随机过程与排队论

信息与软件工程学院

顾小丰

Email： guxf@uestc.edu.cn

2020年9月27日星期日

上一讲内容回顾

- n维随机变量
- 随机变量函数的分布
- 随机变量的数字特征
  - 数学期望
  - 方差
  - k阶矩
  - 协方差
- 随机变量数字特征的性质
- 条件数学期望
- 随机变量的特征函数

本讲主要内容

随机过程的基本概念

- 随机过程的定义
- 随机过程的分布
- 随机过程的数字特征

第二章 随机过程的基本概念

- 随机过程的引入
- 随机过程的定义
- 随机过程的分布
- 随机过程的数字特征
- 几种重要的随机过程

一、随机过程的引入

在许多实际问题中,不仅需要对随机现象做特定时间点上的一次观察,且需要做多次的连续不断的观察,以观察研究对象随时间推移的演变过程。

随机过程产生于二十世纪初，起源于统计物理学领域，布朗运动和热噪声是随机过程的最早例子。随机过程理论社会科学、自然科学和工程技术的各个领域中都有着广泛的应用。例如：现代电子技术、现代通信、自动控制、系统工程的可靠性工程、市场经济的预测和控制、随机服务系统的排队论、储存论、生物医学工程、人口的预测和控制等等。

只要研究随时间变化的动态系统的随机现象的统计规律，就要用到随机过程的理论。

1. 关注对象是一族随时间或地点变化的随机变量;
2. 需要研究这一族随机变量的整体或局部统计规律性;

例

❖电话问题

设$X(t,\omega)$表示某电话台在$[0,t)$时间内收到用户的呼唤次数。对某个固定的$t(0<t<\infty)$，$X(t,\omega)$是一个随机变量，它可以是任意非负整数。随着时间t的变化，就得到一族随机变量$X(t,\omega)$，$0\le t<\infty$，即是一个随机过程。

❖布朗运动

悬浮在液体中的微粒由于分子的随机碰撞而作布朗运动。设$X(t,\omega)$表示时刻t微粒所处位置的某个坐标，当t变化时，$X(t,\omega)$，$0\le t<\infty$，是一个随机过程。

❖热噪声

电子元器件由于内部电子的随机热运动所引起的端电压$X(t,\omega)$称为热噪声电压，对于固定的$t\ge 0$，$X(t,\omega)$是一个随机变量，随着t的变化得到一族随机变量$X(t,\omega)$，$t\ge 0$，是一个随机过程。

❖生物群体

设有一种生物群体，由一个祖先开始繁殖后代，对于固定的$n(n\ge 1)$，令$X(n,\omega)$表示第n代生物群体的个数，$X(n,\omega)$是随机变量，可取非负整数值0,1,2,…，而$X(n,\omega),n=0,1,2,\ldots$是一族随机变量，即一个随机过程。

二、随机过程的定义

- 设(Ω,F,P)是一个概率空间，T是一个参数集$(T\subset R)$，$X(t,\omega)$，$t\in T$，$\omega\in\Omega$是$T\times\Omega$上的二元函数，如果对于每一个$t\in T$，$X(t,\omega)$是(Ω,F,P)上的随机变量，则称随机变量族$\{X(t,\omega),\ t\in T\}$为定义在(Ω,F,P)上的随机过程(或随机函数)。简记为$\{X(t),\ t\in T\}$，其中t称为参数，T称为参数集。

样本函数与状态空间

- 随机过程$X(t,\omega)$是定义在$T\times\Omega$上的二元函数：一方面，当$t\in T$固定时，$X(t,\omega)$是定义在Ω上的随机变量；另一方面，当$\omega\in\Omega$固定时，$X(t,\omega)$是定义在T上的函数，称为随机过程的样本函数。
- 随机过程在时刻t所取的值$X(t)=x$称为时刻t时随机过程$\{X(t),t\in T\}$处于状态x，随机过程$\{X(t),t\in T\}$所有状态构成的集合称为状态空间，记为E，即：

$$E=\{x: X(t)=x,t\in T\}$$

随机过程的分类

1. 按状态空间和参数集分类

		参数集T	
		离散	连续
状态空间E	离散	(离散参数)链	(连续参数)链
	连续	随机序列	随机过程

2. 按概率分布规律分类

- 独立过程
- 独立增量过程
- 正态过程
- 泊松过程
- 维纳过程
- 平稳过程
- 马尔可夫过程
- ……

三、随机过程的分布

设$\{X(t),t\in T\}$是一个随机过程，对于每一个$t\in T$，$X(t)$是一个随机变量，它的分布函数

$$F(t,x)=P\{X(t)<x\},\ t\in T,\ x\in R=(-\infty,+\infty)$$

称为**随机过程$\{X(t),t\in T\}$的一维分布函数**。

如果对于每一个$t\in T$，随机变量$X(t)$是连续型随机变量，存在非负可积函数$f(t,x)$，使得

$$F(t,x)=\int_{-\infty}^{x} f(t,y)dy,\ t\in T,\ x\in R$$

则称$f(t,x)$，$t\in T,x\in R$为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的**一维概率密度(函数)**。此时

$$f(t,x)=F'_x(t,x),\ t\in T,\ x\in R$$

二维分布函数

设$\{X(t),t\in T\}$是一个随机过程，对任意$s,t\in T$，$(X(s),X(t))$是一个二维随机变量，它的联合分布函数

$$F(s,t;x,y)=P\{X(s)<x,X(t)<y\},$$

$$t\in T,\ x\in R$$

称为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的二维分布函数。

二维概率密度

如果(X(s),X(t))是连续型二维随机变量，存在非负可积函数f(s,t;x,y)，使得

$$F(s,t;x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(s,t;u,v)dudv,\quad \begin{array}{l} s,t\in T \\ x,y\in R \end{array}$$

成立，则称f(s,t;x,y)，s,t∈T，x,y∈R为随机过程{X(t),t∈T}的**二维概率密度(函数)**。此时

$$f(s,t;x,y)=\frac{\partial^2 F(s,t;x,y)}{\partial x\partial y}$$

n维分布函数

设$\{X(t), t\in T\}$是一个随机过程，对任意$t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$，n维随机变量$(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$的联合分布函数

$$F(t_1, t_2, \ldots, t_n; x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$= P\{X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2, \ldots, X(t_n) < x_n\},$$

$$t_1, t_2, \ldots, t_n \in T,\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in R$$

称为随机过程$\{X(t), t\in T\}$的n维分布函数。

n维概率密度

如果$(X(t_1),X(t_2),\ldots,X(t_n))$是连续型n维随机变量，存在非负可积函数$f(t_1,t_2,\ldots,t_n;x_1,x_2,\ldots,x_n)$，使得

$$F(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f(t_1,t_2,\cdots,t_n;u_1,u_2,\cdots,u_n)du_1du_2\cdots du_n,$$

$$t_1,t_2,\ldots,t_n\in T;\quad x_1,x_2,\ldots,x_n\in R$$

成立，则称$f(t_1,t_2,\ldots,t_n\in T;\ x_1,x_2,\ldots,x_n)$为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的**n维概率密度(函数)**。此时

$$f(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\partial^n F(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n}$$

n+m维联合分布函数

设$\{X(t),t\in T\}$和$\{Y(t),t\in T\}$是两个随机过程，对任意$s_1,s_2,\ldots,s_n,t_1,t_2,\ldots,t_m\in T$，把n+m维随机变量$(X(s_1),X(s_2),\ldots,X(s_n),Y(t_1),Y(t_2),\ldots,Y(t_m))$的联合分布函数

$$F_{XY}(s_1,s_2,\ldots,s_n,t_1,t_2,\ldots,t_m;x_1,x_2,\ldots,x_n,y_1,y_2,\ldots,y_m)$$

$$=P\{X(s_1)<x_1,X(s_2)<x_2,\ldots,X(s_n)<x_n,$$

$$Y(t_1)<y_1,Y(t_2)<y_2,\ldots,Y(t_m)<y_m\},$$

$$s_1,s_2,\ldots,s_n,t_1,t_2,\ldots,t_m\in T,\ x_1,x_2,\ldots,x_n,y_1,y_2,\ldots,y_m\in R$$

称为随机过程$\{X(t),t\in T\}$和$\{Y(t),t\in T\}$的n+m维联合分布函数。

n+m维联合概率密度

如果$(X(s_1),X(s_2),\dots,X(s_n),Y(t_1),Y(t_2),\dots,Y(t_m))$是连续型n+m维随机变量，存在非负可积函数

$$f_{XY}(s_1,s_2,\dots,s_n,t_1,t_2,\dots,t_m;x_1,x_2,\dots,x_n,y_1,y_2,\dots,y_m),$$

使得

$$F_{XY}(s_1,\dots,s_n,t_1,\dots,t_m;x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$$

$$=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}\int_{-\infty}^{y_1}\cdots\int_{-\infty}^{y_m}f_{XY}(s_1,\dots,s_n,t_1,\dots,t_m;$$

$$u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_m)du_1\cdots du_n dv_1\cdots dv_m$$

成立，则称

$$f_{XY}(s_1,s_2,\dots,s_n,t_1,t_2,\dots,t_m;x_1,x_2,\dots,x_n,y_1,y_2,\dots,y_m)$$

为随机过程$\{X(t),t\in T\}$和$\{Y(t),t\in T\}$的n+m维联合概率密度(函数)。

相互独立的随机过程

设$\{X(t),t\in T\}$和$\{Y(t),t\in T\}$是两个随机过程，如果对任意n,m≥1，其n+m维联合分布满足

$$F_{XY}(s_1,s_2,\ldots,s_n,t_1,t_2,\ldots,t_m;x_1,x_2,\ldots,x_n,y_1,y_2,\ldots,y_m)$$
$$=F_X(s_1,s_2,\ldots,s_n;x_1,x_2,\ldots,x_n)\cdot F_Y(t_1,t_2,\ldots,t_m;y_1,y_2,\ldots,y_m)$$

或者其n+m维联合概率密度满足

$$f_{XY}(s_1,s_2,\ldots,s_n,t_1,t_2,\ldots,t_m;x_1,x_2,\ldots,x_n,y_1,y_2,\ldots,y_m)$$
$$=f_X(s_1,s_2,\ldots,s_n;x_1,x_2,\ldots,x_n)\cdot f_Y(t_1,t_2,\ldots,t_m;y_1,y_2,\ldots,y_m)$$

则称随机过程$\{X(t),t\in T\}$和$\{Y(t),t\in T\}$的相互独立。

n维特征函数

随机过程$\{X(t),t\in T\}$的n维特征函数定义为

$$\varphi(t_1,t_2,\ldots,t_n;u_1,u_2,\ldots,u_n)$$

$$=E\{e^{i[u_1X(t_1)+u_2X(t_2)+\cdots+u_nX(t_n)]}\}$$

称

$$\{\varphi(t_1,t_2,\ldots,t_n;u_1,u_2,\ldots,u_n),$$

$$t_1,t_2,\ldots,t_n\in T，\ n\geq 1\}$$

为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的有限维特征函数族。

例1

利用投掷一枚硬币的试验，定义随机过程

$$X(t)=X(t,\omega)=\begin{cases}\cos\pi t, & 出现正面\ \omega=\omega_1\\ 2t, & 出现反面\ \omega=\omega_2\end{cases}$$

假定“出现正面”和“出现反面”的概率各为0.5，试求：

1. X(t)的一维分布函数F(0.5,x)和F(1,x)；
2. X(t)的二维分布函数F(0.5,1;x,y)。

例1(续1)

解：1. 由X(t)的定义求得概率分布为：

X(0.5)	0	1
P	0.5	0.5

X(1)	-1	2
P	0.5	0.5

所以一维分布函数为：

$$F(0.5,x)=P\{X(0.5)<x\}=\begin{cases}0 & -\infty<x\le 0\\ 0.5 & 0<x\le 1\\ 1 & 1<x<+\infty\end{cases}$$

$$F(1,x)=P\{X(1)<x\}=\begin{cases}0 & -\infty<x\le -1\\ 0.5 & -1<x\le 2\\ 1 & 2<x<+\infty\end{cases}$$

例1(续2)

2. 由于掷硬币试验是相互独立的，故(X(0.5),X(1))的联合概率密度为：

X(0.5) \ X(1)	-1	2
0	0.25	0.25
1	0.25	0.25

所以二维分布函数为：

$$F(0.5,1;x,y)=P\{X(0.5)<x,X(1)<y\}$$

$$=\begin{cases}0 & (-\infty<x\le 0)\mathrm{or}(-\infty<y\le -1)\\ 0.25 & 0<x\le 1,-1<y\le 2\\ 0.5 & (0<x\le 1,y>2)\mathrm{or}(x>1,-1<y\le 2)\\ 1 & 1<x<+\infty,2<y<+\infty\end{cases}$$

四、随机过程的数字特征

给定随机过程$\{X(t),t\in T\}$，称

$$m(t)=E[X(t)],\quad t\in T$$

为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的**均值函数(数学期望)**。

若$\{X(t),t\in T\}$的状态空间是离散的，则$X(t),t\in T$是离散型随机变量，$X(t)$的概率分布为$p_k(t)=P\{X(t)=X_k\}$，$k=1,2,\ldots$，则

$$m(t)=E[X(t)]=\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k(t)$$

若$\{X(t),t\in T\}$的状态空间是连续的，则$X(t),t\in T$是连续型随机变量，$X(t)$的一维概率密度为$f(t,x)$为，则

$$m(t)=E[X(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(t,x)dx$$

方差函数

给定随机过程$\{X(t),t\in T\}$，称

$$D(t)=D[X(t)]=E[X(t)-m(t)]^2,\quad t\in T$$

为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的方差函数。显然，

$$D(t)=E[X(t)-m(t)]^2=E[X^2(t)]-m^2(t)。$$

称 $\sigma(t)=\sqrt{D(t)}$ 为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的均方差函数(标准方差函数)。

若$X(t),t\in T$是离散型随机变量，$X(t)$的概率分布为$p_k(t)=P\{X(t)=X_k\}$，$k=1,2,\ldots$，则

$$D(t)=E[X(t)-m(t)]^2=\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-m(t))^2 p_k(t)$$

若$X(t),t\in T$是连续型随机变量，$X(t)$的一维概率密度为$f(t,x)$为，则

$$D(t)=E[X(t)-m(t)]^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m(t))^2 f(t,x)dx$$

协方差函数和相关函数

给定随机过程$\{X(t),t\in T\}$，称

$$C(s,t)=\mathrm{cov}(X(s),X(t))=E[X(s)-m(s)][X(t)-m(t)]$$

为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的**协方差函数**。显然，

$$C(s,t)=E[X(s)X(t)]-m(s)m(t),$$

$$C(t,t)=D(t)=E[X(t)-m(t)]^2。$$

给定随机过程$\{X(t),t\in T\}$，称

$$R(s,t)=E[X(s)X(t)]$$

为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的**相关函数**。显然，

$$C(s,t)=R(s,t)-m(s)m(t)，\quad R(s,t)=C(s,t)+m(s)m(t)$$

给定随机过程$\{X(t),t\in T\}$，称

$$\rho(s,t)=\frac{C(s,t)}{\sigma(s)\sigma(t)}=\frac{\mathrm{cov}(X(s),X(t))}{\sqrt{D(s)}\sqrt{D(t)}}$$

为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的**相关系数**。

互协方差函数和互相关函数

给定两个随机过程$\{X(t),t\in T\}$和$\{Y(t),t\in T\}$，称

$$C_{XY}(s,t)=E[X(s)-m_X(s)][Y(t)-m_Y(t)],\quad s,t\in T$$

为随机过程$\{X(t),t\in T\}$和$\{Y(t),t\in T\}$的互协方差函数。

其中：$m_X(s)=E[X(s)]$，$m_Y(t)=E[Y(t)]$。称

$$R_{XY}(s,t)=E[X(s)Y(t)]$$

为随机过程$\{X(t),t\in T\}$和$\{Y(t),t\in T\}$的互相关函数。

显然，

$$C_{XY}(s,t)=R_{XY}(s,t)-m_X(s)m_Y(t)。$$

如果$C_{XY}(s,t)=0$，等价地$R_{XY}(s,t)=m_X(s)m_Y(t)$，即$E[X(s)Y(t)]=E[X(s)]E[Y(t)]$，则称$\{X(t),t\in T\}$和$\{Y(t),t\in T\}$互不相关。

如果随机过程$\{X(t),t\in T\}$和$\{Y(t),t\in T\}$相互独立，则它们一定互不相关；反之，如果随机过程$\{X(t),t\in T\}$和$\{Y(t),t\in T\}$互不相关，一般不能推出它们相互独立。

例1

给定随机过程$\{X(t),t\geq 0\}$，

$$X(t)=X_0+Vt,\quad t\geq 0$$

其中X_0与V是相互独立的随机变量，它们都服从$N(0,1)$。求其数字特征和一、二维概率密度。

解 1. 均值函数$m(t)=E[X(t)]=E(X_0)+tE(V)=0$；

2. 方差函数$D(t)=E[X^2(t)]-m^2(t)=E(X_0+Vt)^2-0$

$$=E(X_0^2)+2tE(X_0V)+t^2E(V^2)$$

$$=1+t^2;$$

3. 一维概率密度 因为X_0与V相互独立且都服从$N(0,1)$，故$X(t)=X_0+Vt$服从正态分布$N(0,1+t^2)$，所以$\{X(t),t\geq 0\}$的一维概率密度为：

$$f(t,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(1+t^2)}}e^{-\frac{x^2}{2(1+t^2)}},t\geq 0,-\infty<x<+\infty$$

例1(续1)

4. 协方差函数与相关函数

因为$m(t)=0$，所以

$$C(s,t)=R(s,t)=E[X(s)X(t)]=E[X_0+Vs][X_0+Vt]$$

$$=E[X_0^2]+(s+t)E[X_0V]+stE[V^2]=1+st$$

因为X_0与V相互独立且服从$N(0,1)$，记

$$\begin{cases} X(s)=X_0+sV \\ X(t)=X_0+tV \end{cases} \quad \begin{pmatrix} X(s) \\ X(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & s \\ 1 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_0 \\ V \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} X_0 \\ V \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

从而$(X(s),X(t))\sim N(\vec{\mu},C)$，其中

均值$\vec{\mu}=(m(s),m(t))^T=(0,0)^T$，

$$\text{协方差矩阵}C=\begin{pmatrix} C(s,s) & C(s,t) \\ C(s,t) & C(t,t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+s^2 & 1+st \\ 1+st & 1+t^2 \end{pmatrix}$$

例1(续2)

5. 二维概率密度

$$f(s,t;x,y)=\frac{1}{2\pi|C|^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2}(x,y)C^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}$$

$$=\frac{1}{2\pi|s-t|}e^{-\frac{1}{2(s-t)^2}[(1+t^2)x^2-2(1+st)xy+(1+s^2)y^2]}$$

例2

随机相位正弦波

$$X(t)=\alpha\cos(\beta t+\Theta),\ -\infty<t<+\infty$$

其中α,β为常数，Θ是在[0,2π]上均匀分布的随机变量。求$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$的均值函数、方差函数、相关函数、协方差函数。

解 Θ的**概率密度**为 $f_{\Theta}(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & 0\le\theta\le 2\pi,\\ 0, & \text{其它。}\end{cases}$

1. **均值函数** $m(t)=E[X(t)]$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)f_{\Theta}(\theta)d\theta=\int_{0}^{2\pi}\alpha\cos(\beta t+\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta=0$$

例2(续1)

2. **相关函数**

$$R(s,t)=E[X(s)X(t)]$$

$$=\alpha^2\int_0^{2\pi}\cos(\beta s+\theta)\cos(\beta t+\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta$$

$$=\frac{\alpha^2}{2\pi}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\cos\beta(t-s)+\cos(\beta(t+s)+2\theta)]d\theta$$

$$=\frac{\alpha^2}{2}\cos\beta(t-s)$$

例2(续2)

3. 协方差函数

$$C(s,t)=R(s,t)-m(s)m(t)=\frac{\alpha^2}{2}\cos\beta(t-s)$$

4. 方差函数

$$D(t)=C(t,t)=\frac{\alpha^2}{2}$$

本讲主要内容

- 随机过程的基本概念
  - 随机过程的定义
  - 随机过程的分布
  - 随机过程的数字特征

下一讲内容预告

- **重要随机过程**
  - 独立过程
  - 独立增量过程
  - 正态过程
  - 维纳过程

习题二

P66～69

1. **9.**

15. **19.**

1. 设随机过程$\{X(t,\omega),-\infty<t<+\infty\}$只有两条样本函数

$$X(t,\omega_1)=2\cos t,X(t,\omega_2)=-2\cos t,\quad -\infty<t<+\infty$$

且$P(\omega_1)=\dfrac{2}{3}$，$P(\omega_2)=\dfrac{1}{3}$，分别求：

(1) 一维分布函数$F(0,x)$和$F\left(\dfrac{\pi}{4},x\right)$；

(2) 二维分布函数$F\left(0,\dfrac{\pi}{4};x,y\right)$；

(3) 均值函数$m_X(t)$；

(4) 协方差函数$C_X(s,t)$.

习 题 二

9. 设$\{X(n), n=1,2,\cdots\}$是独立同分布的随机序列，其中$X(k)(k=1,2,\cdots)$的分布律为

$X(k)$	1	-1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

又设

$$Y(n)=\sum_{k=1}^{n} X(k), \quad n=1,2,\cdots$$

(1) 求$Y(2)$的分布律(概率分布)；

(2) 求$Y(n)$的均值$E(Y(n))$；

(3) 计算相关函数$R_Y(m,n)$.

15. 设随机过程$\{X(t)=A\cos(\beta t+\Theta), -\infty<t<+\infty\}$，其中$\beta$为正常数，随机变量$A\sim N(0,1)$，$\Theta\sim U(0,2\pi)$且二者相互独立. 试求随机过程$\{X(t), -\infty<t<+\infty\}$的均值函数$m(t)$，方差函数$D(t)$和相关函数$R(s,t)$.

习 题 二

19. 设 $X(t)=A\cos\beta t+B\sin\beta t(-\infty<t<+\infty)$，其中 $A\sim N(0,\sigma^2)$，$B\sim N(0,\sigma^2)$二者相互独立，β 为常数. 求随机过程$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$的

(1) 均值函数，方差函数，协方差函数；

(2) 一维概率密度 $f(t,x)$；

(3) 二维概率密度 $f(s,t;x,y)$.