ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ, ΗΛΕΚΤΡΟΟΠΤΙΚΗΣ & ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Καθ. Η. Ν. Γλύτσης, Τηλ.: 210-7722479 - *e-mail:* eglytsis@central.ntua.gr - *www:* http://users.ntua.gr/eglytsis/

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ Α (Τμήμα Μ-Π)
ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ No. 2

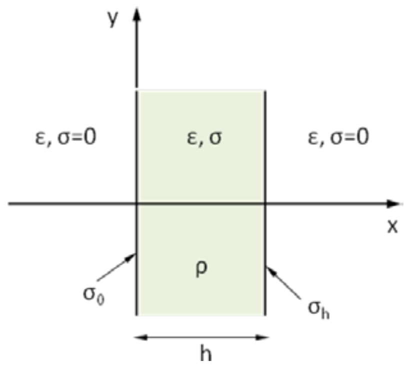
Ασκήσεις για εξάσκηση: No. 1,2,3,4,5,6,7,8

Ασκήσεις για παράδοση: No. 9,10,11

Ημερομηνία Παράδοσης: 19 Απριλίου 2021

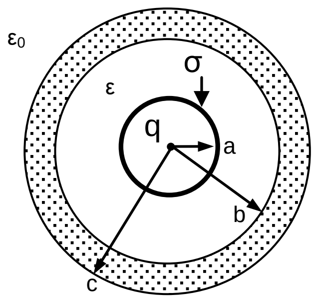
Άσκηση 1 (από το βιβλίο Τσαλαμέγκα-Ρουμελιώτη):

Αγώγιμη πλάκα (άπειρης έκτασης στο επίπεδο yz) πάχους h, φαίνεται σε τομή στο επίπεδο xy. Το υλικό της είναι ομογενές με επιτρεπτότητα ε και ειδική αγωγιμότητα σ. Έξω από την πλάκα υπάρχει ομογενές διηλεκτρικό υλικό με επιτρεπτότητα ε και μηδενική ειδική αγωγιμότητα. Την χρονική στιγμή $t = 0$ υπάρχουν επιφανειακά φορτία με σταθερές πυκνότητες $\sigma_0(t=0)=\sigma_0(0)$ και $\sigma_h(t=0)=\sigma_h(0)$, τοποθετημένα στις επίπεδες επιφάνειες με $x = 0$ και $x= h$, αντίστοιχα, της αγώγιμης πλάκας, καθώς και το χωρικό φορτίο με πυκνότητα $\rho(x,t=0)=\rho(x,0)=\rho_0(x/h)$, τοποθετημένο στο εσωτερικό της πλάκας ($0 < x < h$). (α) Να βρεθούν οι πυκνότητες των ηλεκτρικών φορτίων $\sigma_0(t)$, $\rho(x,t)$, και $\sigma_h(t)$ για $t \geq 0$ καθώς και η πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό της πλάκας για $t \geq 0$. (β) Η κατανομή των φορτίων για $0 \leq x \leq h$, η πυκνότητα ρεύματος και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου (για $0 < x < h$) στη μόνιμη κατάσταση $t \to \infty$.



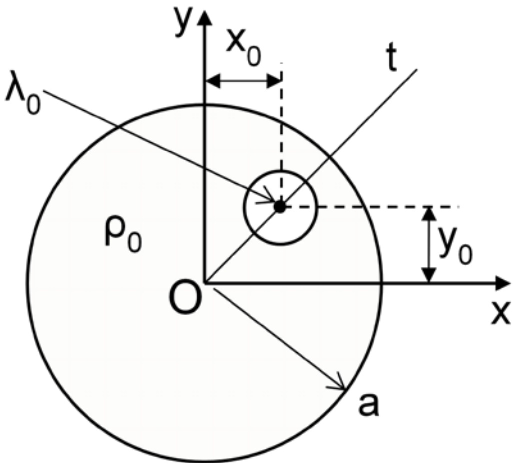
Άσκηση 2:

Σφαιρικό κέλυφος ακτίνας a έχει απειροστό πάχος και επιφανειακό φορτίο με σταθερή επιφανειακή πυκνότητα σ. Στο κέντρο του σφαιρικού κελύφους υπάρχει σημειακό φορτίο q. Το σφαιρικό κέλυφος περικλείεται από ένα μεγαλύτερο ομόκεντρο σφαιρικό κέλυφος με εσωτερική ακτίνα b και εξωτερική ακτίνα c το οποίο φέρει χωρική πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου $\rho(r) = A/r^2$ όπου A μιά γνωστή σταθερά και r η ακτινική απόσταση από το κέντρο της σφαιρικής διαταξης. Η επιτρεπτότητα του χώρου είναι παντού ε_0 εκτός από το διάκενο μεταξύ των δύο κελύφων όπου είναι ε. Να βρεθεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου παντού στο χώρο και να επαληθευθούν οι οριακές συνθήκες όπου χρειάζονται.



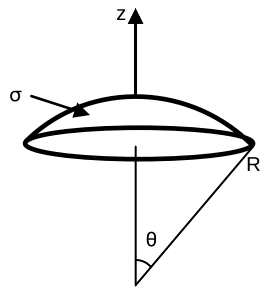
Άσκηση 3:

Κύλινδρος απείρου μήκους με κέντρο τον άξονα z, ακτίνας a, φέρει ομοιόμορφα κατανεμημένο ηλεκτρικό φορτίο με σταθερή χωρική πυκνότητα ρ_0. Κατά μήκος του άξονος z του κυλίνδρου και με κέντρο το σημείο (x_0,y_0) υπάρχει μια κυλινδρική οπή απείρου μήκους στην οποία δεν υπάρχει κανένα ηλεκτρικό φορτίο πλην του κέντρου της όπου υπάρχει μια σταθερή γραμμική πυκνότητα φορτίου λ_0 και αυτή παράλληλη με τον άξονα z. Η οπή αυτή έχει ακτίνα b. Η επιτρεπτότητα παντού στο χώρο είναι ε_0.
(α) Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο παντού στο χώρο. Να εκφρασθεί το ηλεκτρικό πεδίο στο σύστημα αναφοράς *xyz* [δηλαδή οι συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου E_w να εκφραστούν ως $E_w(x,y,z)$ όπου $w = x,y,z$]. (β) Να προσδιοριστεί η συνθήκη ανάμεσα σε ρ_0 και λ_0 ώστε να μηδενίζεται το ηλεκτρικό πεδίο στα σημεία του επιπέδου *Ot* τα οποία είναι έξω από τον κύλινδρο ακτίνας a και για τα οποία $r_T = k(x_0^2 + y_0^2)^{1/2} = kR_0 > a$ όπου k είναι μια σταθερά.



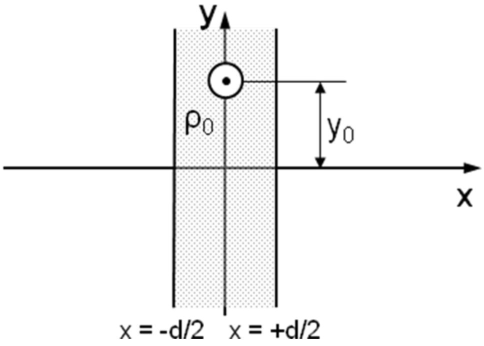
Άσκηση 4:

Τμήμα σφαιρικού κελύφους ακτίνας R, απειροστού πάχους φέρει σταθερή επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ όπως φαίνεται στο σχήμα. Το μέγεθος του σφαιρικού κελύφους ορίζεται από την γωνία θ και την ακτίνα R. Να βρεθεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο κέντρο O της νοητής σφαίρας μέρος της οποίας είναι το σφαιρικό κέλυφος. Να δοθεί το μέτρο της έντασης του ηλεκτρκού πεδίου στο O σαν συνάρτηση της γωνίας θ με σταθερά ακτίνα R. Σε αυτό το πρόβλημα να χρησιμοποιήσετε την αρχή της επαλληλίας.



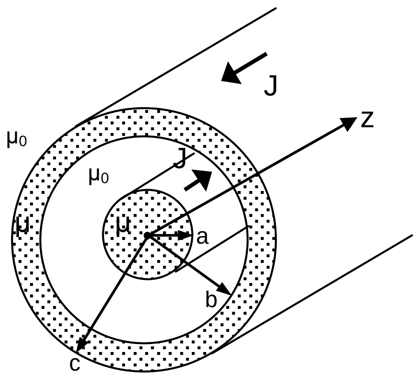
Άσκηση 5:

Πλάκα απείρου έκτασης στο επίπεδο *yz* και πάχους *d* φέρει ομοιόμορφα κατανεμημένο ηλεκτρικό φορτίο με σταθερή χωρική πυκνότητα ρ_0. Κατά μήκος του άξονος z και σε απόσταση y_0 υπάρχει μια κυλινδρική οπή απείρου μήκους στην οποία δεν υπάρχει κανένα ηλεκτρικό φορτίο. Η οπή αυτή έχει ακτίνα a. Στο κέντρο της κυλινδρικής οπής υπάρχει μια σταθερή γραμμική πυκνότητα φορτίου λ_0 και αυτή παράλληλη με τον άξονα z. Η επιτρεπτότητα παντού στο χώρο είναι ε_0.
(α) Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο παντού στο χώρο. Να εκφρασθεί το ηλεκτρικό πεδίο στο σύστημα αναφοράς *xyz* [δηλαδή οι συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου E_w να εκφραστούν ως $E_w(x,y,z)$ όπου $w = x, y, z$]. (β) Να προσδιοριστεί η συνθήκη ανάμεσα σε ρ_0 και λ_0 ώστε να μηδενίζεται το ηλεκτρικό πεδίο στα σημεία του επιπέδου *yz* τα οποία είναι έξω από την κυλινδρική οπή.



Άσκηση 6:

Η κάτωθι κυλινδρική διάταξη αγωγών μπορεί να θεωρηθεί απείρου μήκους. Στον εσωτερικό αγωγό ακτίνας a ρέει ηλεκτρικό ρεύμα προς την διεύθυνση +z με χωρική πυκνότητα ρεύματος $\mathbf{J_a}(r_T) = J_0\, r_T^2/a^2\ \hat{i}_z$ όπου r_T η ακτινική απόσταση από τον άξονα των κυλίνδρων και J_0 γνωστή σταθερά. Το ρεύμα επιστρέφει από το εξωτερικό κυλινδρικό κέλυφος εσωτερικής ακτίνας b και εξωτερικής ακτίνας c. Λόγω του επιδερμικού φαινομένου η χωρική πυκνότητα στο κυλινδρικό κέλυφος είναι $\mathbf{J_b}(r_T) = J_1 \exp(-k\, r_T)\,(-\hat{i}_z)$ όπου k και J_1 σταθερές. Να υπολογισθεί η σταθερά J_1 αν είναι γνωστή η k. Επίσης να υπολογισθεί η ένταση του μαγνητικού πεδίου παντού στο χώρο όπως και η μαγνητική επαγωγή. Η διαπερατότητα είναι παντού μ_0 εκτός από τις περιοχές πού καταλαμβάνονται από τα αγώγιμα υλικά που είναι μ.

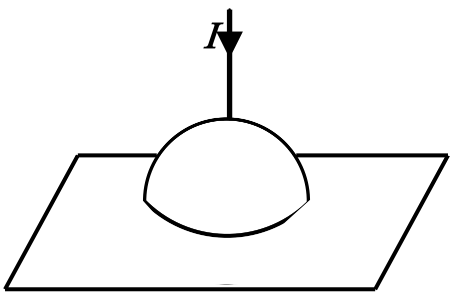


Άσκηση 7:

Νηματοειδές ρεύμα I διαρρέει το θετικό ημιάξονα z με φορά προς τα αρνητικά z όπως φαίνεται στο σχήμα. Το ρεύμα διοχετεύεται ομοιόμορφα στο αγώγιμο ημισφαιρικό κέλυφος ακτίνας R και κατόπιν στο αγώγιμο απέραντο επίπεδο και πάλι ομοιόμορφα και ακτνικά.

(α) Να βρεθεί η ένταση του μαγνητικού πεδίου παντού στο χώρο.

(β) Να βρεθούν οι επιφανειακές πυκνότητες ρεύματος τόσο στο ημισφαιρικό κέλυφος όσο και στο απέραντο επίπεδο.



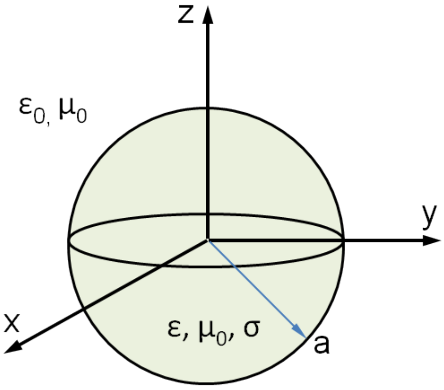
Άσκηση 8:

Μια αγώγιμη σφαίρα ακτίνας a με επιτρεπτότητα ε, διαπερατότητα μ_0, και ειδική αγωγιμότητα σ έχει την χρονική στιγμή $t = 0$ ηλεκτρικό φορτίο Q_0 ομοιόμορφα κατανεμημένο στον όγκο της. Ο υπόλοιπος χώρος έξω από την σφαίρα είναι αέρας με επιτρεπτότητα ε_0 και διαπερατότητα μ_0.

(α) [10%] Να βρεθούν σαν συνάρτηση του χρόνου το ηλεκτρικό πεδίο, καθώς και όποιες πυκνότητες φορτίου και ρεύματος υπάρχουν σε όλο τον χώρο.

(β) [10%] Να δείξετε (χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Maxwell) ότι το μαγνητικό πεδίο παραμένει πάντα μηδενικό για κάθε χρονική στιγμή.

(γ) [10%] Στον κάτωθι πίνακα δίδονται κάποιες ενδεικτικές τιμές της σχετικής επιτρεπτότητας ($\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$) και της ειδικής αγωγιμότητας (σ) διαφόρων υλικών που μπορεί να γεμίσουν την σφαίρα ακτίνας a. Υποθέσετε ότι η ακτίνα a = 25cm και ότι το ηλεκτρικό φορτίο $Q_0 = 1\mu C$. Για κάθε μια από τις περιπτώσεις του πίνακα να βρεθεί ο χρόνος χαλάρωσης του ηλεκτρικού φορτίου (τ) και να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις της επιφανειακής πυκνότητας ηλεκτρικού φορτίου και της χωρικής πυκνότητας ρεύματος μέσα στην σφαίρα (για $r = a^-$) σαν συναρτήσεις του χρόνου για $t \in [0, 5\tau]$. Για τις γραφικές παραστάσεις θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί το λογισμικό MatLab, Excel, ή οποιοδήποτε ανάλογο.



Υλικό	Σχετική Επιτρεπτότητα, $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$	Ειδική Αγωγιμότητα, σ $(1/\Omega m)$
Χώμα (Average Soil)	15	3.6×10^{-2}
Θαλασσινό Νερό (seawater)	80	5
Άμορφος Άνθρακας (amorphous Carbon)	2.7	1.25×10^{3}
Χαλκός (Copper)	1	5.8×10^{7}

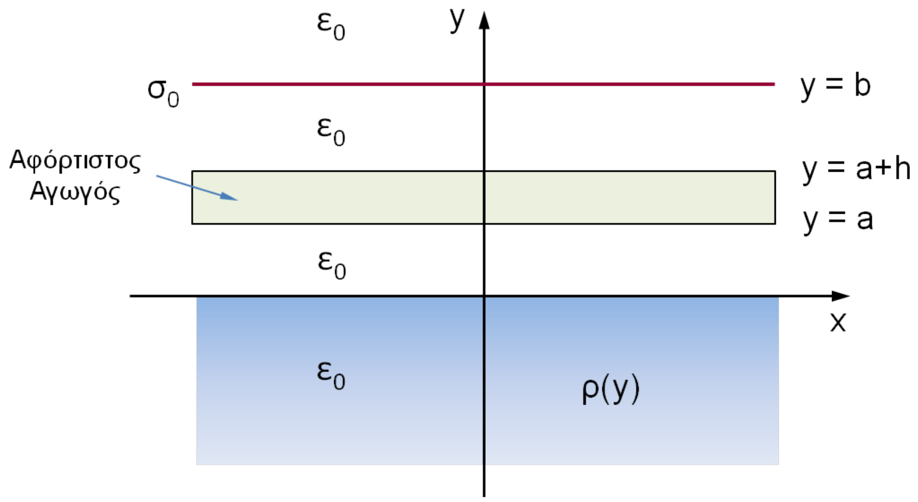
Άσκηση 9: (Αυτή η άσκηση είναι προς παράδοση) [30%]

Δίδεται το κάτωθι σύστημα απέραντων κατανομών ηλεκτρικού φορτίου (ως προς το επίπεδο xz). Ο χώρος έχει παντού επιτρεπτότητα ε_0. Η αγώγιμη πλάκα πάχους h είναι αφόρτιστος αγωγός. Η ημιάπειρη για $y < 0$ πλάκα έχει χωρικό φορτίο $\rho(y) = \rho_0 \exp(-|y|/d)$ (όπου ρ_0 και d γνωστές σταθερές). Επίσης υπάρχει η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ_0 στο επίπεδο $y = b$ $(b > a+h)$

(α) [10%] Να βρεθούν οι επαγόμενες επιφανειακές πυκνότητες φορτίου πάνω στις επιφάνειες του αφόρτιστου αγωγού.

(β) [10%] Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο στο τυχαίο σημείο y του χώρου.

(γ) [10%] **Υποθέσετε ότι ισχύουν τα ακόλουθα αριθμητικά δεδομένα: ρ_0 = 1nC/cm^3, d = 10cm, σ_0 = 1nC/cm^2, a = 5cm, h = 2cm, και b = 12cm.** Να γίνει γραφική παράσταση του ηλεκτρικού πεδίου σαν συνάρτηση της απόστασης y. Να ερμηνευθούν οι όποιες ασυνέχειες εμφανίζονται στο διάγραμμα. Να βρεθεί ποια πρέπει να είναι η τιμή της επιφανειακής πυκνότητας ηλεκτρικού φορτίου $\sigma_0 = \sigma_z$ ώστε το ηλεκτρικό πεδίο να είναι μηδενικό για $0 < y < b$. Να γίνει για αυτήν την τιμή του $\sigma_0 = \sigma_z$ η γραφική παράσταση του ηλεκτρικού πεδίου. Επίσης να γίνει η γραφική παράσταση του ηλεκτρικού πεδίου για $\sigma_0 = 2\sigma_z$. Τι παρατηρείτε σε σχέση με την αρχική γραφική παράσταση όπου $\sigma_0 = \sigma_z$ = 1nC/cm^2?



Άσκηση 10: (Αυτή η άσκηση είναι προς παράδοση) [30%]

Η διάταξη του παράπλευρου σχήματος μπορεί να θεωρηθεί άπειρη κατά μήκος της διεύθυνσης z. Στον χώρο με $y > 0$ υπάρχουν δύο μαγνητικά υλικά με διαπερατότητες μ_1 (για $x, y > 0, \forall z$) και μ_2 (για $x < 0, y > 0, \forall z$), και μ_0 (για $y < 0, \forall x, z$). Η διάταξη είναι σε μόνιμη κατάσταση ($\partial/\partial t = 0$) και οι μοναδικές κατανομές ηλεκτρικού ρεύματος που μπορεί να υπάρχουν είναι:

(1) **<u>Στο επίπεδο $y = 0$:</u>** Επιφανειακή πυκνότητα $\vec{K} = \hat{\imath}_x K_0 \exp(-|x|/a)$ όπου K_0 και a γνωστές σταθερές.

(2) **<u>Στο χώρο $y > 0$:</u>** Χωρική πυκνότητα $\vec{J} = \hat{\imath}_\varphi J(r_T, \phi)$.

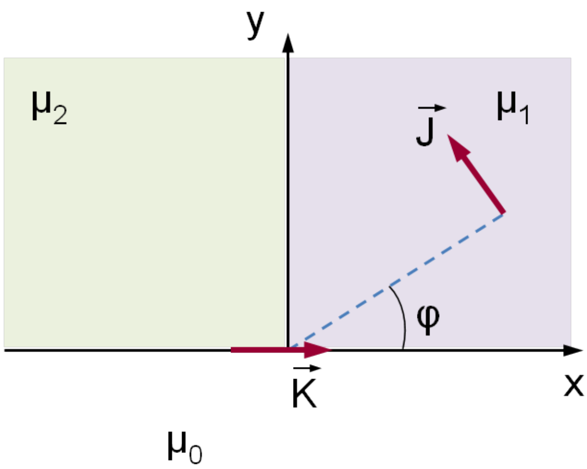
<u>Για τα αριθμητικά/υπολογιστικά ερωτήματα χρησιμοποιήστε $K_0 = 1$ A/m, $a = 1$m, $\mu_1 = \mu_0$, $\mu_2 = 1.5\mu_0$.</u>

(α) [5%] Υπολογίστε την χωρική πυκνότητα ρεύματος $J(r_T,\varphi)$ χρησιμοποιώντας κατάλληλα τον <u>νόμο διατήρησης ηλεκτρικού φορτίου</u>.

(β) [10%] Να γίνει μια γραφική απεικόνιση της χωρικής πυκνότητας ρεύματος στο επίπεδο xy, όπου $-1\text{m} \le x \le 1\text{m}$ και $0\text{m} \le y \le 1\text{m}$. Προτείνω την χρήση των **quiver** και **streamslice** ή ισοδυνάμων. **Προαιρετικά** όσοι ενδιαφέρονται μπορούν να υπολογίσουν τις δυναμικές γραμμές **της χωρικής πυκνότητας ρεύματος** στο επίπεδο xy κάνοντας χρήση της συνάρτησης **streamline**. Μια 2D βελτιωμένη έκδοση της **stream2** (που χρησιμοποιεί η **streamline**) βρίσκεται στο αποθηκευτήριο MatLab Exchange (με το όνομα **mmstream2**) στην ηλεκτρονική διεύθυνση: https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/38860-improved-2-d-streamlines.

(γ) [5%] Να υπολογιστεί παντού το μαγνητικό πεδίο. Μετά να υπολογιστούν και πάλι οι άγνωστες ρευματικές κατανομές χρησιμοποιώντας μόνο το μαγνητικό πεδίο.

(δ) [10%] Να γίνει γραφική παράσταση του μέτρου της μαγνητικής επαγωγής στο επίπεδο xy. Να χρησιμοποιήσετε την συνάρτηση **surface(x,y,B), shading interp** (ή ισοδύναμη) για την χρωματική απεικόνιση του μέτρου της μαγνητικής επαγωγής στο επίπεδο xy. Χρησιμοποιήστε και πάλι $-1\text{m} \le x \le 1\text{m}$ και $0\text{m} \le y \le 1\text{m}$ όπως στο ερώτημα (β).



Άσκηση 11: (Αυτή η άσκηση είναι προς παράδοση) [40%]

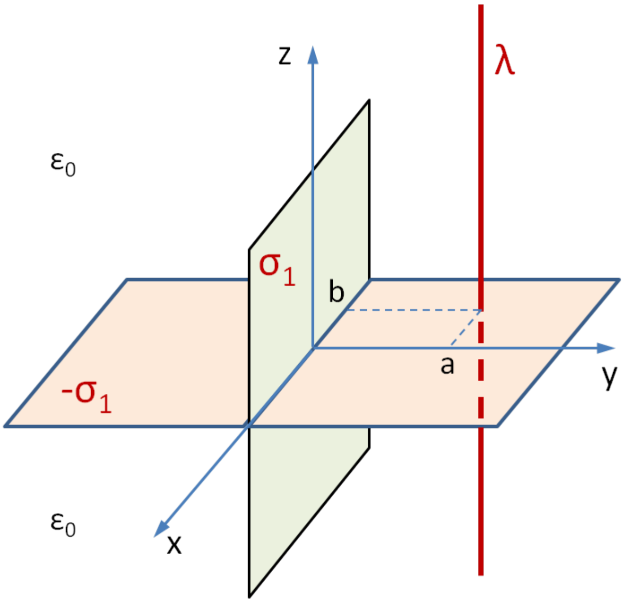
Δύο απέραντες επίπεδες επιφανειακές κατανομές ηλεκτρικού φορτίου με σταθερές επιφανειακές πυκνότητες φορτίου σ_1 και $-\sigma_1$ αντίστοιχα, βρίσκονται τοποθετημένες όπως φαίνεται στο κάτωθι σχήμα. Υπάρχει επίσης μια απέραντη γραμμική κατανομή φορτίου είναι παράλληλη προς τον άξονα z με σταθερή γραμμική πυκνότητα φορτίου λ και διέρχεται από το σημείο $(b, a, 0)$ όπως φαίνεται και στο σχήμα. Υποθέσετε ότι η επιτρεπτότητα είναι παντού ε_0 και ότι οι κατανομές ΔΕΝ αλληλοεπηρεάζονται. Υποθέσετε ότι $\lambda, \sigma_1, a > 0$ & $b < 0$. **Για τα υπολογιστικά ερωτήματα θεωρείστε ότι $\lambda = 2\pi$ C/m, $\sigma_1 = 1$ C/m^2, $a = 1m$, και $b = -1$ m.**

(α) [5%] Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο παντού στο χώρο σαν συνάρτηση των συντεταγμένων (x,y,z) και των σταθερών του προβλήματος.

(β) [10%] Να γίνει μια γραφική απεικόνιση της προβολής του ηλεκτρικού πεδίου στο επίπεδο xy στον καρτεσιανό χώρο $-2m \le x,y \le 2m$ (στο επίπεδο xy). Προτείνω την χρήση των **quiver** και **streamslice** ή ισοδυνάμων (Matlab). Στην χρήση της συνάρτησης **quiver** προτείνω την κανονικοποίηση της προβολής του ηλεκτρικού πεδίου ώστε σε κάθε σημείο (x,y) το μέτρο της προβολής να είναι μοναδιαίο και να φαίνεται καθαρά η διεύθυνση της προβολής του ηλεκτρικού πεδίου.

(γ) [15%] Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων στον χώρο με $y > 0$ όπου το ηλεκτρικό πεδίο είναι παράλληλο στο επίπεδο xz.

(δ) [10%] Να γίνει γραφική παράσταση της τομής του γεωμετρικού τόπου του (γ) πάνω στο επίπεδο xy. Να υπολογιστεί με την συνάρτηση **quiver** το διάνυσμα της προβολής του ηλεκτρικού πεδίου πάνω στο επίπεδο xy για τα σημεία του επιπέδου που ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο και να συμπεριληφθεί στην γραφική παράσταση του γεωμετρικού τόπου.



Σημείωση: Σε όσες από τις ασκήσεις για παράδοση χρησιμοποιήσετε προγράμματα (σε matlab ή σε άλλα υπολογιστικά πακέτα) θα πρέπει **υποχρεωτικά** (για να πάρετε τον βαθμό του αντιστοίχου ερωτήματος της άσκησης) στις απαντήσεις σας να συμπεριλάβετε και ένα αντίγραφο (printout) του κώδικα που έχετε χρησιμοποιήσει.