

I

次の  にあてはまる数値や符号を答えよ。

座標平面上で、 $x$  の 2 次関数

$$y = x^2 - 2ax - 2a + 15 \cdots \textcircled{1}$$

について考える。ただし、 $a$  は定数とする。このとき、次のことがいえる。

(1)  $\textcircled{1}$  のグラフの頂点の  $y$  座標は

$$-a^2 - \boxed{\text{ア}} a + \boxed{\text{イウ}}$$

である。

(2)  $\textcircled{1}$  のグラフが  $x$  軸と異なる 2 つの共有点をもつような  $a$  の値の範囲は

$$a < - \boxed{\text{エ}} , \boxed{\text{オ}} < a$$

である。

(3)  $\textcircled{1}$  のグラフと軸の異なる 2 つの共有点が  $x < 0, 2 < x$  の範囲にあるような  $a$  の値の範囲を次の手順で求めよう。

(i) 2 つの共有点の一方が  $x < 0$  の範囲に、他方が  $2 < x$  の範囲にあるような  $a$  の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}} < a$$

である。

(ii) 2 つの共有点がともに  $x < 0$  の範囲にあるような  $a$  の値の範囲は

$$a < - \boxed{\text{ケ}}$$

である。

(iii) 2 つの共有点がともに  $2 < x$  の範囲にあるような  $a$  の値の範囲は

$$\boxed{\text{コ}} < a < \frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である。

したがって、求める  $a$  の値の範囲は (i), (ii), (iii) を合わせた範囲である。

解説

(1)

♣ 放物線の頂点の座標は平方完成して求めるのが基本です。

♣ まず、 $x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$  となることに注目しましょう。

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 2ax - 2a + 15 \\ &= x^2 - 2ax + a^2 - a^2 - 2a + 15 \quad (*) \\ &= (x - a)^2 - a^2 - 2a + 15 \end{aligned}$$

♣ (\*) の  $a^2$  を足し引きして中和する操作が平方完成におけるかなめです。具体的な数字の場合から初めて、このような文字でも計算できるよう、修行を積みましょう。

♣ 平方完成ができれば、頂点の座標はすぐに分かります。

$$2 \text{ 次関数 } y = \tilde{a}(x - p)^2 + q \text{ の頂点の座標は } (p, q).$$

$x$  座標の方は特に符号に気をつけて取り出しましょう。

♣ 今回の問題では、頂点の座標は、

$$(a, -a^2 - 2a + 15)$$

となります。

(2)

♣  $y = f(x)$  と  $x$  軸の共有点の座標に関する問題は、 $f(x) = 0$  の実数解に関する問題に読みかえます。

♣  $x$  軸は、方程式  $y = 0$  で表されるので、 $y = f(x)$  と  $x$  軸の共有点は、連立方程式

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$$

の実数解で表されます。

♣ そこで、2 次関数  $y = f(x)$  が  $x$  軸と異なる 2 点で交わるという条件は、2 次方程式  $f(x) = 0$  が異なる 2 つの実数解を持つ、つまり、判別式  $D$  の符号が正であると読みかえることができます。

♣ 2 次方程式  $Ax^2 + Bx + C = 0$  について、判別式  $D$  は、

$$D = B^2 - 4 \cdot A \cdot C$$

で表されます。

♣ 今回の問題では、2 次方程式は、

$$x^2 - 2ax - 2a + 15 = 0$$

ですから、判別式は、

$$\begin{aligned} D &= (-2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2a + 15) \\ &= 4a^2 - 4(-2a + 15) \\ &= 4a^2 + 8a - 60 \\ &= 4(a^2 + 2a - 15) \end{aligned}$$

です (慣れてくれば、 $D/4$  という方法もあります)。

♣ 今回、 $\textcircled{1}$  のグラフは、 $x$  軸と異なる 2 つの共有点を持つので、2 次方程式は異なる 2 つの実数解を持つ、つまり、 $D > 0$  と言えます。ですから、

$$\begin{aligned} a^2 + 2a - 15 &> 0 \\ (a + 5)(a - 3) &> 0 \\ a &< -5, 3 < a \end{aligned}$$

(3)

♣ 解の配置問題と呼ばれる、学校 (非進学校) ではあまり教えてくれない、入試の定番問題です。

「与えられた範囲に 2 次方程式の解が存在する条件」、または、「与えられた区間で 2 次関数のグラフと  $x$  軸が交わる条件」として出題されます。

♣ 解の配置問題には大きく分けて 2 つの TYPE が考えられます。

♣ 解の配置問題 (TYPE.1) は次が基本です：

2 次関数  $y = f(x)$  について (または 2 次方程式  $f(x) = 0$  について)、2 つの交点が同一の範囲に含まれる場合、

- ① 判別式：2 次方程式  $f(x) = 0$  の判別式  $D$  の符号。
- ② 軸：グラフの軸の位置
- ③ 端点：「 $k < x$  の範囲に解を..」のように範囲がついている場合その端点  $k$  における値  $f(k)$  の符号

♣ 解の配置問題 (TYPE.2) は次が基本です：

2 次関数  $y = f(x)$  について (または 2 次方程式  $f(x) = 0$  について)、2 つの交点が 2 つの異なる区間に含まれる場合、

- ① 端点の積が負：「 $a < x < b$  の範囲に解を...」なら、「 $f(a)f(b) < 0$ 」とします。

このときは、解の個数が端点だけの情報から分かるということがポイントです。

♣ (i) は TYPE.2 の問題です。 $f(x) = x^2 - 2ax - 2a + 15$  とするとき、求める条件は、

$$f(0) < 0 \text{ かつ } f(2) < 0$$

です。これを解くと、

$$\begin{aligned} f(0) &= 0^2 - 2a \cdot 0 - 2a + 15 < 0 \text{ かつ } f(2) = 2^2 - 2a \cdot 2 - 2a + 15 < 0 \\ -2a + 15 &< 0 \text{ かつ } -6a + 19 < 0 \\ \frac{15}{2} &< a \text{ かつ } \frac{19}{6} < a \\ \frac{15}{2} &< a \end{aligned}$$

I

次の  にあてはまる数値や符号を答えよ。

座標平面上で、 $x$  の 2 次関数

$$y = x^2 - 2ax - 2a + 15 \cdots \textcircled{1}$$

について考える。ただし、 $a$  は定数とする。このとき、次のことがいえる。

(1)  $\textcircled{1}$  のグラフの頂点の  $y$  座標は

$$-a^2 - \boxed{\text{ア}} a + \boxed{\text{イウ}}$$

である。

(2)  $\textcircled{1}$  のグラフが  $x$  軸と異なる 2 つの共有点をもつような  $a$  の値の範囲は

$$a < - \boxed{\text{エ}} , \boxed{\text{オ}} < a$$

である。

(3)  $\textcircled{1}$  のグラフと軸の異なる 2 つの共有点が  $x < 0, 2 < x$  の範囲にあるような  $a$  の値の範囲を次の手順で求めよう。

(i) 2 つの共有点の一方が  $x < 0$  の範囲に、他方が  $2 < x$  の範囲にあるような  $a$  の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}} < a$$

である。

(ii) 2 つの共有点がともに  $x < 0$  の範囲にあるような  $a$  の値の範囲は

$$a < - \boxed{\text{ケ}}$$

である。

(iii) 2 つの共有点がともに  $2 < x$  の範囲にあるような  $a$  の値の範囲は

$$\boxed{\text{コ}} < a < \frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である。

したがって、求める  $a$  の値の範囲は (i), (ii), (iii) を合わせた範囲である。

♣ (ii) は TYPE.1 の問題です。異なる 2 つの共有点がともに  $x < 0$  にあるための条件は、判別式，軸，端点の情報を調べれば良いので、

$$\begin{cases} \text{判別式 } D > 0 \cdots \textcircled{1} \\ \text{軸の位置 } < 0 \cdots \textcircled{2} \\ \text{端点の値 } f(0) > 0 \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

を解くことになります。

♣ まず、 $x^2 - 2ax - 2a + 15 = 0$  の判別式は

$$\begin{aligned} D &= (2a)^2 - 4(-2a + 15) \\ &= 4a^2 + 8a - 60 \\ &= 4(a^2 + 2a - 15) \end{aligned}$$

ですから、条件  $D > 0$  は、

$$\begin{aligned} a^2 + 2a - 15 &> 0 \\ (a + 5)(a - 3) &> 0 \\ a &< -5, 3 < a \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となります。

♣ 次に、軸の位置には、(1) より、 $x = a$  でしたから、

$$a < 0 \cdots \textcircled{2}$$

が求める条件になります。

♣ 最後に端点  $f(0) = -2a + 15$  なので、

$$\begin{aligned} -2a + 15 &> 0 \\ 2a &< 15 \\ a &< \frac{15}{2} \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

が最後の条件です。

♣  $\textcircled{1}$ ， $\textcircled{2}$ ， $\textcircled{3}$ の共通部分をとることにより、

$$a < -5$$

♣ (iii) もやはり、TYPE.1 の問題です。異なる 2 つの共有点がともに  $2 < x$  にあるための条件は、判別式，軸，端点の情報を調べれば良いので、

$$\begin{cases} \text{判別式 } D > 0 \cdots \textcircled{1} \\ \text{軸の位置 } > 2 \cdots \textcircled{2} \\ \text{端点の値 } f(2) > 0 \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

を解くことになります。

♣ 判別式に関する条件は (ii) のものをそのまま使いましょう。

$$a < -5, 3 < a \cdots \textcircled{1}$$

♣ 軸  $x = a$  の位置に関する条件は、

$$a > 2 \cdots \textcircled{2}$$

となります。

♣ 最後に、

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^2 - 2a \cdot 2 - 2a + 15 \\ &= -6a + 19 \end{aligned}$$

ですから、求める条件は、

$$\begin{aligned} -6a + 19 &> 0 \\ a &< \frac{19}{6} \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

♣  $\textcircled{1}$ ， $\textcircled{2}$ ， $\textcircled{3}$ の共通部分を取り、

$$3 < a < \frac{19}{6}$$

Ⅱ 次の  にあてはまる数値や符号を答えよ。(33 点)

四角形 ABCD において、 $\angle A = 30^\circ$ 、 $\angle B = 165^\circ$ 、 $\angle C = 90^\circ$ 、 $AB = \sqrt{3} - 1$ 、 $AD = 2$  とする。

このとき、次のことがいえる。

(1) 四角形 ABCD の対角線 BD の長さは

$$BD = \sqrt{\text{ア}}$$

である。

(2)  $\triangle ABD$  において

$$\cos \angle ABD = \frac{\text{イ} \sqrt{\text{ウ}}}{\text{エ}}$$

である。

(3) 線分 BC の長さは

$$BC = \frac{\sqrt{\text{オ}}}{\text{カ}}$$

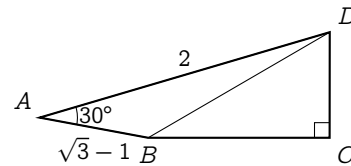
である。

(4) 四角形 ABCD の面積  $S$  は

$$S = \frac{\text{キ} \sqrt{\text{ク}} - \text{ケ}}{\text{コ}}$$

である。

♣ 与えられた図形は、次の通り；



(1) 余弦定理より、

$$\begin{aligned} BD^2 &= AB^2 + AD^2 - 2AD \cdot AB \cos 30^\circ \\ &= (\sqrt{3} - 1)^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 4 - 2\sqrt{3} + 4 - 2\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

ゆえに、 $BD = \sqrt{2}$

(2) 余弦定理より、

$$\begin{aligned} \cos \angle ABD &= \frac{BD^2 + AB^2 - AD^2}{2AB \cdot BD} \\ &= \frac{2 + 4 - 2\sqrt{3} - 4}{2 \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot \sqrt{2}} \\ &= \frac{2(1 - \sqrt{3})}{2\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)} \\ &= \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

(3) (2) より、 $\angle ABD = 135^\circ$   $\angle B = 165^\circ$  だから、 $\angle CBD = 165^\circ - 135^\circ = 30^\circ$ 。したがって、

$$BC = BD \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

(4)

$$\begin{aligned} S &= \triangle ABD + \triangle BDC \\ &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot BD \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{2\sqrt{3} - 2}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{3\sqrt{3} - 2}{4} \end{aligned}$$

Ⅲ 次の□に当てはまる数値や符号を答えよ。(34 点)

(1) 60 と 252 の最大公約数を  $G$ ，最小公倍数を  $L$  とする。

1. このとき，

$G = \boxed{\text{アイ}}, L = \boxed{\text{ウエオカ}}$

である。

2.  $A = aG$ ,  $B = bG$  とする。ただし， $a$  と  $b$  は互いに素である自然数で  $a < b$  とする。

$A$  と  $B$  の最小公倍数が  $L$  のとき，

$ab = \boxed{\text{キクケ}}$

である。このとき， $A + B$  が最小となるような  $a$  と  $b$  の値は，

$a = \boxed{\text{コ}}, b = \boxed{\text{サシ}}$

である。

(2) 2 つの整数  $m$ ,  $n$  を 7 で割った余りが，それぞれ 3, 5 である。このとき，次のことが言える。

(i)  $2m + n$  を 7 で割った余りは  $\boxed{\text{ス}}$  である。

(ii)  $m^3$  を 7 で割った余りは  $\boxed{\text{セ}}$  である。

(iii)  $m^2 - n^2$  を 7 で割った余りは  $\boxed{\text{ソ}}$  である。

(1) (i)  $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ ,  $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$  であるから， $G = 12$ ,  $L = 1260$  である。

(ii)  $A = aG$ ,  $B = bG$  について， $a$  と  $b$  が互いに素であるから，

$$L = abG$$

とかける。ゆえに，

$$ab = \frac{L}{G} = \frac{1260}{12} = 105$$

である。

また，

$$A + B = (a + b)G$$

であるから， $A + B$  が最小であるとき， $a + b$  は最小。ここで， $a$  と  $b$  は互いに素なので， $a \neq 1$ 。  $a < b$  かつ  $a \neq 1$  となる数の組合わせと， $a + b$  の値は次の表の通り：

$a$	3	5	7
$b$	35	21	15
$a + b$	38	26	22

ゆえに， $a = 7$ ,  $b = 15$  で  $A + B$  が最小となる。

(2) 7 を法とする合同式を考える。このとき， $m \equiv 3$ ,  $n \equiv 5$  である。

(i)

$$\begin{aligned} 2m + n &\equiv 2 \cdot 3 + 5 \\ &\equiv 11 \\ &\equiv 4 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} m^3 &\equiv 3^3 \\ &\equiv 6 \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} m^2 - n^2 &\equiv 3^2 - 5^2 \\ &\equiv 2 - 4 \\ &\equiv -2 \\ &\equiv 5 \end{aligned}$$

神戸学院/一般選抜/2月2日

Ⅰ 次の□に当てはまる数値や符号を答えよ。(37点)

(1) 1～200までの番号がついた200個のボールが袋の中に入っている。次の①～③の順番でボールを袋から取り出す。ただし、取り出したボールは袋に戻さないものとする。

- ① 7の倍数の番号がついたボールをすべて取り出す
- ② 5の倍数の番号がついたボールをすべて取り出す
- ③ 2の倍数の番号がついたボールをすべて取り出す

このとき、次のことがいえる。

- (i) ①の操作で取り出したボールの数は、

アイ

個である。
- (ii) ②の操作の後で袋の中に残っているボールの数は、

ウエオ

個である。
- (iii) ③の操作の後で袋の中に残っているボールの数は、

カキ

個である。

(2) 3で割ると2余り、5で割ると1余り、7で割ると6余る自然数のうち最小の数は、

クケ

であり、3桁で最大の数は

コサシ

である。

(3)  $\sqrt{\frac{135n}{28}}$  が有理数となるような自然数  $n$  のうち最小の数は、

スセソ

である。

(1) 1から200までの自然数の集合を  $U$ 、 $U$  の要素のうち、7の倍数、5の倍数、2の倍数からなる部分集合をそれぞれ、 $A$ 、 $B$ 、 $C$  とする。

(i)  $200 \div 7 = 28 \dots 4$

したがって、28個。

(ii) 求める要素の個数は、

$$n(U) - n(A \cup B) = n(U) - n(A) - n(B) + n(A \cap B)$$

である。ここで、

$$200 \div 5 = 40, 200 \div 35 = 5 \dots 25$$

であるから、 $n(A) = 40$ 、 $n(A \cap B) = 5$ 。よって、求める要素の個数は、

$$200 - 28 - 40 + 5 = 137$$

(iii) 求める要素の個数は、

$$\begin{aligned} n(U) - n(A \cup B \cup C) \\ &= n(U) - n(A) - n(B) - n(C) \\ &\quad + n(A \cup B) + n(B \cup C) + n(C \cup A) \\ &\quad - n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

ここで、

$$200 \div 2 = 100, 200 \div 14 = 14 \dots 4, 200 \div 10 = 20, 200 \div 105 = 1 \dots 95$$

であるから、 $n(C) = 100$ 、 $n(B \cap C) = 14$ 、 $n(C \cap A) = 20$ 、 $n(A \cap B \cap C) = 1$ 。ゆえに、求める要素の個数は、

$$\begin{aligned} 200 - 28 - 40 - 100 + 5 + 14 + 20 - 1 \\ = 70 \end{aligned}$$

(2) 題意の自然数を  $n$  とするとき、整数  $a$ 、 $b$  を用いて、

$$n = 3a + 2 = 5b + 1 \dots \textcircled{1}$$

とかける。このとき、

$$\begin{aligned} 3a + 2 &= 5b + 1 \\ 3a - 5b &= -1 \end{aligned}$$

この特殊解は、 $a = -2$ 、 $b = -1$  である。ゆえに、

$$3(a + 2) - 5(b + 1) = 0$$

であるから、整数  $k$  を用いて、

$$\begin{cases} a = 5k - 2 \\ b = 3k - 1 \end{cases}$$

と表せる。このとき、 $n$  は、 $\textcircled{1}$ にこれを代入することにより、

$$n = 3(5k - 2) + 2 = 5(3k - 1) + 1 = 15k - 4 \dots \textcircled{2}$$

また、 $n$  は7で割ると6余る自然数であるから、整数  $c$  を用いて、

$$n = 15k - 4 = 7c + 6$$

のようにも表せる。このとき、

$$15k - 4 = 7c + 6$$

$$15k - 7c = 10 \dots \textcircled{3}$$

ここで、 $15 - 7 \cdot 2 = 1$  であるから、 $\textcircled{3}$ の特殊解は、 $k = 10$ 、 $c = 20$  である。したがって、

$$15(k - 10) - 7(c - 20) = 0$$

ゆえに、整数  $l$  を用いて、

$$\begin{cases} k = 7l + 10 = 7l' + 3 \\ c = 15l + 20 = 15l' + 5 \quad (l' = l + 1) \end{cases}$$

よって、これらを $\textcircled{2}$ に代入すると、

$$n = 15(7l' + 3) - 4 = 7(15l' + 5) + 6 = 105l' + 41$$

ゆえに、このような数のうち最も小さな自然数は、41 ( $l' = 0$ ) で、最も大きな3桁の数は、986 ( $l' = 9$ )。

(3)  $135 = 3^3 \cdot 5$ 、 $28 = 2^2 \cdot 7$  であるから、

$$\sqrt{\frac{135n}{28}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3 \cdot 5 \cdot n}{7}}$$

これが有理数となるとき、

$$n = p \cdot 3^{2a-1} \cdot 5^{2b-1} \cdot 7^{2c-1}, \text{ (} a, b, c, p \text{ は正の整数)}$$

の形である。このうち、最小のものは、

$$n = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$$

Ⅱ 次の□にあてはまる数値や符号を答えよ。(38 点)  
座標平面上で、次の円  $C$  と直線  $l$  について考える。

$$\begin{cases} C: x^2 + y^2 - 6y - 7 = 0 \\ l: y = ax - 6a + 7 \end{cases}$$

ただし、 $a$  は定数とする。このとき、次のことがいえる。

(1) 円  $C$  の中心の座標は

$$\left( \boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}} \right)$$

であり、半径は、

$$\boxed{\text{ウ}}$$

である。

また、直線  $l$  は定数  $a$  の値に関係なく、点  $\left( \boxed{\text{エ}}, \boxed{\text{オ}} \right)$  を通る。

(2) 円  $C$  と直線  $l$  が異なる 2 点で交わる時、定数  $a$  のとり得る値の範囲は、

$$\boxed{\text{カ}} < a < \frac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

である。

(3) 点  $(0, -5)$  を通り、円  $C$  に接する直線を  $m$  と  $n$  とする (ただし、傾きが正の直線を  $m$  とし、傾きが負の直線を  $n$  とする)。直線  $m$  と円  $C$  の接点を  $P$  とし、直線  $n$  と円  $C$  の接点を  $Q$  とする。このとき、次のことがいえる。

(i) 直線  $m$  の方程式は

$$y = \sqrt{\boxed{\text{コ}}}x - \boxed{\text{サ}}$$

であり、点  $Q$  の座標は、

$$Q\left( \boxed{\text{シス}}, \sqrt{\boxed{\text{セ}}}, \boxed{\text{ソ}} \right)$$

である。

(ii) 円  $C$  の弧  $PQ$  のうち、線分  $PQ$  の下側にある方の弧と直線  $m, n$  で囲まれた図形の面積  $S$  は

$$S = \boxed{\text{タチ}} \sqrt{\boxed{\text{ツ}}} - \frac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}} \pi$$

である。

(1)  
円  $C$  の方程式を平方完成すると、

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6y - 7 &= 0 \\ x^2 + (y - 3)^2 &= 16 \end{aligned}$$

であるから、円  $C$  の中心は、 $(0, 3)$  であり、半径は 4 である。  
また、直線  $l$  の方程式を  $a$  について整理すると、

$$\begin{aligned} y &= ax - 6a + 7 \\ ax - 6a + 7 - y &= 0 \\ a(x - 6) - (y - 7) &= 0 \end{aligned}$$

ゆえに、どんな  $a$  についても、 $x = 6, y = -7$  はこの方程式の解である。よって、求める点の座標は、 $(6, 7)$ 。

(2) 円  $C$  の中心と直線  $l$  の距離を  $d$  とすると、円  $C$  と直線  $l$  が異なる 2 点で交わるための必要十分条件は、

$$d < 4$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} d &= \frac{|y - ax + 6a - 7|}{\sqrt{1^2 + (-a)^2}} \Big|_{x=0, y=3} \\ &= \frac{|3 + 6a - 7|}{\sqrt{a^2 + 1}} \\ &= \frac{|6a - 4|}{\sqrt{a^2 + 1}} \end{aligned}$$

であるから、求める条件は、

$$\begin{aligned} \frac{|6a - 4|}{\sqrt{a^2 + 1}} &< 4 \\ |6a - 4| &< 4\sqrt{a^2 + 1} \\ |3a - 2| &< 2\sqrt{a^2 + 1} \\ 9a^2 - 12a + 4 &< 4a^2 + 4 \\ 5a^2 - 12a &< 0 \\ a(5a - 12) &< 0 \\ 0 &< a < \frac{12}{5} \end{aligned}$$

(3) (i)  $x = 0$  は接線ではない。点  $(0, -5)$  を通る  $x = 0$  以外の直線は、実数  $u$  を用いて、 $y = ux - 5$  と表せる。よって、これが円  $C$  と接するとき、中心と直線との距離が半径に等しいので、

$$\begin{aligned} \frac{|3 - 0 + 5|}{\sqrt{u^2 + 1}} &= 4 \\ 8 &= 4\sqrt{u^2 + 1} \\ 2 &= \sqrt{u^2 + 1} \\ 4 &= u^2 + 1 \\ u^2 &= 3 \\ u &= \pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

したがって、 $m$  の方程式は、

$$y = \sqrt{3}x - 5$$

である。また、このとき、円  $C$  と  $m$  の接点  $P$  の座標は、連立方程式

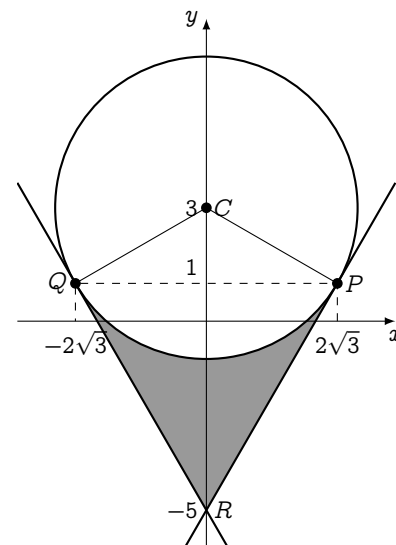
$$\begin{cases} x^2 + (y - 3)^2 = 16 \cdots \textcircled{1} \\ y = \sqrt{3}x - 5 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

の解である。②を①に代入して、

$$\begin{aligned} x^2 + (\sqrt{3}x - 8)^2 &= 16 \\ 4x^2 - 16\sqrt{3}x + 48 &= 0 \\ x^2 - 4\sqrt{3}x + 12 &= 0 \\ (x - 2\sqrt{3})^2 &= 0 \\ x &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

である。これを②に代入して、 $y = 1$ 。ゆえに、 $P(2\sqrt{3}, 1)$ 。  $Q$  は  $P$  と  $y$  軸に対して対称な位置にあるので ( $\because$  円  $C$  は  $y$  軸に関して対称な図形で、 $m$  と  $n$  も  $y$  軸に関して対称だから、それらの交点もやはり  $y$  軸に関して対称)、 $Q(-2\sqrt{3}, 1)$  である。

(ii) 求める図形は以下の図の通り。



$m$  と  $n$  の交点を  $R$  とする。このとき、

$$S = \triangle PQR + \triangle PCQ - \text{扇形} CPQ$$

であり、 $\angle PCQ = 120^\circ$  であるから、

$$\begin{aligned} S &= 4\sqrt{3} \times (1 - (-5)) \times \frac{1}{2} + 4\sqrt{3} \times (3 - 1) \times \frac{1}{2} - \pi \times 4^2 \times \frac{120}{360} \\ &= 4\sqrt{3} \times 8 \times \frac{1}{2} - \frac{16\pi}{3} \\ &= 16\sqrt{3} - \frac{16}{3}\pi \end{aligned}$$

Ⅲ 次の□に当てはまる数値や符号を答えよ。(38 点)

次の 2 つの関数

$$\begin{cases} f(x) = \log_2 ax \\ g(x) = 3 + 2\log_{\frac{1}{2}} x \end{cases}$$

について考える。ただし、 $a$  は定数とする。また、 $f(2) = 2$  である。このとき、次のことがいえる。

(1)  $a$  と  $g(2)$  の値は、

$$a = \boxed{\text{ア}}, g(2) = \boxed{\text{イ}}$$

である。

(2)  $t = \log_2 x$  とする。 $f(x) \cdot g(x)$  を  $t$  を用いて表すと、

$$f(x) \cdot g(x) = \boxed{\text{ウエ}} t^2 + t + \boxed{\text{オ}}$$

である。

(3) 方程式  $f(x) \cdot g(x) = k$  の解のうち (ただし、 $k$  は定数とする)。  $1 \leq x \leq 2$  の範囲に含まれる解の個数を次のように求めよう。

$1 \leq x \leq 2$  のとき、 $t$  の値の範囲は、

$$\boxed{\text{カ}} \leq t \leq \boxed{\text{キ}}$$

である。

$y = \boxed{\text{ウエ}} t^2 + t + \boxed{\text{オ}}$  のグラフと直線  $y = k$  の共有点の個数は求める解の個数と一致する。

したがって、

(i)  $\boxed{\text{カ}} \leq k < \frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$  のとき、解の個数は  $\boxed{\text{シ}}$  個である。

(ii)  $\boxed{\text{ス}} \leq k < \boxed{\text{ク}}$  ,  $k = \frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$  のとき、解の個数は  $\boxed{\text{セ}}$  個である。

(iii)  $k < \boxed{\text{ス}}$  ,  $\frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}} < k$  のとき、解の個数は  $\boxed{\text{ソ}}$  個である。

(1)

$$\begin{aligned} f(2) &= \log_2 2a \\ &= \log_2 2 + \log_2 a \\ &= 1 + \log_2 a \end{aligned}$$

であるから、 $f(2) = 2$  のとき、

$$\log_2 a = 1$$

これを解いて、 $a = 2$ 。

また、

$$\begin{aligned} g(2) &= 3 + 2\log_{\frac{1}{2}} 2 \\ &= 3 - 2 = 1 \end{aligned}$$

(2)

$a = 2$  を代入すると、

$$f(x) = \log_2 2x = \log_2 2 + \log_2 x = 1 + \log_2 x$$

また、 $g(x)$  に底の変換公式を用いて、

$$\begin{aligned} g(x) &= 3 + 2\log_{\frac{1}{2}} x \\ &= 3 + 2 \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} \\ &= 3 - 2\log_2 x \end{aligned}$$

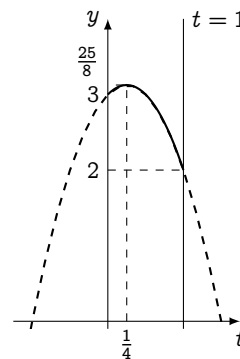
よって、

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= (1 + \log_2 x)(3 - 2\log_2 x) \\ &= (1 + t)(3 - 2t) \\ &= -2t^2 + t + 3 \end{aligned}$$

(3)  $1 \leq x \leq 2$  のとき、 $\log_2 1 \leq \log_2 x \leq \log_2 2$  であるから、

$$0 \leq t \leq 1$$

ここで、 $y = -2t^2 + t + 3$  の  $0 \leq t \leq 1$  におけるグラフは次の通り。



よって、 $3 \leq k < \frac{25}{8}$  のとき、解の個数は 2 個である。

また、 $2 \leq k < 3$  ,  $k = \frac{25}{8}$  のとき、解の個数は 1 個である。

さらに、 $k < 2$  ,  $\frac{25}{8} < k$  のとき、解の個数は 0 個である。

Ⅳ 次の□に当てはまる数値や符号を答えよ。(37 点)

座標平面上で、次の  $x$  の 3 次関数

$$f(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 9x^2 + 23x - 15)$$

について考える。このとき、次のことがいえる。

(1) 方程式  $f(x) = 0$  の解の中で、

最小の値は □ ア □，最大の値は □ イ □

である。 $y = f(x)$  のグラフ上の  $x$  座標の値が □ ア □ である点における接線  $\ell$  の方程式は、

$$\ell: y = \frac{\text{ウ}}{\text{エ}}x - \frac{\text{オ}}{\text{カ}}$$

である。

(2)  $y = f(x)$  のグラフと  $\ell$  の共有点について、 $x$  座標の値が □ ア □ である点を  $A$  とする。 $A$  とは異なる共有点  $B$  の座標は

$B(\text{キ}, \text{クケ})$

である。

(3)  $y = f(x)$  のグラフ上を  $A$  から  $B$  まで移動する点  $P$  ( $A$ ,  $B$  は除く) を考える。 $\triangle ABP$  の面積  $S$  が最大となるとき、面積  $S$  は

$S = \text{コサ}$

である。