Industrial Robotics

Prof. Rochdi Merzouki
MRT Program

rochdi.merzouki@polytech-lille.fr

2023-2024

Modeling of Industrial Robotics

- Introduction to Robotics
- Kinematic Modeling
- Differential Modeling
- Dynamic Modeling
- Case Study

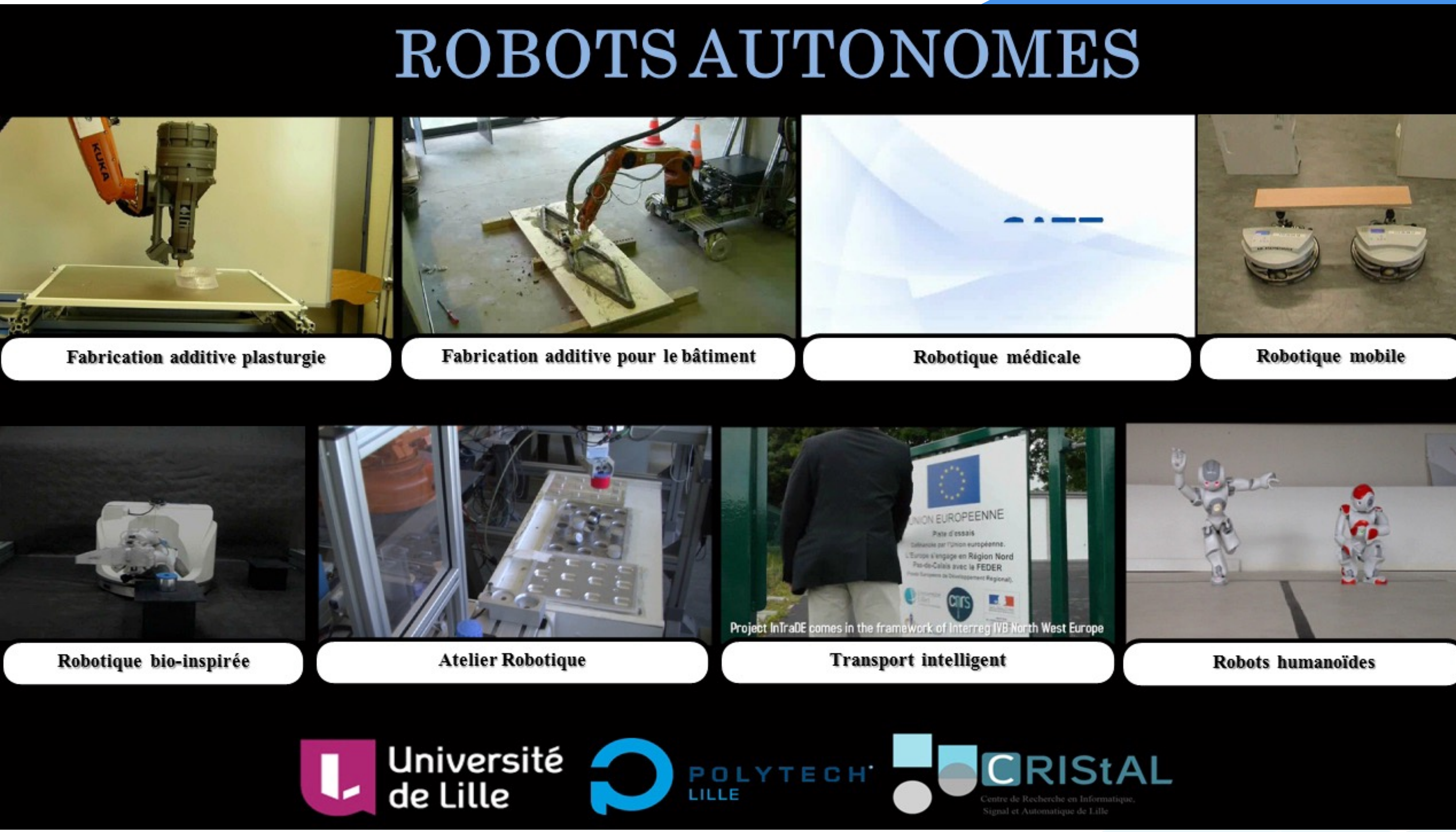
References

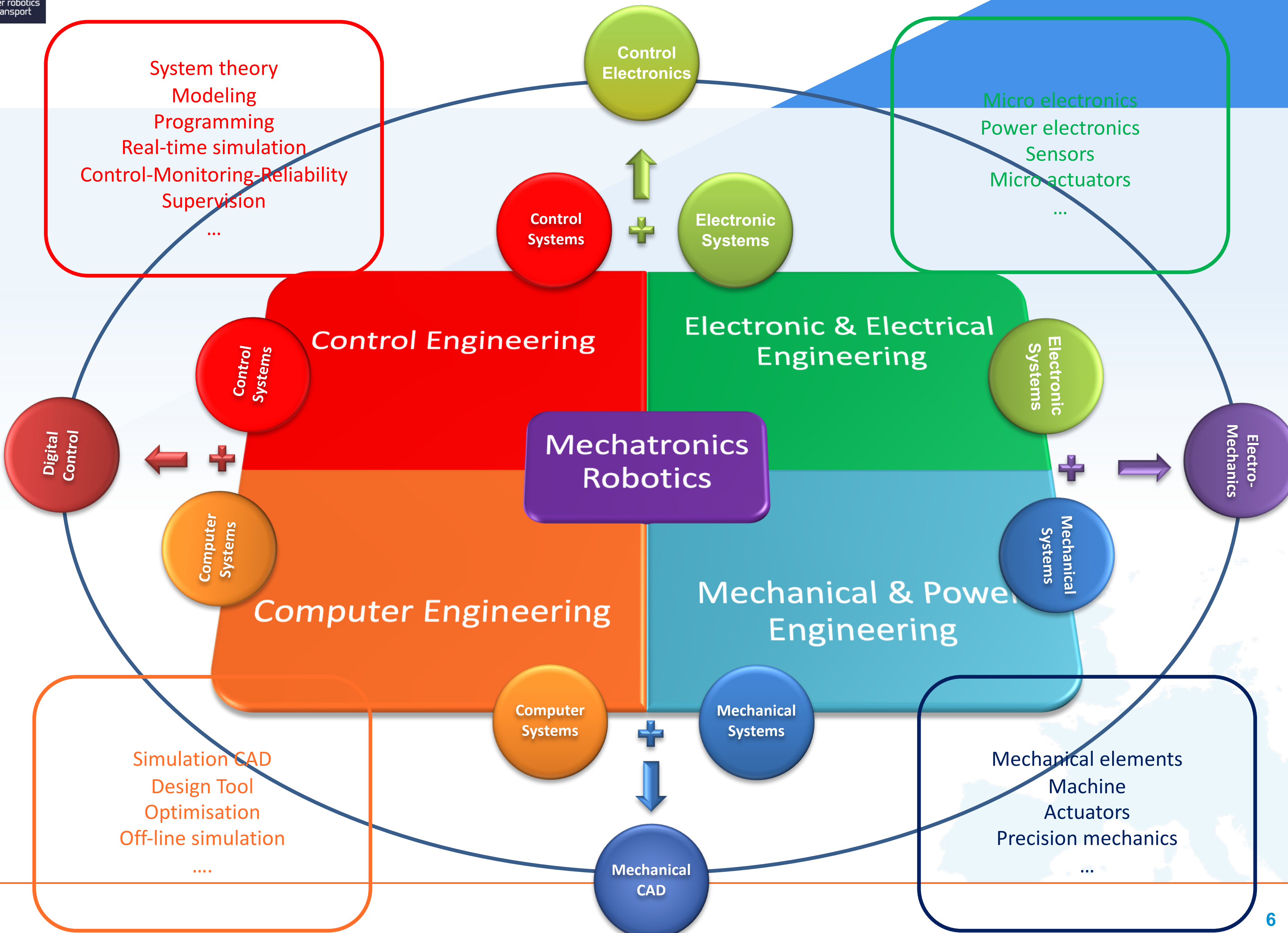
- ► B Siciliano & O. Khatib, ‘ Handbook of Robotics’, ISBN 978-3-540-23957-4, Springer, 2008

- ► R. Merzouki, A. K. Samantaray, P. M. Pathak, B. Ould Bouamama, Intelligent Mechatronic Systems: Modeling, Control and Diagnosis, Hardcover version, ISBN 978-1-4471-4627-8, Springer, 2013

….

Introduction to Inductrial Robotics


ROBOTS AUTONOMES
KUKA
Fabrication additive plasturgie
Fabrication additive pour le bâtiment
Robotique médicale
Robotique mobile
UNION EUROPEENNE
Project InTraDE comes in the framework of Interreg IVB North West Europe
Robotique bio-inspirée
Atelier Robotique
Transport intelligent
Robots humanoïdes
Université de Lille
POLYTECH LILLE
CRIStAL
Centre de Recherche en Informatique, Signal et Automatique de Lille


System theory
Modeling
Programming
Real-time simulation
Control-Monitoring-Reliability
Supervision
...
Control Electronics
Micro electronics
Power electronics
Sensors
Micro actuators
...
Control Systems
Electronic Systems
Control Engineering
Electronic & Electrical Engineering
Control Systems
Electronic Systems
Digital Control
Mechatronics Robotics
Electro-Mechanics
Computer Systems
Mechanical Systems
Computer Engineering
Mechanical & Powe
Engineering
Computer Systems
Mechanical Systems
Simulation CAD
Design Tool
Optimisation
Off-line simulation
....
Mechanical CAD
Mechanical elements
Machine
Actuators
Precision mechanics
...

Integrated Design

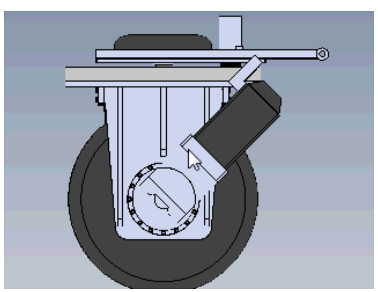
Requirements
Overall functions
values
Costs & milestones

Specifications
Fulfilment of requirements
Limitations
Reliability and safety

DESIGN

System design
Partinioning
Multi-physics component
Word Bong Graph
Power exchange

Modeling & Simulation
Models of components
Kinematic & dynamic behaviors
Simulation based on the requirements



Component Design
Physical component: mechanics, electronics, ...
Mechanical CAD
Controller, HMI,...
Space optimisation

Prototypes
Test benches
Test and Measurements
Algorithms implementation

Mecharonic Components
Mechanics, Electronics, Control, Software (HMI)

Component Tests & Analysis
Hardware in the loop simulation,
Stress Analysis,..

Hardware Integration
Assembling
Coupling
Optimisation

Software Integration
Signal analysis
Filtring
Test of algorithms

System testing
Behavioral tests
Stress testing
Reliability and safety
Monitoring and supervision

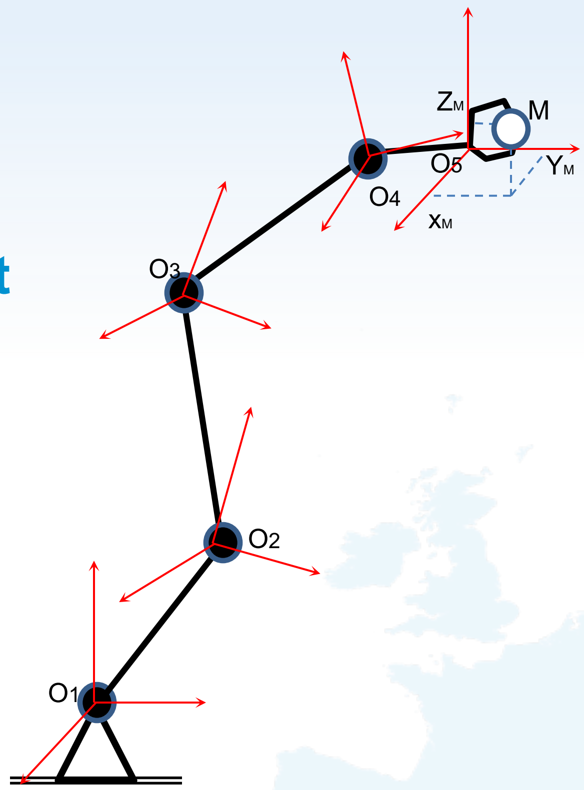
Field Testing
Final product
Norm & certification
Statistics

oduction
nultanous
nning
chnologies
ality control

INTEGRATION

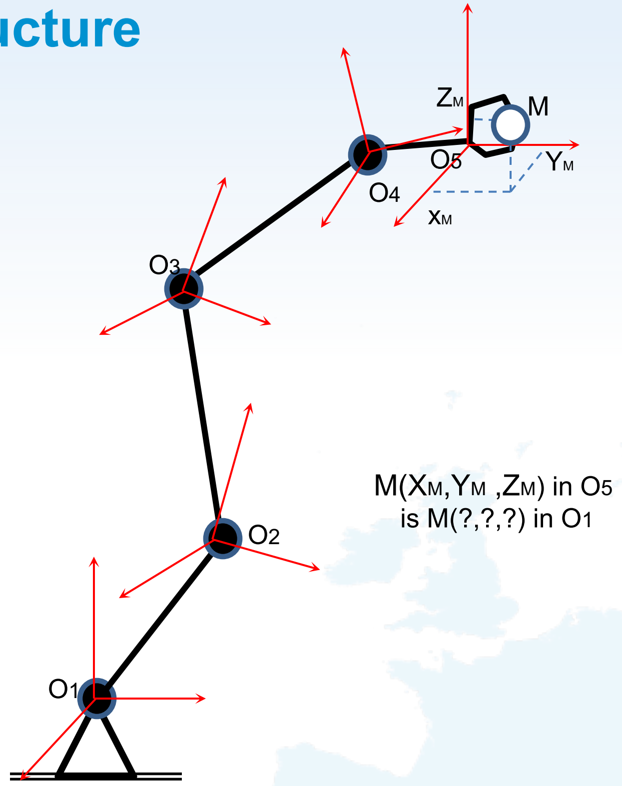
Kinematic Modeling of Rigid Manipulators: Definition

- The name '*Robot*' is originally from the word *robota*, extracted from the Greek literature
  and which means 'work';
- A robot is a system with a memory that can perform
  movements inspired from the nature;
- A manipulator robot is a multi-function manipulator programmed to automatically perform varied, possibly repetitive tasks.



Kinematic Modeling of Rigid Manipulators:

- The rigid articulated system is a tree structure system with single or multiple joints;
- The joints are relatively movable to one another;
- Objective: to lead the end-terminal to a geometric locus imposed by the task

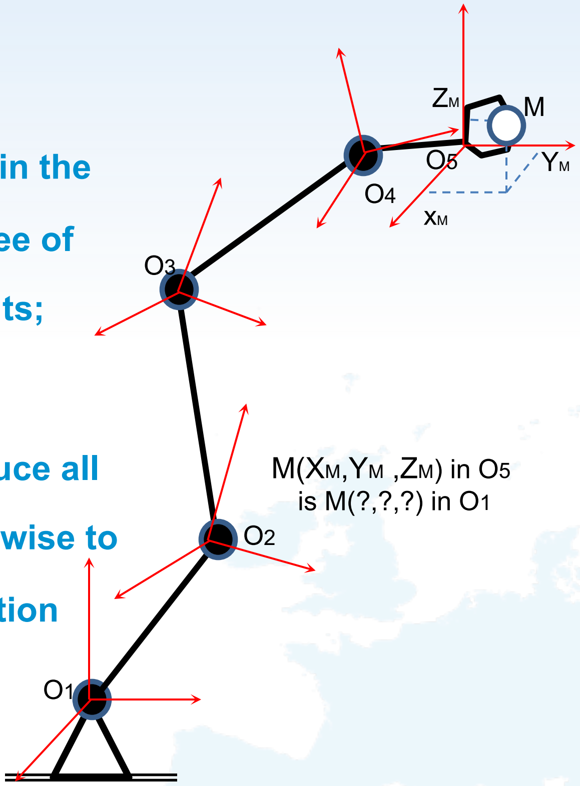


Kinematic Modeling of Rigid Manipulators:

- Each joint of a manipulator rotates or translates with respect to the inertial fixed frame
  (For example a frame fixed to the base of the robot);

- The calculation of the coordinates of the manipulator is expressed in the inertial frame is relatively difficult according to the number of Degree of Freedom (DoF). These identify the number of actions for all the joints;

- In order not to make the calculations more complicated and to deduce all the coordinates in the inertial frame located at the robot basis, it is wise to locate them at their joints, associated to the local frame. The transition from frame to another is guaranteed by transformations.



Kinematic Modeling of Rigid Manipulators:

- **Augmented Transformation Matrix**

$$T = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & d_x \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & d_y \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Homogeneous Vector**

$$p' = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- **Transformation of cordinates from (x1,y1,z1) to (x2,y2,z2)**

$$p'_{x_2 y_2 z_2} = T . p'_{x_1 y_1 z_1}$$

Denavit et Hartenberg METHOD (1955)

- It relates to open Kinematic chains;
- Proper selection of the frame in the links facilitates the calculation of the DH Homogeneous matrices;
- Method quickly expresses information about the end-effector (tool, gripper, effector, wrist…) towards the base or the reverse.
- Example:

Figure .1 : Manipulator Arm ABB 140

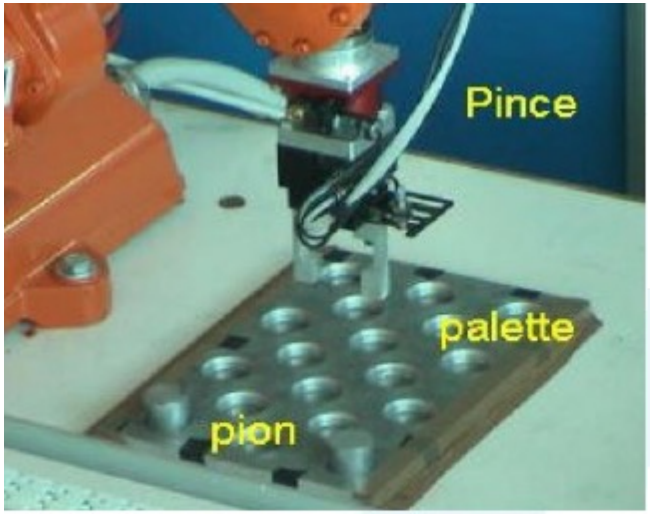


Figure .2 : Effector and wrist of the robot arm ABB 140

Mechanical Joints for Robots

- **Linear joint (Type L joint): For this joint, the relative movement between the input link and the output link is a translational sliding motion, where the axes of the two links are parallel.**

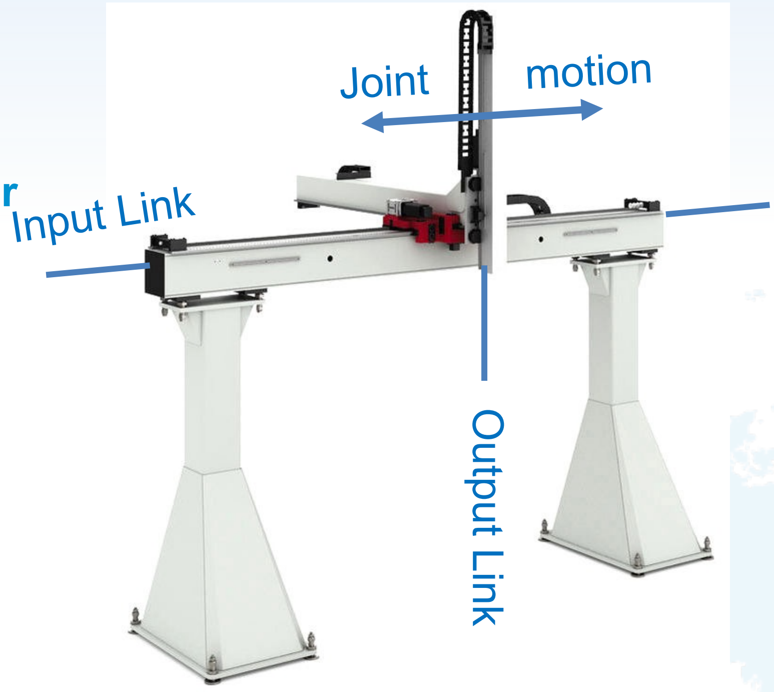
Input Link

Output Link

Joint motion

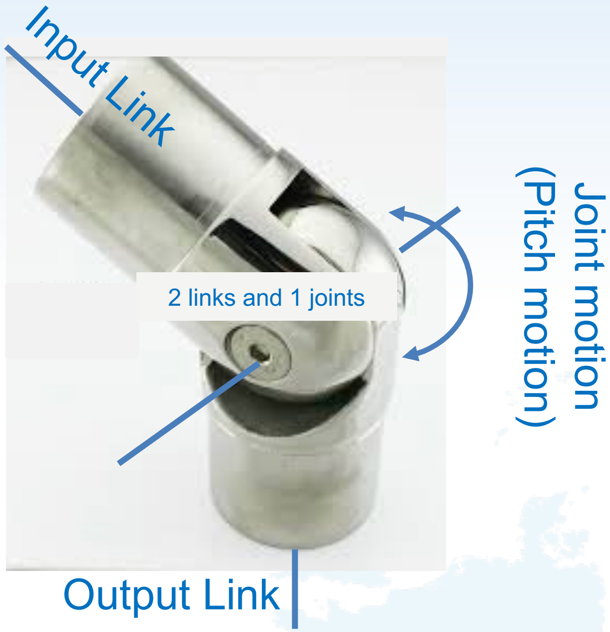
Mechanical Joints for Robots

- **Orthogonal joint (Type O joint): In this configuration, the relative movement between the input link and the output link is a translational sliding motion, but the output link is perpendicular to the input link.**



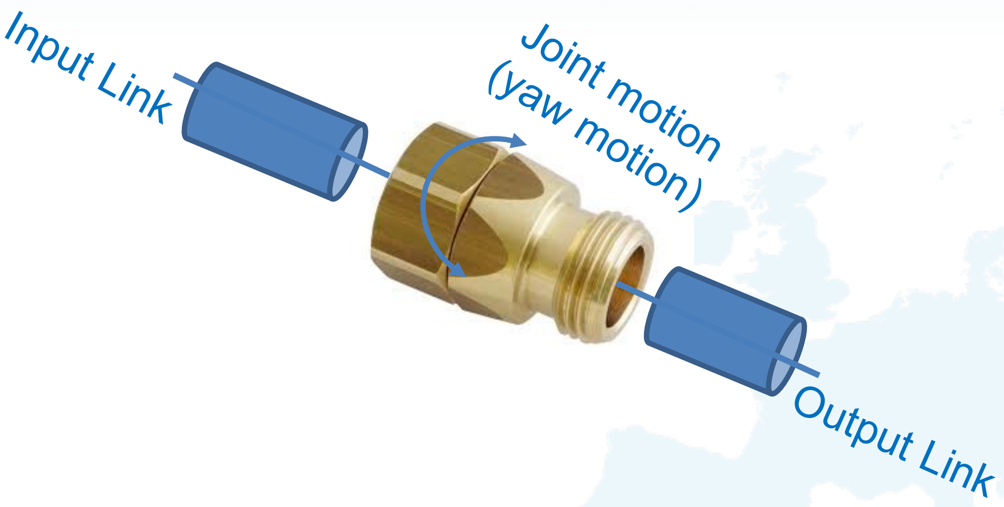
Mechanical Joints for Robots

- **Rotational joint (Type R joint): this provides rotational relative motion, with the axis of rotation perpendicular to the axes of the input and output links.**



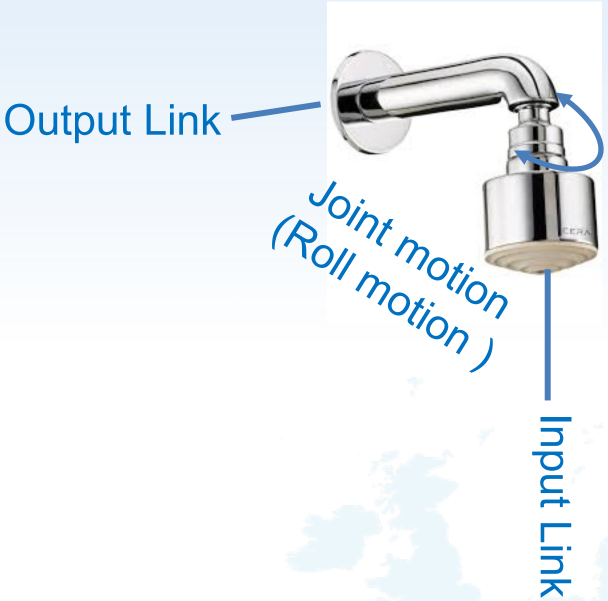
Mechanical Joints for Robots

- **Twisting joint (Type T joint): It provides rotary motion, but the axis of rotation is parallel to the axes of the two links.**



Mechanical Joints for Robots

- **Revolving joint (Type V joint): In this case, the axis of the input link is parallel to the axis of rotation of the joint, and the axis of the output link is perpendicular to the axis of rotation.**



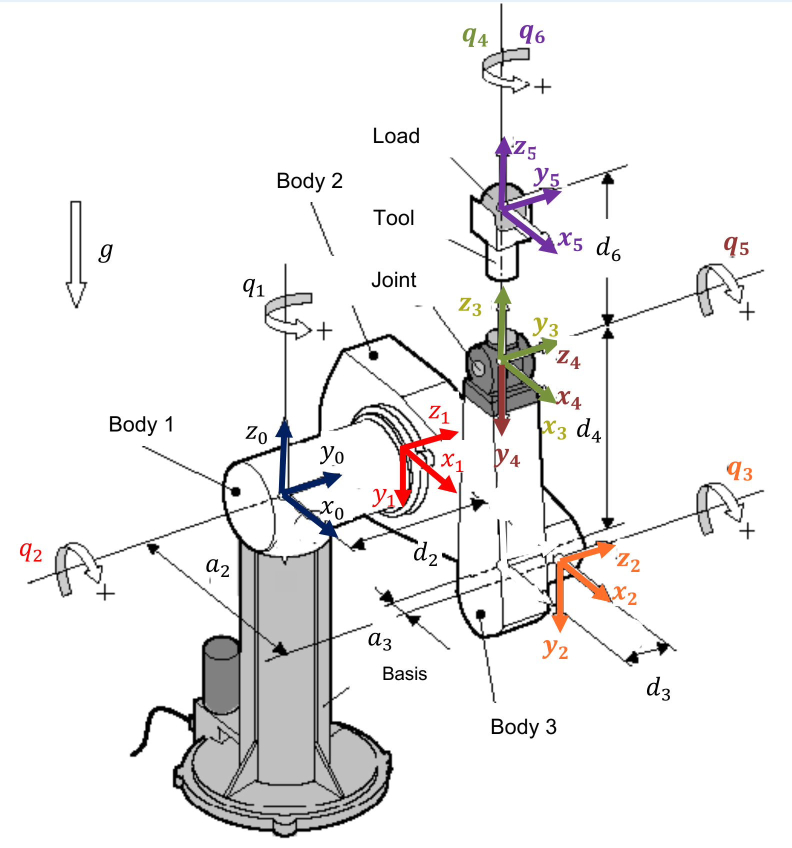
Denavit and Hartemberg Parameters

- **The coordinate axes are defined by the following rules :**

- **Axis $\overrightarrow{z_{i-1}}$ is carried by the axis of the link connecting the body C_{i-1} to the body C_i.**

- **Axis $\overrightarrow{x_i}$ is carried by the common normal to $\overrightarrow{z_{i-1}}$ and $\overrightarrow{z_i}$ is :** $\overrightarrow{x_i} = \overrightarrow{z_{i-1}} \wedge \overrightarrow{z_i}$.

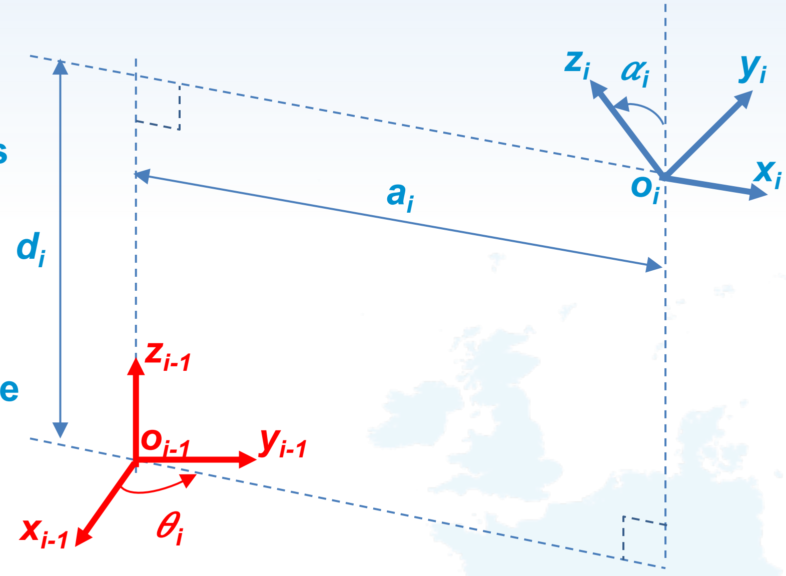
- **Axis $\overrightarrow{y_i}$ is that of the constitutive trihedron of $\overrightarrow{x_i}$ and of $\overrightarrow{z_i}$, is :** $\overrightarrow{y_i} = \overrightarrow{z_i} \wedge \overrightarrow{x_i}$.



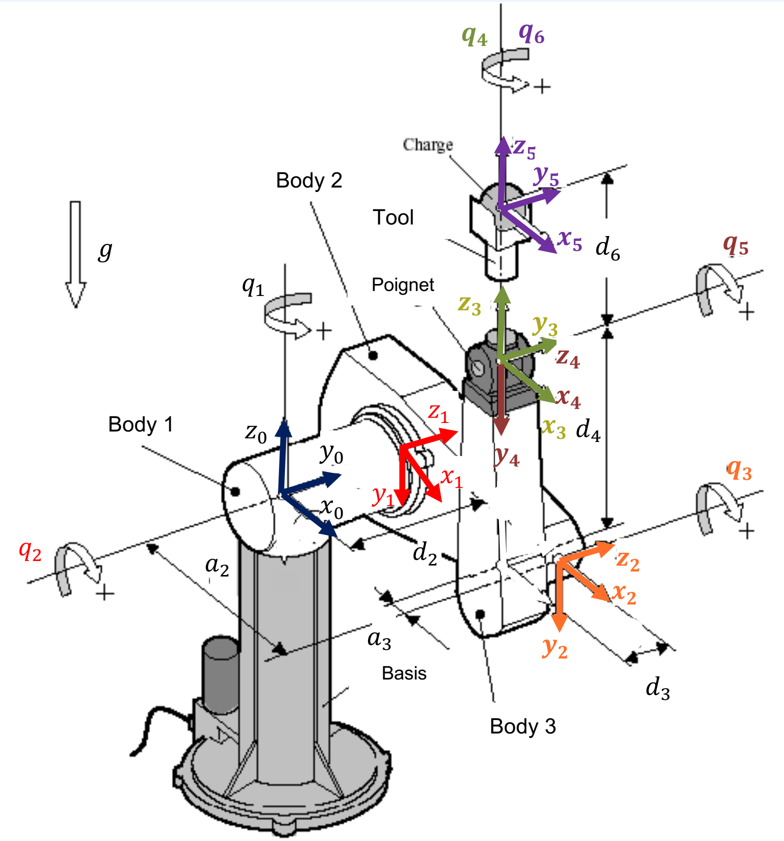
Denavit and Hartemberg Parameters

- Set the four geometric parameters : d_i, q_i, a_i and θ_i for each joint such as:

- d_i is the coordinate of the origin o_{i-1} on the axis z_i. For the Linear Joint (Type L), d_i is variable and for Rotational joint (Type R), d_i is a constant.
- θ_i is the angle obtained by screwing of x_{i-1} to x_i around axis z_{i-1}. For the Linear Joint (Type L), θ_i is constant and for Rotational joint (Type R), θ_i is a variable.
- a_i is a distance between the axis z_i and z_{i-1} measured on the axis x_i, *negative* from its origin, until the intersection with the axis z_{i-1}.
- α_i is the angle between z_i and z_{i-1} obtained by screwing z_{i-1} to z_i around x_i.



Denavit and Hartemberg Parameters



i	α_i (deg)	θ_i (deg)	a_i (m)	d_i(m)
1	-90	q_1	0	d_2
2	0	q_2	a_2	d_3
3	+90	q_3	a_3	d_4
4	-90	q_4	0	0
5	+90	q_5	0	d_6
6	0	q_6	0	0

Denavit and Hartemberg Parameters

- **Writing the different transformation matrices**

1

$$T_{i-1}^{i} = \begin{bmatrix} & R_{i-1}^{i} & & d_{i-1}^{i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2

$$R_{i-1}^{i} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i \sin\theta_i & \sin\alpha_i \sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\alpha_i \cos\theta_i & -\sin\alpha_i \cos\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{bmatrix}$$

3

$$d_{i-1}^{i} = \begin{bmatrix} a_i \cos\theta_i \\ a_i \sin\theta_i \\ d_i \end{bmatrix}$$

4

$$T_{i-1}^{i} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i \sin\theta_i & \sin\alpha_i \sin\theta_i & a_i \cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\alpha_i \cos\theta_i & -\sin\alpha_i \cos\theta_i & a_i \sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

KiNEMATIC Model of the first 3DDL

6

$$q_4 = 0, q_5 = 0 \text{ et } q_6 = 0$$

7

$$p'_{x_0 y_0 z_0} = T_0^3 \cdot p'_{x_3 y_3 z_3}$$

8

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} c_1\, c_{23} & -s_1 & c_1\, s_{23} & c_1\,(a_2\, c_2 + a_3\, c_{23}) - (d_2 + d_3)\, s_1 \\ s_1\, c_{23} & c_1 & s_1\, s_{23} & s_1\,(a_2\, c_2 + a_3\, c_{23}) + (d_2 + d_3)\, c_1 \\ -s_{23} & 0 & c_{23} & -(a_2\, s_2 + a_3\, s_{23}) \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_4 + d_6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

9

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1(a_2\, c_2 + a_3\, c_{23}) - (d_2 + d_3)\, s_1 + (d_4 + d_6)\, c_1\, s_{23} \\ s_1\,(a_2\, c_2 + a_3\, c_{23}) + (d_2 + d_3)\, c_1 + (d_4 + d_6)\, s_1\, s_{23} \\ -(a_2\, s_2 + a_3\, s_{23}) + (d_4 + d_6)\, c_{23} \end{bmatrix}$$

Coordinates of the endpoint with respect to the inertial frame

Example: milling robot (@Pr. Baracco exam, ENSAM 1993)

Body (C_1)
Mass m_1

Inertia $I_1 = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}$

Defined in R_1 at O_1

Body (C_2)
Mass m_2

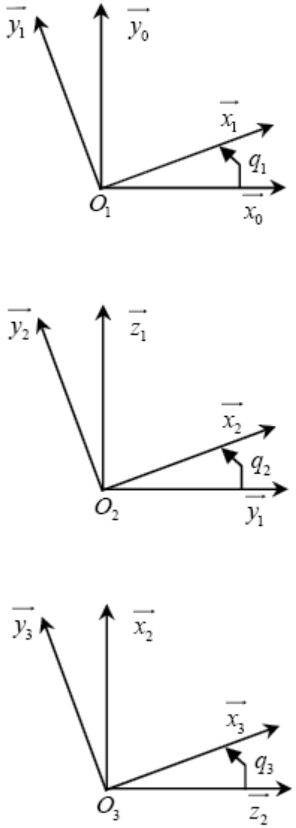
Inertia $I_2 = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}$

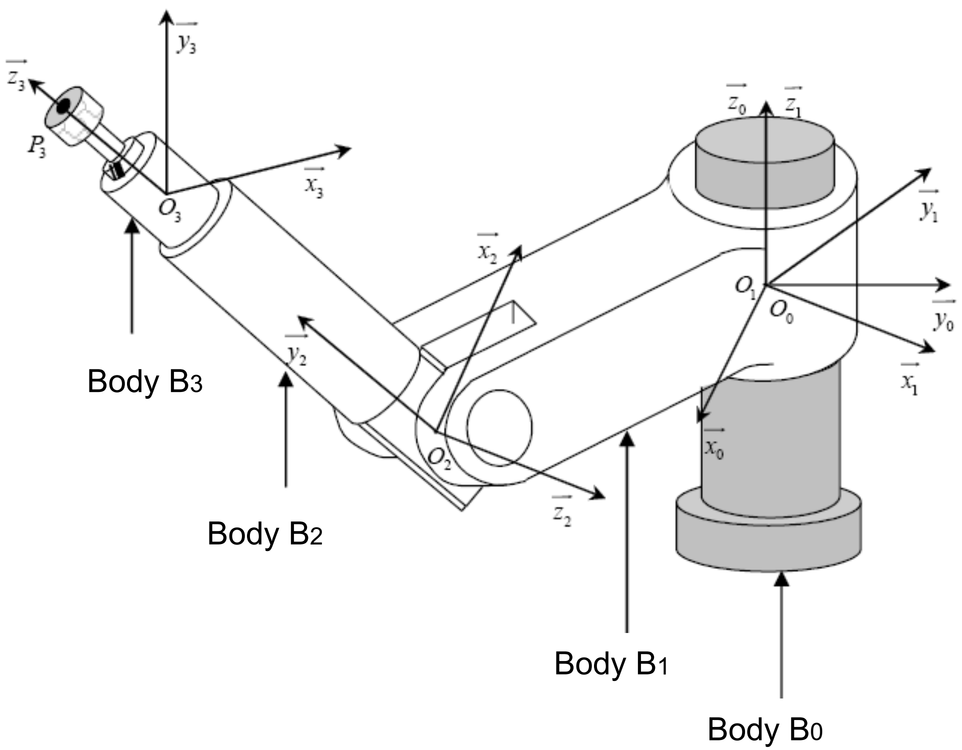
Defined in R_2 at O_2

Body (C_3)
Mass m_3

Inertia $I_3 = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}$

Defined in R_3 at O_3





Differential Modeling

- **A torsor is a mathematical object used in mechanics, mainly the Mechanics of the non deformable solid, in particular in the modeling of interactions between solids and the description of their movements.**

- **A torsor consists of two vector fields:**
  - a uniform field, whose value at any point is named resultant, denoted $\vec{B}$;
  - a field of moments, whose value at a point P is denoted $\overrightarrow{M_P}$; These two fields are connected by the relation of Varignon:

$$\overrightarrow{M_P} = \overrightarrow{M_O} + \vec{B} \wedge \overrightarrow{OP}$$

Differential Modeling

- **To define a torsor, it is therefore sufficient to know its resultant and its moment in a po$i$nt. We then write:**

$$\{\tau\} = \left\{\frac{\vec{B}}{\overrightarrow{M_O}}\right\}_{\mathbf{0}}$$

- **Thus, a kinematic torsor τ_k is composed of the instantaneous rotation vector $\vec{\omega}$ and the linear velocity $\vec{V}$such that:**

$$\{\tau_k\} = \left\{\begin{matrix}\vec{\omega} \\ \vec{V}\end{matrix}\right\}_{\mathbf{0}}$$

Differential Modeling

- **Thus, the direct kinematic model is the first time derivative**

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\Omega} = \frac{df}{dt}(\theta_i(t)) = \underbrace{\frac{df}{d\theta_i}}_{\boldsymbol{J}(\theta_i)}.\, d(\theta_i(t))/dt$$

Jacobean Matrix

Case Study of Robot Tool Holder[1]

The robot studied is schematized by a set of solids represented by Figure 1. The body 0, referenced by $(C0)$ is indicated by the Galilean frame $R_0 = (O_0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$. The body 1 $(C1)$ has a rotation movement around the axis $(O_0, \overrightarrow{z_0})$ knowing that its attached frame is $R_1 = (O_1, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ The relative position of $(C1)$ comparing to $(C0)$ is $q_1 = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1})$. The body $(C2)$ has a rotation movement around the axis $(O_2, \overrightarrow{z_2})$, collinear with the axis $(O_1, \overrightarrow{z_1})$ with: $\overrightarrow{O_1O_2} = -a\overrightarrow{y_1}$. The frame attached to this body is $R_2 = (O_2, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$. The relative position of $(C2)$ comparing to $(C1)$ is $q_2 = (\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{x_2})$. The body $(C3)$ generates a translation movement according to $(C2)$.of axis $(O_2, \overrightarrow{y_2})$, defined by: $\overrightarrow{O_2O_3} = q_4\overrightarrow{y_2}$ and a rotation movement around $(O_2, \overrightarrow{y_2})$ with the angle $q_3 = (\overrightarrow{z_2}, \overrightarrow{x_3})$. The attached frame to this body is $R_3 = (O_3, \overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$. The mass, inertia and geometric characteristics of the robot are indicated in the Figure 1. The point P_3 belongs the tool such as: $\overrightarrow{O_3P_3} = b\overrightarrow{z_3}$. The objective of this exercise is to study the geometric, the kinematic and the dynamic models of the robot.

Geometric Modeling (Kinematic of Position)

Question1: position of point P_3

Express in the Frame $R_0 = (O_0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ the vector $\overrightarrow{O_0P_3}$

Question2: position of point P_3

Express in the Frame $R_0 = (O_0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ the vector $\overrightarrow{O_0P_3}$ after applying the Deanavit-Hartenberg method.

Question3: Inverse Geometric Model

We want that the point P_3 reachs a particular position in the space, identified by the following vector: $\overrightarrow{O_0P_3} = l\overrightarrow{x_0} + m\overrightarrow{y_0} + n\overrightarrow{z_0}$, where $l, m, n \in IR$.

Determine the parameter combination of (q_1, q_2, q_3, q_4) , solutions of the inverse model.

[1] Exam of Robotics 92-93 UMPC-ENSAM, A. Barraco

Kinematic Modeling (Velocity)

Question: Rotation Velocity

- Give the expression of the rotational velocity for each body $\vec{\omega}(i/0), i \in [1;3]$, expressed for $\vec{\omega}(1/0)$ in $R_1 = (O_1, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$, for $\vec{\omega}(2/0)$ in $R_2 = (O_2, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$ and for $\vec{\omega}(3/0)$ in $R_2 = (O_2, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$ and in $R_3 = (O_3, \overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$.
- Give the expression of the Galilean derivative of basis vectors of $R_2 = (O_2, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$

Question: Velocities and Accelerations

- Give the expression of Galilean velocities at points O_1, O_2, O_3, P_3, expressed in $R_2 = (O_2, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$.
- Give the expression of Galilean acceleration at P_3, expressed in $R_2 = (O_2, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$
- Deduce the forward kinematic model of the robot.

Question: Inverse Kinematics

If $b + q_4 \neq 0$, can you find possible combinations of $(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dot{q}_4)$ to resolve:

$\vec{V}(P_3, 3/0) = \vec{u}$

Question: Kinetics

- Give the expressions of the kinetic moments $\vec{K}(O_1, 1/0), \vec{K}(O_2, 2/0), \vec{K}(O_3, 3/0)$, expressed for the first in $R_1 = (O_1, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ and the two others in $R_2 = (O_2, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$
- Give the expressions of the dynamic moments $\vec{H}(O_2, 2/0), \vec{H}(O_3, 3/0)$ expressed in $R_2 = (O_2, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$
- Calculate the kinetic energy of each body$T_i(\ i/0), i \in [1;3]$

Dynamic Modeling

Each joint is motorized. Between the bodies $(C0)$ and $(C1)$ a motor applies a torque $\overrightarrow{\tau_1} = \tau_1 \overrightarrow{z_1}$ and on the body $(C0)$ an opposite moment. Between the bodies $(C1)$ and $(C2)$ a motor applies a torque $\overrightarrow{\tau_2} = \tau_2 \overrightarrow{z_2}$ and on the body $(C1)$ an opposite moment. Between the bodies $(C2)$ and $(C3)$ a motor applies a torque $\overrightarrow{\tau_3} = \tau_3 \overrightarrow{z_3}$ and an effort $\overrightarrow{t_3} = t_3 \overrightarrow{z_3}$, and on the body $(C2)$ applies opposite moment and effort.

We consider in P_3 a torsor $\overrightarrow{F_3}; \overrightarrow{M_3}(P_3)$ representing the external actions on the tool.

Question: Power of the external efforts.

- Calculate the power P_{mot} of motors efforts
- Give the expression of the power P_{ext} of external efforts in P_3, in terms of $\vec{V}(P_3), \vec{\omega}(3/0)$.

Question: Newton-Euler Equations

- Write equation of Newton for the body (C_3), in the direction of $\overrightarrow{z_3}$
- Write equation of Euler for the body (C_3), in the direction of $\overrightarrow{z_3}$

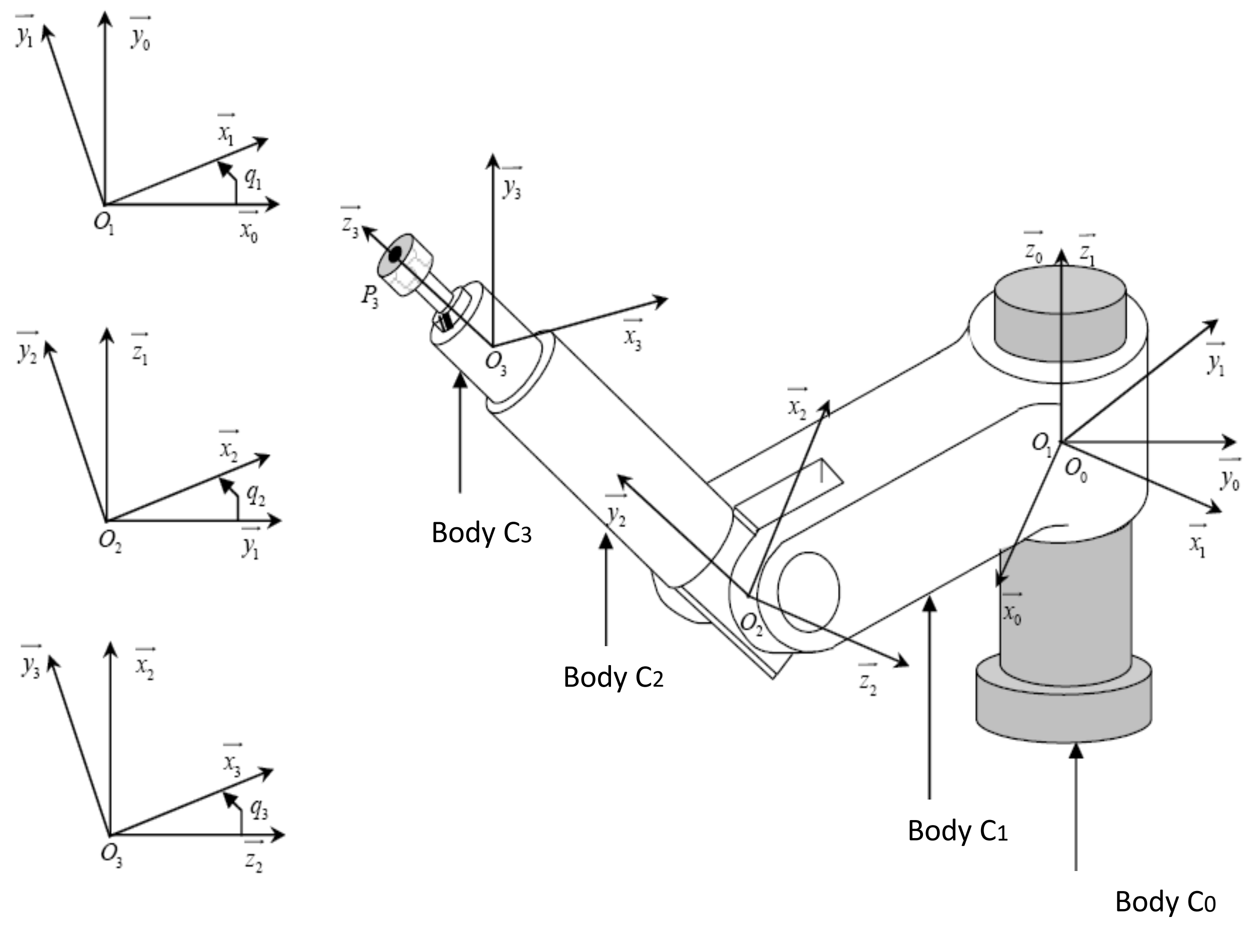
Question: Euler-Lagrange Formalism

Based on the expression of the kinetic energy and by using the Lagrange formalism, find the two dynamic equations calculated previously.

$$Body\ (C_1), mass\ m_1;\ Body\ (C_2), mass\ m_2;\ Body\ (C_3), mass\ m_3$$

$$I_1 = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}, I_2 = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}, I_3 = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}$$

$$defined\ at\ R_1 in O_1;\ defined\ at\ R_2 in O_2\ ;\ defined\ at\ R_3 in O_3$$



Chapitre 1

Modélisation des chaînes cinématiques ouvertes

1.1 Introduction

Un système articulé rigide à chaîne cinématique ouverte, est concaténation de structures articulés simples ou multiples, ayant des liaisons mobiles avec ou sans actionnement, les unes par rapport aux autres. Ce système a pour objectif de faire converger le centre de l'outil, placée à l'organe terminal vers un lieu géométrique imposé par la tâche [Madani02].

Généralement, un robot manipulateur est considéré comme un système articulé rigide. L'appellation robot dérivée du mot *robota*, extrait de la littérature grecque et qui signifie travail. Dans la littérature, différentes définitions sont attribuées au robot telles que :

Définition 1.1 *Un robot est un système versatile doté d'une mémoire et pouvant reproduire des mouvements comme ceux d'un opérateur humain*[1]*;*

Définition 1.2 *Un robot est un manipulateur à multiple fonctions programmées pour réaliser de façon automatique des tâches répétitives*[2]*.*

La synthèse de la commande ou du diagnostic du robot nécessite la connaissance

[1]JIRA (Japon Industrial Robot Association)
[2]RIA (Robot Institute of America)

des relations entre ses grandeurs d'entrées[3] et de sorties[4]. L'ensemble de ces équations constitue le modèle mathématique du robot. Si les équations sont extraites de la physique, le modèle est appelé modèle de connaissance, et si ces équations découlent des observations disponibles sur le système, le modèle s'appelle modèle de représentation.

1.2 Modélisation Géométrique

Un robot manipulateur peut être considéré comme une chaîne de liaisons interconnectées par des articulations de types charnières ou glissières. Chaque liaison est associée à un repère. En calculant les matrices de passages[5], normalisées en ordre quatre, nous pouvons déduire les relations géométriques entre les différents repères articulaires.et par rapport au repère de la base appelé aussi repère d'inertie.

1.2.1 Coordonnées homogènes d'un vecteur

Chaque liaison d'un manipulateur fait des rotations ou des translations par rapport au référentiel de la base. Le calcul des coordonnées des liaisons du manipulateur exprimées dans le référentiel de la base est relativement difficile. Cette difficulté augmente suivant l'ordre de la liaison[6] jusqu'à l'élément terminal[7]. Pour ne pas alourdir les calculs et ramener toutes les données géométriques au repère d'inertie de la base, il est judicieux de les localiser à leurs articulations correspondantes, et situer chaque liaison à son propre référentiel. Le passage d'un référentiel à un autre est garanti par des transformations. Lorsqu'on a uniquement des rotations, nous nous contentons d'établir une matrice de transformation R de troisième ordre, et lorsqu'il existe une translation autour d'un point, nous devons calculer une matrice de transformation de quatrième. Dans ce cas le vecteur de position p sera augmenté par une quatrième composante pour avoir un vecteur de position p' exprimé par ses coordonnées homogènes:

[3] entrées commandables

[4] mesures

[5] Matrices de transformation d'un repère i à un repère i+1

[6] nombre de degrés de liberté

[7] préhenseur ou effecteur ou outil

$$p = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

Le vecteur homogène correspondant est:

$$p^{'} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matrice augmentée de transformation a la forme suivante:

$$T = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & d_x \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & d_y \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

avec R la matrice de rotation et d vecteur de translation qui comporte les coordonnées du repère destination dans le repère source. Si T est la matrice de transformation du référentiel (x_1, y_1, z_1) vers le référentiel (x_2, y_2, z_2), alors :

$$p^{'}_{x_2 y_2 z_2} = T.p^{'}_{x_1 y_1 z_1}$$

1.2.2 Paramètres de Denavit et Hartenberg

La convention de Denavit et Hartenberg (DH) [Hartenberg55] est une méthode systématique. Elle permet le passage entre les articulations adjacentes d'un système robotique. Elle concerne les chaînes cinématiques ouvertes où l'articulation possède uniquement un degré de liberté, et les surfaces adjacentes restent en contact. Pour cet aspect, l'utilisation des charnières ou des glissières est indispensable. Le choix adéquat des repères dans les liaisons facilite le calcul des matrices homogènes de DH et permet d'exprimer rapidement des informations de l'élément terminal dans la base ou inversement.

Les étapes à suivre pour le calcul de ces paramètres géométriques sont les suivantes:

1. Numérotation des segments constitutifs du robot manipulateur de la base vers l'élément terminal. On associe le référentiel zéro à la base et l'ordre n à l'élément terminal;
2. Définition des axes principaux de chaque segment :

   - Si $z_i$et z_{i-1} ne se coupent pas et on choisit $x_i$de manière à être la parallèle avec l'axe perpendiculaire à z_i et z_{i-1} .

   - Si $z_i$et z_{i-1} sont colinéaires on choisit x_i dans le plan perpendiculaire à z_{i-1}.

3. Fixer les quatre paramètres géométriques: d_i, q_i, a_i et θ_i de la Figure (1.1) pour chaque articulation tel que:

   - d_i est la coordonnée de l'origine $o_i$sur l'axe z_{i-1}. Pour une glissière d_i est une variable et pour une charnière $d_i$est une constante.

   - θ_i est l'angle que l'on obtient par vissage de x_{i-1} vers x_i autour de l'axe z_{i-1}. Pour une glissière q_i est une constante et pour une charnière q_i est une variable.

   - a_i est la distance entre les axes z_i et z_{i-1} mesurée sur l'axe x_i négatif à partir de son origine jusqu'à l'intersection avec l'axe z_{i-1}.

   - α_i est l'angle entre z_i et z_{i-1} obtenu en vissant z_{i-1}vers z_i autour de x_i.

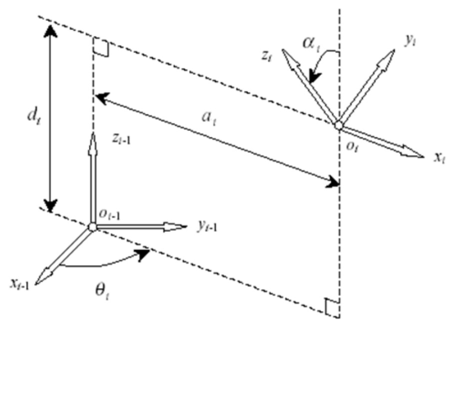


Figure 1.1: Paramètres géométriques de Denavit et Hartenberg

La Figure (1.1) décrit les paramètres géométriques de Denavit et Hartenberg entre les deux repères successifs $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ et (x_i, y_i, z_i).

Ainsi, la matrice homogène DH de déplacement regroupant la rotation et la translation est formée. La partie supérieure gauche définit la matrice de rotation R_{i-1}^{i}, et le vecteur droit pour la translation d_{i-1}^{i}.

$$T_{i-1}^{i} = \begin{bmatrix} R_{i-1}^{i} & d_{i-1}^{i} \\ 0 \;\; 0 \;\; 0 & 1 \end{bmatrix}$$

avec

$$R_{i-1}^{i} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i(t)) & -\cos\alpha_i \sin(\theta_i(t)) & \sin\alpha_i \sin(\theta_i(t)) \\ \sin(\theta_i(t)) & \cos\alpha_i \cos(\theta_i(t)) & -\sin\alpha_i \cos(\theta_i(t)) \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{bmatrix}$$

et

$$d_{i-1}^{i} = \begin{bmatrix} a_i \cos\theta_i \\ a_i \sin\theta_i \\ d_i \end{bmatrix}$$

Enfin, la matrice de transformation homogène de Denavit et Hartenberg est la suivante:

$$T_{i-1}^{i} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i(t)) & -\cos\alpha_i \sin(\theta_i(t)) & \sin\alpha_i \sin(\theta_i(t)) & a_i \cos(\theta_i(t)) \\ \sin(\theta_i(t)) & \cos\alpha_i \cos(\theta_i(t)) & -\sin\alpha_i \cos(\theta_i(t)) & a_i \sin(\theta_i(t)) \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.2.2.1 Exemple de modélisation géométrique direct

La modélisation étudiée dans cette section concerne les modèles géométrique et cinématique du système robotique proposé dans le cadre de ce cours est un robot manipulateur de type KUKA KR6 représenté par la Figure (1.2). Ces deux modèles directs servent à la fois pour la conception, la commande et la supervision, où ils sont intégrés directement après validation sur le simulateur virtuel Figure (1.4). Ils permettent de reconstruire les positions et les vitesses linéaires du centre de l'outil à partir des grandeurs physiques mesurables sur le bras manipulateur et le préhenseur [Coelen12].

Le système robotique étudié est composé d'un bras manipulateur à 6 degrés de liberté, portant le préhenseur à 1 degré de liberté de la Figure (1.2). Il est schématisé par un ensemble de solides rigides représenté par la Figure (1.3). Dans le développement suivant, on note: $i \in [1;7]$ le numéro de la liaison motorisée, α_i est l'angle réalisé entre z_{i-1} et z_i, θ_i est l'angle réalisé entre x_{i-1} et x_i, a_i est la distance perpendiculaire entre $(\overrightarrow{o_i z_{i-1}})$ et le plan formé par $(\overrightarrow{o_i y_i}, \overrightarrow{o_i z_i})$, tandis que d_i est la distance perpendiculaire entre le plan formé par $(\overrightarrow{o_{i-1} x_{i-1}}, \overrightarrow{o_{i-1} y_{i-1}})$ et le vecteur $(\overrightarrow{o_i x_i})$.

Le corps 0 de référence (C_0) est repéré par le repère $R_0(O_0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ de type galiléen. Le corps 1 (C_1) a un mouvement de rotation autour de l'axe $(O_0, \overrightarrow{z_0})$, sachant que le repère lié à ce corps est $R_1(O_1, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$. La position relative de (C_1) par rapport à (C_0) est $\theta_1 = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1})$ avec $\overrightarrow{O_0 O_1} = a_1 \overrightarrow{x_0} + b_1 \overrightarrow{z_0}$. Le corps (C_2) de repère $R_2(O_2, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$ a un mouvement de rotation autour de l'axe $(O_2, \overrightarrow{z_2})$, colinéaire avec l'axe $(O_1, \overrightarrow{y_1})$ avec $\overrightarrow{O_1 O_2} = a_2 \overrightarrow{z_1}$. Le corps (C_3) réalise un mouvement de rotation autour de l'axe $(O_3, \overrightarrow{z_3})$, colinéaire avec l'axe $(O_2, \overrightarrow{z_2})$ avec $\overrightarrow{O_2 O_3} = a_3 \overrightarrow{x_2}$, dont le repère associé est $R_3(O_3, \overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$. La position relative de (C_3) par rapport à (C_2) est $\theta_3 = (\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3})$. Le corps (C_4) a un mouvement de rotation autour de l'axe $(O_4, \overrightarrow{z_4})$, colinéaire avec l'axe $(O_3, \overrightarrow{x_3})$ où $\overrightarrow{O_3 O_4} = b_4 \overrightarrow{x_3}$, avec une position relative $\theta_4 = (\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{x_4})$. Le corps (C_5) effectue un mouvement de rotation autour de l'axe $(O_5, \overrightarrow{z_5})$, colinéaire avec l'axe $(O_4, \overrightarrow{z_4})$ de repère $R_5(O_5, \overrightarrow{x_5}, \overrightarrow{y_5}, \overrightarrow{z_5})$. La position relative de (C_5) par rapport à (C_4) est $\theta_5 = (\overrightarrow{x_4}, \overrightarrow{x_5})$. Le corps (C_7) réalise par rapport à (C_6) un mouvement de translation d'axe $(O_6, \overrightarrow{z_6})$ défini par $\overrightarrow{O_6 O_7} = b_7 \overrightarrow{z_6}$ et un mouvement de rotation de (C_6) par rapport à (C_5) autour de $(O_6, \overrightarrow{z_6})$ avec un angle $\theta_6 = (\overrightarrow{x_5}, \overrightarrow{x_6})$. Le repère lié à ce corps est $R_6(O_6, \overrightarrow{x_6}, \overrightarrow{y_6}, \overrightarrow{z_6})$ qui représente le premier centre de l'outil, positionné à l'extrémité de l'aiguille. Ce centre d'outil est contrôlé par le robot manipulateur afin d'atteindre dans l'espace les cibles géométriques. Enfin, le repère lié au corps (C_7) est $R_7(O_7, \overrightarrow{x_7}, \overrightarrow{y_7}, \overrightarrow{z_7})$, constituant le second centre de l'outil, attaché au préhenseur. Les caractéristiques géométriques sont indiquées dans les Figures (1.2) et (1.3).

La matrice de Deanavit et Hartenberg (DH) [Hartenberg55] décrivant les paramètres du modèle géométrique du système robotique, composé du bras manipulateur et du

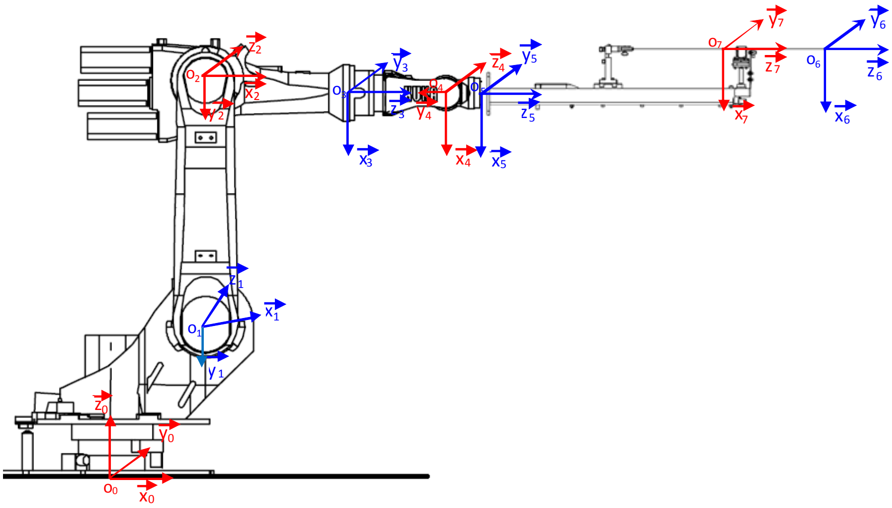


Figure 1.2: Localisation des degrés de liberté du système robotisé

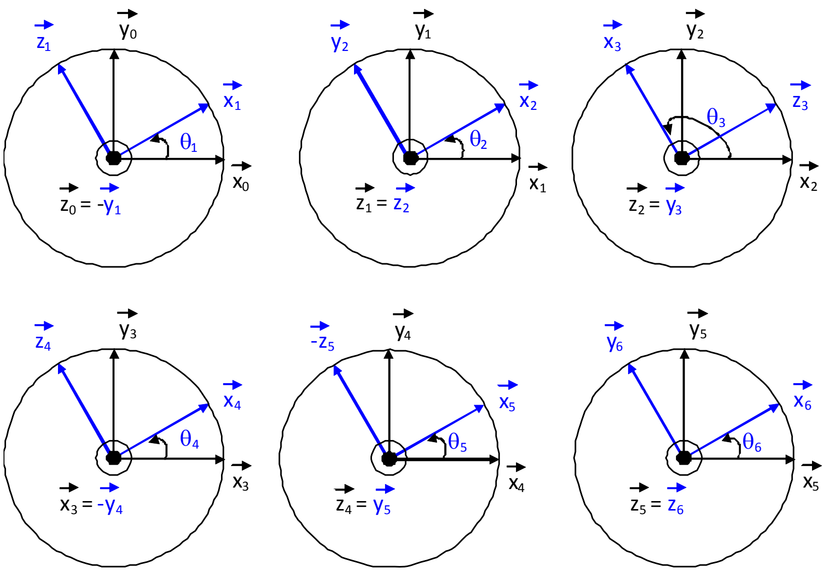


Figure 1.3: Projection des repères sur le système robot-préhenseur

i $(liaison)$	$\alpha_i\,[rad]$	$\theta_i\,[rad]$	$a_i\,[mm]$	$d_i\,[mm]$
1	$-\pi/2$	θ_1	$a_1 = 260$	$b_1 = 435$
2	0	θ_2	$a_2 = 680$	$b_2 = 0$
3	$\pi/2$	$\theta_3 + \pi/2$	$a_3 = 35$	$b_3 = 0$
4	$-\pi/2$	θ_4	$a_4 = 0$	$b_4 = 670$
5	$\pi/2$	θ_5	$a_5 = 0$	$b_5 = 0$
6	0	θ_6	$a_6 = -100$	$b_6 = 884$
7	0	0	$a_7 = 0$	$b_7 = \theta_7$

Tableau 1.1: Paramètres Géométriques de DH.

préhenseur est donnée dans le tableau (1.1) suivant:

Pour exprimer dans le repère $R_0(O_0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{O_0O_7}$ par rapport à la base du robot (C_0), les matrices augmentées de transformation T_{i-1}^i [Hartenberg55] sont calculées de la façon suivante:

- passage du repère $R_0(O_0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ au repère $R_1(O_1, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$

$$T_0^1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1(t)) & 0 & -\sin(\theta_1(t)) & a_1\cos(\theta_1(t)) \\ \sin(\theta_1(t)) & 0 & \cos(\theta_1(t)) & a_1\sin(\theta_1(t)) \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- passage du repère $R_1(O_1, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ au répère $R_2(O_2, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$

$$T_1^2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2(t)) & -\sin(\theta_2(t)) & 0 & a_2\cos(\theta_2(t)) \\ \sin(\theta_2(t)) & \cos(\theta_2(t)) & 0 & a_2\sin(\theta_2(t)) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- passage du repère $R_2(O_2, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$ au repère $R_3(O_3, \overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$

$$T_2^3 = \begin{bmatrix} -\sin(\theta_3(t)) & 0 & \cos(\theta_3(t)) & -a_3\sin(\theta_3(t)) \\ \cos(\theta_3(t)) & 0 & \sin(\theta_3(t)) & a_3\cos(\theta_3(t)) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- passage du repère $R_3(O_3, \overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$ au repère $R_4(O_4, \overrightarrow{x_4}, \overrightarrow{y_4}, \overrightarrow{z_4})$

$$T_3^4 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_4(t)) & 0 & -\sin(\theta_4(t)) & 0 \\ \sin(\theta_4(t)) & 0 & \cos(\theta_4(t)) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- passage du repère $R_4(O_4, \overrightarrow{x_4}, \overrightarrow{y_4}, \overrightarrow{z_4})$ au repère $R_5(O_5, \overrightarrow{x_5}, \overrightarrow{y_5}, \overrightarrow{z_5})$

$$T_4^5 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_5(t)) & 0 & \sin(\theta_5(t)) & 0 \\ \sin(\theta_5(t)) & 0 & -\cos(\theta_5(t)) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- passage du repère $R_5(O_5, \overrightarrow{x_5}, \overrightarrow{y_5}, \overrightarrow{z_5})$ au repère $R_6(O_6, \overrightarrow{x_6}, \overrightarrow{y_6}, \overrightarrow{z_6})$

$$T_5^6 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_6(t)) & -\sin(\theta_6(t)) & 0 & a_6\cos(\theta_6(t)) \\ \sin(\theta_6(t)) & \cos(\theta_6(t)) & 0 & a_6\sin(\theta_6(t)) \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- passage du repère $R_6(O_6, \overrightarrow{x_6}, \overrightarrow{y_6}, \overrightarrow{z_6})$ au repère $R_7(O_7, \overrightarrow{x_7}, \overrightarrow{y_7}, \overrightarrow{z_7})$

$$T_6^7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \theta_7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les positions linéaires $\Omega = \begin{bmatrix} X_7 \\ Y_7 \\ Z_7 \end{bmatrix}$, exprimant les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{O_0O_7}$ dans le repère R_0 sont données comme suit, où: $c\theta_i = \cos(\theta_i(t))$, $s\theta_i = \sin(\theta_i(t))$ et $\dot{\theta}_i = \frac{d}{dt}\theta_i(t)$ pour $i \in [1,7]$

$$\begin{aligned}
X_7 \;=\;& -\theta_7 s\theta_5 c\theta_4 c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 - \theta_7 s\theta_5 c\theta_4 c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 - \theta_7 s\theta_5 s\theta_1 s\theta_4 \\
&+\theta_7 c\theta_5 c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - \theta_7 c\theta_5 c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 - a_6 c\theta_6 c\theta_5 c\theta_4 c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 \\
&-a_6 c\theta_6 c\theta_5 c\theta_4 c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 - a_6 c\theta_6 c\theta_5 s\theta_1 s\theta_4 - a_6 c\theta_6 s\theta_5 c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 \\
&+a_6 c\theta_6 s\theta_5 c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 + a_6 s\theta_6 s\theta_4 c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + a_6 s\theta_6 s\theta_4 c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 \\
&-a_6 s\theta_6 s\theta_1 c\theta_4 - d_6 s\theta_5 c\theta_4 c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 - d_6 s\theta_5 c\theta_4 c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 - d_6 s\theta_5 s\theta_1 s\theta_4 \\
&+d_6 c\theta_5 c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - d_6 c\theta_5 c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 + d_4 c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - d_4 c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 \\
&-c\theta_1 c\theta_2 a_3 s\theta_3 - c\theta_1 s\theta_2 a_3 c\theta_3 + c\theta_1 a_2 c\theta_2 + a_1 c\theta_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_7 \;=\;& -\theta_7 s\theta_5 c\theta_4 s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 - \theta_7 s\theta_5 c\theta_4 s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + \theta_7 s\theta_5 c\theta_1 s\theta_4 \\
&+\theta_7 c\theta_5 s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - \theta_7 c\theta_5 s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 - a_6 c\theta_6 c\theta_5 c\theta_4 s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 \\
&-a_6 c\theta_6 c\theta_5 c\theta_4 s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + a_6 c\theta_6 c\theta_5 c\theta_1 s\theta_4 - a_6 c\theta_6 s\theta_5 s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 \\
&+a_6 c\theta_6 s\theta_5 s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 + a_6 s\theta_6 s\theta_4 s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + a_6 s\theta_6 s\theta_4 s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 \\
&+d_6 c\theta_5 s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - d_6 c\theta_5 s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 + d_4 s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - d_4 s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 \\
&-s\theta_1 c\theta_2 a_3 s\theta_3 - s\theta_1 s\theta_2 a_3 c\theta_3 + s\theta_1 a_2 c\theta_2 + a_1 s\theta_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_7 \;=\;& \theta_7 c\theta_4 s\theta_5 s\theta_2 s\theta_3 - \theta_7 c\theta_4 s\theta_5 c\theta_2 c\theta_3 - \theta_7 c\theta_5 s\theta_2 c\theta_3 - \theta_7 c\theta_5 c\theta_2 s\theta_3 \\
&+a_6 c\theta_6 c\theta_4 c\theta_5 s\theta_2 s\theta_3 - a_6 c\theta_6 c\theta_4 c\theta_5 c\theta_2 c\theta_3 + a_6 c\theta_6 s\theta_5 s\theta_2 c\theta_3 + a_6 c\theta_6 s\theta_5 c\theta_2 s\theta_3 \\
&-s\theta_4 a_6 s\theta_6 s\theta_2 s\theta_3 + s\theta_4 a_6 s\theta_6 c\theta_2 c\theta_3 + d_6 c\theta_4 s\theta_5 s\theta_2 s\theta_3 - d_6 c\theta_4 s\theta_5 c\theta_2 c\theta_3 \\
&-d_6 c\theta_5 s\theta_2 c\theta_3 - d_6 c\theta_5 c\theta_2 s\theta_3 - d_4 s\theta_2 c\theta_3 - d_4 c\theta_2 s\theta_3 + s\theta_2 a_3 s\theta_3 - c\theta_2 a_3 c\theta_3 \\
&-a_2 s\theta_2 + d_1
\end{aligned}$$

Ainsi pour résumer l'expression du modèle géométrique direct dans l'exemple étudié précédement, nous écrivons:

$$\Omega = f(\theta_i(t))$$

Si la fonction f est inversible alors:

$$\theta_i(t) = f^{-1}(\Omega)$$

Ce qui représente dans ce cas le modèle géométrique inverse.

1.3 Modélisation cinématique

1.3.1 Notion de torseur

Un torseur est un objet mathématique servant en mécanique, principalement la mécanique du solide indéformable, notamment dans la modélisation des interactions entre des solides et la description de leurs mouvements.

Un torseur est constitué de deux champs vectoriels:

- un champ uniforme, dont la valeur en tout point est nommé résultante, notée $\overrightarrow{B}$;
- le champ des moments, dont la valeur en un point P est notée $\overrightarrow{M_P}$.

Ces deux champs sont reliés par la relation de Varignon:

$$\overrightarrow{M_P} = \overrightarrow{M_O} + \overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{OP}$$

Pour définir un torseur, il suffit donc de connaître sa résultante et son moment en un point. On écrit alors:

$$\{\tau\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{B} \\ \overrightarrow{M_O} \end{array} \right\}_O$$

Ainsi, un torseur cinématique τ_c est composé du vecteur de rotation instantanée $\overrightarrow{\omega}$ et la vitesse linéaire $\overrightarrow{V}$ tel que:

$$\{\tau_c\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\omega} \\ \overrightarrow{V} \end{array} \right\}_O$$

Donc, le modèle cinématique direct est la dérivée première temporelle du modèle géométrique direct:

$$\dot{\Omega} = \frac{d}{dt} f(\theta_i(t)) = \frac{\partial f}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_i(t)$$

où: $J = \frac{\partial f}{\partial \theta_i}$ est appelée la matrice Jacobiènne.

Ainsi si J est inversible, les vitesses articulaires peuvent être calculées de la façon suivante:

$$\dot{\theta}_i(t) = \frac{\partial f}{\partial \theta_i}^{-1} \left(\dot{\Omega}\right)$$

1.3.2 Exemple de modèle cinématique direct

Considérons le système robotisé du robot traité dans le cas du modèle géométrique. Les expressions des vitesses de rotation de chaque corps $\overrightarrow{\omega}(i/0)$ avec $i \in [1,6]$, exprimées dans $R_0(O_0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ sont:

$$\vec{\omega}(1/0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega}(2/0) = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_2 s\theta_1 \\ \dot{\theta}_2 c\theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega}(3/0) = \begin{bmatrix} -s\theta_1 \left(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3\right) \\ c\theta_1 \left(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3\right) \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega}(4/0) = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_2 s\theta_1 - \dot{\theta}_3 s\theta_1 + (c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3)\,\dot{\theta}_4 \\ \dot{\theta}_2 c\theta_1 + \dot{\theta}_3 c\theta_1 + (s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3)\,\dot{\theta}_4 \\ \dot{\theta}_1 + (-s\theta_2 c\theta_3 - c\theta_2 s\theta_3)\,\dot{\theta}_4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega}(5/0) = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_2 s\theta_1 - \dot{\theta}_3 s\theta_1 + (c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3)\,\dot{\theta}_4 \\ +\,(s\theta_4 c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 - s\theta_1 c\theta_4 + s\theta_4 c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3)\,\dot{\theta}_5 \\ \\ \dot{\theta}_2 c\theta_1 + \dot{\theta}_3 c\theta_1 + (s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3)\,\dot{\theta}_4 \\ +\,(s\theta_4 s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_4 + s\theta_4 s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3)\,\dot{\theta}_5 \\ \\ \dot{\theta}_1 + (-s\theta_2 c\theta_3 - c\theta_2 s\theta_3)\,\dot{\theta}_4 + (s\theta_4 c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_4 s\theta_2 s\theta_3)\,\dot{\theta}_5 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega}(6/0) = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_2 s\theta_1 - \dot{\theta}_3 s\theta_1 + (c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3)\,\dot{\theta}_4 \\ +\,(s\theta_4 c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + s\theta_4 c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 - s\theta_1 c\theta_4)\,\dot{\theta}_5 \\ +\begin{pmatrix} -s\theta_5 c\theta_4 c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + c\theta_5 c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_5 s\theta_1 s\theta_4 \\ -s\theta_5 c\theta_4 c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 - c\theta_5 c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 \end{pmatrix}\dot{\theta}_6 \\ \\ \dot{\theta}_2 c\theta_1 + \dot{\theta}_3 c\theta_1 + (s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3)\,\dot{\theta}_4 \\ +\,(s\theta_4 s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + s\theta_4 s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + c\theta_1 c\theta_4)\,\dot{\theta}_5 \\ +\begin{pmatrix} -s\theta_5 c\theta_4 s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + c\theta_5 s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 + s\theta_5 c\theta_1 s\theta_4 \\ -s\theta_5 c\theta_4 s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 - c\theta_5 s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 \end{pmatrix}\dot{\theta}_6 \\ \\ \dot{\theta}_1\,(t) + (-s\theta_2 c\theta_3 - c\theta_2 s\theta_3)\,\dot{\theta}_4 + (s\theta_4 c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_4 s\theta_2 s\theta_3)\,\dot{\theta}_5 \\ +\,(-c\theta_5 c\theta_2 s\theta_3 + c\theta_4 s\theta_5 s\theta_2 s\theta_3 - c\theta_4 s\theta_5 c\theta_2 c\theta_3 - c\theta_5 s\theta_2 c\theta_3)\,\dot{\theta}_6 \end{bmatrix}$$

données suivant le torseur $\begin{pmatrix} \overrightarrow{\omega}(i/0) \\ \overrightarrow{V}(O_{i-1}) \end{pmatrix}$ par l'expression:

$$\overrightarrow{V}(O_i) = \overrightarrow{V}(O_{i-1}) + \overrightarrow{\omega}(i/0) \wedge \overrightarrow{O_{i-1}O_i}$$

où $\wedge$ représente le produit vectoriel.

- Lorsque $i = 1, 2$, les vitesses linéaires aux points O_1 et O_2 sont:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V}(O_1) &= \begin{bmatrix} -a_1 s\theta_1 \dot{\theta}_1 \\ a_1 c\theta_1 \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\overrightarrow{V}(O_2) &= \begin{bmatrix} (-a_1 s\theta_1 - s\theta_1 a_2 s\theta_2)\,\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 c\theta_1 a_2 c\theta_2 \\ (a_1 c\theta_1 + c\theta_1 a_2 s\theta_2)\,\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 s\theta_1 a_2 c\theta_2 \\ -\dot{\theta}_2 a_2 s\theta_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

de la même façon, les vitesses aux points O_3, O_4, O_5 et O_6 sont déduites.

- Lorsque $i = 7$, la glissière positionnée sur le préhenseur se déplace avec une vitesse $\overrightarrow{V}(O_7)$ exprimée dans le repère $R_0\,(O_0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V}(O_7) &= \overrightarrow{V}(O_6) + \frac{d}{dt}\overrightarrow{O_6O_7} \\
\overrightarrow{V}(O_7) &= \overrightarrow{V}(O_6) + \frac{d}{dt}\,(\theta_7 \overrightarrow{z_7}) \\
\overrightarrow{V}(O_7) &= \overrightarrow{V}(O_6) + \dot{\theta}_7 \overrightarrow{z_7} + \overrightarrow{\omega}(6/0) \wedge \overrightarrow{O_6O_7} \\
\overrightarrow{V}(O_7) &= Vx\ \overrightarrow{x_0} + Vy\ \overrightarrow{y_0} + Vz\ \overrightarrow{z_0}
\end{aligned}$$

Ainsi, les composantes du vecteur de vitesse au point O_7 sont décrites comme suit:

$$
\begin{aligned}
Vx_7 \;=\; & \left(\begin{array}{c}
-s\theta_1 d_4 c\theta_2 c\theta_3 + s\theta_1 d_4 s\theta_2 s\theta_3 + s\theta_1 c\theta_2 a_3 s\theta_3 - d_6 c\theta_5 s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 \\
+d_6 c\theta_5 s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 + d_6 s\theta_5 c\theta_4 s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + d_6 s\theta_5 c\theta_4 s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 \\
-d_6 s\theta_5 c\theta_1 s\theta_4 + s\theta_1 s\theta_2 a_3 c\theta_3 + a_6 c\theta_6 s\theta_5 s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 \\
-a_6 c\theta_6 s\theta_5 s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 + a_6 c\theta_6 c\theta_5 c\theta_4 s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + a_6 c\theta_6 c\theta_5 c\theta_4 s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 \\
-a_6 c\theta_6 c\theta_5 c\theta_1 s\theta_4 - \theta_7 c\theta_5 s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 + \theta_7 c\theta_5 s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 \\
+\theta_7 s\theta_5 c\theta_4 s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + \theta_7 s\theta_5 c\theta_4 s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 - \theta_7 s\theta_5 c\theta_1 s\theta_4 - s\theta_1 a_2 c\theta_2 \\
-a_6 s\theta_6 s\theta_4 s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 - a_6 s\theta_6 s\theta_4 s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 - a_6 s\theta_6 c\theta_1 c\theta_4 - a_1 s\theta_1
\end{array}\right)\dot{\theta}_1 \\
& + \left(\begin{array}{c}
-c\theta_1 c\theta_2 a_3 c\theta_3 - c\theta_1 a_6 c\theta_6 c\theta_4 c\theta_5 c\theta_2 c\theta_3 + c\theta_1 a_6 c\theta_6 c\theta_4 c\theta_5 s\theta_2 s\theta_3 \\
+c\theta_1 a_6 c\theta_6 s\theta_5 c\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 a_6 c\theta_6 s\theta_5 s\theta_2 c\theta_3 - c\theta_1 a_2 s\theta_2 \\
+a_6 s\theta_6 c\theta_1 s\theta_4 c\theta_2 c\theta_3 - a_6 s\theta_6 c\theta_1 s\theta_4 s\theta_2 s\theta_3 - \theta_7 c\theta_4 s\theta_5 c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 \\
+\theta_7 c\theta_4 s\theta_5 c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 - \theta_7 c\theta_5 c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 - \theta_7 c\theta_5 c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 \\
+c\theta_1 s\theta_2 a_3 s\theta_3 - c\theta_1 d_4 s\theta_2 c\theta_3 - c\theta_1 d_4 c\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 d_6 c\theta_4 s\theta_5 s\theta_2 s\theta_3 \\
-c\theta_1 d_6 c\theta_4 s\theta_5 c\theta_2 c\theta_3 - c\theta_1 d_6 c\theta_5 s\theta_2 c\theta_3 - c\theta_1 d_6 c\theta_5 c\theta_2 s\theta_3
\end{array}\right)\dot{\theta}_2 \\
& + \left(\begin{array}{c}
c\theta_1 s\theta_2 a_3 s\theta_3 - c\theta_1 a_6 c\theta_6 c\theta_4 c\theta_5 c\theta_2 c\theta_3 + c\theta_1 a_6 c\theta_6 c\theta_4 c\theta_5 s\theta_2 s\theta_3 \\
+c\theta_1 a_6 c\theta_6 s\theta_5 c\theta_2 s\theta_3 + c\theta_1 a_6 c\theta_6 s\theta_5 s\theta_2 c\theta_3 - c\theta_1 d_4 s\theta_2 c\theta_3 - c\theta_1 d_4 c\theta_2 s\theta_3 \\
-\theta_7 c\theta_4 s\theta_5 c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 + \theta_7 c\theta_4 s\theta_5 c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 - \theta_7 c\theta_5 c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 \\
-\theta_7 c\theta_5 c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + a_6 s\theta_6 c\theta_1 s\theta_4 c\theta_2 c\theta_3 - a_6 s\theta_6 c\theta_1 s\theta_4 s\theta_2 s\theta_3 \\
-c\theta_1 c\theta_2 a_3 c\theta_3 + c\theta_1 d_6 c\theta_4 s\theta_5 s\theta_2 s\theta_3 - c\theta_1 d_6 c\theta_4 s\theta_5 c\theta_2 c\theta_3 \\
-c\theta_1 d_6 c\theta_5 s\theta_2 c\theta_3 - c\theta_1 d_6 c\theta_5 c\theta_2 s\theta_3
\end{array}\right)\dot{\theta}_3 \\
& + \left(\begin{array}{c}
a_6 s\theta_6 c\theta_4 c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + a_6 s\theta_6 c\theta_4 c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + a_6 s\theta_6 s\theta_1 s\theta_4 \\
+c\theta_5 a_6 c\theta_6 s\theta_4 c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + c\theta_5 a_6 c\theta_6 s\theta_4 c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 - c\theta_5 a_6 c\theta_6 s\theta_1 c\theta_4 \\
+s\theta_5 d_6 s\theta_4 c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + s\theta_5 d_6 s\theta_4 c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 - s\theta_5 d_6 s\theta_1 c\theta_4
\end{array}\right)\dot{\theta}_4 \\
& + \left(\begin{array}{c}
-a_6 c\theta_6 c\theta_5 c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 + a_6 c\theta_6 c\theta_5 c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 + a_6 c\theta_6 s\theta_5 c\theta_4 c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 \\
+a_6 c\theta_6 s\theta_5 c\theta_4 c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + a_6 c\theta_6 s\theta_5 s\theta_1 s\theta_4 - d_6 c\theta_5 c\theta_4 c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 \\
-d_6 c\theta_5 c\theta_4 c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 - d_6 c\theta_5 s\theta_1 s\theta_4 - d_6 s\theta_5 c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 + d_6 s\theta_5 c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3
\end{array}\right)\dot{\theta}_5 \\
& + \left(\begin{array}{c}
a_6 s\theta_6 c\theta_5 c\theta_4 c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + a_6 s\theta_6 c\theta_5 c\theta_4 c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + a_6 s\theta_6 c\theta_5 s\theta_1 s\theta_4 \\
+a_6 s\theta_6 s\theta_5 c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - a_6 s\theta_6 s\theta_5 c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 + a_6 c\theta_6 s\theta_4 c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 \\
+a_6 c\theta_6 s\theta_4 c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 - a_6 c\theta_6 s\theta_1 c\theta_4
\end{array}\right)\dot{\theta}_6 \\
& + \left(c\theta_5 c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - c\theta_5 c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 - s\theta_5 c\theta_4 c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 - s\theta_5 c\theta_4 c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 - s\theta_5 s\theta_1 s\theta_4\right)\dot{\theta}_7
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Vy_7 &= \begin{pmatrix}
-\theta_7 s\theta_5 c\theta_4 c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 - \theta_7 s\theta_5 c\theta_4 c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 - \theta_7 s\theta_5 s\theta_1 s\theta_4 \\
+\theta_7 c\theta_5 c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - \theta_7 c\theta_5 c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 - a_6 c\theta_6 c\theta_5 c\theta_4 c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 \\
-a_6 c\theta_6 c\theta_5 c\theta_4 c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 - a_6 c\theta_6 c\theta_5 s\theta_1 s\theta_4 - a_6 c\theta_6 s\theta_5 c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 \\
+a_6 c\theta_6 s\theta_5 c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 + a_6 s\theta_6 s\theta_4 c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + a_6 s\theta_6 s\theta_4 c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 \\
-a_6 s\theta_6 s\theta_1 c\theta_4 - d_6 s\theta_5 c\theta_4 c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 - d_6 s\theta_5 c\theta_4 c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 \\
-d_6 s\theta_5 s\theta_1 s\theta_4 + d_6 c\theta_5 c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - d_6 c\theta_5 c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 + d_4 c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 \\
-d_4 c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 - c\theta_1 c\theta_2 a_3 s\theta_3 - c\theta_1 s\theta_2 a_3 c\theta_3 + c\theta_1 a_2 c\theta_2 + a_1 c\theta_1
\end{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\
&+ \begin{pmatrix}
-s\theta_1 c\theta_2 a_3 c\theta_3 - a_6 c\theta_6 c\theta_4 c\theta_5 s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 + a_6 c\theta_6 c\theta_4 c\theta_5 s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 \\
+a_6 c\theta_6 s\theta_5 s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + a_6 c\theta_6 s\theta_5 s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 - s\theta_1 a_2 s\theta_2 \\
+s\theta_4 a_6 s\theta_6 s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_4 a_6 s\theta_6 s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 - \theta_7 c\theta_4 s\theta_5 s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 \\
+\theta_7 c\theta_4 s\theta_5 s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 - \theta_7 c\theta_5 s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 - \theta_7 c\theta_5 s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 \\
+s\theta_1 s\theta_2 a_3 s\theta_3 - d_4 s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 - d_4 s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 - d_6 c\theta_4 s\theta_5 s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 \\
+d_6 c\theta_4 s\theta_5 s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 - d_6 c\theta_5 s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 - d_6 c\theta_5 s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3
\end{pmatrix} \dot{\theta}_2 \\
&+ \begin{pmatrix}
s\theta_1 s\theta_2 a_3 s\theta_3 - a_6 c\theta_6 c\theta_4 c\theta_5 s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 + a_6 c\theta_6 c\theta_4 c\theta_5 s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 \\
+a_6 c\theta_6 s\theta_5 s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + a_6 c\theta_6 s\theta_5 s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 - d_4 s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 - d_4 s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 \\
-\theta_7 c\theta_4 s\theta_5 s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 + \theta_7 c\theta_4 s\theta_5 s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 - \theta_7 c\theta_5 s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 \\
-\theta_7 c\theta_5 s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + s\theta_4 a_6 s\theta_6 s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - s\theta_4 a_6 s\theta_6 s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 \\
-s\theta_1 c\theta_2 a_3 c\theta_3 - d_6 c\theta_4 s\theta_5 s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 + d_6 c\theta_4 s\theta_5 s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 \\
-d_6 c\theta_5 s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 - d_6 c\theta_5 s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3
\end{pmatrix} \dot{\theta}_3 \\
&+ \begin{pmatrix}
s\theta_5 \theta_7 s\theta_4 s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + s\theta_5 \theta_7 s\theta_4 s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + s\theta_5 \theta_7 c\theta_1 c\theta_4 \\
+a_6 s\theta_6 c\theta_4 s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + a_6 s\theta_6 c\theta_4 s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 - a_6 s\theta_6 c\theta_1 s\theta_4 \\
+c\theta_5 a_6 c\theta_6 s\theta_4 s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + c\theta_5 a_6 c\theta_6 s\theta_4 s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + c\theta_5 a_6 c\theta_6 c\theta_1 c\theta_4 \\
+s\theta_5 d_6 s\theta_4 s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + s\theta_5 d_6 s\theta_4 s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + s\theta_5 d_6 c\theta_1 c\theta_4
\end{pmatrix} \dot{\theta}_4 \\
&+ \begin{pmatrix}
-a_6 c\theta_6 c\theta_5 s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 + a_6 c\theta_6 c\theta_5 s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 + a_6 c\theta_6 s\theta_5 c\theta_4 s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 \\
+a_6 c\theta_6 s\theta_5 c\theta_4 s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 - a_6 c\theta_6 s\theta_5 c\theta_1 s\theta_4 - \theta_7 c\theta_5 c\theta_4 s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 \\
-\theta_7 c\theta_5 c\theta_4 s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + \theta_7 c\theta_5 c\theta_1 s\theta_4 - \theta_7 s\theta_5 s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 \\
+\theta_7 s\theta_5 s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 - d_6 c\theta_5 c\theta_4 s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 - d_6 c\theta_5 c\theta_4 s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 \\
+d_6 c\theta_5 c\theta_1 s\theta_4 - d_6 s\theta_5 s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 + d_6 s\theta_5 s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3
\end{pmatrix} \dot{\theta}_5 \\
&+ \begin{pmatrix}
a_6 s\theta_6 c\theta_5 c\theta_4 s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 + a_6 s\theta_6 c\theta_5 c\theta_4 s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 - a_6 s\theta_6 c\theta_5 c\theta_1 s\theta_4 \\
+a_6 s\theta_6 s\theta_5 s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - a_6 s\theta_6 s\theta_5 s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 + a_6 c\theta_6 s\theta_4 s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 \\
+a_6 c\theta_6 s\theta_4 s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + a_6 c\theta_6 c\theta_1 c\theta_4
\end{pmatrix} \dot{\theta}_6 \\
&+ \left(c\theta_5 s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 - c\theta_5 s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 - s\theta_5 c\theta_4 s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3 - s\theta_5 c\theta_4 s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 + s\theta_5 c\theta_1 s\theta_4\right) \dot{\theta}_7
\end{aligned}
$$

1.3.3 Moments cinétique et dynamique [Orin79]

Définition 1.3 *un moment cinétique* $\overrightarrow{K}(O_i, i/0)$ *est une grandeur vectorielle conservée utilisée pour décrire l'état général de rotation d'un système physique. Par analogie en translation, il serait équivalent à la quantité de mouvements.*

$$\overrightarrow{K}(O_i, i/0) = I_i.\overrightarrow{\omega}\,(i/0)$$

Définition 1.4 *un moment dynamique est donnée par l'expression suivante:*

$$\overrightarrow{H}(O_i, i/0) = \frac{d\overrightarrow{K}(O_i, i/0)}{dt}$$

1.3.4 Informatisation

Les modèles géométrique et cinématique sont implémentés sous une forme algorithmique dans un simulateur virtuel, permettant dans un premier temps de récupérer en temps réel les coordonnées articulaires en position et en vitesse de l'ensemble composé du bras manipulateur et le préhenseur, et en second temps de reconstruire la géométrie et la cinématique du système robotique dans un environnement virtuel.

La Figure (1.4) montre différentes configurations géométriques de système robotique par rapport aux mesures collectées.

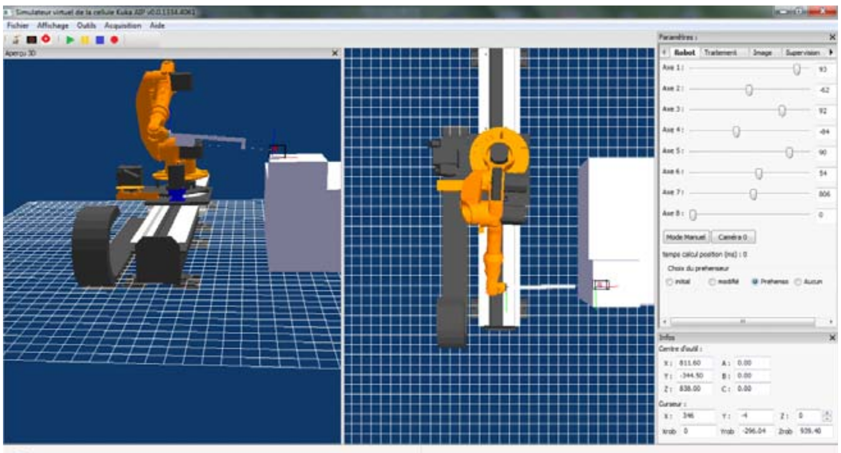


Figure 1.4: Représentation géométrique du système robotique dans un environnement virtuel

1.4 Modélisation dynamique

Les modèles dynamiques des bras manipulateurs sont décrits par un ensemble d'équations mathématiques qui portent des données dynamiques de ces manipulateurs et peuvent être simulées dans le but de synthétiser une commande conditionnée par des performances désirées [Armstrong86]. L'ensemble des équations dynamiques peut être déterminé par des lois mécaniques classiques Newtoniennes et Lagrangiennes. Les approches d'Euler-Lagrange et Newton-Euler permettent d'aboutir aux équations du mouvement des robots.

Sachant que la puissance totale générée par les différents moteurs est donnée par l'expression suivante:

$$P_{mot} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\tau}_i \overrightarrow{\omega}(i/0) - \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\tau}_i \overrightarrow{\omega}((i-1)/0) + \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{t}_i \overrightarrow{V}(O_i) - \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{t}_i \overrightarrow{V}(O_{i-1})$$

où le moment $\overrightarrow{\tau_i} = \tau_i \overrightarrow{z_i}$ et un effort $\overrightarrow{t_i} = t_i \overrightarrow{z_i}$ sont appliqués sur le corps (C_i).

Et les puissances extérieures appliquées sur l'élément terminal est calculé comme suit:

$$P_{ext} = \overrightarrow{F_i} \overrightarrow{V}(P_i) + \overrightarrow{M_i} \overrightarrow{\omega}(i/0)$$

où on considère que sur le centre de l'outil P_i exerxe un torseur $\overrightarrow{F_i}; \overrightarrow{M_i}(P_i)$, représentant les actions extérieures sur l'élément terminal.

Ainsi l'expression caractéristique de la dynamique issue du formalisme Newton-Euler est donnée comme suit suivant la $i^{ème}$ articulation de masse m_i:

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{F_i} + \overrightarrow{t_i}\right) \overrightarrow{z_i} = \left(m_i \overrightarrow{\Gamma}(O_i)\right) \overrightarrow{z_i} \\ \overrightarrow{H}(O_i, i/0) \overrightarrow{y_i} = \left(\overrightarrow{\tau_i} + \overrightarrow{M_i}\right) \overrightarrow{y_i} \end{cases}$$

et la dynamique issue du formalisme Euler-Lagrange est le suivant:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} = \frac{dP_{mot}}{d\dot{q}_i} + \frac{dP_{ext}}{d\dot{q}_i} \qquad i = 1, ..., n$$

avec ∂q_i est la dérivée de la coordonnée généralisée et E_c est l'énergie cinitique totale de toutes les liaisons exprimée par l'équation suivante:

$$Ec_i(i/0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \overrightarrow{V}^2(O_i) + \frac{1}{2} \overrightarrow{\omega}(i/0)\left(I_i \overrightarrow{\omega}(i/0)\right)$$

où I_i est la matrice d'inertie du $i^{ème}$ segment.

1.5 TD1: Etude d'un robot porte-outil[8]

Le robot étudié est schématisé par un ensemble de solides représenté par la Figure (1.5). Le corps 0 de référence (C_0) est repéré par le repère $R_0(O_0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ de type galiléen. Le corps 1 (C_1) a un mouvement de rotation autour de l'axe $(O_0, \overrightarrow{z_0})$, sachant que le repère lié à ce corps est $R_1(O_1, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$. La position relative de (C_1) par rapport à (C_0) est $q_1 = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1})$. Le corps (C_2) a un mouvement de rotation autour de l'axe $(O_2, \overrightarrow{z_2})$, colinéaire avec l'axe $(O_1, \overrightarrow{x_1})$ avec $\overrightarrow{O_1O_2} = -a\overrightarrow{y_1}$. Le repère lié à ce corps est $R_2(O_2, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$. La position relative de (C_2) par rapport à (C_1) est $q_2 = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2})$. Le corps (C_3) réalise par rapport à (C_2) un mouvement de translation d'axe $(O_2, \overrightarrow{y_2})$ défini par $\overrightarrow{O_2O_3} = q_4\overrightarrow{y_2}$ et un mouvement de rotation autour de $(O_2, \overrightarrow{y_2})$ avec un angle $q_3 = (\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3})$. Le repère lié à ce corps est $R_3(O_3, \overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$. Les caractéristiques massiques, inertielles et géométriques sont indiquées dans la Figure (1.5).

Le point P_3 appartient à l'organe terminal de (C_3), tel que: $\overrightarrow{O_3P_3} = b\overrightarrow{z_3}$L'objet de ce problème est de faire l'étude géométrique, cinématique et dynamique du robot.

1.5.1 Etude géométrique

Question: position du point P_3

Exprimer dans le repère $R_1(O_1, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$, le vecteur $\overrightarrow{O_1P_3}$.

Question: modèle géométrique inverse

On souhaite que le point P_3 occupe une position particulière dans l'espace, ce qui revient à imposer $\overrightarrow{O_1P_3} = \lambda\overrightarrow{u}$, avec $\overrightarrow{u}$ vecteur unitaire non nul dont on connaît les projections dans le repère $R_0(O_0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$; $\overrightarrow{u} = u_x\overrightarrow{x_0} + u_y\overrightarrow{y_0} + u_z\overrightarrow{z_0}$ avec $u_x, u_y, u_z \neq 0$ et λ scalaire non nul.

- Déterminer le ou les jeux de paramètres, q, qui sont solutions. On commencera par déterminer q_1 puis les autres paramètres.

[8]Problème d'Examen de DEA Robotique 92-93 UMPC-ENSAM, cours A. Barraco

1.5.2 Etude Cinematique

Question: Vitesse de Rotation

- Donner les expressions des vitesses de rotation de chaque corps $\overrightarrow{\omega}(i/0)$ avec $i \in [1,3]$, exprimées pour $\overrightarrow{\omega}(1/0)$ dans $R_1\left(O_1, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1}\right)$, pour $\overrightarrow{\omega}(2/0)$ dans $R_2\left(O_2, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2}\right)$ et pour $\overrightarrow{\omega}(3/0)$ dans $R_3\left(O_3, \overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3}\right)$ et dans $R_2\left(O_2, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2}\right)$.
- Donner les expressions des dérivées galiléennes des vecteurs de la base $R_2\left(O_2, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2}\right)$.

Question: Vitesses et accélération des différents points.

- Donner les expressions des vitesses galiléennes des points: O_2, O_3 et P_3 exprimées dans $R_2\left(O_2, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2}\right)$.
- Donner l'expression de l'accélération galiléenne de O_3 exprimée dans $R_2\left(O_2, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2}\right)$.

Question: Cinématique inverse

On suppose que $b + q_4 \neq 0$. Peut-on trouver des jeux de paramètres q et $\dot{q}$ tels que $\overrightarrow{V}(P_3, 3/0) = \overrightarrow{u}$, où $\overrightarrow{u}$ est un vecteur imposé dont on connaît les composantes dans $R_2\left(O_2, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2}\right)$?

Lorsque $b + q_4 \neq 0$ et par rapport à l'équation précédente $\dot{q}_1, \dot{q}_2$ et $\dot{q}_4$peuvent être identifiées. On constate que $\dot{q}_3$n'influe pas sur les coordonnées cinématiques de $\overrightarrow{V}(P_3, 3/0)$.

Question: Cinétique

- Donner les expressions des moments cinétiques $\overrightarrow{K}(O_1, 1/0), \overrightarrow{K}(O_2, 2/0), \overrightarrow{K}(O_3, 3/0)$, exprimé pour le premier dans $R_1\left(O_1, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1}\right)$ et pour les deux autres dans $R_2\left(O_2, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2}\right)$.
- Donner les expressions des moments dynamiques $\overrightarrow{H}(O_2, 2/0), \overrightarrow{H}(O_3, 3/0)$, exprimés dans $R_2\left(O_2, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2}\right)$
- Calculer les énergies cinétiques de chaque corps $T_i(i/0)$ avec $i \in [1,3]$.

1.5.3 Etude Dynamique

Chaque liaison est motorisée. Entre le corps (C_0) et (C_1) un moteur exerce sur le corps (C_1) un moment $\overrightarrow{\tau_1} = \tau_1 \overrightarrow{z_1}$, et sur le corps (C_0) un moment opposé. Entre le

corps (C_1) et (C_2) un moteur exerce sur le corps (C_2) un moment $\overrightarrow{\tau_2} = \tau_2 \overrightarrow{z_2}$, et sur le corps (C_1) un moment opposé. Entre le corps (C_2) et (C_3) un moteur exerce sur le corps (C_3) un moment $\overrightarrow{\tau_3} = \tau_3 \overrightarrow{z_3}$ et un effort $\overrightarrow{t_3} = t_3 \overrightarrow{z_3}$, et sur le corps (C_2) des efforts opposés.
On considère également en P_3 un torseur $\overrightarrow{F_3}; \overrightarrow{M_3}(P_3)$, représentent les actions extérieures à l'outil.
Question: Puissance des efforts extérieurs.

- Calculer la puissance P_{mot}des efforts des moteurs.
- Donner l'expression de la puissance P_{ext} des efforts extérieurs en P_3, en fonction de $\overrightarrow{V}(P_3)$ et $\overrightarrow{\omega}(3/0)$, on ne développera pas cette expression.

Question: Equations de Newton-Euler

- Ecrire l'équation de Newton pour le corps (C_3), projetée suivant la direction $\overrightarrow{z_3}$.
- Ecrire l'équation d'Euler pour le corps (C_3), projetée suivant la direction $\overrightarrow{z_3}$.

Question: Formalisme de Euler-Lagrange

A partir de l'expression de l'énergie cinétique calculée et en utilisant le formalisme de Lagrange, retrouver les deux équations du mouvement de la question précédente.

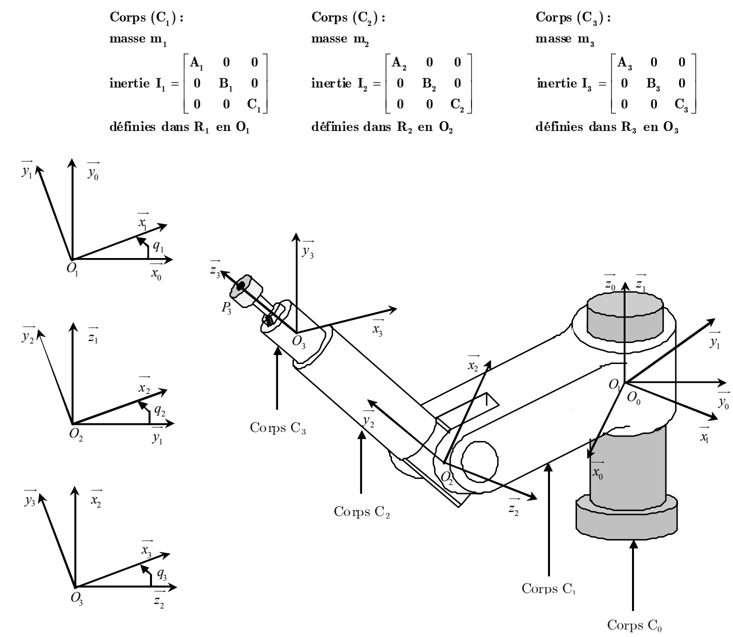


Figure 1.5: Robot Porte Outil

1.6 TD2: Modélisation du robot ABB-IRB 140

Le robot étudié est de type ABB-IRB 140 de la salle AIP-C303, schématisé par un ensemble de solides représenté par la Figure (1.6) et repérés dans l'espace galiléen. Ce robot représente 6ddl, où le corps 0 de référence (C_0) est repéré dans l'espace galiléen par $R_0(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$. Le corps 1 a un mouvement de rotation autour de l'axe $(O_0, \overrightarrow{z_0})$, sachant que le repère lié à ce corps est $R_1(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ et O_i est l'origine du repère i; ($i \in [1, 6]$). La position relative de (C_1) par rapport à (C_0) est $q_1 = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1})$, où $\overrightarrow{O_0O_1} = -a_1\overrightarrow{x_0} + c_1\overrightarrow{z_0}$. Le corps 2 a un mouvement de rotation autour de l'axe $(O_2, \overrightarrow{z_2})$, colinéaire avec l'axe $(O_1, \overrightarrow{z_1})$ avec $\overrightarrow{O_1O_2} = a_2\overrightarrow{x_1} + c_2\overrightarrow{z_1}$. Le repère lié à ce corps est $R_2(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$. La position relative de (C_2) par rapport à (C_1) est $q_2 = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2})$. Le corps 3 a un mouvement de rotation autour de l'axe $(O_3, \overrightarrow{z_3})$, colinéaire avec l'axe $(O_2, \overrightarrow{z_2})$ avec $\overrightarrow{O_2O_3} = b_3\overrightarrow{y_2}$. Le repère lié à ce corps est $R_3(\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})$. La position relative de (C_3) par rapport à (C_2) est $q_3 = (\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3})$. Les autres degrès de liberté sont représentés dans la Figure (1.6) et décrives aussi des mouvements de rotation. Dans cet exercice, nous allons considérer que les mouvements de rotations autours des axes $(O_4, \vec{z_4})$, $(O_5, \vec{z_5})$ et $(O_6, \vec{z_6})$ sont bloquées, à savoir: $q_4 = q_5 = q_6 = 0$, avec: $\overrightarrow{O_3O_6} = b_6\vec{y_3}$.

1.6.1 Modélisation Géométrique Directe et Inverse

1. Exprimer dans le repère $R_1(\vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$, le vecteur $\overrightarrow{O_0O_6}$.
2. Si on considère que $\overrightarrow{O_0O_6} = u_x\vec{x_0} + u_y\vec{y_0} + u_z\vec{z_0}$, avec: u_x, u_x, $u_x \in \mathbb{R}$. Exprimer les positions angulaires q_1, q_2, q_3 en fonction des coordonnées linéaires du point O_6.

1.6.2 Modélisation Cinématique Directe

1. Donner les expressions des vitesses de rotation des corps $\vec{\omega}(1/0)$, $\vec{\omega}(2/0)$ et $\vec{\omega}(3/0)$, exprimées dans le repère $R_1(\vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$.
2. Donner les expressions des dérivées galiléennes des vecteurs de la base $R_1(\vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$.
3. Donner les expressions des vitesses galiléennes des points O_1, O_2 et O_6, exprimées dans la base $R_1(\vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$.
4. Déduire l'expression de l'accélération galiléenne de O_3 exprimée dans la base $R_1(\vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$.

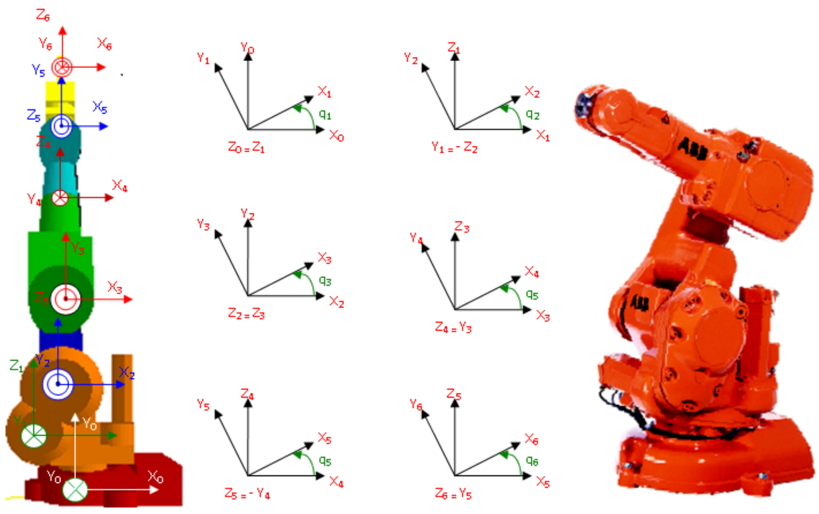


Figure 1.6: Robot ABB-IRB 140

1.7 Références

[Madani02] T. Madani, 'Différentes Approches de Commande Décentralisée à Structure Variable Appliquées en Robotique', thèse de magistère de E.N.P, Alger, 2002.

[Coelen12] V. Coelen, 'Concept Intégrée pour la Curiethérapie Robotisée de la Prostate', thèse de doctorat, université de Lille1, 2012.

[Armstrong86] B. Armstrong, O. Khatib, and J. Burdick, "The explicit dynamic model and inertial parameters of the Puma 560 arm," in Proc. International Conference of Robotics and Automation, vol. 1, Washington, USA, pp. 510–18, 1986.

[Hartenberg55] R. S. Hartenberg and J. Denavit, "A kinematic notation for lower pair mechanisms based on matrices", Journal of Applied Mechanics, vol. 77, pp. 215–221, June 1955.

[Orin79] D. Orin, R. McGhee, M. Vukobratovic, and G. Hartoch, "Kinematics and kinetic analysis of open-chain linkages utilizing Newton-Euler methods", Mathematical Biosciences International Journal, vol. 43, pp. 107–130, Feb. 1979.

[Siciliano09] B. Siciliano and W. Khatib, 'Springer Handbook of Robotics', ISBN 978-3-540-23957-4, Springer, 2009