

I

次の にあてはまる数値や符号を答えよ。

座標平面上で、 x の 2 次関数

$$y = x^2 - 2ax - 2a + 15 \cdots \textcircled{1}$$

について考える。ただし、 a は定数とする。このとき、次のことがいえる。

(1) $\textcircled{1}$ のグラフの頂点の y 座標は

$$-a^2 - \boxed{\text{ア}} a + \boxed{\text{イウ}}$$

である。

(2) $\textcircled{1}$ のグラフが x 軸と異なる 2 つの共有点をもつような a の値の範囲は

$$a < - \boxed{\text{エ}} , \boxed{\text{オ}} < a$$

である。

(3) $\textcircled{1}$ のグラフと軸の異なる 2 つの共有点が $x < 0, 2 < x$ の範囲にあるような a の値の範囲を次の手順で求めよう。

(i) 2 つの共有点の一方が $x < 0$ の範囲に、他方が $2 < x$ の範囲にあるような a の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}} < a$$

である。

(ii) 2 つの共有点がともに $x < 0$ の範囲にあるような a の値の範囲は

$$a < - \boxed{\text{ケ}}$$

である。

(iii) 2 つの共有点がともに $2 < x$ の範囲にあるような a の値の範囲は

$$\boxed{\text{コ}} < a < \frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である。

したがって、求める a の値の範囲は (i), (ii), (iii) を合わせた範囲である。

解説

(1)

♣ 放物線の頂点の座標は平方完成して求めるのが基本です。

♣ まず、 $x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$ となることに注目しましょう。

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 2ax - 2a + 15 \\ &= x^2 - 2ax + a^2 - a^2 - 2a + 15 \quad (*) \\ &= (x - a)^2 - a^2 - 2a + 15 \end{aligned}$$

♣ $(*)$ の a^2 を足し引きして中和する操作が平方完成におけるかなめです。具体的な数字の場合から初めて、このような文字でも計算できるよう、修行を積みましょう。

♣ 平方完成ができれば、頂点の座標はすぐに分かります。

$$2 \text{ 次関数 } y = \tilde{a}(x - p)^2 + q \text{ の頂点の座標は } (p, q).$$

x 座標の方は特に符号に気をつけて取り出しましょう。

♣ 今回の問題では、頂点の座標は、

$$(a, -a^2 - 2a + 15)$$

となります。

(2)

♣ $y = f(x)$ と x 軸の共有点の座標に関する問題は、 $f(x) = 0$ の実数解に関する問題に読みかえます。

♣ x 軸は、方程式 $y = 0$ で表されるので、 $y = f(x)$ と x 軸の共有点は、連立方程式

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$$

の実数解で表されます。

♣ そこで、2 次関数 $y = f(x)$ が x 軸と異なる 2 点で交わるという条件は、2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解を持つ、つまり、判別式 D の符号が正であると読みかえることができます。

♣ 2 次方程式 $Ax^2 + Bx + C = 0$ について、判別式 D は、

$$D = B^2 - 4 \cdot A \cdot C$$

で表されます。

♣ 今回の問題では、2 次方程式は、

$$x^2 - 2ax - 2a + 15 = 0$$

ですから、判別式は、

$$\begin{aligned} D &= (-2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2a + 15) \\ &= 4a^2 - 4(-2a + 15) \\ &= 4a^2 + 8a - 60 \\ &= 4(a^2 + 2a - 15) \end{aligned}$$

です (慣れてくれば、 $D/4$ という方法もあります)。

♣ 今回、 $\textcircled{1}$ のグラフは、 x 軸と異なる 2 つの共有点を持つので、2 次方程式は異なる 2 つの実数解を持つ、つまり、 $D > 0$ と言えます。ですから、

$$\begin{aligned} a^2 + 2a - 15 &> 0 \\ (a + 5)(a - 3) &> 0 \\ a &< -5, 3 < a \end{aligned}$$

(3)

♣ 解の配置問題と呼ばれる、学校 (非進学校) ではあまり教えてくれない、入試の定番問題です。

「与えられた範囲に 2 次方程式の解が存在する条件」、または、「与えられた区間で 2 次関数のグラフと x 軸が交わる条件」として出題されます。

♣ 解の配置問題には大きく分けて 2 つの TYPE が考えられます。

♣ 解の配置問題 (TYPE.1) は次が基本です：

2 次関数 $y = f(x)$ について (または 2 次方程式 $f(x) = 0$ について)、2 つの交点が同一の範囲に含まれる場合、

- ① 判別式：2 次方程式 $f(x) = 0$ の判別式 D の符号。
- ② 軸：グラフの軸の位置
- ③ 端点：「 $k < x$ の範囲に解を..」のように範囲がついている場合その端点 k における値 $f(k)$ の符号

♣ 解の配置問題 (TYPE.2) は次が基本です：

2 次関数 $y = f(x)$ について (または 2 次方程式 $f(x) = 0$ について)、2 つの交点が 2 つの異なる区間に含まれる場合、

- ① 端点の積が負：「 $a < x < b$ の範囲に解を...」なら、「 $f(a)f(b) < 0$ 」とします。

このときは、解の個数が端点だけの情報から分かるということがポイントです。

♣ (i) は TYPE.2 の問題です。 $f(x) = x^2 - 2ax - 2a + 15$ とするとき、求める条件は、

$$f(0) < 0 \text{ かつ } f(2) < 0$$

です。これを解くと、

$$\begin{aligned} f(0) &= 0^2 - 2a \cdot 0 - 2a + 15 < 0 \text{ かつ } f(2) = 2^2 - 2a \cdot 2 - 2a + 15 < 0 \\ -2a + 15 &< 0 \text{ かつ } -6a + 19 < 0 \\ \frac{15}{2} &< a \text{ かつ } \frac{19}{6} < a \\ \frac{15}{2} &< a \end{aligned}$$

I

次の にあてはまる数値や符号を答えよ。

座標平面上で、 x の 2 次関数

$$y = x^2 - 2ax - 2a + 15 \cdots \textcircled{1}$$

について考える。ただし、 a は定数とする。このとき、次のことがいえる。

(1) $\textcircled{1}$ のグラフの頂点の y 座標は

$$-a^2 - \boxed{\text{ア}} a + \boxed{\text{イウ}}$$

である。

(2) $\textcircled{1}$ のグラフが x 軸と異なる 2 つの共有点をもつような a の値の範囲は

$$a < - \boxed{\text{エ}} , \boxed{\text{オ}} < a$$

である。

(3) $\textcircled{1}$ のグラフと軸の異なる 2 つの共有点が $x < 0, 2 < x$ の範囲にあるような a の値の範囲を次の手順で求めよう。

(i) 2 つの共有点の一方が $x < 0$ の範囲に、他方が $2 < x$ の範囲にあるような a の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}} < a$$

である。

(ii) 2 つの共有点がともに $x < 0$ の範囲にあるような a の値の範囲は

$$a < - \boxed{\text{ケ}}$$

である。

(iii) 2 つの共有点がともに $2 < x$ の範囲にあるような a の値の範囲は

$$\boxed{\text{コ}} < a < \frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である。

したがって、求める a の値の範囲は (i), (ii), (iii) を合わせた範囲である。

♣ (ii) は TYPE.1 の問題です。異なる 2 つの共有点がともに $x < 0$ にあるための条件は、判別式、軸、端点の情報を調べれば良いので、

$$\begin{cases} \text{判別式 } D > 0 \cdots \textcircled{1} \\ \text{軸の位置 } < 0 \cdots \textcircled{2} \\ \text{端点の値 } f(0) > 0 \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

を解くことになります。

♣ まず、 $x^2 - 2ax - 2a + 15 = 0$ の判別式は

$$\begin{aligned} D &= (2a)^2 - 4(-2a + 15) \\ &= 4a^2 + 8a - 60 \\ &= 4(a^2 + 2a - 15) \end{aligned}$$

ですから、条件 $D > 0$ は、

$$\begin{aligned} a^2 + 2a - 15 &> 0 \\ (a + 5)(a - 3) &> 0 \\ a &< -5, 3 < a \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となります。

♣ 次に、軸の位置には、(1) より、 $x = a$ でしたから、

$$a < 0 \cdots \textcircled{2}$$

が求める条件になります。

♣ 最後に端点 $f(0) = -2a + 15$ なので、

$$\begin{aligned} -2a + 15 &> 0 \\ 2a &< 15 \\ a &< \frac{15}{2} \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

が最後の条件です。

♣ $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ の共通部分をとることにより、

$$a < -5$$

♣ (iii) もやはり、TYPE.1 の問題です。異なる 2 つの共有点がともに $2 < x$ にあるための条件は、判別式、軸、端点の情報を調べれば良いので、

$$\begin{cases} \text{判別式 } D > 0 \cdots \textcircled{1} \\ \text{軸の位置 } > 2 \cdots \textcircled{2} \\ \text{端点の値 } f(2) > 0 \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

を解くことになります。

♣ 判別式に関する条件は (ii) のものをそのまま使しましょう。

$$a < -5, 3 < a \cdots \textcircled{1}$$

♣ 軸 $x = a$ の位置に関する条件は、

$$a > 2 \cdots \textcircled{2}$$

となります。

♣ 最後に、

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^2 - 2a \cdot 2 - 2a + 15 \\ &= -6a + 19 \end{aligned}$$

ですから、求める条件は、

$$\begin{aligned} -6a + 19 &> 0 \\ a &< \frac{19}{6} \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

♣ $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ の共通部分を取り、

$$3 < a < \frac{19}{6}$$

Ⅱ 次の にあてはまる数値や符号を答えよ。(33 点)

四角形 ABCD において、 $\angle A = 30^\circ$ 、 $\angle B = 165^\circ$ 、 $\angle C = 90^\circ$ 、 $AB = \sqrt{3} - 1$ 、 $AD = 2$ とする。

このとき、次のことがいえる。

(1) 四角形 ABCD の対角線 BD の長さは

$$BD = \sqrt{\text{ア}}$$

である。

(2) $\triangle ABD$ において

$$\cos \angle ABD = \frac{\text{イ} \sqrt{\text{ウ}}}{\text{エ}}$$

である。

(3) 線分 BC の長さは

$$BC = \frac{\sqrt{\text{オ}}}{\text{カ}}$$

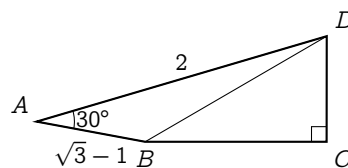
である。

(4) 四角形 ABCD の面積 S は

$$S = \frac{\text{キ} \sqrt{\text{ク}} - \text{ケ}}{\text{コ}}$$

である。

♣ 与えられた図形は、次の通り；



(1) 余弦定理より、

$$\begin{aligned} BD^2 &= AB^2 + AD^2 - 2AD \cdot AB \cos 30^\circ \\ &= (\sqrt{3} - 1)^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 4 - 2\sqrt{3} + 4 - 2\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

ゆえに、 $BD = \sqrt{2}$

(2) 余弦定理より、

$$\begin{aligned} \cos \angle ABD &= \frac{BD^2 + AB^2 - AD^2}{2AB \cdot BD} \\ &= \frac{2 + 4 - 2\sqrt{3} - 4}{2 \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot \sqrt{2}} \\ &= \frac{2(1 - \sqrt{3})}{2\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)} \\ &= \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

(3) (2) より、 $\angle ABD = 135^\circ$ $\angle B = 165^\circ$ だから、 $\angle CBD = 165^\circ - 135^\circ = 30^\circ$ 。したがって、

$$BC = BD \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

(4)

$$\begin{aligned} S &= \triangle ABD + \triangle BDC \\ &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot BD \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{2\sqrt{3} - 2}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{3\sqrt{3} - 2}{4} \end{aligned}$$

Ⅲ 次の□に当てはまる数値や符号を答えよ。(34 点)

(1) 60 と 252 の最大公約数を G ，最小公倍数を L とする。

1. このとき，

$G = \boxed{\text{アイ}}, L = \boxed{\text{ウエオカ}}$

である。

2. $A = aG, B = bG$ とする。ただし， a と b は互いに素である自然数で $a < b$ とする。

A と B の最小公倍数が L のとき，

$ab = \boxed{\text{キクケ}}$

である。このとき， $A + B$ が最小となるような a と b の値は，

$a = \boxed{\text{コ}}, b = \boxed{\text{サシ}}$

である。

(2) 2 つの整数 m, n を 7 で割った余りが，それぞれ 3, 5 である。このとき，次のことが言える。

(i) $2m + n$ を 7 で割った余りは $\boxed{\text{ス}}$ である。

(ii) m^3 を 7 で割った余りは $\boxed{\text{セ}}$ である。

(iii) $m^2 - n^2$ を 7 で割った余りは $\boxed{\text{ソ}}$ である。

(1) (i) $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5, 252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$ であるから， $G = 12, L = 1260$ である。

(ii) $A = aG, B = bG$ について， a と b が互いに素であるから，

$$L = abG$$

とかける。ゆえに，

$$ab = \frac{L}{G} = \frac{1260}{12} = 105$$

である。

また，

$$A + B = (a + b)G$$

であるから， $A + B$ が最小であるとき， $a + b$ は最小。ここで， a と b は互いに素なので， $a \neq 1, a < b$ かつ $a \neq 1$ となる数の組合わせと， $a + b$ の値は次の表の通り：

a	3	5	7
b	35	21	15
$a + b$	38	26	22

ゆえに， $a = 7, b = 15$ で $A + B$ が最小となる。

(2) 7 を法とする合同式を考える。このとき， $m \equiv 3, n \equiv 5$ である。

(i)

$$\begin{aligned} 2m + n &\equiv 2 \cdot 3 + 5 \\ &\equiv 11 \\ &\equiv 4 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} m^3 &\equiv 3^3 \\ &\equiv 6 \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} m^2 - n^2 &\equiv 3^2 - 5^2 \\ &\equiv 2 - 4 \\ &\equiv -2 \\ &\equiv 5 \end{aligned}$$

/一般選抜/2月2日

Ⅰ 次の□に当てはまる数値や符号を答えよ。(37点)

(1) 1～200 までの番号がついた 200 個のボールが袋の中に入っている。次の①～③の順番でボールを袋から取り出す。ただし、取り出したボールは袋に戻さないものとする。

- ① 7 の倍数の番号がついたボールをすべて取り出す
- ② 5 の倍数の番号がついたボールをすべて取り出す
- ③ 2 の倍数の番号がついたボールをすべて取り出す

このとき、次のことがいえる。

- (i) ①の操作で取り出したボールの数は、

アイ

個である。
- (ii) ②の操作の後で袋の中に残っているボールの数は、

ウエオ

個である。
- (iii) ③の操作の後で袋の中に残っているボールの数は、

カキ

個である。

(2) 3 で割ると 2 余り，5 で割ると 1 余り，7 で割ると 6 余る自然数のうち最小の数は，

クケ

であり，3 桁で最大の数は

コサシ

である。

(3) $\sqrt{\frac{135n}{28}}$ が有理数となるような自然数 n のうち最小の数は，

スセソ

である。

(1) 1 から 200 までの自然数の集合を U ， U の要素のうち，7 の倍数，5 の倍数，2 の倍数からなる部分集合をそれぞれ， A ， B ， C とする。

(i) $200 \div 7 = 28 \dots 4$

したがって，28 個。

(ii) 求める要素の個数は，

$$n(U) - n(A \cup B) = n(U) - n(A) - n(B) + n(A \cap B)$$

である。ここで，

$$200 \div 5 = 40, 200 \div 35 = 5 \dots 25$$

であるから， $n(A) = 40$ ， $n(A \cap B) = 5$ 。よって，求める要素の個数は，

$$200 - 28 - 40 + 5 = 137$$

(iii) 求める要素の個数は，

$$\begin{aligned} & n(U) - n(A \cup B \cup C) \\ &= n(U) - n(A) - n(B) - n(C) \\ &\quad + n(A \cup B) + n(B \cup C) + n(C \cup A) \\ &\quad - n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

ここで，

$$200 \div 2 = 100, 200 \div 14 = 14 \dots 4, 200 \div 10 = 20, 200 \div 105 = 1 \dots 95$$

であるから， $n(C) = 100$ ， $n(B \cap C) = 14$ ， $n(C \cap A) = 20$ ， $n(A \cap B \cap C) = 1$ 。ゆえに，求める要素の個数は，

$$\begin{aligned} & 200 - 28 - 40 - 100 + 5 + 14 + 20 - 1 \\ &= 70 \end{aligned}$$

(2) 題意の自然数を n とするとき，整数 a ， b を用いて，

$$n = 3a + 2 = 5b + 1 \dots \textcircled{1}$$

とかける。このとき，

$$\begin{aligned} 3a + 2 &= 5b + 1 \\ 3a - 5b &= -1 \end{aligned}$$

この特殊解は， $a = -2$ ， $b = -1$ である。ゆえに，

$$3(a + 2) - 5(b + 1) = 0$$

であるから，整数 k を用いて，

$$\begin{cases} a = 5k - 2 \\ b = 3k - 1 \end{cases}$$

と表せる。このとき， n は， $\textcircled{1}$ にこれを代入することにより，

$$n = 3(5k - 2) + 2 = 5(3k - 1) + 1 = 15k - 4 \dots \textcircled{2}$$

また， n は 7 で割ると 6 余る自然数であるから，整数 c を用いて，

$$n = 15k - 4 = 7c + 6$$

のようにも表せる。このとき，

$$\begin{aligned} 15k - 4 &= 7c + 6 \\ 15k - 7c &= 10 \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

ここで， $15 - 7 \cdot 2 = 1$ であるから， $\textcircled{3}$ の特殊解は， $k = 10$ ， $c = 20$ である。したがって，

$$15(k - 10) - 7(c - 20) = 0$$

ゆえに，整数 l を用いて，

$$\begin{cases} k = 7l + 10 = 7l' + 3 \\ c = 15l + 20 = 15l' + 5 \quad (l' = l + 1) \end{cases}$$

よって，これらを $\textcircled{2}$ に代入すると，

$$n = 15(7l' + 3) - 4 = 7(15l' + 5) + 6 = 105l' + 41$$

ゆえに，このような数のうち最も小さな自然数は，41 ($l' = 0$) で，最も大きな 3 桁の数は，986 ($l' = 9$)。

(3) $135 = 3^3 \cdot 5$ ， $28 = 2^2 \cdot 7$ であるから，

$$\sqrt{\frac{135n}{28}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3 \cdot 5 \cdot n}{7}}$$

これが有理数となるとき，

$$n = p \cdot 3^{2a-1} \cdot 5^{2b-1} \cdot 7^{2c-1}, \text{ (} a, b, c, p \text{ は正の整数)}$$

の形である。このうち，最小のものは，

$$n = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$$

Ⅱ 次の□にあてはまる数値や符号を答えよ。(38 点)
座標平面上で、次の円 C と直線 l について考える。

$$\begin{cases} C: x^2 + y^2 - 6y - 7 = 0 \\ l: y = ax - 6a + 7 \end{cases}$$

ただし、 a は定数とする。このとき、次のことがいえる。

(1) 円 C の中心の座標は

$$\left(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}} \right)$$

であり、半径は、

$$\boxed{\text{ウ}}$$

である。

また、直線 l は定数 a の値に関係なく、点 $\left(\boxed{\text{エ}}, \boxed{\text{オ}} \right)$ を通る。

(2) 円 C と直線 l が異なる 2 点で交わる時、定数 a のとり得る値の範囲は、

$$\boxed{\text{カ}} < a < \frac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

である。

(3) 点 $(0, -5)$ を通り、円 C に接する直線を m と n とする (ただし、傾きが正の直線を m とし、傾きが負の直線を n とする)。直線 m と円 C の接点を P とし、直線 n と円 C の接点を Q とする。このとき、次のことがいえる。

(i) 直線 m の方程式は

$$y = \sqrt{\boxed{\text{コ}}}x - \boxed{\text{サ}}$$

であり、点 Q の座標は、

$$Q\left(\boxed{\text{シス}}, \sqrt{\boxed{\text{セ}}}, \boxed{\text{ソ}} \right)$$

である。

(ii) 円 C の弧 PQ のうち、線分 PQ の下側にある方の弧と直線 m, n で囲まれた図形の面積 S は

$$S = \boxed{\text{タチ}} \sqrt{\boxed{\text{ツ}}} - \frac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}} \pi$$

である。

(1)

円 C の方程式を平方完成すると、

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6y - 7 &= 0 \\ x^2 + (y - 3)^2 &= 16 \end{aligned}$$

であるから、円 C の中心は、 $(0, 3)$ であり、半径は 4 である。

また、直線 l の方程式を a について整理すると、

$$\begin{aligned} y &= ax - 6a + 7 \\ ax - 6a + 7 - y &= 0 \\ a(x - 6) - (y - 7) &= 0 \end{aligned}$$

ゆえに、どんな a についても、 $x = 6, y = -7$ はこの方程式の解である。よって、求める点の座標は、 $(6, 7)$ 。

(2) 円 C の中心と直線 l の距離を d とすると、円 C と直線 l が異なる 2 点で交わるための必要十分条件は、

$$d < 4$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} d &= \frac{|y - ax + 6a - 7|}{\sqrt{1^2 + (-a)^2}} \Big|_{x=0, y=3} \\ &= \frac{|3 + 6a - 7|}{\sqrt{a^2 + 1}} \\ &= \frac{|6a - 4|}{\sqrt{a^2 + 1}} \end{aligned}$$

であるから、求める条件は、

$$\begin{aligned} \frac{|6a - 4|}{\sqrt{a^2 + 1}} &< 4 \\ |6a - 4| &< 4\sqrt{a^2 + 1} \\ |3a - 2| &< 2\sqrt{a^2 + 1} \\ 9a^2 - 12a + 4 &< 4a^2 + 4 \\ 5a^2 - 12a &< 0 \\ a(5a - 12) &< 0 \\ 0 &< a < \frac{12}{5} \end{aligned}$$

(3) (i) $x = 0$ は接線ではない。点 $(0, -5)$ を通る $x = 0$ 以外の直線は、実数 u を用いて、 $y = ux - 5$ と表せる。よって、これが円 C と接するとき、中心と直線との距離が半径に等しいので、

$$\begin{aligned} \frac{|3 - 0 + 5|}{\sqrt{u^2 + 1}} &= 4 \\ 8 &= 4\sqrt{u^2 + 1} \\ 2 &= \sqrt{u^2 + 1} \\ 4 &= u^2 + 1 \\ u^2 &= 3 \\ u &= \pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

したがって、 m の方程式は、

$$y = \sqrt{3}x - 5$$

である。また、このとき、円 C と m の接点 P の座標は、連立方程式

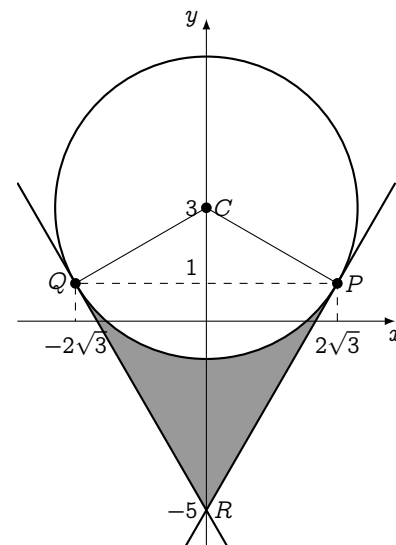
$$\begin{cases} x^2 + (y - 3)^2 = 16 \cdots \textcircled{1} \\ y = \sqrt{3}x - 5 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

の解である。②を①に代入して、

$$\begin{aligned} x^2 + (\sqrt{3}x - 8)^2 &= 16 \\ 4x^2 - 16\sqrt{3}x + 48 &= 0 \\ x^2 - 4\sqrt{3}x + 12 &= 0 \\ (x - 2\sqrt{3})^2 &= 0 \\ x &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

である。これを②に代入して、 $y = 1$ 。ゆえに、 $P(2\sqrt{3}, 1)$ 。 Q は P と y 軸に対して対称な位置にあるので (\because 円 C は y 軸に関して対称な図形で、 m と n も y 軸に関して対称だから、それらの交点もやはり y 軸に関して対称)、 $Q(-2\sqrt{3}, 1)$ である。

(ii) 求める図形は以下の図の通り。



m と n の交点を R とする。このとき、

$$S = \triangle PQR + \triangle PCQ - \text{扇形} CPQ$$

であり、 $\angle PCQ = 120^\circ$ であるから、

$$\begin{aligned} S &= 4\sqrt{3} \times (1 - (-5)) \times \frac{1}{2} + 4\sqrt{3} \times (3 - 1) \times \frac{1}{2} - \pi \times 4^2 \times \frac{120}{360} \\ &= 4\sqrt{3} \times 8 \times \frac{1}{2} - \frac{16\pi}{3} \\ &= 16\sqrt{3} - \frac{16}{3}\pi \end{aligned}$$

Ⅲ 次の□に当てはまる数値や符号を答えよ。(38 点)

次の 2 つの関数

$$\begin{cases} f(x) = \log_2 ax \\ g(x) = 3 + 2\log_{\frac{1}{2}} x \end{cases}$$

について考える。ただし、 a は定数とする。また、 $f(2) = 2$ である。このとき、次のことがいえる。

(1) a と $g(2)$ の値は、

$$a = \boxed{\text{ア}}, g(2) = \boxed{\text{イ}}$$

である。

(2) $t = \log_2 x$ とする。 $f(x) \cdot g(x)$ を t を用いて表すと、

$$f(x) \cdot g(x) = \boxed{\text{ウエ}} t^2 + t + \boxed{\text{オ}}$$

である。

(3) 方程式 $f(x) \cdot g(x) = k$ の解のうち (ただし、 k は定数とする)。 $1 \leq x \leq 2$ の範囲に含まれる解の個数を次のように求めよう。

$1 \leq x \leq 2$ のとき、 t の値の範囲は、

$$\boxed{\text{カ}} \leq t \leq \boxed{\text{キ}}$$

である。

$y = \boxed{\text{ウエ}} t^2 + t + \boxed{\text{オ}}$ のグラフと直線 $y = k$ の共有点の個数は求める解の個数と一致する。

したがって、

(i) $\boxed{\text{カ}} \leq k < \frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ のとき、解の個数は $\boxed{\text{シ}}$ 個である。

(ii) $\boxed{\text{ス}} \leq k < \boxed{\text{ク}}$, $k = \frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ のとき、解の個数は $\boxed{\text{セ}}$ 個である。

(iii) $k < \boxed{\text{ス}}$, $\frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}} < k$ のとき、解の個数は $\boxed{\text{ソ}}$ 個である。

(1)

$$\begin{aligned} f(2) &= \log_2 2a \\ &= \log_2 2 + \log_2 a \\ &= 1 + \log_2 a \end{aligned}$$

であるから、 $f(2) = 2$ のとき、

$$\log_2 a = 1$$

これを解いて、 $a = 2$ 。

また、

$$\begin{aligned} g(2) &= 3 + 2\log_{\frac{1}{2}} 2 \\ &= 3 - 2 = 1 \end{aligned}$$

(2)

$a = 2$ を代入すると、

$$f(x) = \log_2 2x = \log_2 2 + \log_2 x = 1 + \log_2 x$$

また、 $g(x)$ に底の変換公式を用いて、

$$\begin{aligned} g(x) &= 3 + 2\log_{\frac{1}{2}} x \\ &= 3 + 2 \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} \\ &= 3 - 2\log_2 x \end{aligned}$$

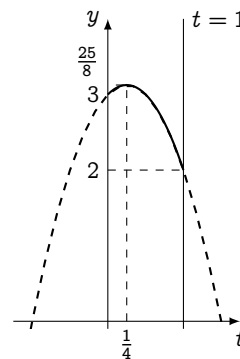
よって、

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= (1 + \log_2 x)(3 - 2\log_2 x) \\ &= (1 + t)(3 - 2t) \\ &= -2t^2 + t + 3 \end{aligned}$$

(3) $1 \leq x \leq 2$ のとき、 $\log_2 1 \leq \log_2 x \leq \log_2 2$ であるから、

$$0 \leq t \leq 1$$

ここで、 $y = -2t^2 + t + 3$ の $0 \leq t \leq 1$ におけるグラフは次の通り。



よって、 $3 \leq k < \frac{25}{8}$ のとき、解の個数は 2 個である。

また、 $2 \leq k < 3$, $k = \frac{25}{8}$ のとき、解の個数は 1 個である。

さらに、 $k < 2$, $\frac{25}{8} < k$ のとき、解の個数は 0 個である。

Ⅳ 次の□に当てはまる数値や符号を答えよ。(37点)
座標平面上で、次の x の 3 次関数

$$f(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 9x^2 + 23x - 15)$$

について考える。このとき、次のことがいえる。

(1) 方程式 $f(x) = 0$ の解の中で、

最小の値は ア，最大の値は イ

である。 $y = f(x)$ のグラフ上の x 座標の値が ア である点における接線 ℓ の方程式は、

$$\ell: y = \frac{\text{ウ}}{\text{エ}}x - \frac{\text{オ}}{\text{カ}}$$

である。

(2) $y = f(x)$ のグラフと ℓ の共有点について、 x 座標の値が ア である点を A とする。 A とは異なる共有点 B の座標は

B (キ , クケ)

である。

(3) $y = f(x)$ のグラフ上を A から B まで移動する点 P (A , B は除く) を考える。 $\triangle ABP$ の面積 S が最大となるときの、面積 S は

$S =$ コサ

である。

$f(1) = 0$ であるから、因数定理より、 $x - 1$ は $f(x)$ の因数である。したがって、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3}(x-1)(x^2 - 8x + 15) \\ &= \frac{1}{3}(x-1)(x-3)(x-5) \end{aligned}$$

ゆえに、方程式 $f(x) = 0$ の解は、 $x = 1, 3, 5$ である。最小の値は 1，最大の値は 5 である。

$$f'(x) = \frac{1}{3}(3x^2 - 18x + 23)$$

ゆえに、 $f'(1) = \frac{1}{3} \cdot 8 = \frac{8}{3}$ 。したがって、 $x = 1$ における接線の方程式は、

$$y = \frac{8}{3}(x-1)$$

すなわち、

$$y = \frac{8}{3}x - \frac{8}{3}$$

(2) $y = f(x)$ のグラフと ℓ の共有点の座標は、連立方程式

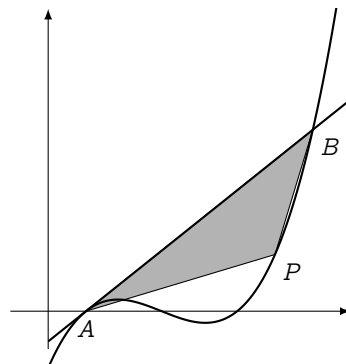
$$\begin{cases} y = f(x) \cdots \text{①} \\ y = \frac{8}{3}x - \frac{8}{3} \cdots \text{②} \end{cases}$$

の解である。したがって、①に②を代入することにより、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{8}{3}x - \frac{8}{3} \\ \frac{1}{3}(x^3 - 9x^2 + 23x - 15) &= \frac{8}{3}x - \frac{8}{3} \\ x^3 - 9x^2 + 23x - 15 &= 8x - 8 \\ x^3 - 9x^2 + 15x - 7 &= 0 \\ (x-1)(x^2 - 8x + 7) &= 0 \\ (x-1)^2(x-7) &= 0 \\ x &= 1, 7 \end{aligned}$$

B は A とは異なる点であるから、 $B(7, 16)$

(3) P の座標を $(t, f(t))$ とする。



直線 AB と P との距離を $d(t)$ とすると、 $\triangle ABP$ の面積 S は、

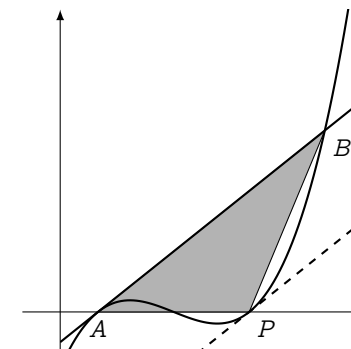
$$S = \frac{1}{2}AB \times d(t)$$

で表される。ここで、 AB は t によらない定数だから、 S が最大となるのは、 $d(t)$ が最大になるときである。直線 AB と傾きが等しい直線が曲線 $y = f(x)$ に接するようにとると、この接点が P と直線 AB の距離 $d(t)$ を最大にする点である。

AB の傾きは $\frac{8}{3}$ であるから、 $f'(x) = \frac{8}{3}$ を解いて、

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(3x^2 - 18x + 23) &= \frac{8}{3} \\ 3x^2 - 18x + 23 &= 8 \\ 3x^2 - 18x + 15 &= 0 \\ x^2 - 6x + 5 &= 0 \\ (x-1)(x-5) &= 0 \\ x &= 1, 5 \end{aligned}$$

P は A と異なる点であるから、 $x = 5$ 。そして、 $P(5, 0)$ である。



このような P について、

$$S = \frac{1}{2} \times 5 \times 16 = 40$$

一般選抜入試 2 月 7 日実施

Ⅰ 次の□にあてはまる数値や符号を答えよ。(36 点)

あるサッカー大会では参加チームを 5 ブロックに分けてトーナメント方式(1 試合ずつ対戦する勝ち抜き方式)で予選を行う。その後、各ブロックで 1 位となった 5 チームで各チームと 1 試合ずつ対戦する総当たり戦を行う。大会全体の総試合数は 300 試合である。大会の全試合において 2 つのチームが対戦するときの勝敗の確率は $\frac{1}{2}$ であり、引き分け及び棄権はないものとする。このとき、次のことがいえる。

(1) 各ブロックで 1 位となった 5 チームでの総当たり戦は全部で

アイ 試合

行われる。

(2) この大会の参加チームの数は全部で

ウエオ チーム

である。

(3) 総当たり戦で 4 敗のチームが現れる確率は

カ
キク

である。

(4) 総当たり戦で 3 勝 1 敗のチームが 3 チーム現れる確率は

ケ
コサシ

である。

(1) 試合数は、5 つのチームから 2 チームの組み合わせを作る作り方に等しいので、

$${}_5C_2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10 \text{ 試合}$$

(2) トーナメントにおける試合数は、

$$300 - 10 = 290 \text{ 試合}$$

である。トーナメントにおいて、各試合につき、優勝する 5 チーム以外は全て 1 度負けるので、

$$(\text{トーナメントの試合数}) = (\text{参加チーム数}) - (\text{優勝するチーム数})$$

が成り立つ。したがって、参加したチームの数は、

$$290 + 5 = 295 \text{ チーム}$$

である。

(3) 総当たり戦で 4 敗するチームが現れるとき、他のチームが 4 敗することはない。したがって、このようなチームは 5 通り考えられて、それぞれの場合において 4 敗する確率は、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

であるから、求める確率は、

$$\frac{1}{16} \times 5 = \frac{5}{16}$$

(4) 時系列に追いながら、確率を決定する。総当たり戦で 3 勝 1 敗のチームのうち、特定の 1 チームの選び方は、5 通りである。そのチームを A とする。まず、 A について、3 勝 1 となる確率は、反復試行の確率公式より、

$${}_4C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$

A チームが 2 つのチームに負けていることはあり得ない (\because 2 敗した場合は 3 勝 1 敗とならない)。そこで、3 勝 1 敗のチームのうち、 A と異なるものを A に負けたチームから選ぶことができる。この選び方は、3 通り。これを B チームとする。 B が 3 勝 1 敗となるためには、 A 以外の対戦で全て勝つ必要があるから、このようなことは

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

の確率で起こる。 A に負けたチームでは、この時点で 2 敗が決定する。したがって、3 勝 1 敗のチームが 3 チームになるためには、 A チームに勝ったチームが B チーム以外の 2 チームに勝つ必要がある。これが起こるのは、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

の確率である。したがって、求める確率は、

$$5 \times \frac{1}{4} \times 3 \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{15}{128}$$

→ ごめんなさい。ここの部分は手続的で分かりにくいかもです。もう少し論理的な説明が思いつけば修正します。(おそらく、口で説明する分にはこちらでも大丈夫だと思うので、直接質問に来てください。)

Ⅱ 次の□にあてはまる数値や符号を答えよ。(38点)
座標平面上に2点 $A(3, 2)$, $B(1, -2)$ を通るような円 C を考える。

$$C: x^2 + y^2 - 8x + ay + b = 0$$

ただし, a, b は定数とする。このとき, 次のことがいえる。

(1) a と b の値は

$$a = \boxed{\text{ア}}, b = \boxed{\text{イ}}$$

である。

(2) 円 C の中心の座標は $(\boxed{\text{ウ}}, \boxed{\text{エオ}})$ であり, 半径は $\sqrt{\boxed{\text{カキ}}}$ である。また, 点 A における円 C の接線の方程式は,

$$y = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}x + \boxed{\text{コ}}$$

である。

(3) 直線 AB と円 C で囲まれた2つの領域のうち, 直線 AB の上側の部分の領域を D とする。ただし, 境界線を含むものとする。点 (x, y) が領域 D を動くとき,

$$x - y \text{ の最大値は } \boxed{\text{サ}}$$

であり,

$$x - y \text{ の最小値は } \boxed{\text{シ}} - \boxed{\text{ス}} \sqrt{\boxed{\text{セ}}}$$

である。

(1) C の方程式 $x^2 + y^2 - 8x + ay + b = 0$ に, $A(3, 2)$, $B(1, -2)$ を代入して,

$$\begin{aligned} 3^2 + 2^2 - 8 \cdot 3 + a \cdot 2 + b &= 0 \\ 1^2 + (-2)^2 - 8 \cdot 1 + a \cdot (-2) + b &= 0 \end{aligned}$$

これを整理して,

$$\begin{aligned} 2a + b &= 11 \\ -2a + b &= 3 \end{aligned}$$

これを解いて, $a = 2, b = 7$ である。

(2) (1) で求めた値を, 円 C の方程式に代入すると,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 8x + ay + b &= 0 \\ x^2 + y^2 - 8x + 2y + 7 &= 0 \\ (x - 4)^2 + (y + 1)^2 &= 16 + 1 - 7 \\ (x - 4)^2 + (y + 1)^2 &= 10 \end{aligned}$$

したがって, 円 C の中心は, $(4, -1)$, 半径は $\sqrt{10}$ である。点 A における円 C の接線は, 円の接線の公式より,

$$\begin{aligned} (3 - 4)(x - 4) + (2 + 1)(y + 1) &= 10 \\ -x + 4 + 3y + 3 &= 10 \\ -x + 3y &= 3 \\ y &= \frac{1}{3}x + 3 \end{aligned}$$

である。

(3) まず, 直線 AB の方程式を求める。直線 AB の傾きは,

$$\frac{2 - (-2)}{3 - 1} = 2$$

であるから, 方程式は,

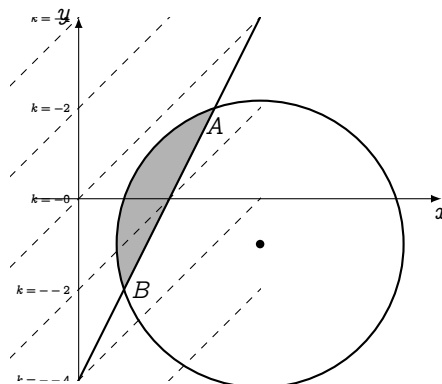
$$y - 2 = 2(x - 3)$$

すなわち,

$$y = 2x - 4$$

である。

ここで, $x - y = k$ とする。 D は次の図の通り (ただし, 境界線を含む)。



k が最大になるのは, 図より, $x - y = k$ が B を通るときで,

$$k = 1 - (-2) = 3$$

のとき。

k が最小になるのは, 図より, $x - y = k$ が C に接するときである。このとき, $x - y = k$ を C の方程式に代入すると,

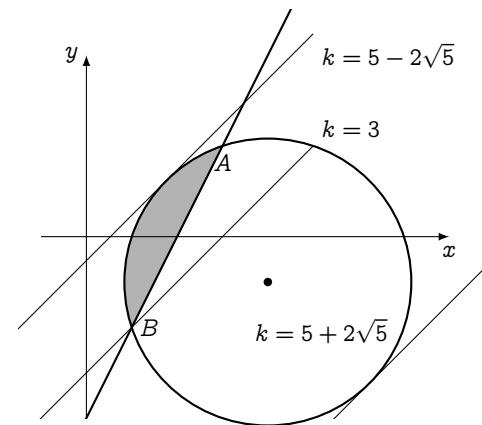
$$\begin{aligned} (x - 4)^2 + (x - k + 1)^2 &= 10 \\ x^2 - 8x + 16 + x^2 + 2(1 - k)x + (1 - k)^2 &= 10 \\ 2x^2 + (-6 - 2k)x + (k^2 - 2k + 7) &= 0 \end{aligned}$$

この判別式 D について, $D = 0$ であるから,

$$\begin{aligned} 0 = D/4 &= (-3 - k)^2 - 2(k^2 - 2k + 7) \\ &= k^2 + 6k + 9 - 2k^2 + 4k - 14 \\ &= -k^2 + 10k - 5 \\ 0 &= k^2 - 10k + 5 \\ k &= 5 \pm \sqrt{25 - 5} \\ &= 5 \pm 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

図より, 領域において接するのは, k の値のうち, 小さな方だから,

$$k = 5 - 2\sqrt{5}$$



Ⅲ 次の□にあてはまる数値や符号を答えよ。(38点)

次の x の 2 次方程式

$$x^2 + 2(1 - \cos \theta)x + 3 - \sin^2 \theta - 2 \sin 2\theta - 2 \sin \theta = 0 \cdots \textcircled{1}$$

について考える。ただし、 $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。このとき、次のことがいえる。

(1) 2 次方程式①が、異なる 2 つの実数解を持つとき

$$2 \sin 2\theta + \text{ア} \sin \theta - \text{イ} \cos \theta - \text{ウ} > 0 \cdots \textcircled{2}$$

を満たす。

よって、不等式②を満たす θ の値の範囲は、

$$\frac{\pi}{\text{エ}} < \theta < \frac{\text{オ}}{\text{カ}} \pi, \frac{\text{キ}}{\text{ク}} \pi < \theta < \frac{\text{ケ}}{\text{コ}} \pi$$

である。

(2) $x = \sin \theta$ が 2 次方程式①の解となるような θ は、全部で

$$\text{サ} \text{ 個}$$

ある。

その中で、最も小さい θ の値は、

$$\theta = \frac{\text{シ}}{\text{ス}} \pi$$

である。

$$(3) \theta = \frac{\text{シ}}{\text{ス}} \pi \text{ のとき, 2 次方程式①の } x = \sin \theta \text{ 以外の解は,}$$

$$x = \frac{\text{セソ} + \sqrt{\text{タ}}}{\text{チ}}$$

である。

(1) ①の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} D/4 &= (1 - \cos \theta)^2 - (3 - \sin^2 \theta - 2 \sin 2\theta - 2 \sin \theta) \\ &= 1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta - 3 + \sin^2 \theta + 2 \sin 2\theta + 2 \sin \theta \\ &= 2 \sin 2\theta + 2 \sin \theta - 2 \cos \theta - 1 > 0 \\ (\because \cos^2 \theta + \sin^2 \theta &= 1) \end{aligned}$$

次に、②を解く：

$$\begin{aligned} 2 \sin 2\theta + 2 \sin \theta - 2 \cos \theta - 1 &> 0 \\ 4 \sin \theta \cos \theta + 2 \sin \theta - 2 \cos \theta - 1 &> 0 \\ (2 \sin \theta - 1)(2 \cos \theta + 1) &> 0 \end{aligned}$$

したがって、 $\sin \theta > \frac{1}{2}$ ，または、 $\cos \theta > -\frac{1}{2}$ である。