補題 1 $\mathbf{v} = (v_1, v_2), \mathbf{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ とする。$\mathbf{v}, \mathbf{w}$ が一次独立であるための必要十分条件は

$$\det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} \neq 0$$

証明 1 準備のためにただの式変形をする。左から右はいつでも成り立つ。$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とすると。

$$\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} (v_1 w_2 - w_1 w_2)\alpha = 0 \\ (v_1 w_2 - w_1 v_2)\beta = 0 \end{cases} \tag{1}$$

ここで $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ の一次独立性を仮定する。集合の記号で書くと、$\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 | \, \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{0}\}$ となる。仮に $v_1 w_2 - v_2 w_1 = 0$ とすると、(α, β) のなす空間は $\mathbb{R}^2$ 全体になるのでこれは上の主張に矛盾する。よって、

$$\det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} = v_1 w_2 - w_1 v_2 \neq 0$$

逆に $v_1 w_2 - w_1 v_2 \neq 0$ を仮定する（ここでは $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ の一次独立性は仮定していない）すると、*(1)* より $\alpha = \beta = 0$、逆に $\alpha = \beta = 0$ とすると $\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} = \mathbf{0}$。
以上より $\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$ つまり $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ は一次独立 □

定理 1 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \mathbf{x} = (x, y), \mathbf{a} = (\alpha, \beta)$ とする。

$$A\mathbf{x} = \mathbf{a}$$

がただ一つの解を持つ必要十分条件は $\det A \neq 0$

証明 2 最初に $\det A \neq 0$ を仮定する。

$$A\mathbf{x} = \mathbf{a} \Rightarrow \begin{cases} (ad - bc)x = \alpha d - \beta b \\ (ad - bc)y = a\beta - c\alpha \end{cases}$$

を利用し、$\det A \neq 0$ より

$$\begin{cases} x = \frac{1}{ad-bc}(\alpha d - \beta b) \\ y = \frac{1}{ad-bc}(a\beta - c\alpha) \end{cases}$$

と具体的に一つの会を求めることができる。
逆に $A\mathbf{x} = \mathbf{a}$ がただ一つの解を持つと仮定する。
このとき仮に $\det A = 0$ とすると補題 *1* より A のふたつの列ベクトルは一次独立でない、つまり一次従属になる。
このとき A の列ベクトルを $\mathbf{v} = (a, c), \mathbf{w} = (b, d)$ とおき $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ とすれば、ある $k \in \mathbb{R}$ が存在して $\mathbf{w} = k\mathbf{v}$ となる（$\mathbf{v}, \mathbf{w}$ が一次従属とは、$\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} = \mathbf{0}$

のとき (α, β) が非自明解をもつということ、今 $\mathbf{v} \neq 0$ を仮定しているので、$\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} = 0$ において $\beta = 0$ とすると自動的に $\alpha = 0$ となる。つまりこのときは非自明解を持たなくなってしまうため、$\beta \neq 0$。これより $\mathbf{w} = \frac{\alpha}{\beta}\mathbf{v}$ と表せる。)
この事実を用いて、$A = (\mathbf{v}, k\mathbf{v})$ と表せば、$A\mathbf{x} = \mathbf{a} \Rightarrow (x + ky)\mathbf{v} = \mathbf{a}$ つまり、$\mathbf{v} \parallel \mathbf{a}$ のとき、解は無数にある。$\mathbf{v} \not\parallel \mathbf{a}$ のとき解はない。
$\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ のときも上の議論と全く同様にして唯一解はない。

つまりあと考えればよいのは $\mathbf{v} = \mathbf{0}, \mathbf{w} = \mathbf{0}$ のときのみである。このとき A はゼロ行列であり、すべての $\mathbf{x}$ はゼロベクトルに写される。つまり、$\mathbf{a} = \mathbf{0}$ のときは解がむずうにあり。$\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ のときは解はない。
以上より $\det A = 0$ を仮定したことから解は無数にあるかないかのどちらかという結論が導かれたが、これは解がただ一つ存在することに矛盾するので $\det A \neq 0$ $\square$

補足、反省

補題 1 に関しては証明を少し楽に使用として完全に地雷を踏んだ。必要条件と十分条件を別々に地道に証明していくべきだった。
定理 1 に関しては行列のランクの概念を出さずに本質的にはランクで場合分けをしているという構成にしたかったが、全く持って場合分けができていなかった。列ベクトルが一次独立なときは rankA=2, 独立なベクトルがひとつなときは rankA=1, どちらもぜろのときは rankA=0 というふうに対応している。rankA=2 のときは像空間がもとの空間と一致しかつ A が全単射なので非斉次項のベクトルがなんであってもそれに対応した逆像が一点に決まる。rankA=1 のときは像空間が 1 次元の空間に潰される。非斉次項のベクトルがその像空間に入っていれば逆像が 1 次元の解空間になる。逆に入っていなければ、逆像はないつまり解はない。rankA=0 のときは簡単で全部 0 に潰される。つまり非斉次項のベクトルが 0 なら逆像はもとの 2 次元空間それ以外なら解はない。
(蛇足) 2 次元の線形方程式をいじっているときになんとなくきづいたが、行列 A の像空間と核空間 ($\{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ という空間) が一致していれば A は 2 乗して初めてゼロになる冪零行列になる。(一般には冪零行列は n 乗して初めて 0 になる行列のこと) 今ぼくが真っ最中で習っている Jordan 標準系で重要な役割を果たすので、なんとなく聞いたことある！ってなってて損はないかも。