Zorn の補題の可換代数における使用例*ver1.0

Akari

2021 年 12 月 25 日

概要

これは飽くまで私の自己満のために作ったものなので，文構成の粗悪さは目につぶっていただきたい．また，数学的間違いや証明の間違いなどの報告は Twitter の DM(@akari0koutya) または G-mail まで願う．

一応，最低限の数学の知識があれば読めるよう配慮し，最低限の証明や定義などは述べておいた．もし知識に不足があるようであれば Wikipedia なり，適当な PDF を読んでほしい．参考文献にいくらか挙げておいた．それでも不足するなら成本を読まれたい．

あと，本題の内容が非常に薄いことは本当にすまない (準備で飽きた)．また気が向けば Jacobson radical の特徴付けなども追加したいと思う．もし他に知っている使用例があれば教えていただきたい．

1　集合の振り返り

基本から振り返ろう．

集合 とは **元** と呼ばれる対象の集まりである．そして，集合のすべての元が集合であるようなものを **集合族** という．

空でない集合 Λ からある集合族への写像 A のことを，Λ 上の **集合系** といい

$$(A_\lambda | \lambda \in \Lambda) \quad \text{または} \quad (A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

で表す．

集合系 $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられたとき，この集合系の少なくとも一つの A_λ の元のなるようなものの全体からなる集合を，集合系 $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の **和集合** といい,

$$\bigcup_\lambda A_\lambda \quad \text{または} \quad \bigcup(A_\lambda | \lambda \in \Lambda)$$

で表し，集合系のすべての A_λ に共通に含まれる元全体からなる集合を集合系 $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の **共通部分** といい,

$$\bigcap_\lambda A_\lambda \quad \text{または} \quad \bigcap(A_\lambda | \lambda \in \Lambda)$$

で表す．

n 個の集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ に対して, 各 A_i の各元 a_i の組 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ 全体の集合を集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ の **直積** という．但し, 二つの組 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ と $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ が等しいとは, すべての i に対して, $a_i = a'_i$ が成り立つものとする．

集合 A に対する直積集合 $A \times A$ のすべての元 (a, b) に対して，ある関係 $\sim$ が与えられ，A 上比較ができる関係を **二項関係** という．

集合 A において，二項関係 $\sim$ を考える．

1. **反射律** : 集合 A の各元 a が二項関係 $a \sim a$ を満足することをいう．

2. **対称律** : 集合 A の各元 a, b が $a \sim b$ と $b \sim a$ を満足することをいう．
3. **推移律** : 集合 A の各元 a, b, c が $a \sim b$ かつ $b \sim c$ なら $a \sim c$ を満足することをいう．
4. **反対称律** : 集合 A の各元 a, b が $a \sim b$ かつ $b \sim a$ なら $a = b$ を満足することをいう．

集合 A において，

1. **同値関係** : 反射律，対称律，推移律を満たす二項関係のこと．
2. **順序関係** : 反射律，推移律，反対称律を満たす二項関係のこと．このとき，対 $(A, \sim)$ を **半順序集合** という．

$(A, \leq), (A', \leq')$ を半順序集合とする．このとき，写像 $f : A \to A'$ が $a \leq b$ ならば $f(a) \leq' f(b)$ を保存するとき，f は **順序を保つ写像** であるという．また，f が全単射写像であり，f の順像及び逆像 (f 及び f^{-1}) が順序を保つとき $(A, \leq), (A', \leq')$ は **順序同型** であるという．

半順序集合 $(A, \leq)$ が A の任意の元 a, b において $a \leq b$ ないし $b \leq a$ を常に満足するとき，$(A, \leq)$ を **全順序集合** をいう．

$\mathbb{R}$ は通常の $\leq$ により大小関係をもつため全順序集合である．

半順序集合 $(A, \leq)$ において，A' を A の空でない部分集合とする．A の元 a が A' の **最小元** (**resp. 最大元**) であるとは，A' のすべての元 a' に対して $a \leq a'$ (**resp.** $a' \leq a$) が成り立つことであり，これを $a = \min A'$ (**resp.** $a = \max A'$) であらわす．A の元 b が A' の一つの **下界** (**resp. 上界**) であるとは，A' の全ての元 b' に対して $b \leq b'$ (**resp.** $b' \leq b$) が成り立つことをいう．A' の下界 (**resp.** 上界) の集合が最大元 (**resp.** 最小元) を持てば，その元を A' の **下限** (**resp. 上限**) といい，$\inf A'$ (**resp.** $\sup A'$) であらわす．

半順序集合 $(A, \leq)$ は，全ての全順序部分集合が上階を持つ時，**帰納的** でるという．また，半順順序集合 $(A, \leq)$ において，A の元 a が **極大元** であるとは，$a \leq a'$ かつ $a \neq a'$ となる元 $a' \in A$ が存在しないことである．

これらを踏まえて，Zorn の補題をみよう．

> **Theorem 1.1 : Zorn の補題**
> 帰納的半順序集合は少なくとも一つの極大元をもつ．

Proof. この証明は長大なので，知りたい方は [内田 86] や [nLab] を参照されたい． □

この定理は選択公理と同値である．

2　代数の振り返り

詳しくは以前私が書いた，群・環・体を参照いただきたい．

G を空集合でない集合とする．G 上の演算 $\circ$ が定義されていて次の性質を満たす時，組 $(G, \circ)$ を **群** という．

1. **単位元** と呼ばれる元 $e \in G$ が存在し，すべての $a \in G$ に対し $a \circ e = e \circ a = a$ となる．
2. すべての $a \in G$ に対し $b \in G$ が存在し，$a \circ b = b \circ a = e$ となる．この元 b は a の **逆元** とよばれ，a^{-1} と表す．
3. すべての $a, b, c \in G$ に対し，$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ が成り立つ．

アーベル群 とは，群において群の任意の元 a, b に対して，$a \circ b = b \circ a$ が成り立つことである．

単位元は一意的である．

H を群 G の部分群，$x \in G$ とする．H の **左剰余類** を G の部分集合である，

$$xH = \{xh \mid h \in H\}$$

と定義する．同様にして **右剰余類** は $Hx = \{hx \mid h \in H\}$ と定義される．

このとき，x は **代表元** といわれる．

群 G に対して，G の部分群 H の右剰余類 Hx の集合を $H\backslash G$，同様に xH の集合を G/H と表す．これは群となり，**剰余群** という．

集合 A に二つの演算，加法 $(+)$ と乗法 $(\times)$ が定義され，次の性質を満たす時，A を **環** という．

1. $(A,+)$ がアーベル群となる．
2. 結合則が成り立つ．
3. 分配則が成り立つ．
4. $(A,\times)$ に関して単位元が 1 である．

以下，明示がない限り，環は可換環として扱い，環 A が唯一の元 0 で成り立つ **零環** と呼ばれる環は考えないこととし，乗法の演算記号は省略する．

A, A' を環とする．写像 $\phi : A \to A'$ が **環準同型** であるとは，$a, b \in A$ に対して，ϕ が

1. $\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$.
2. $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$.
3. $\phi(1) = 1$.

を満たすことをいう．

$\phi : A \to A'$ が環準同型のとき，

1. **核** : 集合 $\mathrm{Ker}(\phi) = \{a \in A \mid \phi(a) = 0\}$ のことである．
2. **像** : 集合 $\mathrm{Im}(\phi) = \{s \in S \mid s = \phi(r)\}$ のことである．

核 $\mathrm{Ker}(\phi)$ は環 A のイデアルであり，像 $\mathrm{Im}(\phi)$ は環 A の部分環である．

環 A の **イデアル** $\mathfrak{a}$ とは 0 を含む A の部分集合であり，

1. $a, b \in \mathfrak{a}$ なら $a - b \in \mathfrak{a}$ を満足する．
2. $a \in \mathfrak{a}, x \in A$ なら $ax \in \mathfrak{a}$ を満足する．

剰余群 $A/\mathfrak{a}$ は環 A により乗法が定義され環となる．これを **剰余環** という．

> **Proposition 2.1 : 対応定理 [AT69]**
> 写像 $\phi : A \to A/\mathfrak{a}$ において，A のイデアル $\mathfrak{a}$ を被覆する A のすべてのイデアルの $\mathfrak{b}$ の集合と，剰余環 $A/\mathfrak{a}$ のすべてのイデアル $\overline{\mathfrak{b}}$ の集合の間には，$\mathfrak{b} = \phi^{-1}(\overline{\mathfrak{b}})$ によって与えられる一対一対応でかつ包含関係による順序を保存する対応が存在する．

環 A の **零因子** とは，A のある元 $y \neq 0$ が存在し $xy = 0$ となるような元 $x \in A$ のことである．零元と異なる零因子をもたない環を **整域** という．

環 A の元 x がある $n > 0$ に対して $x^n = 0$ となるとき，x を **ベキ零元** であるという．ベキ零元は零因子であるがその逆は成り立たない．

環 A の元 x が 1 を割り切るとき，すなわち，ある元 y が存在し $xy = 1$ となるとき，x を A の **単元** であるという．

$a \in A$ に対して，A のイデアル $\{ax \mid x \in A\}$ は，a によって生成された **単項イデアル** と呼び，(a) であらわす．そして，全てのイデアルが単項イデアルとなる整域を **単項イデアル整域** という．

> **Proposition 2.2**
> 環 A, A' に対して，写像 $\phi : A \to A'$ が準同型である時，次は同値である．
>
> (1). ϕ は単射である．

(2). $\mathrm{Ker}(\phi) = (0)$ である．

Proof. (1) ⇒ (2) : ϕ が単射であるとすると，$0 \in \mathrm{Ker}(\phi)$ は定義から明らかである．$x \in \mathrm{Ker}(\phi)$ なら $\phi(x) = 0 = \phi(0)$ であるが ϕ は単射なので，$x = 0$ である．
(2) ⇒ (1) : $\mathrm{Ker}(\phi) = 0$ であるとする．$x, y \in A$ に対して，$\phi(x) = \phi(y)$ なら，$0 = \phi(x) - \phi(y) = \phi(x - y)$ である．よって，$x - y \in \mathrm{Ker}(\phi) = (0)$ のため，$x = y$ なので，ϕ は単射である． □

Proposition 2.3
環 A の元 x が単元であることと，x によって生成される単項イデアル (x) が A と等しくなることは同値である．

環 A に対して 0 でないすべての元 x が単元であるとき，A を **体** という．
$\mathbb{Z}_n$ が体となるとき n は素数であり，かつ，そのときのみである．

Proposition 2.4 : [AT69]
A を環とするとき，次は同値である．

(1). A は体である．
(2). A は自明でないイデアルを持たない．
(3). A から 0 でない環 A' への任意の準同型写像は単射である．

Proof. (1) ⇒ (2) : A を体とする．$(0) \subset A$ は明らか．$A \backslash \{0\}$ の全ての元は単元なので，**Proposition** 2.3より $a \in A \backslash \{0\} \Rightarrow (a) = A = (1)$ である．
(2) ⇒ (3) : $\phi : A \to A'$ を自然な準同型写像とする．$\mathrm{Ker}(\phi) \neq (1)$ なので **Proposition** 2.2より $\mathrm{Ker}(\phi) = (0)$ であることと，ϕ が単射であることは同値である．
(3) ⇒ (1) : x を単元でない A の元とする．$(x) \neq (1)$ より，$A' = R/(x) = \{0\}$ でない．$A \to A'$ を自然な準同型写像とすると $\mathrm{Ker}(\phi) = (x)$ である．仮定より，ϕ は単射であるから $(x) = (0)$ である．したがって，$x = 0$ である． □

環 A のイデアル $\mathfrak{p}$ は，$\mathfrak{p} \neq (1)$ を満たし，$xy \in \mathfrak{p}$ なら $x \in \mathfrak{p}$ または $y \in \mathfrak{p}$ が成り立つ時，A の **素イデアル** という．素イデアルの概念は，素数 p の性質である $p \mid ab$ ならば $p \mid a$ または $p \mid b$ を抽象化したものである．
A のイデアル $\mathfrak{m}$ は，$\mathfrak{m} \neq (1)$ かつ $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{a} \subset (1)$ を満たす A' のイデアル $\mathfrak{a}$ が存在しない時，A の **極大イデアル** という．

Proposition 2.5
環 A のイデアル $\mathfrak{p}$ が素イデアルであることと，$A/\mathfrak{p}$ が整域であることは同値である．

Proof. $\mathfrak{p}$ が素イデアルであることと，A の元 x, y に対して $xy \in \mathfrak{p}$ なら $x \in \mathfrak{p}$ または $y \in \mathfrak{p}$ が成り立つことは同値である．そしてこれは剰余環 $A/\mathfrak{p}$ において $xy \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ なら $x \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ または $x \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ であることと同値である．したがって，$A/\mathfrak{p}$ は整域である． □

Proposition 2.6
環 A のイデアル $\mathfrak{m}$ が極大イデアルであることと，$A/\mathfrak{m}$ が体であることは同値である．

Proof. **Proposition** 2.1によるその包含関係より，$\mathfrak{m}$ が極大イデアルであることと $A/\mathfrak{m}$ のイデアルが自明なもののみであることは同値である．よって，**Proposition** 2.4よりこれは $A/\mathfrak{m}$ が体であることと同値である． □

Corollary 2.7
極大イデアルならば素イデアルである．

Proof. これは **Proposition 2.5**と **Proposition 2.6**より明らか． □

3 本題

Proposition 3.1：Krull の定理
すべての環 $A \neq 0$ は少なくとも一つの極大イデアルを持つ．

Proof. S を A と異なる A のすべてのイデアルの集合とする．この S に包含関係 $\subseteq$ による順序を定義する．$0 \in S$(零環を元に持つ) であるからこれは空集合ではない．S の全ての全順序部分集合が S において上界を持つことを示すことで **Theorem 1.1**が使用できるようにする．$(\mathfrak{a}_\alpha)$ を S のイデアルの全順序部分集合とする．そのため，任意の添数 α, β の組に対して，$\mathfrak{a}_\alpha \subseteq \mathfrak{a}_\beta$ ないし $\mathfrak{a}_\beta \subseteq \mathfrak{a}_\alpha$ が成立する．ここで，$\mathfrak{a} = \bigcup_\alpha \mathfrak{a}_\alpha$ を考える．$\mathfrak{a}$ は A のイデアルであり (正しく閉じている)，全ての α に対して $1 \notin \mathfrak{a}_\alpha$ なので，$1 \notin \mathfrak{a}$ が成り立つ．故に $\mathfrak{a} \in S$ であり，これは S のイデアルの全順序部分集合の上界である．したがって，**Theorem 1.1**より S は極大元すなわち極大イデアルをもつ． □

非可換環における極大左イデアルと極大右イデアルに対しても同様の定理が成り立つが，ここでは省こう．また，これは **Theorem 1.1**から齎れているが **Theorem 1.1**と同値であり，よって選択公理と同値である．さらにこれは，一意分解整域が極大イデアルを持つことと同値であるが，それも [alg-d-ac] を参照されたい．

Corollary 3.2：[AT69]
$\mathfrak{a} \neq (1)$ を A のイデアルとすると，$\mathfrak{a}$ を含んでいる A の極大イデアルが存在する．

Proof. **Proposition 2.1**で **Proposition 3.1**の対応付けを行えばいい． □

Proposition 3.3：[AT69]
環 A において，すべての元が零因子であるイデアルの全ての集合を $\sum$ とする．集合 $\sum$ は極大元を持ち，$\sum$ の極大元は素イデアルである．このため，A の全ての零因子の集合は素イデアルの和集合である．

Proof. 前に述べた通り，零環は考えないので $A \neq 0$ とする (もし A が零環だとこの命題は成立しない)．先の命題と同じようにすると，空でない $\sum$ の全順序部分集合の和集合 $\mathfrak{a} = \bigcup_\alpha \mathfrak{a}_\alpha$ はすべての元は零因子であったとしても，**Proposition 3.1**より極大元となる．次に，$\mathfrak{p}$ を $\sum$ の極大元とする，$x, y \notin \mathfrak{p}$ に対し，$\mathfrak{p} + (x), \mathfrak{p} + (y) \supsetneq \mathfrak{p}$ であるため，零因子でない $x' \in \mathfrak{p} + (x), y' \in \mathfrak{p} + (y)$ が存在する．$x'y' \in \mathfrak{p} + (xy)$ であり，これは零因子でなく，$\sum$ に含まれない．よって $xy \notin \mathfrak{p}$ であり $\mathfrak{p}$ が素イデアルであることが示せた． □

参考文献

[AT69] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald. Introduction to commutative algebra. Addison Wesley Publishing Company, 1969.
[内田 86] 内田 伏一. 集合と位相. 裳華房. 1986.
[松村 80] 松村 英之. 可換環論. 共立出版. 1980.
[雪江 10] 雪江 明彦. 環と体のガロア理論. 日本評論社. 2010.
[加藤 16] 加塩 朋和. 代数学 1 . 2016.
https://www.rs.tus.ac.jp/a25594/2016_Group_and_Ring_Theory.pdf

[加藤 18] 加塩 朋和. 一般位相 A. 2018.
https://www.rs.tus.ac.jp/a25594/2018-2019_General_Topology.pdf

[松本 191] 松本雄也. 像と逆像と和集合と共通部分. 2019.
http://yuyamatsumoto.com/ed/adjoint.pdf

[松本 192] 松本雄也. 関係. 2019.
http://yuyamatsumoto.com/ed/relations.pdf

[Mil20] J.S. Milne. A Primer of Commutative Algebra. 2020.
https://www.jmilne.org/math/xnotes/CA.pdf.

[alg-d-ac] alg-d. 選択公理—壱大整域. http://alg-d.com/math/ac/.

[alg-d-kan] alg-d. 圏論—壱大整域. http://alg-d.com/math/ac/.

[Stacks] The Stacks project authors. The Stacks project. -2021. https://stacks.math.columbia.edu/.

[nLab] nLab authors. nLab. -2021. https://ncatlab.org/nlab/show/HomePage.