

Άσκηση (12):



$\vec{K} = \hat{i}_z K_0 \cos(\omega t - \beta z)$

(α) Συνθήκη:

$$\hat{i}_n \cdot (\vec{J}_+ - \vec{J}_-) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{K} - \frac{\partial \sigma}{\partial t} \Rightarrow$$

$\hat{i}_n = \hat{i}_y$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -\frac{\partial K}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial \sigma}{\partial t} = K_0 \beta \sin(\omega t - \beta z) \Rightarrow \sigma = \frac{K_0 \beta}{\omega} \cos(\omega t - \beta) + \cancel{\sigma_0}^{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{K_0 \beta}{\omega} \cos(\omega t - \beta z)}$$

(β) Υποθέτουμε ότι τα κυματοδιανύσματα και το Η.Π. δεν έχουν x συνιστώσα. Προκύπτει ότι:

$$\vec{E_1} = \left(E_{0z}\hat{i}_z + E_{1y}\hat{i}_y\right)\underbrace{e^{-j(\beta z + k_{1y}y)}}_{A_1}$$

$$\vec{E_2} = \left(E_{0z}\hat{i}_z + E_{2y}\hat{i}_y\right)\underbrace{e^{-j(\beta z + k_{2y}y)}}_{A_2}$$

συνοριογραμμές

$$\vec{H_1} = \hat{i}_x H_{1x} e^{-j(\beta z + k_{1y}y)}$$

$$\vec{H_2} = \hat{i}_x H_{2x} e^{-j(\beta z + k_{2y}y)}$$

θα αποδειχθεί στη συνέχεια

Ισχύει ότι $\vec{k_1} = \beta\cdot\hat{i}_z + k_{1y}\cdot\hat{i}_y$ άρα $k_1 = \sqrt{\beta^2 + k_{1y}^2} = k_0$

$\vec{k_2} = \beta\,\hat{i}_z + k_{2y}\,\hat{i}_y$ άρα $k_2 = \sqrt{\beta^2 + k_{2y}^2} = k_0$

άρα, αφού $\begin{cases} k_{1y} < 0 \\ k_{2y} > 0 \end{cases}$, έχω ότι $\begin{cases} k_{1y} = -\sqrt{k_0^2 - \beta^2} \\ k_{2y} = \sqrt{k_0^2 - \beta^2} \end{cases}$

όπου $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$, λ_0 μήκος κύματος στο κενό.

Αρκεί να βρω τώρα τα $E_{0z}, E_{1y}, E_{2y}, H_{1x}, H_{2x}$

$$\vec{H_1} = \frac{1}{Z_0}\left(\vec{k_1} \times \vec{E_1}\right) = \frac{1}{Z_0}\begin{vmatrix} \hat{i}_x & \hat{i}_y & \hat{i}_z \\ 0 & k_{1y} & \beta \\ 0 & E_{1y}A_1 & E_{0z}A_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{Z_0}\left[k_{1y}E_{0z} - \beta E_{1y}\right]A_1 \Rightarrow \boxed{H_{1x} = \frac{1}{Z_0}\left(k_{1y}E_{0z} - \beta E_{1y}\right)}$$

Όμοια: $\boxed{H_{2x} = \frac{1}{Z_0}\left(k_{2y}E_{0z} - \beta E_{2y}\right)}$

Τώρα αρκεί να βρεθούν τα E_{oz}, E_{1y}, E_{2y} !

Συνθήκες ανάμεσα στις περιοχές ①, ② στη διαχωριστική επιφάνεια $y=0$:

- $\hat{i}_n \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)\Big|_{y=0} = \vec{K} \Rightarrow H_{1x} - H_{2x} = K_0 \cos(\omega t - \beta z) e^{j\beta z}$, $\hat{i}_n = \hat{i}_y$

$\Rightarrow k_{1y} E_{ox} - \beta E_{1y} - k_{2y} E_{ox} + \beta E_{2y} = Z_0 K_0 \cos(\omega t - \beta z) e^{j\beta z}$ ①

- $\hat{i}_y \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\Big|_{y=0} = 0 \Rightarrow \hat{i}_x (E_{oz} - E_{oz}) + (E_{2y} + E_{1y}) = 0$

$\Rightarrow \boxed{E_{1y} = -E_{2y}}$ ②

- $\hat{i}_y \varepsilon_0 (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \sigma \Rightarrow (E_{2y} - E_{1y}) e^{-j\beta z} = \frac{K_0 \beta}{\varepsilon_0 \omega} \cos(\omega t - \beta z)$ ③

①, ③ $\rightarrow$ $E_{ox}(k_{1y} - k_{2y}) + \beta(E_{2y} - E_{1y}) = Z_0 \frac{\varepsilon_0 \omega}{\beta} (E_{2y} - E_{1y})$

άρα : $\boxed{E_{2y} \overset{③}{=} \frac{K_0 \beta}{2\varepsilon_0 \omega} \cos(\omega t - \beta z) e^{j\beta z} = -E_{1y}}$

και $\boxed{E_{ox} = \left(\frac{Z_0 \varepsilon_0 \omega}{\beta} - \beta\right) \frac{2E_{2y}}{k_{1y} - k_{2y}}}$

$A_1^* = e^{j(\beta z + k_{1y} y)}$

$A_2^* = e^{j(\beta z + k_{2y} y)}$

(β) παροχή 1:

$$\vec{P}_{avg_1} = \frac{1}{2} Re\{\vec{E_t} \times H_t^*\}$$

$$\vec{E_t} \times H_t^* = \begin{vmatrix} \hat{i}_x & \hat{i}_y & \hat{i}_z \\ 0 & E_{1y} A_1 & E_{0z} A_1 \\ H_{1x} A_1^* & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{i}_y (E_{0z} H_{1x} A_1 A_1^*) - \hat{i}_z (E_{1y} H_{1x} A_1 A_1^*) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{P}_{avg_1} = \frac{1}{2} Re\{\hat{i}_y (E_{0z} H_{1x}) - \hat{i}_z E_{1y} H_{1x}\}$$

$$\vec{P}_{avg_2} = \frac{1}{2} Re\{\hat{i}_y (E_{0z} H_{2x}) - \hat{i}_z E_{2y} H_{2x}\}$$ όμοια.

(δ) $$\frac{\vec{P}_{avg_2} \cdot \hat{i}_y}{|\vec{P}_{avg_2}|} = \cos 30° \Rightarrow$$

$$\frac{\frac{1}{2} Re\{E_{0z} H_{2x}\}}{|\vec{P}_{avg_2}|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ldots$$