年　　組　　番　名前 中川さん

$\boxed{\text{I}}$

次の $\boxed{}$ にあてはまる数値や符号を答えよ。

座標平面上で、x の 2 次関数

$$y=x^2-2ax-2a+15 \cdots ①$$

について考える。ただし、a は定数とする。このとき、次のことがいえる。

(1) ① のグラフの頂点の y 座標は

$$-a^2-\boxed{\text{ア}}\,a+\boxed{\text{イウ}}$$

である。

(2) ① のグラフが x 軸と異なる 2 つの共有点をもつような a の値の範囲は

$$a<-\boxed{\text{エ}},\ \boxed{\text{オ}}<a$$

である。

(3) ① のグラフと軸の異なる 2 つの共有点が $x<0,\ 2<x$ の範囲にあるような a の値の範囲を次の手順で求めよう。

(i) 2 つの共有点の一方が $x<0$ の範囲に、他方が $2<x$ の範囲にあるような a の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}<a$$

である。

(ii) 2 つの共有点がともに $x<0$ の範囲にあるような a の値の範囲は

$$a<-\boxed{\text{ケ}}$$

である。

(iii) 2 つの共有点がともに $2<x$ の範囲にあるような a の値の範囲は

$$\boxed{\text{コ}}<a<\frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である。

したがって、求める a の値の範囲は (i), (ii), (iii) を合わせた範囲である。

解説

(1)

♣ **放物線の頂点の座標は平方完成して求めるのが基本です．**

♣ まず，$x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$ となることに注目しましょう．

$$\begin{aligned} y &= x^2-2ax-2a+15 \\ &= x^2-2ax+a^2-a^2-2a+15\ (*) \\ &= (x-a)^2-a^2-2a+15 \end{aligned}$$

♣ $(*)$ の a^2 を足し引きして中和する操作が平方完成におけるかなめです．具体的な数字の場合から初めて，このような文字でも計算できるよう，修行を積みましょう．

♣ 平方完成ができれば，頂点の座標はすぐに分かります．

> 2 次関数 $y=\tilde{a}(x-p)^2+q$ の頂点の座標は $(p,\ q)$．

x 座標の方は特に符号に気をつけて取り出しましょう．

♣ 今回の問題では，頂点の座標は，

$$(a,\ -a^2-2a+15)$$

となります．

(2)

♣ $y=f(x)$ と x 軸の共有点の座標に関する問題は，$f(x)=0$ の実数解に関する問題に読みかえます．

♣ x 軸は，方程式 $y=0$ で表されるので，$y=f(x)$ と x 軸の共有点は，連立方程式

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=0 \end{cases}$$

の実数解で表されます．

♣ そこで，2 次関数 $y=f(x)$ が x 軸と異なる 2 点で交わるという条件は，2 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの実数解を持つ，つまり，判別式 D の符号が正であると読みかえることができます．

♣ 2 次方程式 $Ax^2+Bx+C=0$ について，判別式 D は，

$$D=B^2-4\cdot A\cdot C$$

で表されます．

♣ 今回の問題では，2 次方程式は，

$$x^2-2ax-2a+15=0$$

ですから，判別式は，

$$\begin{aligned} D &= (-2a)^2-4\cdot 1\cdot(-2a+15) \\ &= 4a^2-4(-2a+15) \\ &= 4a^2+8a-60 \\ &= 4(a^2+2a-15) \end{aligned}$$

です（慣れてくれば，$D/4$ という方法もあります）．

♣ 今回，①のグラフは，x 軸と異なる 2 つの共有点を持つので，2 次方程式は異なる 2 つの実数解を持つ，つまり，$D>0$ と言えます．ですから，

$$\begin{aligned} a^2+2a-15>0 \\ (a+5)(a-3)>0 \\ a<-5,\ 3<a \end{aligned}$$

(3)

♣ **解の配置問題**と呼ばれる，学校（非進学校）ではあまり教えてくれない，入試の定番問題です．

「与えられた範囲に 2 次方程式の解が存在する条件」，または，「与えられた区間で 2 次関数のグラフと x 軸が交わる条件」として出題されます．

♣ 解の配置問題には大きく分けて 2 つの TYPE が考えられます．

♣ 解の配置問題（TYPE.1）は次が基本です：

> 2 次関数 $y=f(x)$ について（または 2 次方程式 $f(x)=0$ について），2 つの交点が**同一の範囲に含まれる場合**，
> ① **判別式**：2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式 D の符号．
> ② **軸**：グラフの軸の位置
> ③ **端点**：「$k<x$ の範囲に解を..」のように範囲がついている場合その端点 k における値 $f(k)$ の符号

♣ 解の配置問題（TYPE.2）は次が基本です：

> 2 次関数 $y=f(x)$ について（または 2 次方程式 $f(x)=0$ について），2 つの交点が **2 つの異なる区間に含まれる場合**，
> ① **端点の積が負**：「$a<x<b$ の範囲に解を...」なら，「$f(a)f(b)<0$」とします．

このときは，解の個数が端点だけの情報から分かるということがポイントです．

♣ (i) は TYPE.2 の問題です．$f(x)=x^2-2ax-2a+15$ とするとき，求める条件は，

$$f(0)<0 \text{ かつ } f(2)<0$$

です．これを解くと，

$$\begin{aligned} f(0)=0^2-2a\cdot 0-2a+15<0 \text{かつ } f(2)=2^2-2a\cdot 2-2a+15<0 \\ -2a+15<0 \text{ かつ } -6a+19<0 \\ \frac{15}{2}<a \text{ かつ } \frac{19}{6}<a \\ \frac{15}{2}<a \end{aligned}$$

年　　　組　　　番　名前 中川さん

I

次の $\boxed{}$ にあてはまる数値や符号を答えよ。

座標平面上で、x の 2 次関数

$$y = x^2 - 2ax - 2a + 15 \cdots ①$$

について考える。ただし、a は定数とする。このとき、次のことがいえる。

(1) ① のグラフの頂点の y 座標は

$$-a^2 - \boxed{ア}\, a + \boxed{イウ}$$

である。

(2) ① のグラフが x 軸と異なる 2 つの共有点をもつような a の値の範囲は

$$a < -\boxed{エ},\ \boxed{オ} < a$$

である。

(3) ① のグラフと軸の異なる 2 つの共有点が $x < 0,\ 2 < x$ の範囲にあるような a の値の範囲を次の手順で求めよう。

(i) 2 つの共有点の一方が $x < 0$ の範囲に、他方が $2 < x$ の範囲にあるような a の値の範囲は

$$\frac{\boxed{カキ}}{\boxed{ク}} < a$$

である。

(ii) 2 つの共有点がともに $x < 0$ の範囲にあるような a の値の範囲は

$$a < -\boxed{ケ}$$

である。

(iii) 2 つの共有点がともに $2 < x$ の範囲にあるような a の値の範囲は

$$\boxed{コ} < a < \frac{\boxed{サシ}}{\boxed{ス}}$$

である。

したがって、求める a の値の範囲は (i), (ii), (iii) を合わせた範囲である。

♣ (ii) は TYPE.1 の問題です．異なる 2 つの共有点がともに $x < 0$ にあるための条件は，判別式，軸，端点の情報を調べれば良いので，

$$\begin{cases} \text{判別式 } D > 0 \cdots ① \\ \text{軸の位置 } < 0 \cdots ② \\ \text{端点の値 } f(0) > 0 \cdots ③ \end{cases}$$

を解くことになります．

♣ まず，$x^2 - 2ax - 2a + 15 = 0$ の判別式は

$$\begin{aligned} D &= (2a)^2 - 4(-2a + 15) \\ &= 4a^2 + 8a - 60 \\ &= 4(a^2 + 2a - 15) \end{aligned}$$

ですから，条件 $D > 0$ は，

$$\begin{aligned} a^2 + 2a - 15 &> 0 \\ (a+5)(a-3) &> 0 \\ a < -5,\ 3 < a &\cdots ① \end{aligned}$$

となります．

♣ 次に，軸の位置には，(1) より，$x = a$ でしたから，

$$a < 0 \cdots ②$$

が求める条件になります．

♣ 最後に端点 $f(0) = -2a + 15$ なので，

$$\begin{aligned} -2a + 15 &> 0 \\ 2a &< 15 \\ a &< \frac{15}{2} \cdots ③ \end{aligned}$$

が最後の条件です．

♣ ①，②，③の共通部分をとることにより，

$$a < -5$$

♣ (iii) もやはり，TYPE.1 の問題です．異なる 2 つの共有点がともに $2 < x$ にあるための条件は，判別式，軸，端点の情報を調べれば良いので，

$$\begin{cases} \text{判別式 } D > 0 \cdots ① \\ \text{軸の位置 } > 2 \cdots ② \\ \text{端点の値 } f(2) > 0 \cdots ③ \end{cases}$$

を解くことになります．

♣ 判別式に関する条件は (ii) のものをそのまま使いましょう．

$$a < -5,\ 3 < a \cdots ①$$

♣ 軸 $x = a$ の位置に関する条件は，

$$a > 2 \cdots ②$$

となります．

♣ 最後に，

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^2 - 2a \cdot 2 - 2a + 15 \\ &= -6a + 19 \end{aligned}$$

ですから，求める条件は，

$$\begin{aligned} -6a + 19 &> 0 \\ a &< \frac{19}{6} \cdots ③ \end{aligned}$$

♣ ①，②，③の共通部分をとり，

$$3 < a < \frac{19}{6}$$

年　組　番　名前 中川さん

Ⅱ　次の $\boxed{}$ にあてはまる数値や符号を答えよ。(33 点)
四角形 ABCD において、$\angle A = 30°$、$\angle B = 165°$、$\angle C = 90°$、$AB = \sqrt{3}-1$、$AD = 2$ とする。
このとき、次のことがいえる。

(1) 四角形 ABCD の対角線 BD の長さは

$$BD = \sqrt{\boxed{\text{ア}}}$$

である。

(2) $\triangle ABD$ において

$$\cos\angle ABD = \frac{\boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

である。

(3) 線分 BC の長さは

$$BC = \frac{\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

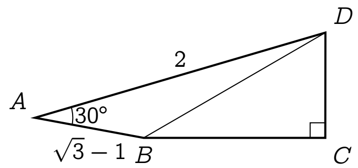
である。

(4) 四角形 ABCD の面積 S は

$$S = \frac{\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}} - \boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$$

である。

♣ 与えられた図形は，次の通り；



(1) 余弦定理より，

$$\begin{aligned} BD^2 &= AB^2 + AD^2 - 2AD\cdot AB\cos 30° \\ &= (\sqrt{3}-1)^2 + 2^2 - 2\cdot 2\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 4 - 2\sqrt{3} + 4 - 2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

ゆえに，$BD = \sqrt{2}$

(2) 余弦定理より，

$$\begin{aligned} \cos\angle ABD &= \frac{BD^2 + AB^2 - AD^2}{2AB\cdot BD} \\ &= \frac{2+4-2\sqrt{3}-4}{2\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot\sqrt{2}} \\ &= \frac{2(1-\sqrt{3})}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)} \\ &= \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

(3) (2) より，$\angle ABD = 135°$ $\angle B = 165°$ だから，$\angle CBD = 165° - 135° = 30°$．したがって，

$$BC = BD\cos 30° = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

(4)

$$\begin{aligned} S &= \triangle ABD + \triangle BDC \\ &= \frac{1}{2}\cdot AB\cdot AD\cdot\sin 30° + \frac{1}{2}\cdot BC\cdot BD\sin 30° \\ &= \frac{1}{2}\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot 2\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2} \\ &= \frac{2\sqrt{3}-2}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{3\sqrt{3}-2}{4} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{III}}$ 次の$\boxed{}$に当てはまる数値や符号を答えよ．（34 点）

(1) 60 と 252 の最大公約数を G，最小公倍数を L とする．

1. このとき，

$$G = \boxed{\text{アイ}},\ L = \boxed{\text{ウエオカ}}$$

である．

2. $A = aG$，$B = bG$ とする．ただし，a と b は互いに素である自然数で $a < b$ とする．
A と B の最小公倍数が L のとき，

$$ab = \boxed{\text{キクケ}}$$

である．このとき，$A + B$ が最小となるような a と b の値は，

$$a = \boxed{\text{コ}},\ b = \boxed{\text{サシ}}$$

である．

(2) 2 つの整数 m，n を 7 で割った余りが，それぞれ 3，5 である．このとき，次のことが言える．

(i) $2m + n$ を 7 で割った余りは $\boxed{\text{ス}}$ である．

(ii) m^3 を 7 で割った余りは $\boxed{\text{セ}}$ である．

(iii) $m^2 - n^2$ を 7 で割った余りは $\boxed{\text{ソ}}$ である．

(1) (i) $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$，$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$ であるから，$G = \mathbf{12}$，$L = \mathbf{1260}$ である．

(ii) $A = aG$，$B = bG$ について，a と b が互いに素であるから，

$$L = abG$$

とかける．ゆえに，

$$ab = \frac{L}{G} = \frac{1260}{12} = \mathbf{105}$$

である．

また，

$$A + B = (a + b)G$$

であるから，$A + B$ が最小であるとき，$a + b$ は最小．ここで，a と b は互いに素なので，$a \neq 1$．$a < b$ かつ $a \neq 1$ となる数の組合わせと，$a + b$ の値は次の表の通り：

a	3	5	7
b	35	21	15
$a+b$	38	26	22

ゆえに，$a = \mathbf{7}$，$b = \mathbf{15}$ で $A + B$ が最小となる．

(2) 7 を法とする合同式を考える．このとき，$m \equiv 3$，$n \equiv 5$ である．

(i)

$$\begin{aligned} 2m + n &\equiv 2 \cdot 3 + 5 \\ &\equiv 11 \\ &\equiv \mathbf{4} \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} m^3 &\equiv 3^3 \\ &\equiv \mathbf{6} \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} m^2 - n^2 &\equiv 3^2 - 5^2 \\ &\equiv 2 - 4 \\ &\equiv -2 \\ &\equiv \mathbf{5} \end{aligned}$$

神戸学院/一般選抜/2月2日

1 次の$\boxed{}$に当てはまる数値や符号を答えよ．(37点)

(1) 1〜200までの番号がついた200個のボールが袋の中に入っている．次の①〜③の順番でボールを袋から取り出す．ただし，取り出したボールは袋に戻さないものとする．

① 7の倍数の番号がついたボールをすべて取り出す

② 5の倍数の番号がついたボールをすべて取り出す

③ 2の倍数の番号がついたボールをすべて取り出す

このとき，次のことがいえる．

(i) ①の操作で取り出したボールの数は，

$\boxed{アイ}$ 個

である．

(ii) ②の操作の後で袋の中に残っているボールの数は，

$\boxed{ウエオ}$ 個

である．

(iii) ③の操作の後で袋の中に残っているボールの数は，

$\boxed{カキ}$ 個

である．

(2) 3で割ると2余り，5で割ると1余り，7で割ると6余る自然数のうち最小の数は，

$\boxed{クケ}$

であり，3桁で最大の数は

$\boxed{コサシ}$

である．

(3) $\sqrt{\dfrac{135n}{28}}$ が有理数となるような自然数 n のうち最小の数は，

$\boxed{スセソ}$

である．

(1)

1から200までの自然数の集合を U，U の要素のうち，7の倍数，5の倍数，2の倍数からなる部分集合をそれぞれ，A，B，C とする．

(i)

$$200 \div 7 = 28 \ldots 4$$

したがって，**28** 個．

(ii) 求める要素の個数は，

$$n(U) - n(A \cup B) = n(U) - n(A) - n(B) + n(A \cap B)$$

である．ここで，

$$200 \div 5 = 40,\ 200 \div 35 = 5 \ldots 25$$

であるから，$n(A) = 40$，$n(A \cap B) = 5$．よって，求める要素の個数は，

$$200 - 28 - 40 + 5 = \mathbf{137}$$

(iii) 求める要素の個数は，

$$\begin{aligned} &n(U) - n(A \cup B \cup C) \\ &= n(U) - n(A) - n(B) - n(C) \\ &\qquad + n(A \cup B) + n(B \cup C) + n(C \cup A) \\ &\qquad\quad - n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

ここで，

$$200 \div 2 = 100,\ 200 \div 14 = 14 \ldots 4,\ 200 \div 10 = 20,\ 200 \div 105 = 1 \ldots 95$$

であるから，$n(C) = 100$，$n(B \cap C) = 14$，$n(C \cap A) = 20$，$n(A \cap B \cap C) = 1$．ゆえに，求める要素の個数は，

$$\begin{aligned} &200 - 28 - 40 - 100 + 5 + 14 + 20 - 1 \\ &= \mathbf{70} \end{aligned}$$

(2) 題意の自然数を n とするとき，整数 a，b を用いて，

$$n = 3a + 2 = 5b + 1 \cdots ①$$

とかける．このとき，

$$\begin{aligned} 3a + 2 &= 5b + 1 \\ 3a - 5b &= -1 \end{aligned}$$

この特殊解は，$a = -2$，$b = -1$ である．ゆえに，

$$3(a + 2) - 5(b + 1) = 0$$

であるから，整数 k を用いて，

$$\begin{cases} a = 5k - 2 \\ b = 3k - 1 \end{cases}$$

と表せる．このとき，n は，①にこれを代入することにより，

$$n = 3(5k - 2) + 2 = 5(3k - 1) + 1 = 15k - 4 \cdots ②$$

また，n は7で割ると6余る自然数であるから，整数 c を用いて，

$$n = 15k - 4 = 7c + 6$$

のようにも表せる．このとき，

$$\begin{aligned} 15k - 4 &= 7c + 6 \\ 15k - 7c &= 10 \cdots ③ \end{aligned}$$

ここで，$15 - 7 \cdot 2 = 1$ であるから，③の特殊解は，$k = 10$，$c = 20$ である．したがって，

$$15(k - 10) - 7(c - 20) = 0$$

ゆえに，整数 l を用いて，

$$\begin{cases} k = 7l + 10 = 7l' + 3 \\ c = 15l + 20 = 15l' + 5 \quad (\quad l' = l + 1) \end{cases}$$

よって，これらを②に代入すると，

$$n = 15(7l' + 3) - 4 = 7(15l' + 5) + 6 = 105l' + 41$$

ゆえに，このような数のうち最も小さな自然数は，**41** $(l' = 0)$ で，最も大きな3桁の数は，**986** $(l' = 9)$．

(3) $135 = 3^3 \cdot 5$，$28 = 2^2 \cdot 7$ であるから，

$$\sqrt{\frac{135n}{28}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3 \cdot 5 \cdot n}{7}}$$

これが有理数となるとき，

$$n = p \cdot 3^{2a-1} \cdot 5^{2b-1} \cdot 7^{2c-1},\ (a,\ b,\ c,\ p \text{は正の整数})$$

の形である．このうち，最小のものは，

$$n = 3 \cdot 5 \cdot 7 = \mathbf{105}$$

$\boxed{\text{II}}$ 次の$\boxed{}$にあてはまる数値や符号を答えよ．(38 点)
座標平面上で，次の円 C と直線 l について考える．

$$\begin{cases} C\colon x^2+y^2-6y-7=0 \\ \ell\colon y=ax-6a+7 \end{cases}$$

ただし，a は定数とする．このとき，次のことがいえる．

(1) 円 C の中心の座標は

$$\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\right)$$

であり，半径は，

$$\boxed{\text{ウ}}$$

である．
また，直線 ℓ は定数 a の値に関係なく，点 $\left(\boxed{\text{エ}},\ \boxed{\text{オ}}\right)$ を通る．

(2) 円 C と直線 ℓ が異なる 2 点で交わるとき，定数 a のとり得る値の範囲は，

$$\boxed{\text{カ}} < a < \frac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

である．

(3) 点 $(0,\ -5)$ を通り，円 C に接する直線を m と n とする（ただし，傾きが正の直線を m とし，傾きが負の直線を n とする）．直線 m と円 C の接点を P とし，直線 n と円 C の接点を Q とする．このとき，次のことがいえる．

(i) 直線 m の方程式は

$$y=\sqrt{\boxed{\text{コ}}}\,x-\boxed{\text{サ}}$$

であり，点 Q の座標は，

$$Q\left(\boxed{\text{シス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}},\ \boxed{\text{ソ}}\right)$$

である．

(ii) 円 C の孤 PQ のうち，線分 PQ の下側にある方の弧と直線 m，n で囲まれた図形の面積 S は

$$S=\boxed{\text{タチ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}-\frac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}\pi$$

である．

(1)
円 C の方程式を平方完成すると，

$$x^2+y^2-6y-7=0$$
$$x^2+(y-3)^2=16$$

であるから，円 C の中心は，(0, 3) であり，半径は 4 である．
また，直線 l の方程式を a について整理すると，

$$y=ax-6a+7$$
$$ax-6a+7-y=0$$
$$a(x-6)-(y-7)=0$$

ゆえに，どんな a についても，$x=6$，$y=-7$ はこの方程式の解である．よって，求める点の座標は，(6, 7)．

(2) 円 C の中心と直線 ℓ の距離を d とすると，円 C と直線 ℓ が異なる 2 点で交わるための必要十分条件は，

$$d<4$$

である．ここで，

$$d=\left.\frac{|y-ax+6a-7|}{\sqrt{1^2+(-a)^2}}\right|_{x=0,\ y=3}$$
$$=\frac{|3+6a-7|}{\sqrt{a^2+1}}$$
$$=\frac{|6a-4|}{\sqrt{a^2+1}}$$

であるから，求める条件は，

$$\frac{|6a-4|}{\sqrt{a^2+1}}<4$$
$$|6a-4|<4\sqrt{a^2+1}$$
$$|3a-2|<2\sqrt{a^2+1}$$
$$9a^2-12a+4<4a^2+4$$
$$5a^2-12a<0$$
$$a(5a-12)<0$$
$$\mathbf{0<a<\frac{12}{5}}$$

(3) (i)$x=0$ は接線ではない．点 (0, −5) を通る $x=0$ 以外の直線は，実数 u を用いて，$y=ux-5$ と表せる．よって，これが円 C と接するとき，中心と直線との距離が半径に等しいので，

$$\frac{|3-0+5|}{\sqrt{u^2+1}}=4$$
$$8=4\sqrt{u^2+1}$$
$$2=\sqrt{u^2+1}$$
$$4=u^2+1$$
$$u^2=3$$
$$u=\pm\sqrt{3}$$

したがって，m の方程式は，

$$\boldsymbol{y=\sqrt{3}x-5}$$

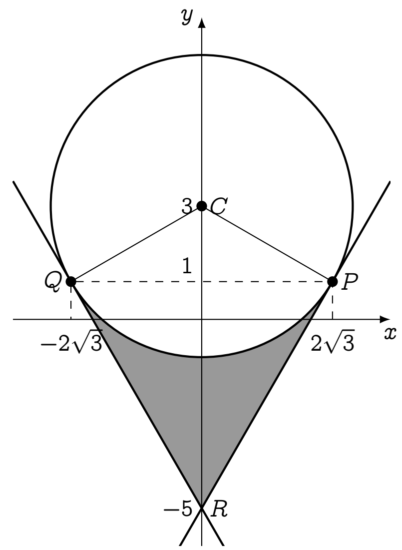
である．また，このとき，円 C と m の接点 P の座標は，連立方程式

$$\begin{cases} x^2+(y-3)^2=16\cdots① \\ y=\sqrt{3}x-5\cdots② \end{cases}$$

の解である．②を①に代入して，

$$x^2+(\sqrt{3}x-8)^2=16$$
$$4x^2-16\sqrt{3}x+48=0$$
$$x^2-4\sqrt{3}x+12=0$$
$$(x-2\sqrt{3})^2=0$$
$$x=2\sqrt{3}$$

である．これを②に代入して，$y=1$．ゆえに，$P(2\sqrt{3},\ 1)$．Q は P と y 軸に対して対称な位置にあるので（∵ 円 C は y 軸に関して対称な図形で，m と n も y 軸に関して対称だから，それらの交点もやはり y 軸に関して対称），$\boldsymbol{Q(-2\sqrt{3},\ 1)}$ である．
(ii) 求める図形は以下の図の通り．



m と n の交点を R とする．このとき，

$$S=\triangle PQR+\triangle PCQ-\text{扇形}\,CPQ$$

であり，$\angle PCQ=120°$ であるから，

$$S=4\sqrt{3}\times(1-(-5))\times\frac{1}{2}+4\sqrt{3}\times(3-1)\times\frac{1}{2}-\pi\times4^2\times\frac{120}{360}$$
$$=4\sqrt{3}\times8\times\frac{1}{2}-\frac{16\pi}{3}$$
$$=\mathbf{16\sqrt{3}-\frac{16}{3}\pi}$$

Ⅲ 次の$\boxed{}$に当てはまる数値や符号を答えよ．(38 点)
次の 2 つの関数

$$\begin{cases} f(x) = \log_2 ax \\ g(x) = 3 + 2\log_{\frac{1}{2}} x \end{cases}$$

について考える．ただし，a は定数とする．また，$f(2) = 2$ である．このとき，次のことがいえる．

(1) a と $g(2)$ の値は，

$$a = \boxed{\text{ア}}\ ,\ g(2) = \boxed{\text{イ}}$$

である．

(2) $t = \log_2 x$ とする．$f(x)\cdot g(x)$ を t を用いて表すと，

$$f(x)\cdot g(x) = \boxed{\text{ウエ}}\, t^2 + t + \boxed{\text{オ}}$$

である．

(3) 方程式 $f(x)\cdot g(x) = k$ の解のうち (ただし，k は定数とする)．$1 \leqq x \leqq 2$ の範囲に含まれる解の個数を次のように求めよう．
$1 \leqq x \leqq 2$ のとき，t の値の範囲は，

$$\boxed{\text{カ}} \leqq t \leqq \boxed{\text{キ}}$$

である．
$y = \boxed{\text{ウエ}}\, t^2 + t + \boxed{\text{オ}}$ のグラフと直線 $y = k$ の共有点の個数は求める解の個数と一致する．
したがって，

(i) $\boxed{\text{カ}} \leqq k < \dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ のとき，解の個数は $\boxed{\text{シ}}$ 個である．

(ii) $\boxed{\text{ス}} \leqq k < \boxed{\text{ク}}$ ，$k = \dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ のとき，解の個数は $\boxed{\text{セ}}$ 個である．

(iii) $k < \boxed{\text{ス}}$ ，$\dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}} < k$ のとき，解の個数は $\boxed{\text{ソ}}$ 個である．

(1)

$$\begin{aligned} f(2) &= \log_2 2a \\ &= \log_2 2 + \log_2 a \\ &= 1 + \log_2 a \end{aligned}$$

であるから，$f(2) = 2$ のとき，

$$\log_2 a = 1$$

これを解いて，$\boldsymbol{a = 2}$．
また，

$$\begin{aligned} g(2) &= 3 + 2\log_{\frac{1}{2}} 2 \\ &= 3 - 2 = \mathbf{1} \end{aligned}$$

(2)
$a = 2$ を代入すると，

$$f(x) = \log_2 2x = \log_2 2 + \log_2 x = 1 + \log_2 x$$

また，$g(x)$ に底の変換公式を用いて，

$$\begin{aligned} g(x) &= 3 + 2\log_{\frac{1}{2}} x \\ &= 3 + 2\frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} \\ &= 3 - 2\log_2 x \end{aligned}$$

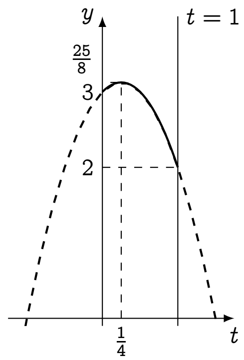
よって，

$$\begin{aligned} f(x)\cdot g(x) &= (1 + \log_2 x)(3 - 2\log_2 x) \\ &= (1 + t)(3 - 2t) \\ &= \boldsymbol{-2t^2 + t + 3} \end{aligned}$$

(3) $1 \leqq x \leqq 2$ のとき，$\log_2 1 \leqq \log_2 x \leqq \log_2 2$ であるから，

$$0 \leqq t \leqq 1$$

ここで，$y = -2t^2 + t + 3$ の $0 \leqq t \leqq 1$ におけるグラフは次の通り．



よって，$\boldsymbol{3 \leqq k < \dfrac{25}{8}}$ のとき，解の個数は **2** 個である．
また，$\boldsymbol{2 \leqq k < 3}$，$\boldsymbol{k = \dfrac{25}{8}}$ のとき，解の個数は **1** 個である．
さらに，$\boldsymbol{k < 2}$，$\boldsymbol{\dfrac{25}{8} < k}$ のとき，解の個数は **0** 個である．

Ⅳ 次の$\boxed{}$に当てはまる数値や符号を答えよ．(37 点)
座標平面上で，次の x の 3 次関数

$$f(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 9x^2 + 23x - 15)$$

について考える．このとき，次のことがいえる．

(1) 方程式 $f(x) = 0$ の解の中で，

最小の値は $\boxed{\text{ア}}$，最大の値は $\boxed{\text{イ}}$

である．$y = f(x)$ のグラフ上の x 座標の値が $\boxed{\text{ア}}$ である点における接線 ℓ の方程式は，

$$\ell : y = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}x - \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

である．

(2) $y = f(x)$ のグラフと ℓ の共有点について，x 座標の値が $\boxed{\text{ア}}$ である点を A とする．A とは異なる共有点 B の座標は

$$B(\boxed{\text{キ}}, \boxed{\text{クケ}})$$

である．

(3) $y = f(x)$ のグラフ上を A から B まで移動する点 P（A，B は除く）を考える．$\triangle ABP$ の面積 S が最大となるとき，面積 S は

$$S = \boxed{\text{コサ}}$$

である．