



ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ Α (Τμήμα Ε-Α)

ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ Νο. 1

Ασκήσεις για εξάσκηση: Νο. 1,2,3,4,5

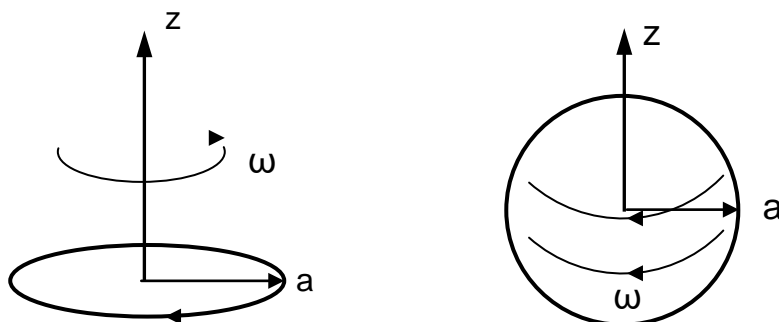
Ασκήσεις για παράδοση: Νο. 6, 7, 8

Ημερομηνία Παράδοσης: **24 Μαρτίου 2022**

Άσκηση 1:

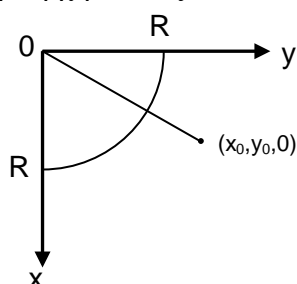
(α) Συνολικό ηλεκτρικό φορτίο Q διανέμεται ομοιόμορφα στον όγκο σφαίρας ακτίνας a . Η σφαίρα αρχίζει να περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από κάποια διάμετρό της. Υποθέσατε ότι η κατανομή του ηλεκτρικού φορτίου δεν επηρεάζεται από την περιστροφή. Να βρεθεί η χωρική πυκνότητα ρεύματος παντού μέσα στην σφαίρα. Να υπολογισθεί το συνολικό ρεύμα που διέρχεται από ημικύκλιο ακτίνας a σταθερό στο χώρο και με την βάση του πάνω στον άξονα περιστροφής.

(β) Συνολικό ηλεκτρικό φορτίο Q διανέμεται ομοιόμορφα στην επιφάνεια δίσκου ακτίνας a . Ο δίσκος αρχίζει να περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από τον άξονά του (άξονας των z). Υποθέσατε ότι η κατανομή του ηλεκτρικού φορτίου δεν επηρεάζεται από την περιστροφή. Να βρεθεί η επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος παντού πάνω στον δίσκο. Να υπολογισθεί το συνολικό ρεύμα που διέρχεται από τμήμα του δίσκου ακτίνας a σταθερό στο χώρο και με την αρχή του πάνω στον άξονα περιστροφής.



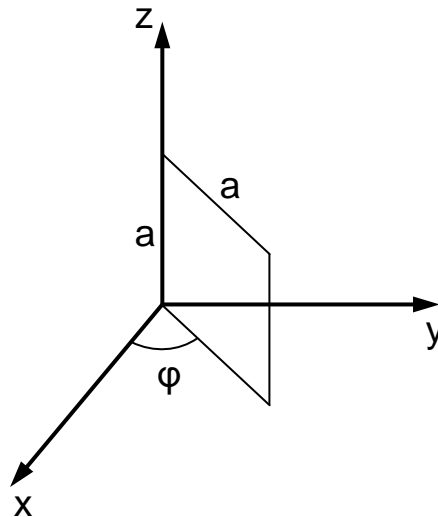
Άσκηση 2:

Επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος $\vec{K} = ax\hat{i}_x + bxy\hat{i}_y$ διαρρέει το επίπεδο xy ενός καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων. (α) Να βρεθούν οι μονάδες των σταθερών a και b . (β) Να υπολογισθεί το συνολικό ρεύμα που διέρχεται από το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει την αρχή των αξόνων $(0,0,0)$ με το σημείο $(x_0, y_0, 0)$ όπου $x_0, y_0 > 0$. (γ) Να υπολογισθεί το συνολικό ρεύμα που διέρχεται από το τμήμα κύκλου του επιπέδου xy με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα R με $x, y > 0$.



Άσκηση 3:

Σε κάποια χρονική στιγμή η πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος ενός συστήματος δίδεται από την σχέση $\vec{J} = A(x^3\hat{i}_x + y^3\hat{i}_y + z^3\hat{i}_z)$ όπου A είναι μία θετική σταθερά. (α) Ποιά είναι η μονάδα μέτρησης της σταθεράς A ; (β) Σε αυτή την χρονική στιγμή ποιός είναι ο ρυθμός μεταβολής της χωρικής πυκνότητας ηλεκτρικού φορτίου στο σημείο (a, a, a) ; (γ) Θεωρήστε το συνολικό φορτίο Q που περιέχεται μέσα σε μια σφαίρα ακτίνας a με κέντρο την αρχή των αξόνων. Κατά την δεδομένη χρονική στιγμή ποιός είναι ο ρυθμός μεταβολής του Q ως προς τον χρόνο; Το Q αυξάνεται ή μειώνεται σαν συνάρτηση του χρόνου; (δ) Κατά την δεδομένη χρονική στιγμή ποιοί είναι το συνολικό ηλεκτρικό ρεύμα που διέρχεται από το τετράγωνο πλευράς a που φαίνεται στο κάτωθι σχήμα;



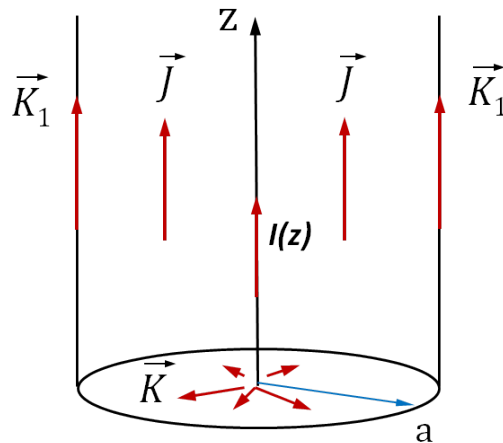
Άσκηση 4:

Έστω χωρική πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος $\vec{J} = [400 \sin \theta / (r^2 + 4)] \hat{i}_r$ (A/m²).

(α) Να βρεθεί το ολικό ηλεκτρικό ρεύμα που διέρχεται από μέρος σφαιρικής επιφάνειας ακτίνας $r_0 = 0.8\text{m}$ περιορισμένης από τις πολικές γωνίες $\theta_1 = 0.1\pi$ και $\theta_2 = 0.3\pi$ και $\theta < \varphi \leq 2\pi$. (β) Να βρεθεί η μέση τιμή της πυκνότητας ρεύματος πάνω σε αυτή την επιφάνεια. (γ) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής (ως προς τον χρόνο) του ηλεκτρικού φορτίου που βρίσκεται στον όγκο που περικλείεται από την προηγούμενη επιφάνεια και περιορίζεται ως προς την διεύθυνση z από επίπεδα κάθετα στο z στις γωνίες θ_1 και θ_2 .

Άσκηση 5:

Στον επίπεδο δίσκο ακτίνας a (στο επίπεδο $z = 0$) υπάρχει γνωστό επιφανειακό ρεύμα επιφανειακής πυκνότητας $\vec{K} = \hat{r}_T K_0 \left(\frac{a}{r_T} \right) \cos\left(\frac{2\pi r_T}{a}\right)$. Τα μόνα άλλα ρεύματα που υπάρχουν αλλά δεν είναι γνωστή η τιμή τους είναι: (1) στον ημιάξονα $z > 0$ υπάρχει νηματοειδές ρεύμα $I(z)$, (2) στην κυλινδρική επιφάνεια $r_T = a$, $z > 0$, υπάρχει επιφανειακό ρεύμα $\vec{K}_1 = \hat{z} K_1(z)$, και (3) στον ημίχωρο $r_T < a$, $z > 0$, υπάρχει ρεύμα με χωρική πυκνότητα ρεύματος $\vec{J} = \hat{z} J(r_T, z)$. Ρεύματα μπορεί να υπάρχουν στο. + Η μαγνητική διαπερατότητα είναι παντού μ_0 . Να προσδιορισθούν τα άγνωστα ρεύματα χρησιμοποιώντας τον νόμο διατήρησης ηλεκτρικού φορτίου.



Άσκηση 6: (Αυτή η άσκηση είναι προς παράδοση) [30%]

Το κάτωθι σχήμα δείχνει τη διατομή μιας διάταξης με άπειρο μήκος κατά τον άξονα z . Όλος ο χώρος είναι μη μαγνητικός δηλαδή υπάρχει παντού διαπερατότητα μ_0 . Στη διάταξη αυτή, σε μόνιμη κατάσταση ($\partial/\partial t = 0$) ροή ρεύματος είναι δυνατό να υπάρχει μόνο: (1) Στην περιοχή $b < r_T < a$, $0 < \varphi < \pi/2$, ως χωρική πυκνότητα $\vec{J} = \hat{r}_T J_T(r_T, \varphi) + \hat{\varphi} J_\varphi(a/r_T) \sin^2 \varphi$, όπου J_0 είναι σταθερή ποσότητα, (2) στα επίπεδα όρια $b < r_T < a$, $\varphi = 0$ και $b < r_T < a$, $\varphi = \pi/2$, ως επιφανειακές πυκνότητες $\vec{K}_1 = \hat{r}_T K_1(r_T)$ και $\vec{K}_4 = \hat{r}_T K_4(r_T)$, αντίστοιχα, και (3) στις κυλινδρικές επιφάνειες $r_T = a$ και $r_T = b$, ως επιφανειακές πυκνότητες $\vec{K}_2 = \hat{\varphi} K_2(\varphi)$ και $\vec{K}_3 = \hat{\varphi} K_0 \sin^2 \varphi$ για $0 < \varphi < \pi/2$ αντίστοιχα.

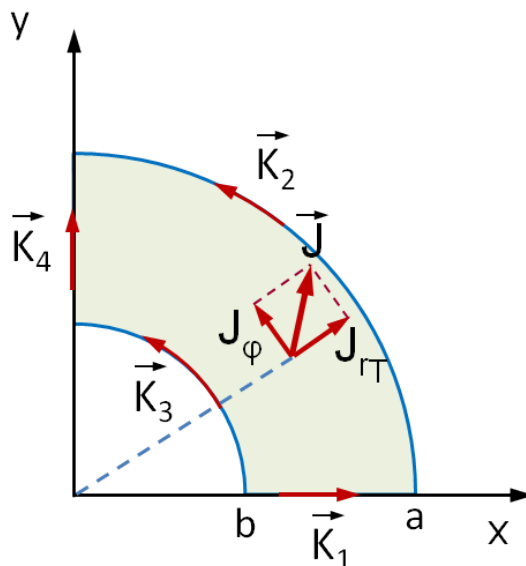
(α) [10%] Υπολογίστε τις επιφανειακές πυκνότητες ρεύματος $K_1(r_T)$, $K_2(r_T)$, $K_4(\varphi)$ και την χωρική συνιστώσα $J_T(r_T, \varphi)$ χρησιμοποιώντας κατάλληλα τον νόμο διατήρησης ηλεκτρικού φορτίου.

Τα επόμενα ερωτήματα απαιτούν την χρήση υπολογιστού (MatLab, Python, Mathematica, C++, ή άλλο):
Θεωρήστε $a = 2\text{m}$ (όλες οι αποστάσεις σε m), $b = 1\text{m}$, $J_0 = 1 \text{ A/m}^2$, και $K_0 = 1 \text{ A/m}$.

(β) [10%] Να γίνει (με την βοήθεια της *MatLab* ή ισοδύναμου υπολογιστικού πακέτου) γραφική απεικόνιση του μέτρου της χωρικής πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος $|\vec{J}|$ στον καρτεσιανό χώρο $0\text{m} \leq x, y \leq 2\text{m}$ (στο επίπεδο xy). Να χρησιμοποιήσετε την συνάρτηση **surface(x,y,J)**, **shading interp** (ή ισοδύναμη) για την χρωματική απεικόνιση του μέτρου $|\vec{J}|$ στο επίπεδο xy . Επίσης να βρεθούν οι επιφάνειες (γραμμές) σταθερού μέτρου της $|\vec{J}|$ στο επίπεδο xy με την βοήθεια της συνάρτησης **contour**. Οι επιφάνειες (γραμμές) σταθερού μέτρου να βρεθούν για τιμές $J_{\max}[0:0.05:1] \text{ A/m}^2$ (J_{\max} είναι η μέγιστη τιμή του μέτρου $|\vec{J}|$ και $[0:0.05:1]$ σημαίνει βήματα 0.05 από 0 έως 1).

(γ) [10%] Να γίνει μια γραφική απεικόνιση της χωρικής πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος \vec{J} στο επίπεδο xy στον καρτεσιανό χώρο $0\text{m} \leq x, y \leq 2\text{m}$. Προτείνω την χρήση των **quiver** ΚΑΙ **streamslice** (Matlab) ή ισοδυνάμων. **Επίσης** να υπολογιστούν οι δυναμικές γραμμές της χωρικής πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος στο επίπεδο xy **κάνοντας χρήση** της συνάρτησης **streamline** (ή ισοδύναμης). Μια 2D βελτιωμένη έκδοση της **stream2** (που χρησιμοποιεί η **streamline**) βρίσκεται στο αποθηκευτήριο *MatLab Exchange* (με το όνομα **mmstream2**) στην ηλεκτρονική διεύθυνση:

<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/38860-improved-2-d-streamlines>.



Άσκηση 7: (Αυτή η άσκηση είναι προς παράδοση) [30%]

Το κάτωθι σχήμα δείχνει τη διατομή μιας διάταξης με άπειρο μήκος κατά τον άξονα z . Όλος ο χώρος είναι μη μαγνητικός δηλαδή υπάρχει παντού διαπερατότητα μ_0 . Στη διάταξη αυτή, σε μόνιμη κατάσταση ($\partial/\partial t = 0$) ροή ρεύματος είναι δυνατό να υπάρχει μόνο:

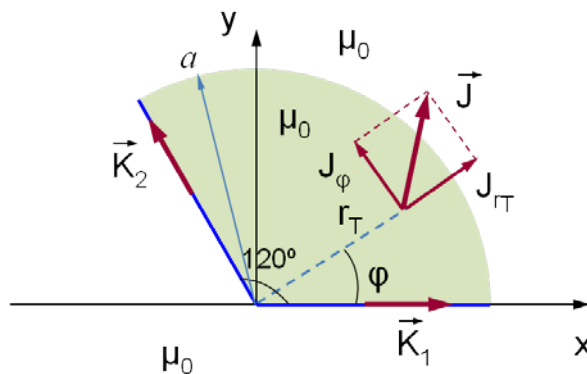
- (1) Στην περιοχή $r_T < a$, $0 < \varphi < 2\pi/3$, ως χωρική πυκνότητα $\vec{J} = \hat{r}_T J_T(r_T, \varphi) + \hat{\varphi} J_\varphi \cos\varphi$, όπου J_0 είναι σταθερή ποσότητα, και
 - (2) Στα επίπεδα όρια $r_T < a$, $\varphi = 0$ και $r_T < a$, $\varphi = 2\pi/3$, ως επιφανειακές πυκνότητες $\vec{K}_1 = \hat{r}_T K_1(r_T)$ και $\vec{K}_2 = \hat{r}_T K_2(r_T)$, αντίστοιχα.
- (α) [10%] Υπολογίστε τις επιφανειακές πυκνότητες ρεύματος $K_1(r_T)$ και $K_2(r_T)$ και την χωρική συνιστώσα $J_T(r_T, \varphi)$ χρησιμοποιώντας κατάλληλα τον νόμο διατήρησης ηλεκτρικού φορτίου.

Τα επόμενα ερωτήματα απαιτούν την χρήση υπολογιστού (MatLab, Python, Mathematica, C++, ή άλλο):
Θεωρήστε $a = 1\text{m}$ (όλες οι αποστάσεις σε m), $J_0 = 1\text{ A/m}^2$.

(β) [10%] Να γίνει (με την βοήθεια της *MatLab* ή ισοδύναμου υπολογιστικού πακέτου) γραφική απεικόνιση του μέτρου της χωρικής πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος $|\vec{J}|$ στον καρτεσιανό χώρο $-0.5\text{m} \leq x \leq 1\text{m}$, $0\text{m} \leq y \leq 1\text{m}$ (στο επίπεδο xy). Να χρησιμοποιήσετε την συνάρτηση **surface(x,y,J)**, **shading interp** (ή ισοδύναμη) για την χρωματική απεικόνιση του μέτρου $|\vec{J}|$ στο επίπεδο xy . Επίσης να βρεθούν οι επιφάνειες (γραμμές) σταθερού μέτρου της $|\vec{J}|$ στο επίπεδο xy με την βοήθεια της συνάρτησης **contour**. Οι επιφάνειες (γραμμές) σταθερού μέτρου να βρεθούν για τιμές $[0.25:0.25:5]\text{ A/m}^2$ ($[0.25:0.25:5]$ σημαίνει βήματα 0.25 από 0.25 έως 5).

(γ) [10%] Να γίνει μια γραφική απεικόνιση της χωρικής πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος \vec{J} στο επίπεδο xy στον καρτεσιανό χώρο $-0.5\text{m} \leq x \leq 1\text{m}$, $0\text{m} \leq y \leq 1\text{m}$ (στο επίπεδο xy). Προτείνω την χρήση των **quiver** ΚΑΙ **streamslice** (Matlab) ή ισοδυνάμων. Επίσης να υπολογιστούν οι δυναμικές γραμμές της χωρικής πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος στο επίπεδο xy **κάνοντας χρήση** της συνάρτησης **streamline** (ή ισοδύναμης). Μια 2D βελτιωμένη έκδοση της **stream2** (που χρησιμοποιεί η **streamline**) βρίσκεται στο αποθηκευτήριο MatLab Exchange (με το όνομα **mmstream2**) στην ηλεκτρονική διεύθυνση:

<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/38860-improved-2-d-streamlines>.



Άσκηση 8: (Αυτή η άσκηση είναι προς παράδοση) [40%]

Σε χώρο (ομοιόμορφο ως προς z) με μαγνητική διαπερατότητα μ_0 παντού, υπάρχουν οι ακόλουθες πυκνότητες ηλεκτρικού ρεύματος: (1) Χωρική πυκνότητα $\vec{J} = \hat{i}_x J_0 \left(1 + \frac{y}{b}\right)$ στο χώρο $0 < x < a$, $0 < y < b$. (2) Επιφανειακή πυκνότητα $\vec{K}_1 = \hat{i}_y K_1(y)$ στην ταινία $0 < y < b$, $x = 0$. (3) Επιφανειακή πυκνότητα $\vec{K}_2 = \hat{i}_x K_2(x)$, στην ταινία $0 < x < a$, $y = 0$. (4) Επιφανειακή πυκνότητα $\vec{K}_3 = \hat{i}_y K_3(y)$ στην ταινία $0 < y < b$, $x = a$. Άλλα ρεύματα ΔΕΝ υπάρχουν. Οι σταθερές J_0 , a , και b θεωρούνται γνωστές.

(α) [15%] Να βρεθούν οι άγνωστες κατανομές $K_1(y)$, $K_2(x)$, $K_3(y)$ σαν συνάρτηση των συντεταγμένων και των σταθερών του προβλήματος.

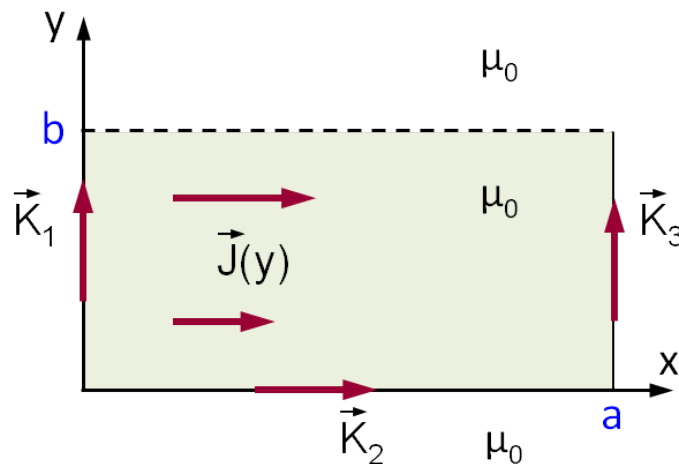
Τα επόμενα ερωτήματα απαιτούν την χρήση υπολογιστού (MatLab, Python, Mathematica, C++, ή άλλο):

Υποθέσετε ότι $a = 2\text{m}$, $b = 1\text{m}$, και $J_0 = 1\text{A/m}^2$.

(β) [10%] Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των $K_1(y)$, $K_2(x)$, $K_3(y)$ σαν συναρτήσεις των αντιστοίχων μεταβλητών y , x , y .

(β) [10%] Να γίνει (με την βοήθεια της *MatLab* ή ισοδύναμου υπολογιστικού πακέτου) γραφική απεικόνιση της χωρικής πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος \vec{J} στον καρτεσιανό χώρο $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ (όπου $a = 2\text{m}$ και $b = 1\text{m}$, και $J_0 = 1\text{A/m}^2$) στο επίπεδο xy . Να χρησιμοποιήσετε την συνάρτηση **surface(x,y,J)**, **shading interp** (ή ισοδύναμη) για την χρωματική απεικόνιση της \vec{J} στο επίπεδο xy . Επίσης να βρεθούν οι επιφάνειες (γραμμές) σταθερού μέτρου της \vec{J} στο επίπεδο xy με την βοήθεια της συνάρτησης **contour**. Οι επιφάνειες (γραμμές) σταθερού μέτρου να βρεθούν για τιμές $[J_{\min}:0.20:J_{\max}] \text{ A/m}^2$ ($[J_{\min}:0.20:J_{\max}]$ σημαίνει βήματα 0.20 από J_{\min} έως J_{\max}). J_{\min} και J_{\max} είναι η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της χωρικής πυκνότητας ρεύματος, αντίστοιχα.

(γ) [5%] Να γίνει μια γραφική απεικόνιση της χωρικής πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος \vec{J} στο επίπεδο xy στον καρτεσιανό χώρο $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ (στο επίπεδο xy). Προτείνω την χρήση των **quiver** και **streamslice** (Matlab) ή ισοδυνάμων.



Σημείωση: Σε όλες από τις ασκήσεις για παράδοση χρησιμοποιήσετε προγράμματα (σε matlab ή σε άλλα υπολογιστικά πακέτα) θα πρέπει **υποχρεωτικά** (για να πάρετε τον βαθμό του αντιστοίχου ερωτήματος της άσκησης) στις απαντήσεις σας να συμπεριλάβετε και ένα αντίγραφο (printout) του κώδικα που έχετε χρησιμοποιήσει.