I

次の $\boxed{}$ にあてはまる数値や符号を答えよ。
座標平面上で、x の 2 次関数

$$y = x^2 - 2ax - 2a + 15 \cdots ①$$

について考える。ただし、a は定数とする。このとき、次のことがいえる。

(1) ① のグラフの頂点の y 座標は

$$-a^2 - \boxed{ア}\ a + \boxed{イウ}$$

である。

(2) ① のグラフが x 軸と異なる 2 つの共有点をもつような a の値の範囲は

$$a < -\boxed{エ}\ ,\ \boxed{オ} < a$$

である。

(3) ① のグラフと軸の異なる 2 つの共有点が $x < 0,\ 2 < x$ の範囲にあるような a の値の範囲を次の手順で求めよう。

(i) 2 つの共有点の一方が $x < 0$ の範囲に、他方が $2 < x$ の範囲にあるような a の値の範囲は

$$\frac{\boxed{カキ}}{\boxed{ク}} < a$$

である。

(ii) 2 つの共有点がともに $x < 0$ の範囲にあるような a の値の範囲は

$$a < -\boxed{ケ}$$

である。

(iii) 2 つの共有点がともに $2 < x$ の範囲にあるような a の値の範囲は

$$\boxed{コ} < a < \frac{\boxed{サシ}}{\boxed{ス}}$$

である。

したがって、求める a の値の範囲は (i), (ii), (iii) を合わせた範囲である。

解説

(1)

♣ **放物線の頂点の座標は平方完成して求めるのが基本です．**

♣ まず，$x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2$ となることに注目しましょう．

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 2ax - 2a + 15 \\ &= x^2 - 2ax + a^2 - a^2 - 2a + 15\ (*) \\ &= (x-a)^2 - a^2 - 2a + 15 \end{aligned}$$

♣ $(*)$ の a^2 を足し引きして中和する操作が平方完成におけるかなめです．具体的な数字の場合から初めて，このような文字でも計算できるよう，修行を積みましょう．

♣ 平方完成ができれば，頂点の座標はすぐに分かります．

> 2 次関数 $y = a(x-p)^2 + q$ の頂点の座標は $(p,\ q)$．

x 座標の方は特に符号に気をつけて取り出しましょう．

♣ 今回の問題では，頂点の座標は，

$$(a,\ -a^2 - 2a + 15)$$

となります．

(2)

♣ $y = f(x)$ と x 軸の共有点の座標に関する問題は，$f(x) = 0$ の実数解に関する問題に読みかえます．

♣ x 軸は，方程式 $y = 0$ で表されるので，$y = f(x)$ と x 軸の共有点は，連立方程式

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$$

の実数解で表されます．

♣ そこで，2 次関数 $y = f(x)$ が x 軸と異なる 2 点で交わるという条件は，2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解を持つ，つまり，判別式 D の符号が正であると読みかえることができます．

♣ 2 次方程式 $Ax^2 + Bx + C = 0$ について，判別式 D は，

$$D = B^2 - 4 \cdot A \cdot C$$

で表されます．

♣ 今回の問題では，2 次方程式は，

$$x^2 - 2ax - 2a + 15 = 0$$

ですから，判別式は，

$$\begin{aligned} D &= (-2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2a + 15) \\ &= 4a^2 - 4(-2a + 15) \\ &= 4a^2 + 8a - 60 \\ &= 4(a^2 + 2a - 15) \end{aligned}$$

です（慣れてくれば，$D/4$ という方法もあります）．

♣ 今回，①のグラフは，x 軸と異なる 2 つの共有点を持つので，2 次方程式は異なる 2 つの実数解を持つ，つまり，$D > 0$ と言えます．ですから，

$$\begin{aligned} &a^2 + 2a - 15 > 0 \\ &(a+5)(a-3) > 0 \\ &a < -5,\ 3 < a \end{aligned}$$

(3)

♣ **解の配置問題**と呼ばれる，学校（非進学校）ではあまり教えてくれない，入試の定番問題です．
「与えられた範囲に 2 次方程式の解が存在する条件」，または，「与えられた区間で 2 次関数のグラフと x 軸が交わる条件」として出題されます．

♣ 解の配置問題には大きく分けて 2 つの TYPE が考えられます．

♣ 解の配置問題（TYPE.1）は次が基本です：

> 2 次関数 $y = f(x)$ について（または 2 次方程式 $f(x) = 0$ について），2 つの交点が**同一の範囲に含まれる場合**，
> ① **判別式**：2 次方程式 $f(x) = 0$ の判別式 D の符号．
> ② **軸**：グラフの軸の位置
> ③ **端点**：「$k < x$ の範囲に解を‥」のように範囲がついている場合その端点 k における値 $f(k)$ の符号

♣ 解の配置問題（TYPE.2）は次が基本です：

> 2 次関数 $y = f(x)$ について（または 2 次方程式 $f(x) = 0$ について），2 つの交点が **2 つの異なる区間に含まれる場合**，
> ① **端点の積が負**：「$a < x < b$ の範囲に解を...」なら，「$f(a)f(b) < 0$」とします．

このときは，解の個数が端点だけの情報から分かるということがポイントです．

♣ (i) は TYPE.2 の問題です．$f(x) = x^2 - 2ax - 2a + 15$ とするとき，求める条件は，

$$f(0) < 0 \text{ かつ } f(2) < 0$$

です．これを解くと，

$$\begin{aligned} f(0) = 0^2 - 2a \cdot 0 - 2a + 15 < 0 \text{かつ } & f(2) = 2^2 - 2a \cdot 2 - 2a + 15 < 0 \\ -2a + 15 < 0 \text{ かつ } & -6a + 19 < 0 \\ \frac{15}{2} < a \text{ かつ } & \frac{19}{6} < a \\ \frac{15}{2} < a & \end{aligned}$$

I

次の $\boxed{}$ にあてはまる数値や符号を答えよ。
座標平面上で、x の 2 次関数

$$y = x^2 - 2ax - 2a + 15 \cdots ①$$

について考える。ただし、a は定数とする。このとき、次のことがいえる。

(1) ① のグラフの頂点の y 座標は

$$-a^2 - \boxed{ア}\,a + \boxed{イウ}$$

である。

(2) ① のグラフが x 軸と異なる 2 つの共有点をもつような a の値の範囲は

$$a < -\boxed{エ},\ \boxed{オ} < a$$

である。

(3) ① のグラフと軸の異なる 2 つの共有点が $x < 0,\ 2 < x$ の範囲にあるような a の値の範囲を次の手順で求めよう。

(i) 2 つの共有点の一方が $x < 0$ の範囲に、他方が $2 < x$ の範囲にあるような a の値の範囲は

$$\frac{\boxed{カキ}}{\boxed{ク}} < a$$

である。

(ii) 2 つの共有点がともに $x < 0$ の範囲にあるような a の値の範囲は

$$a < -\boxed{ケ}$$

である。

(iii) 2 つの共有点がともに $2 < x$ の範囲にあるような a の値の範囲は

$$\boxed{コ} < a < \frac{\boxed{サシ}}{\boxed{ス}}$$

である。

したがって、求める a の値の範囲は (i), (ii), (iii) を合わせた範囲である。

♣ (ii) は TYPE.1 の問題です．異なる 2 つの共有点がともに $x < 0$ にあるための条件は，判別式，軸，端点の情報を調べれば良いので，

$$\begin{cases} \text{判別式 } D > 0 \cdots ① \\ \text{軸の位置 } < 0 \cdots ② \\ \text{端点の値 } f(0) > 0 \cdots ③ \end{cases}$$

を解くことになります．

♣ まず，$x^2 - 2ax - 2a + 15 = 0$ の判別式は

$$\begin{aligned} D &= (2a)^2 - 4(-2a + 15) \\ &= 4a^2 + 8a - 60 \\ &= 4(a^2 + 2a - 15) \end{aligned}$$

ですから，条件 $D > 0$ は，

$$\begin{aligned} a^2 + 2a - 15 &> 0 \\ (a+5)(a-3) &> 0 \\ a < -5,\ 3 < a &\cdots ① \end{aligned}$$

となります．

♣ 次に，軸の位置には，(1) より，$x = a$ でしたから，

$$a < 0 \cdots ②$$

が求める条件になります．

♣ 最後に端点 $f(0) = -2a + 15$ なので，

$$\begin{aligned} -2a + 15 &> 0 \\ 2a &< 15 \\ a &< \frac{15}{2} \cdots ③ \end{aligned}$$

が最後の条件です．

♣ ①，②，③の共通部分をとることにより，

$$a < -5$$

♣ (iii) もやはり，TYPE.1 の問題です．異なる 2 つの共有点がともに $2 < x$ にあるための条件は，判別式，軸，端点の情報を調べれば良いので，

$$\begin{cases} \text{判別式 } D > 0 \cdots ① \\ \text{軸の位置 } > 2 \cdots ② \\ \text{端点の値 } f(2) > 0 \cdots ③ \end{cases}$$

を解くことになります．

♣ 判別式に関する条件は (ii) のものをそのまま使いましょう．

$$a < -5,\ 3 < a \cdots ①$$

♣ 軸 $x = a$ の位置に関する条件は，

$$a > 2 \cdots ②$$

となります．

♣ 最後に，

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^2 - 2a \cdot 2 - 2a + 15 \\ &= -6a + 19 \end{aligned}$$

ですから，求める条件は，

$$\begin{aligned} -6a + 19 &> 0 \\ a &< \frac{19}{6} \cdots ③ \end{aligned}$$

♣ ①，②，③の共通部分をとり，

$$3 < a < \frac{19}{6}$$

Ⅱ 次の $\boxed{}$ にあてはまる数値や符号を答えよ。(33 点)
四角形 ABCD において、$\angle A = 30°$、$\angle B = 165°$、$\angle C = 90°$、$AB = \sqrt{3} - 1$、$AD = 2$ とする。
このとき、次のことがいえる。

(1) 四角形 ABCD の対角線 BD の長さは

$$BD = \sqrt{\boxed{\text{ア}}}$$

である。

(2) $\triangle ABD$ において

$$\cos \angle ABD = \frac{\boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

である。

(3) 線分 BC の長さは

$$BC = \frac{\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

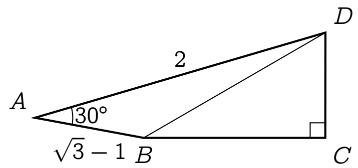
である。

(4) 四角形 ABCD の面積 S は

$$S = \frac{\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}} - \boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$$

である。

♣ 与えられた図形は，次の通り；



(1) 余弦定理より，

$$\begin{aligned} BD^2 &= AB^2 + AD^2 - 2AD \cdot AB \cos 30° \\ &= (\sqrt{3}-1)^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3}-1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 4 - 2\sqrt{3} + 4 - 2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

ゆえに，$BD = \sqrt{2}$

(2) 余弦定理より，

$$\begin{aligned} \cos \angle ABD &= \frac{BD^2 + AB^2 - AD^2}{2AB \cdot BD} \\ &= \frac{2 + 4 - 2\sqrt{3} - 4}{2 \cdot (\sqrt{3}-1) \cdot \sqrt{2}} \\ &= \frac{2(1-\sqrt{3})}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)} \\ &= \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

(3) (2) より，$\angle ABD = 135°$ $\angle B = 165°$ だから，$\angle CBD = 165° - 135° = 30°$．したがって，

$$BC = BD \cos 30° = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

(4)

$$\begin{aligned} S &= \triangle ABD + \triangle BDC \\ &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin 30° + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot BD \sin 30° \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{3}-1) \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{2\sqrt{3}-2}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{3\sqrt{3}-2}{4} \end{aligned}$$

Ⅲ 次の$\boxed{}$に当てはまる数値や符号を答えよ．(34 点)

(1) 60 と 252 の最大公約数を G，最小公倍数を L とする．

1. このとき，
$$G = \boxed{アイ},\ L = \boxed{ウエオカ}$$
である．
2. $A = aG$，$B = bG$ とする．ただし，a と b は互いに素である自然数で $a < b$ とする．
A と B の最小公倍数が L のとき，
$$ab = \boxed{キクケ}$$
である．このとき，$A + B$ が最小となるような a と b の値は，
$$a = \boxed{コ},\ b = \boxed{サシ}$$
である．

(2) 2 つの整数 m，n を 7 で割った余りが，それぞれ 3，5 である．このとき，次のことが言える．

(i) $2m + n$ を 7 で割った余りは $\boxed{ス}$ である．
(ii) m^3 を 7 で割った余りは $\boxed{セ}$ である．
(iii) $m^2 - n^2$ を 7 で割った余りは $\boxed{ソ}$ である．

(1) (i) $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$，$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$ であるから，$G = \mathbf{12}$，$L = \mathbf{1260}$ である．
(ii) $A = aG$，$B = bG$ について，a と b が互いに素であるから，
$$L = abG$$
とかける．ゆえに，
$$ab = \frac{L}{G} = \frac{1260}{12} = \mathbf{105}$$
である．
また，
$$A + B = (a + b)G$$
であるから，$A + B$ が最小であるとき，$a + b$ は最小．ここで，a と b は互いに素なので，$a \neq 1$．$a < b$ かつ $a \neq 1$ となる数の組合わせと，$a + b$ の値は次の表の通り：

a	3	5	7
b	35	21	15
$a+b$	38	26	22

ゆえに，$a = \mathbf{7}$，$b = \mathbf{15}$ で $A + B$ が最小となる．

(2) 7 を法とする合同式を考える．このとき，$m \equiv 3$，$n \equiv 5$ である．
(i)
$$\begin{aligned} 2m + n &\equiv 2 \cdot 3 + 5 \\ &\equiv 11 \\ &\equiv \mathbf{4} \end{aligned}$$
(ii)
$$\begin{aligned} m^3 &\equiv 3^3 \\ &\equiv \mathbf{6} \end{aligned}$$
(iii)
$$\begin{aligned} m^2 - n^2 &\equiv 3^2 - 5^2 \\ &\equiv 2 - 4 \\ &\equiv -2 \\ &\equiv \mathbf{5} \end{aligned}$$

/一般選抜/2 月 2 日

1 次の$\boxed{}$に当てはまる数値や符号を答えよ．(37 点)

(1) 1〜200 までの番号がついた 200 個のボールが袋の中に入っている．次の①〜③の順番でボールを袋から取り出す．ただし，取り出したボールは袋に戻さないものとする．

① 7 の倍数の番号がついたボールをすべて取り出す
② 5 の倍数の番号がついたボールをすべて取り出す
③ 2 の倍数の番号がついたボールをすべて取り出す

このとき，次のことがいえる．

(i) ①の操作で取り出したボールの数は，

$\boxed{\text{アイ}}$ 個

である．

(ii) ②の操作の後で袋の中に残っているボールの数は，

$\boxed{\text{ウエオ}}$ 個

である．

(iii) ③の操作の後で袋の中に残っているボールの数は，

$\boxed{\text{カキ}}$ 個

である．

(2) 3 で割ると 2 余り，5 で割ると 1 余り，7 で割ると 6 余る自然数のうち最小の数は，

$\boxed{\text{クケ}}$

であり，3 桁で最大の数は

$\boxed{\text{コサシ}}$

である．

(3) $\sqrt{\dfrac{135n}{28}}$ が有理数となるような自然数 n のうち最小の数は，

$\boxed{\text{スセソ}}$

である．

(1)

1 から 200 までの自然数の集合を U，U の要素のうち，7 の倍数，5 の倍数，2 の倍数からなる部分集合をそれぞれ，A，B，C とする．

(i)

$$200 \div 7 = 28 \ldots 4$$

したがって，**28** 個．

(ii) 求める要素の個数は，

$$n(U) - n(A \cup B) = n(U) - n(A) - n(B) + n(A \cap B)$$

である．ここで，

$$200 \div 5 = 40,\ 200 \div 35 = 5 \ldots 25$$

であるから，$n(A) = 40$，$n(A \cap B) = 5$．よって，求める要素の個数は，

$$200 - 28 - 40 + 5 = \mathbf{137}$$

(iii) 求める要素の個数は，

$$\begin{aligned} & n(U) - n(A \cup B \cup C) \\ &= n(U) - n(A) - n(B) - n(C) \\ &\qquad + n(A \cup B) + n(B \cup C) + n(C \cup A) \\ &\qquad - n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

ここで，

$$200 \div 2 = 100,\ 200 \div 14 = 14 \ldots 4,\ 200 \div 10 = 20,\ 200 \div 105 = 1 \ldots 95$$

であるから，$n(C) = 100$，$n(B \cap C) = 14$，$n(C \cap A) = 20$，$n(A \cap B \cap C) = 1$．ゆえに，求める要素の個数は，

$$\begin{aligned} & 200 - 28 - 40 - 100 + 5 + 14 + 20 - 1 \\ &= \mathbf{70} \end{aligned}$$

(2) 題意の自然数を n とするとき，整数 a，b を用いて，

$$n = 3a + 2 = 5b + 1 \cdots ①$$

とかける．このとき，

$$3a + 2 = 5b + 1$$
$$3a - 5b = -1$$

この特殊解は，$a = -2$，$b = -1$ である．ゆえに，

$$3(a + 2) - 5(b + 1) = 0$$

であるから，整数 k を用いて，

$$\begin{cases} a = 5k - 2 \\ b = 3k - 1 \end{cases}$$

と表せる．このとき，n は，①にこれを代入することにより，

$$n = 3(5k - 2) + 2 = 5(3k - 1) + 1 = 15k - 4 \cdots ②$$

また，n は 7 で割ると 6 余る自然数であるから，整数 c を用いて，

$$n = 15k - 4 = 7c + 6$$

のようにも表せる．このとき，

$$15k - 4 = 7c + 6$$
$$15k - 7c = 10 \cdots ③$$

ここで，$15 - 7 \cdot 2 = 1$ であるから，③の特殊解は，$k = 10$，$c = 20$ である．したがって，

$$15(k - 10) - 7(c - 20) = 0$$

ゆえに，整数 l を用いて，

$$\begin{cases} k = 7l + 10 = 7l' + 3 \\ c = 15l + 20 = 15l' + 5 \quad (\quad l' = l + 1) \end{cases}$$

よって，これらを②に代入すると，

$$n = 15(7l' + 3) - 4 = 7(15l' + 5) + 6 = 105l' + 41$$

ゆえに，このような数のうち最も小さな自然数は，**41** $(l' = 0)$ で，最も大きな 3 桁の数は，**986** $(l' = 9)$．

(3) $135 = 3^3 \cdot 5$，$28 = 2^2 \cdot 7$ であるから，

$$\sqrt{\frac{135n}{28}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3 \cdot 5 \cdot n}{7}}$$

これが有理数となるとき，

$$n = p \cdot 3^{2a-1} \cdot 5^{2b-1} \cdot 7^{2c-1},\ (a,\ b,\ c,\ p \text{は正の整数})$$

の形である．このうち，最小のものは，

$$n = 3 \cdot 5 \cdot 7 = \mathbf{105}$$

Ⅱ 次の$\boxed{}$にあてはまる数値や符号を答えよ．(38 点)
座標平面上で，次の円 C と直線 l について考える．

$$\begin{cases} C\colon x^2+y^2-6y-7=0 \\ \ell\colon y=ax-6a+7 \end{cases}$$

ただし，a は定数とする．このとき，次のことがいえる．
(1) 円 C の中心の座標は

$$\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\right)$$

であり，半径は，

$$\boxed{\text{ウ}}$$

である．
また，直線 ℓ は定数 a の値に関係なく，点 $\left(\boxed{\text{エ}},\ \boxed{\text{オ}}\right)$ を通る．

(2) 円 C と直線 ℓ が異なる 2 点で交わるとき，定数 a のとり得る値の範囲は，

$$\boxed{\text{カ}} < a < \frac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

である．

(3) 点 $(0,\ -5)$ を通り，円 C に接する直線を m と n とする（ただし，傾きが正の直線を m とし，傾きが負の直線を n とする）．直線 m と円 C の接点を P とし，直線 n と円 C の接点を Q とする．このとき，次のことがいえる．
(i) 直線 m の方程式は

$$y=\sqrt{\boxed{\text{コ}}}\,x-\boxed{\text{サ}}$$

であり，点 Q の座標は，

$$Q\left(\boxed{\text{シス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}},\ \boxed{\text{ソ}}\right)$$

である．
(ii) 円 C の孤 PQ のうち，線分 PQ の下側にある方の弧と直線 m，n で囲まれた図形の面積 S は

$$S=\boxed{\text{タチ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}-\frac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}\pi$$

である．

(1)
円 C の方程式を平方完成すると，

$$x^2+y^2-6y-7=0$$
$$x^2+(y-3)^2=16$$

であるから，円 C の中心は，$(0,\ 3)$ であり，半径は 4 である．
また，直線 l の方程式を a について整理すると，

$$y=ax-6a+7$$
$$ax-6a+7-y=0$$
$$a(x-6)-(y-7)=0$$

ゆえに，どんな a についても，$x=6$，$y=-7$ はこの方程式の解である．よって，求める点の座標は，$(6,\ 7)$．

(2) 円 C の中心と直線 ℓ の距離を d とすると，円 C と直線 ℓ が異なる 2 点で交わるための必要十分条件は，

$$d<4$$

である．ここで，

$$\begin{aligned} d&=\left.\frac{|y-ax+6a-7|}{\sqrt{1^2+(-a)^2}}\right|_{x=0,\ y=3} \\ &=\frac{|3+6a-7|}{\sqrt{a^2+1}} \\ &=\frac{|6a-4|}{\sqrt{a^2+1}} \end{aligned}$$

であるから，求める条件は，

$$\frac{|6a-4|}{\sqrt{a^2+1}}<4$$
$$|6a-4|<4\sqrt{a^2+1}$$
$$|3a-2|<2\sqrt{a^2+1}$$
$$9a^2-12a+4<4a^2+4$$
$$5a^2-12a<0$$
$$a(5a-12)<0$$
$$\mathbf{0<a<\frac{12}{5}}$$

(3) (i)$x=0$ は接線ではない．点 $(0,\ -5)$ を通る $x=0$ 以外の直線は，実数 u を用いて，$y=ux-5$ と表せる．よって，これが円 C と接するとき，中心と直線との距離が半径に等しいので，

$$\frac{|3-0+5|}{\sqrt{u^2+1}}=4$$
$$8=4\sqrt{u^2+1}$$
$$2=\sqrt{u^2+1}$$
$$4=u^2+1$$
$$u^2=3$$
$$u=\pm\sqrt{3}$$

したがって，m の方程式は，

$$\boldsymbol{y=\sqrt{3}x-5}$$

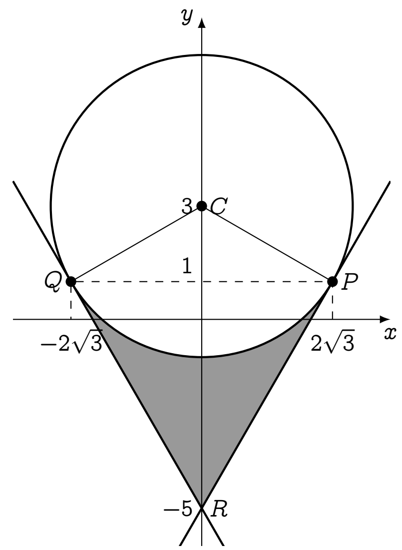
である．また，このとき，円 C と m の接点 P の座標は，連立方程式

$$\begin{cases} x^2+(y-3)^2=16\cdots① \\ y=\sqrt{3}x-5\cdots② \end{cases}$$

の解である．②を①に代入して，

$$x^2+(\sqrt{3}x-8)^2=16$$
$$4x^2-16\sqrt{3}x+48=0$$
$$x^2-4\sqrt{3}x+12=0$$
$$(x-2\sqrt{3})^2=0$$
$$x=2\sqrt{3}$$

である．これを②に代入して，$y=1$．ゆえに，$P(2\sqrt{3},\ 1)$．Q は P と y 軸に対して対称な位置にあるので（∵ 円 C は y 軸に関して対称な図形で，m と n も y 軸に関して対称だから，それらの交点もやはり y 軸に関して対称），$Q(-2\sqrt{3},\ 1)$ である．
(ii) 求める図形は以下の図の通り．



m と n の交点を R とする．このとき，

$$S=\triangle PQR+\triangle PCQ-\text{扇形}\,CPQ$$

であり，$\angle PCQ=120^\circ$ であるから，

$$\begin{aligned} S&=4\sqrt{3}\times(1-(-5))\times\frac{1}{2}+4\sqrt{3}\times(3-1)\times\frac{1}{2}-\pi\times4^2\times\frac{120}{360} \\ &=4\sqrt{3}\times8\times\frac{1}{2}-\frac{16\pi}{3} \\ &=\mathbf{16\sqrt{3}-\frac{16}{3}\pi} \end{aligned}$$

Ⅲ 次の$\boxed{}$に当てはまる数値や符号を答えよ．(38 点)
次の 2 つの関数

$$\begin{cases} f(x) = \log_2 ax \\ g(x) = 3 + 2\log_{\frac{1}{2}} x \end{cases}$$

について考える．ただし，a は定数とする．また，$f(2) = 2$ である．このとき，次のことがいえる．

(1) a と $g(2)$ の値は，

$$a = \boxed{ア},\ g(2) = \boxed{イ}$$

である．

(2) $t = \log_2 x$ とする．$f(x) \cdot g(x)$ を t を用いて表すと，

$$f(x) \cdot g(x) = \boxed{ウエ}\,t^2 + t + \boxed{オ}$$

である．

(3) 方程式 $f(x) \cdot g(x) = k$ の解のうち (ただし，k は定数とする)．$1 \leqq x \leqq 2$ の範囲に含まれる解の個数を次のように求めよう．
$1 \leqq x \leqq 2$ のとき，t の値の範囲は，

$$\boxed{カ} \leqq t \leqq \boxed{キ}$$

である．
$y = \boxed{ウエ}\,t^2 + t + \boxed{オ}$ のグラフと直線 $y = k$ の共有点の個数は求める解の個数と一致する．
したがって，

(i) $\boxed{カ} \leqq k < \dfrac{\boxed{ケコ}}{\boxed{サ}}$ のとき，解の個数は $\boxed{シ}$ 個である．

(ii) $\boxed{ス} \leqq k < \boxed{ク}$，$k = \dfrac{\boxed{ケコ}}{\boxed{サ}}$ のとき，解の個数は $\boxed{セ}$ 個である．

(iii) $k < \boxed{ス}$，$\dfrac{\boxed{ケコ}}{\boxed{サ}} < k$ のとき，解の個数は $\boxed{ソ}$ 個である．

(1)

$$\begin{aligned} f(2) &= \log_2 2a \\ &= \log_2 2 + \log_2 a \\ &= 1 + \log_2 a \end{aligned}$$

であるから，$f(2) = 2$ のとき，

$$\log_2 a = 1$$

これを解いて，$\boldsymbol{a = 2}$．
また，

$$\begin{aligned} g(2) &= 3 + 2\log_{\frac{1}{2}} 2 \\ &= 3 - 2 = \mathbf{1} \end{aligned}$$

(2)
$a = 2$ を代入すると，

$$f(x) = \log_2 2x = \log_2 2 + \log_2 x = 1 + \log_2 x$$

また，$g(x)$ に底の変換公式を用いて，

$$\begin{aligned} g(x) &= 3 + 2\log_{\frac{1}{2}} x \\ &= 3 + 2\frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} \\ &= 3 - 2\log_2 x \end{aligned}$$

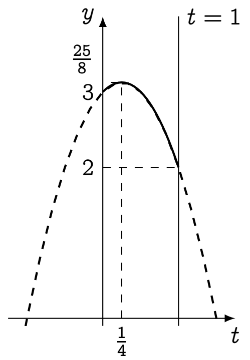
よって，

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= (1 + \log_2 x)(3 - 2\log_2 x) \\ &= (1 + t)(3 - 2t) \\ &= \boldsymbol{-2t^2 + t + 3} \end{aligned}$$

(3) $1 \leqq x \leqq 2$ のとき，$\log_2 1 \leqq \log_2 x \leqq \log_2 2$ であるから，

$$0 \leqq t \leqq 1$$

ここで，$y = -2t^2 + t + 3$ の $0 \leqq t \leqq 1$ におけるグラフは次の通り．



よって，$\boldsymbol{3 \leqq k < \frac{25}{8}}$ のとき，解の個数は **2** 個である．
また，$\boldsymbol{2 \leqq k < 3}$，$\boldsymbol{k = \frac{25}{8}}$ のとき，解の個数は **1** 個である．
さらに，$\boldsymbol{k < 2}$，$\boldsymbol{\frac{25}{8} < k}$ のとき，解の個数は **0** 個である．

Ⅳ 次の$\boxed{}$に当てはまる数値や符号を答えよ．(37 点)
座標平面上で，次の x の 3 次関数

$$f(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 9x^2 + 23x - 15)$$

について考える．このとき，次のことがいえる．

(1) 方程式 $f(x) = 0$ の解の中で，

最小の値は $\boxed{ア}$，最大の値は $\boxed{イ}$

である．$y = f(x)$ のグラフ上の x 座標の値が $\boxed{ア}$ である点における接線 ℓ の方程式は，

$$\ell\colon y = \frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}x - \frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$$

である．

(2) $y = f(x)$ のグラフと ℓ の共有点について，x 座標の値が $\boxed{ア}$ である点を A とする．A とは異なる共有点 B の座標は

$$B\left(\boxed{キ},\ \boxed{クケ}\right)$$

である．

(3) $y = f(x)$ のグラフ上を A から B まで移動する点 P（A，B は除く）を考える．$\triangle ABP$ の面積 S が最大となるとき，面積 S は

$$S = \boxed{コサ}$$

である．

$f(1) = 0$ であるから，因数定理より，$x - 1$ は $f(x)$ の因数である．したがって，

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3}(x-1)(x^2 - 8x + 15) \\ &= \frac{1}{3}(x-1)(x-3)(x-5) \end{aligned}$$

ゆえに，方程式 $f(x) = 0$ の解は，$x = 1,\ 3,\ 5$ である．最小の値は **1**，最大の値は **5** である．

$$f'(x) = \frac{1}{3}(3x^2 - 18x + 23)$$

ゆえに，$f'(1) = \frac{1}{3} \cdot 8 = \frac{8}{3}$．したがって，$x = 1$ における接線の方程式は，

$$y = \frac{8}{3}(x - 1)$$

すなわち，

$$\boldsymbol{y = \frac{8}{3}x - \frac{8}{3}}$$

(2) $y = f(x)$ のグラフと ℓ の共有点の座標は，連立方程式

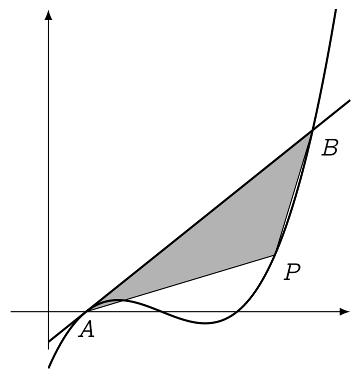
$$\begin{cases} y = f(x) \cdots ① \\ y = \frac{8}{3}x - \frac{8}{3} \cdots ② \end{cases}$$

の解である．したがって，①に②を代入することにより，

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{8}{3}x - \frac{8}{3} \\ \frac{1}{3}(x^3 - 9x^2 + 23x - 15) &= \frac{8}{3}x - \frac{8}{3} \\ x^3 - 9x^2 + 23x - 15 &= 8x - 8 \\ x^3 - 9x^2 + 15x - 7 &= 0 \\ (x-1)(x^2 - 8x + 7) &= 0 \\ (x-1)^2(x-7) &= 0 \\ x &= 1,\ 7 \end{aligned}$$

B は A とは異なる点であるから，$B(\mathbf{7},\ \mathbf{16})$

(3) P の座標を $(t,\ f(t))$ とする．



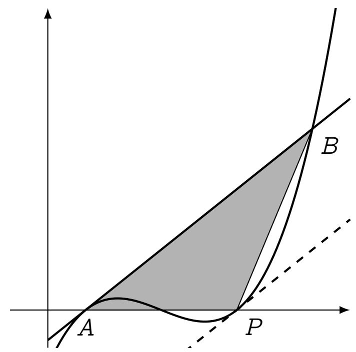
直線 AB と P との距離を $d(t)$ とすると，$\triangle ABP$ の面積 S は，

$$S = \frac{1}{2}AB \times d(t)$$

で表される．ここで，AB は t によらない定数だから，S が最大となるのは，$d(t)$ が最大になるときである．直線 AB と傾きが等しい直線が曲線 $y = f(x)$ に接するようにとると，この接点が P と直線 AB の距離 $d(t)$ を最大にする点である．
AB の傾きは $\frac{8}{3}$ であるから，$f'(x) = \frac{8}{3}$ を解いて，

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(3x^2 - 18x + 23) &= \frac{8}{3} \\ 3x^2 - 18x + 23 &= 8 \\ 3x^2 - 18x + 15 &= 0 \\ x^2 - 6x + 5 &= 0 \\ (x-1)(x-5) &= 0 \\ x &= 1,\ 5 \end{aligned}$$

P は A と異なる点であるから，$x = 5$．そして，$P(5,\ 0)$ である．



このような P について，

$$S = \frac{1}{2} \times 5 \times 16 = \mathbf{40}$$

一般選抜入試 2 月 7 日実施

[I] 次の$\boxed{}$にあてはまる数値や符号を答えよ．(36 点)

あるサッカー大会では参加チームを 5 ブロックに分けてトーナメント方式（1 試合ずつ対戦する勝ち抜き方式）で予選を行う．その後，各ブロックで 1 位となった 5 チームで各チームと 1 試合ずつ対戦する総当たり戦を行う．大会全体の総試合数は 300 試合である．大会の全試合において 2 つのチームが対戦するときの勝敗の確率は $\frac{1}{2}$ であり，引き分け及び棄権はないものとする．このとき，次のことがいえる．

(1) 各ブロックで 1 位となった 5 チームでの総当たり戦は全部で

$\boxed{アイ}$ 試合

行われる．

(2) この大会の参加チームの数は全部で

$\boxed{ウエオ}$ チーム

である．

(3) 総当たり戦で 4 敗のチームが現れる確率は

$$\frac{\boxed{カ}}{\boxed{キク}}$$

である．

(4) 総当たり戦で 3 勝 1 敗のチームが 3 チーム現れる確率は

$$\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コサシ}}$$

である．

(1) 試合数は，5 つのチームから 2 チームの組み合わせを作る作り方に等しいので，

$${}_5C_2 = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = \textbf{10 試合}$$

(2) トーナメントにおける試合数は，

$$300 - 10 = 290 \text{ 試合}$$

である．トーナメントにおいて，各試合につき，優勝する 5 チーム以外は全て 1 度負けるので，

（トーナメントの試合数）=（参加チーム数）−（優勝するチーム数）

が成り立つ．したがって，参加したチームの数は，

$$290 + 5 = \textbf{295 チーム}$$

である．

(3) 総当たり戦で 4 敗するチームが現れるとき，他のチームが 4 敗することはない．したがって，このようなチームは 5 通り考えられて，それぞれの場合において 4 敗する確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

であるから，求める確率は，

$$\frac{1}{16}\times 5 = \boldsymbol{\frac{5}{16}}$$

(4) 時系列に追いながら，確率を決定する．総当たり戦で 3 勝 1 敗のチームのうち，特定の 1 チームの選び方は，5 通りである．そのチームを A とする．まず，A について，3 勝 1 となる確率は，反復試行の確率公式より，

$${}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right) = 4\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$

A チームが 2 つのチームに負けていることはあり得ない (∵ 2 敗した場合は 3 勝 1 敗とならない)．そこで，3 勝 1 敗のチームのうち，A と異なるものを A に負けたチームから選ぶことができる．この選び方は，3 通り．これを B チームとする．B が 3 勝 1 敗となるためには，A 以外の対戦で全て勝つ必要があるから，このようなことは

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

の確率で起こる．A に負けたチームでは，この時点で 2 敗が決定する．したがって，3 勝 1 敗のチームが 3 チームになるためには，A チームに勝ったチームが B チーム以外の 2 チームに勝つ必要がある．これが起こるのは，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

の確率である．したがって，求める確率は，

$$5\times\frac{1}{4}\times 3\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{4} = \boldsymbol{\frac{15}{128}}$$

→ ごめんなさい．ここの部分は手続的で分かりにくいかもです．もう少し論理的な説明が思いつけば修正します．(おそらく，口で説明する分にはこちらでも大丈夫だと思うので，直接質問に来てください．)

Ⅱ 次の$\boxed{}$にあてはまる数値や符号を答えよ．(38 点)
座標平面上に 2 点 $A(3,\ 2)$，$B(1,\ -2)$ を通るような円 C を考える．

$$C\colon x^2+y^2-8x+ay+b=0$$

ただし，a，b は定数とする．このとき，次のことがいえる．

(1) a と b の値は

$$a=\boxed{\text{ア}}\,,\ b=\boxed{\text{イ}}$$

である．

(2) 円 C の中心の座標は $\left(\boxed{\text{ウ}},\ \boxed{\text{エオ}}\right)$ であり，半径は $\sqrt{\boxed{\text{カキ}}}$
である．また，点 A における円 C の接線の方程式は，

$$y=\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}x+\boxed{\text{コ}}$$

である．

(3) 直線 AB と円 C で囲まれた 2 つの領域のうち，直線 AB の上側の部分の領域を D とする．ただし，境界線を含むものとする．点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，

$$x-y \text{ の最大値は } \boxed{\text{サ}}$$

であり，

$$x-y \text{ の最小値は } \boxed{\text{シ}}-\boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}$$

である．

(1) C の方程式 $x^2+y^2-8x+ay+b=0$ に，$A(3,\ 2)$，$B(1,\ -2)$ を代入して，

$$3^2+2^2-8\cdot 3+a\cdot 2+b=0$$
$$1^2+(-2)^2-8\cdot 1+a\cdot(-2)+b=0$$

これを整理して，

$$2a+b=11$$
$$-2a+b=3$$

これを解いて，$\boldsymbol{a=2, b=7}$ である．

(2) (1) で求めた値を，円 C の方程式に代入すると，

$$x^2+y^2-8x+ay+b=0$$
$$x^2+y^2-8x+2y+7=0$$
$$(x-4)^2+(y+1)^2=16+1-7$$
$$(x-4)^2+(y+1)^2=10$$

したがって，円 C の中心は，$\boldsymbol{(4,\ -1)}$，半径は $\boldsymbol{\sqrt{10}}$ である．A における円 C の接線は，円の接線の公式より，

$$(3-4)(x-4)+(2+1)(y+1)=10$$
$$-x+4+3y+3=10$$
$$-x+3y=3$$
$$\boldsymbol{y=\frac{1}{3}x+3}$$

である．

(3) まず，直線 AB の方程式を求める．直線 AB の傾きは，

$$\frac{2-(-2)}{3-1}=2$$

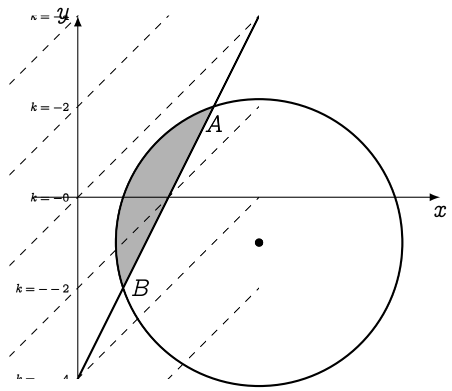
であるから，方程式は，

$$y-2=2(x-3)$$

すなわち，

$$y=2x-4$$

である．
ここで，$x-y=k$ とする．D は次の図の通り（ただし，境界線を含む）．



k が最大になるのは，図より，$x-y=k$ が B を通るときで，

$$k=1-(-2)=\boldsymbol{3}$$

のとき．
k が最小になるのは，図より，$x-y=k$ が C に接するときである．このとき，$x-y=k$ を C の方程式に代入すると，

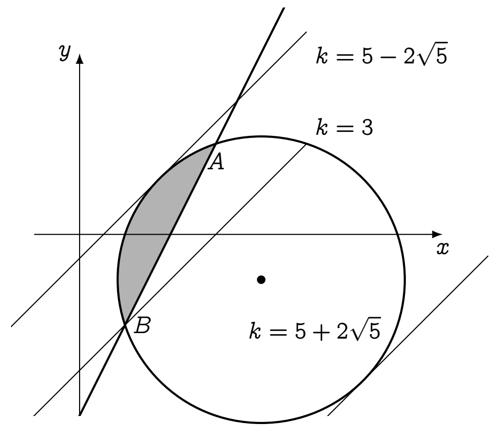
$$(x-4)^2+(x-k+1)^2=10$$
$$x^2-8x+16+x^2+2(1-k)x+(1-k)^2=10$$
$$2x^2+(-6-2k)x+(k^2-2k+7)=0$$

この判別式 D について，$D=0$ であるから，

$$0=D/4=(-3-k)^2-2(k^2-2k+7)$$
$$=k^2+6k+9-2k^2+4k-14$$
$$=-k^2+10k-5$$
$$0=k^2-10k+5$$
$$k=5\pm\sqrt{25-5}$$
$$=5\pm2\sqrt{5}$$

図より，領域において接するのは，k の値のうち，小さな方だから，

$$\boldsymbol{k=5-2\sqrt{5}}$$



Ⅲ 次の$\boxed{}$にあてはまる数値や符号を答えよ．(38 点)
次の x の 2 次方程式

$$x^2+2(1-\cos\theta)x+3-\sin^2\theta-2\sin 2\theta-2\sin\theta=0\cdots①$$

について考える．ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする．このとき，次のことがいえる．

(1) 2 次方程式①が，異なる 2 つの実数解を持つとき

$$2\sin 2\theta+\boxed{\text{ア}}\sin\theta-\boxed{\text{イ}}\cos\theta-\boxed{\text{ウ}}>0\cdots②$$

を満たす．
よって，不等式②を満たす θ の値の範囲は，

$$\frac{\pi}{\boxed{\text{エ}}}<\theta<\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\pi,\quad \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\pi<\theta<\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\pi$$

である．

(2) $x=\sin\theta$ が 2 次方程式①の解となるような θ は，全部で

$\boxed{\text{サ}}$ 個

ある．
その中で，最も小さい θ の値は，

$$\theta=\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\pi$$

である．

(3) $\theta=\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\pi$ のとき，2 次方程式①の $x=\sin\theta$ 以外の解は，

$$x=\frac{\boxed{\text{セソ}}+\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}}$$

である．

(1) ①の判別式を D とすると，

$$\begin{aligned}D/4&=(1-\cos\theta)^2-(3-\sin^2\theta-2\sin 2\theta-2\sin\theta)\\&=1-2\cos\theta+\cos^2\theta-3+\sin^2\theta+2\sin 2\theta+2\sin\theta\\&=\mathbf{2\sin 2\theta+2\sin\theta-2\cos\theta-1}>0\\&\quad(\because\ \cos^2\theta+\sin^2\theta=1)\end{aligned}$$

次に，②を解く：

$$\begin{aligned}2\sin 2\theta+2\sin\theta-2\cos\theta-1&>0\\4\sin\theta\cos\theta+2\sin\theta-2\cos\theta-1&>0\\(2\sin\theta-1)(2\cos\theta+1)&>0\end{aligned}$$

したがって，$\sin\theta>\dfrac{1}{2}$，または，$\cos\theta>-\dfrac{1}{2}$ である．
ゆえに，

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{2}{3}\pi,\quad \frac{2}{3}\pi<\theta<\frac{4}{3}\pi}$$

である．
(2) $x=\sin\theta$ が①の解となるとき，$f(x)=x^2+2(1-\cos\theta)x+3-\sin^2\theta-2\sin 2\theta-2\sin\theta$ とすると，$f(\sin\theta)=0$ であるから，

$$\begin{aligned}0=f(\sin\theta)&=\sin^2\theta+2(1-\cos\theta)\sin\theta+3-\sin^2\theta-2\sin 2\theta-2\sin\theta\\&=2(1-\cos\theta)\sin\theta+3-2\sin 2\theta-2\sin\theta\\&=2\sin\theta-2\cos\theta\sin\theta+3-2\sin 2\theta-2\sin\theta\\&=3-3\sin 2\theta\end{aligned}$$

よって，$\sin 2\theta=1$．これを $0\leqq\theta<2\pi$ において，解くと，

$$\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi$$

ゆえに，**2 つ**存在する．
その中で最も小さな θ は，

$$\boldsymbol{\theta=\frac{1}{4}\pi}$$

である．
(3) $\theta=\dfrac{1}{4}\pi$ のとき，

$$\begin{aligned}&x^2+2\,(1-\cos\theta)\,x+3-\sin^2\theta-2\sin 2\theta-2\sin\theta\Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}}\\&=x^2+2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x+3-\frac{1}{2}-2-\sqrt{2}\\&=x^2+(2-\sqrt{2})x+\frac{1-2\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

したがって，求める解は，2 次方程式 $x^2+(2-\sqrt{2})x+frac1-2\sqrt{2}2=0$ を解いて，

$$\begin{aligned}x^2+(2-\sqrt{2})x+\frac{1-2\sqrt{2}}{2}&=0\\2x^2+2(2-\sqrt{2})x+(1-2\sqrt{2})&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x&=\frac{-2+\sqrt{2}\pm\sqrt{(2-\sqrt{2})^2-2(1-2\sqrt{2})}}{2}\\&=\frac{-2+\sqrt{2}\pm\sqrt{(6-4\sqrt{2})-(2-4\sqrt{2})}}{2}\\&=\frac{-2+\sqrt{2}\pm\sqrt{4}}{2}\\&=\frac{-2+\sqrt{2}\pm 2}{2}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{-4+\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$x\neq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ であるから，

$$\boldsymbol{x=\frac{-4+\sqrt{2}}{2}}$$

参考
2 次方程式は，途中で $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ が必ず解になることに気がついて，因数分解を行った方が，スマートな解答になる：

$$\begin{aligned}2x^2+2(2-\sqrt{2})x+(1-2\sqrt{2})&=0\\2x^2+(4-2\sqrt{2})x+(1-2\sqrt{2})&=0\\2\sqrt{2}x^2+(4\sqrt{2}-4)x+(\sqrt{2}-4)&=0\\(\sqrt{2}x-1)(2x-(\sqrt{2}-4))&=0\\x&=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{\sqrt{2}-4}{2}\end{aligned}$$

Ⅳ 次の□にあてはまる数値や符号を答えよ．(38 点)

座標平面上で，次の x の 3 次関数

$$f(x) = x^3 - 9x \cdots ①$$

のグラフについて考える．このとき，次のことがいえる．

(1) ①のグラフを x 軸方向に ア だけ平行移動してできるグラフを表す関数 $g(x)$ は，

$$g(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10 \cdots ②$$

である．

②のグラフと x 軸の共有点の x 座標について，小さい値から順に並べると，

$$-\boxed{\text{イ}},\ \boxed{\text{ウ}},\ \boxed{\text{エ}}$$

である．

②が極大となるのは，

$$x = \boxed{\text{オ}} - \sqrt{\boxed{\text{カ}}}$$

のときであり，極大値は

$$\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$$

である．

(2) 関数 $|g(x)|$ が極大となる 2 つの x の値を a，b とする．x 座標が a，b である $y = |g(x)|$ のグラフ上の 2 点を通り，頂点において x 軸と接する放物線の方程式は，

$$y = \boxed{\text{ケ}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}\left(x - \boxed{\text{サ}}\right)^2$$

である．

(3) $y = |g(x)|$ のグラフと x 軸で囲まれた部分の面積 S は，

$$S = \frac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

である．

(1) ①のグラフを x 軸の方向に $+a$ だけ平行移動すると，

$$\begin{aligned} y &= f(x-a) \\ &= (x-a)^3 - 9(x-a) \\ &= x^3 - 3x^2a + 3xa^2 - a^3 - 9x + 9a \\ &= x^3 - 3ax^2 + (3a^2 - 9)x + (-a^3 + 9a) \end{aligned}$$

これが，方程式 $y = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$ と同値な式であるとき，$a = 2$ である．

①のグラフと x 軸の共有点の x 座標は，3 次方程式 $x^3 - 9x = 0$ の解である．したがって，

$$\begin{aligned} x^3 - 9x &= 0 \\ x(x+3)(x-3) &= 0 \\ x &= -3,\ 0,\ 3 \end{aligned}$$

②のグラフは，①のグラフを x 軸の方向に 2 だけ平行移動したグラフであるから，②のグラフと x 軸の共有点の x 座標は，

$$\mathbf{-1,\ 2,\ 5}$$

である．

①のグラフで，極大となる x を求める．

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 9 \\ &= 3(x^2 - 3) \end{aligned}$$

であるから，$f'(x) = 0$ となる x は，

$$x = \pm\sqrt{3}$$

よって，増減表は次の通り．

x		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

ゆえに，$y = f(x)$ が極大になるのは，$x = -\sqrt{3}$ のときで，このとき，極大値は

$$f(-\sqrt{3}) = -3\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

②のグラフは，$y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に 2 だけ平行移動して得られるので，②が極大となるのは，

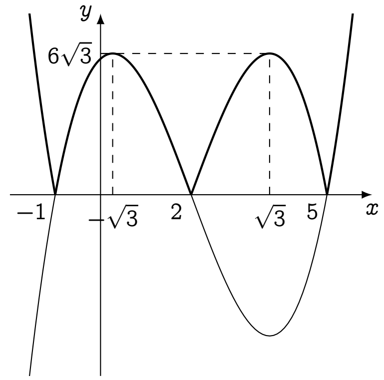
$$\boldsymbol{x = -\sqrt{3}}$$

のときであり，極大値は，

$$\mathbf{6\sqrt{3}}$$

である．

(2) 関数 $y = |g(x)|$ のグラフは関数 $y = g(x)$ のグラフを x 軸に関して折り返したグラフである．よって，(1) の $f(x)$ の増減表により，$|g(x)|$ が極大となるのは，$x = 2 \pm \sqrt{3}$ のとき．このとき，y の値は，$6\sqrt{3}$ である．



よって，求める放物線の方程式は，頂点において x 軸と接し，2 点 $(2-\sqrt{3},\ 6\sqrt{3})$，$(2+\sqrt{3},\ 6\sqrt{3})$ を通る放物線の方程式である．

放物線の対称性より，この放物線の軸は，$x = 2$ である．また，頂点において x 軸と接するので，放物線の方程式は，実数 k を用いて，

$$y = k(x-2)^2$$

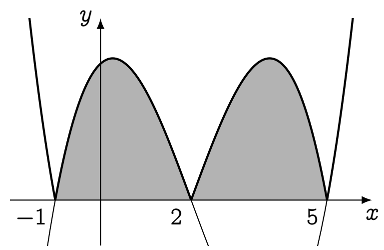
と表せる．これが，$(2+\sqrt{3},\ 6\sqrt{3})$ を通るので，

$$\begin{aligned} 6\sqrt{3} &= k(2+\sqrt{3}-2)^2 \\ 6\sqrt{3} &= 3k \\ k &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

よって，求める放物線の方程式は，

$$\boldsymbol{y = 2\sqrt{3}(x-2)^2}$$

(3) 面積を求める図形は，次の図の斜線部．



対称性を利用すると，

$$\begin{aligned} S &= 2\int_{-1}^{2}(x^3 - 6x^2 + 3x + 10)dx \\ &= 2\left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 10x\right]_{-1}^{2} \\ &= 2\left\{\frac{1}{4}(2^4 - (-1)^4) - 2(2^3 - (-1)^3) + \frac{3}{2}(2^2 - (-1)^2) + 10(2 - (-1))\right\} \\ &= 2\left\{\frac{15}{4} - 18 + \frac{9}{2} + 30\right\} \\ &= 2\left\{\frac{15}{4} + \frac{9}{2} + 12\right\} \\ &= 2 \cdot \frac{15 + 18 + 48}{4} \\ &= \mathbf{\frac{81}{2}} \end{aligned}$$

I 次の$\boxed{}$にあてはまる数値や符号を答えよ.（38 点）

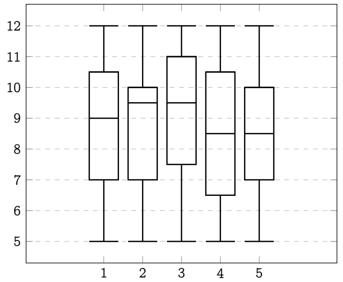
次の表は，池の魚 10 匹の体長と体高を表したものである．このとき，次のことが言える.

魚の番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
体長 (cm)	5	7	9	10	10	7	9	10	11	12
体高 (cm)	3	4	5	4	6	5	6	5	6	6

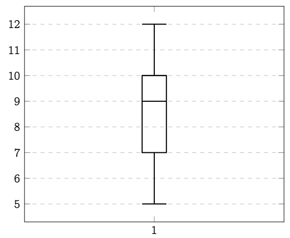
(1) 体長の平均値は $\boxed{\text{ア}}$ cm，体高の中央値は $\boxed{\text{イ}}$ cm である.
体長の分散は $\boxed{\text{ウ}}$ cm，体高の標準偏差は $\boxed{\text{エ}}$ cm である.

(2) 体長と体高の共分散は，$\boxed{\text{オ}}$. $\boxed{\text{カ}}$ である.

(3) 体長データを正しく表している箱ひげ図は，下の 1〜5 のうちの $\boxed{\text{キ}}$ である.



(4) 表において, 体長が 10cm の魚のうち一匹の体長を変更すると, 右のような体長データの箱ひげ図ができた．このとき，変更後の体長は $\boxed{\text{キ}}$ cm 以上 $\boxed{\text{ケ}}$ cm 以下の範囲である.



(5) 表において, ある魚の体長を −2cm 修正した. その結果, 体長と体高それぞれの中央値が変化した. 修正された可能性のある魚は $\boxed{\text{コ}}$ 番，もしくは $\boxed{\text{サ}}$ 番であり, 体高の平均値は $\boxed{\text{シ}}$ % 上がった. ただし, $\boxed{\text{コ}}$ < $\boxed{\text{サ}}$ であるとする.