随机过程与排队论

信息与软件工程学院

顾小丰

Email：guxf@uestc.edu.cn

2020年9月27日星期日

上一讲内容回顾

- 有限源的简单排队系统
- M/M/c/m/m系统
  - 问题的引入
  - 队长——故障的机器数
  - 等待时间与逗留时间——故障机器等待维修的时间
  - 其它重要指标
- M/M/c/m/m损失制系统
  - 问题的引入
  - 队长——故障的机器数
- 有备用品的M/M/c/m+K/m系统
  - 问题的引入
  - 故障的机器数

本讲主要内容

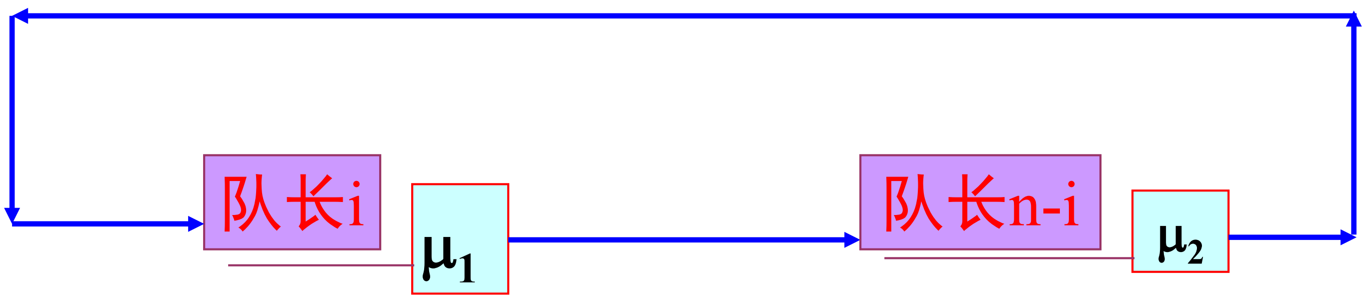
- ## 二阶段循环排队系统
  - 问题的引入
  - I号台的队长
  - 车辆在I号台的等待时间
- ## 一般服务的M/G/1/∞排队系统
  - 嵌入马尔可夫链
  - 对长
  - 等待时间与逗留时间
  - 忙期
  - 输出过程

§6.4 二阶段循环排队系统

1. 问题的叙述

- n辆卡车担任运输任务，在生产厂与仓库（或车站、码头等）之间来回运输。
- 把生产厂叫做I号服务台，仓库叫做II号服务台，把从II号到I号之间的路途时间及在II号台的实际服务时间之和看作“II号台的服务时间”；把从I号到II号之间的路途时间及在I号台的实际服务时间之和看作“I号台的服务时间”；I、II两个服务台的服务时间分别服从参数为μ_1、μ_2的负指数分布；工作相互独立。
- n辆卡车在I、II号台之间轮番排队，若在I号台的车辆（包括正在接受服务的）为i辆，则在II号台的车辆为n-i辆，用(i,n-i)表示系统所处的状态。

二阶段循环排队模型



由于二阶段循环排队系统的状态完全由I号台的状态决定，因此，我们仅讨论I号台的情况。

2. I号台的队长

假定$N(t)$表示时刻t在I号台的车辆，包括正在接受服务的车辆，令

$$p_{ij}(\Delta t)=P\{N(t+\Delta t)=j|N(t)=i\}，\ i,j=0,1,2,\dots$$

则

1) $p_{i,i-1}(\Delta t)=$ P{在Δt内I号台服务完1辆，II号台一辆也没服务完}

$$+\sum_{k\geq 2}P\{\text{在}\Delta t\text{内I号台服务完}k\text{辆，II号台服务完}k-1\text{辆}\}$$

$$=\mu_1\Delta t+o(\Delta t),\qquad i=1,2,\cdots,n-1$$

$p_{n,n-1}(\Delta t)=$ P{在Δt内I号台服务完1辆}

$$+\sum_{k\geq 2}P\{\text{在}\Delta t\text{内I号台服务完}k\text{辆，II号台服务完}k-1\text{辆}\}$$

$$=\mu_1\Delta t+o(\Delta t)$$

I号台的队长(续1)

2) $p_{i,i+1}(\Delta t)=$ P{在Δt内II号台服务完1辆，I号台一辆也没服务完}

$$+\sum_{k\geq 2} P\{\text{在}\Delta t\text{内II号台服务完}k\text{辆，I号台服务完}k-1\text{辆}\}$$

$$=\mu_2\Delta t+o(\Delta t),\qquad i=1,2,\cdots,n-1$$

$$p_{0,1}(\Delta t)=P\{\text{在}\Delta t\text{内II号台服务完1辆}\}$$

$$+\sum_{k\geq 2} P\{\text{在}\Delta t\text{内II号台服务完}k\text{辆，I号台服务完}k-1\text{辆}\}$$

$$=\mu_2\Delta t+o(\Delta t)$$

3) 类似分析可得

$$p_{ij}(\Delta t)=o(\Delta t),\qquad |i-j|\geq 2$$

I号台的队长(续2)

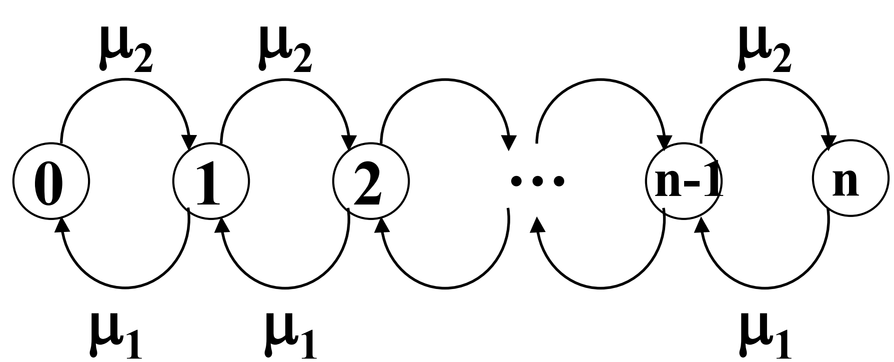
综合上述1)2)3)得

$$p_{ij}(\Delta t)=\begin{cases}\mu_2\Delta t+o(\Delta t), & j=i+1; i=0,1,2,\cdots,n-1\\ \mu_1\Delta t+o(\Delta t), & j=i-1; i=1,2,\cdots n\\ o(\Delta t), & |i-j|\geq 2\end{cases}$$

于是，$\{N(t), t\geq 0\}$是有限状态空间$E=\{0,1,2,\ldots,n\}$上的生灭过程，其参数为

$$\lambda_i=\mu_2,\quad i=0,1,\cdots,n-1;\qquad \mu_i=\mu_1,\quad i=1,2,\cdots,n$$

状态转移速度图



定理

令$p_j = \lim_{t\to\infty} p_j(t)$，$j=0,1,2,\ldots$，则$\{p_j，j=0,1,2,\ldots\}$存在，且

$$p_0 = \left(1+\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}\right)^{-1}$$

$$= \left(1+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{i}\right)^{-1} = \left[1-\frac{\mu_2}{\mu_1}\right]\Bigg/\left[1-\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{n+1}\right]$$

$$p_j = \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}p_0 = \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{j} p_0,\quad j=1,2,\cdots,n$$

结论

在I号台的平均对长

$$\overline{N}=E(N)=\sum_{j=0}^{n} jp_j=\begin{cases}\dfrac{n}{2}, & \mu_1=\mu_2\\[2ex] \dfrac{\dfrac{\mu_2}{\mu_1}}{1-\dfrac{\mu_2}{\mu_1}}-\dfrac{(n+1)\left(\dfrac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{n+1}}{1-\left(\dfrac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{n+1}}, & \mu_1\neq\mu_2\end{cases}$$

在I号台的平均等待对长

$$\overline{N}_q=\sum_{j=1}^{n}(j-1)p_j=\begin{cases}\dfrac{n(n-1)}{2(n+1)}, & \mu_1=\mu_2\\[2ex] \dfrac{\dfrac{\mu_2}{\mu_1}}{1-\dfrac{\mu_2}{\mu_1}}-\dfrac{\dfrac{\mu_2}{\mu_1}+n\left(\dfrac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{n+1}}{1-\left(\dfrac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{n+1}}, & \mu_1\neq\mu_2\end{cases}$$

3.车辆在I号台的等待时间

假定车辆是按先到先服务。

令p_j^-表示到达I号台的车辆看到I号台已有j辆车的平稳概率，则

$p_j^- = P\{\text{I号台恰好有j辆车}|\text{新车进入}\}$

$$= \frac{P\{\text{I号台已有j辆车}\}\cdot P\{\text{新车进入}\,|\,\text{I号台已有j辆车}\}}{P\{\text{新车进入}\}}$$

$$= \frac{p_j}{1-p_n}, \qquad j = 0,1,2,\cdots,n-1$$

定理

令W_q表示在统计平衡下，该车辆在I号台的等待时间，则分布函数$W_q(t)=P\{W_q\le t\}$为

$$W_q(t)=\begin{cases} p_0^-, & t=0 \\ p_0^- + \sum_{j=1}^{n-1} p_j^- \sum_{i=0}^{j-1} \frac{(\mu_1 t)^i}{i!} e^{-\mu_1 t}, & t>0 \end{cases}$$

平均等待时间为

$$\overline{W}_q = E[W_q] = \sum_{j=0}^{n-1} E[W_q \mid \text{到达时已有}j\text{辆}] \cdot p_j^- = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{j}{\mu_1} \cdot p_j^-$$

$$= \begin{cases} \dfrac{n-1}{2\mu_1}, & \mu_1 = \mu_2 \\ \dfrac{\dfrac{\mu_2}{\mu_1}}{\mu_1-\mu_2} - \dfrac{n\left(\dfrac{\mu_2}{\mu_1}\right)^n}{\mu_1\left[1-\left(\dfrac{\mu_2}{\mu_1}\right)^n\right]}, & \mu_1 \ne \mu_2 \end{cases}$$

第七章 一般服务的M/G/1/∞排队系统

前面内容着重讨论了按泊松流到达与负指数服务时间的简单排队系统，它的主要特点是在任何时刻系统都具有较好的马尔可夫性，能比较容易地得到队长分布的平稳解，因此部分内容相对讲可以看作是初等的。

对于一般服务或一般到达的排队系统，并不是任何时刻系统都具有马尔可夫性，只是在某些特殊的随机时刻系统才具有这种性质，我们称这种随机时刻为再生点，即从这个时刻起，系统好像又重新开始一样。利用再生点，一般服务或一般到达的排队系统可化成马尔可夫链，用马尔可夫链的方法来解决，这种方法叫做嵌入马尔可夫链法。此方法的精髓在于找到再生点。

§7.1 嵌入马尔可夫链

1. M/G/1/∞排队系统的叙述

- 顾客按参数$\lambda(\lambda>0)$的泊松流到达，即相继到达的间隔时间序列$\{\tau_n, n\ge1\}$独立、服从参数为$\lambda(\lambda>0)$的负指数分布$F(t)=1-e^{-\lambda t}, t\ge0$；
- 顾客所需的服务时间序列$\{\chi_i, i\ge1\}$独立、同一般分布$G(t), t\ge0$，记平均服务时间为 $0<\frac{1}{\mu}=\int_0^\infty t\,dG(t)$；
- 系统中只有一个服务台，容量为无穷大；
- 顾客到达时，若服务台空闲就立即接受服务，否则就排队等待，并按先到先服务的顺序接受服务，而且到达过程与服务过程彼此独立。

2.嵌入马尔可夫链

假定N(t)表示在时刻t系统中的顾客数(队长)，对于M/G/1/∞ 排队系统，由于服务时间是一般分布，对任选的一个时刻t正在接受服务的顾客可能还没有服务完。从时刻t起的剩余服务时间分布可能不具有无记忆性，于是队长{N(t)，t≥0}不再具有马尔可夫性。但是，若令N_n^+表示第n个顾客服务完毕离开时留在系统中的顾客数，即留下的队长，n≥1，则下面定理表明$\{N_n^+, n\geq1\}$是马尔可夫链，被称为队长过程{N(t)，t≥0}的嵌入马尔可夫链。

定理

$\{N_n^+, n\geq 1\}$为一不可约、非周期的齐次马尔可夫链，其一步转移概率为

$$p_{ij} = P\{N_{n+1}^+ = j \mid N_n^+ = i\}$$

$$= \begin{cases} \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} dG(t), & i = 0 \\ \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} e^{-\lambda t} dG(t), & i \geq 1, j \geq i-1 \\ 0 & i \geq 1, j < i-1 \end{cases}$$

证明

设v_n表示在第n个顾客的服务时间χ_n内到达的顾客数，则容易看出$\{v_n，n\geq 1\}$相互独立同分布

$$a_j = P\{v_n = j\} = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} dG(t), \qquad j \geq 0$$

而且

$$N_{n+1}^+ = \begin{cases} N_n^+ - 1 + v_{n+1}, & N_n^+ > 0 \\ v_{n+1}, & N_n^+ = 0 \end{cases}, \qquad n \geq 1$$

由于$\{v_n，n\geq 1\}$相互独立同分布，所以令$v_n = v$，$n\geq 1$，有

$$N_{n+1}^+ = \begin{cases} N_n^+ - 1 + v, & N_n^+ > 0 \\ v, & N_n^+ = 0 \end{cases}, \qquad n \geq 1$$

证明(续1)

从上式可以看出，当已知N_n^+时， N_{n+1}^+只与到达过程有关，而与N_1^+, N_2^+,…, N_{n-1}^+无关，所以是马尔可夫链，其状态空间E＝{0,1,2,…}。

其一步转移概率为：

$$p_{ij}=P\{N_{n+1}^+=j\,|\,N_n^+=i\}$$

$$=\begin{cases}P\{v=j-i+1\}, & i\geq 1\\ P\{v=j\}, & i=0\end{cases}$$

当i≥1时，

$$P\{v=j-i+1\}=\int_0^\infty \frac{(\lambda t)^{j-i+1}}{(j-i+1)!}e^{-\lambda t}dG(t),$$

证明(续2)

当i＝0时，

$$P\{v=j\}=\int_0^{\infty}\frac{(\lambda t)^j}{j!}e^{-\lambda t}dG(t),$$

从一步转移概率表达式容易看出，p_{ij}，$i,j=0,1,2,\ldots$ 与时间的起点无关，而且任意两个状态是互通的，$p_{ii}>0$，$\{N_n^+, n\geq 1\}$为一不可约、非周期的齐次马尔可夫链。

V_n的均值

v_n表示在第n个顾客的服务时间χ_n内到达的顾客数，v_n分布函数为

$$a_j = P\{v_n = j\} = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} dG(t), \qquad j \ge 0$$

V_n均值为

$$E[v_n] = \sum_{j=0}^{\infty} j a_j = \sum_{j=0}^{\infty} j \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} dG(t)$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{\infty} j \frac{(\lambda t)^j}{j!} dG(t) = \lambda \int_0^\infty t e^{-\lambda t} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} dG(t)$$

$$= \lambda \int_0^\infty t e^{-\lambda t} e^{\lambda t} dG(t) = \lambda \int_0^\infty t\, dG(t) = \frac{\lambda}{\mu} = \rho$$

V_n的二阶矩

V_n的二阶矩为

$$E[v_n^2]=\sum_{j=0}^{\infty} j^2 a_j=\sum_{j=0}^{\infty} j^2\int_0^{\infty}\frac{(\lambda t)^j}{j!}e^{-\lambda t}dG(t)$$

$$=\int_0^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} j^2\frac{(\lambda t)^j}{j!}e^{-\lambda t}dG(t)=\int_0^{\infty}E[T_n^2]dG(t)$$

$$=\int_0^{\infty}\{D[T_n]+E^2[T_n]\}dG(t)=\int_0^{\infty}[\lambda t+(\lambda t)^2]dG(t)$$

$$=\lambda\int_0^{\infty}tdG(t)+\lambda^2\int_0^{\infty}t^2dG(t)=\frac{\lambda}{\mu}+\lambda^2E[\chi^2]$$

$$=\frac{\lambda}{\mu}+\lambda^2\{D[\chi]+E^2[\chi]\}=\rho+\lambda^2D[\chi]+\rho^2$$

V_n的方差

V_n的方差为

$$D[v_n] = E[{v_n}^2] - E^2[v_n] = \rho + \lambda^2 D[\chi]$$

一步转移概率

嵌入马尔可夫链$\{N_n^+, n\geq 1\}$的一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

其中：

$$a_j=\int_0^\infty \frac{(\lambda t)^j}{j!}e^{-\lambda t}dG(t), \qquad j=0,1,2,\cdots$$

引理

对于不可约非周期的马尔可夫链，令$\{p_{ij}, i,j = 0,1,2,\ldots\}$为一步转移概率，若不等式组

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} y_j \le y_i - 1, \qquad i \ne 0$$

存在一个满足条件

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{0j} y_j < \infty$$

的非负解，则此马尔可夫链是正常返的。

定理

嵌入马尔可夫链$\{N_n^+, n\geq 1\}$为正常返的充分必要条件是$\rho=\lambda/\mu<1$。

证明

充分性。 设$\rho=\lambda/\mu<1$，定义

$$y_j=\frac{j}{1-\rho}\ge 0,\qquad j=0,1,2,\cdots$$

则

$$\sum_{j=0}^{\infty}p_{ij}y_j=\sum_{j=i-1}^{\infty}a_{j-i+1}\frac{j}{1-\rho}=\frac{i}{1-\rho}-1=y_i-1,\qquad i\ge 1$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}p_{0j}y_j=\sum_{j=0}^{\infty}a_j\frac{j}{1-\rho}=\frac{1}{1-\rho}E[v_n]=\frac{\rho}{1-\rho}$$

即$\{y_j，j\ge 0\}$满足引理的条件，因此嵌入马尔可夫链$\{N_n^+，n\ge 1\}$是正常返的。

证明(续1)

必要性。 设嵌入马尔可夫链$\{N_n^+, n\geq 1\}$是正常返的，则由极限定理知，它是遍历马氏链，且

$$\lim_{n\to\infty} P\{N_n^+ = j\} = p_j^+ > 0, \qquad j = 0,1,2,\cdots$$

存在，且$\{p_j^+, j\geq 0\}$是$\{N_n^+, n\geq 1\}$唯一的平稳分布，且满足

$$p_j^+ = \sum_{i=0}^{\infty} p_i^+ \cdot p_{ij}, \qquad j\geq 0$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j^+ = 1$$

绝对分布由初始分布和转移概率确定。而平稳分布的初始分布即为极限分布。

利用一步转移概率矩阵，有

$$p_j^+ = p_0^+ a_j + \sum_{i=1}^{j+1} p_i^+ \cdot a_{j-i+1}, \qquad j\geq 0$$

证明(续2)

引入母函数

$$P^{+}(z)=\sum_{j=0}^{\infty}p_j^{+}\cdot z^j,\quad A(z)=\sum_{j=0}^{\infty}a_j\cdot z^j,\quad |z|<1$$

得

$$P^{+}(z)=p_0^{+}\sum_{j=0}^{\infty}a_j\cdot z^j+\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{j+1}p_i^{+}\cdot a_{j-i+1}\cdot z^j$$

$$=p_0^{+}A(z)+\frac{1}{z}\sum_{i=1}^{\infty}p_i^{+}z^i\left(\sum_{j=i-1}^{\infty}a_{j-i+1}z^{j-i+1}\right)$$

$$=p_0^{+}A(z)+\frac{1}{z}(P^{+}(z)-p_0^{+})A(z)$$

于是

$$P^{+}(z)=\frac{p_0^{+}(1-z)A(z)}{A(z)-z}$$

证明(续3)

由于$P^+(1)=A(1)=1$，用求极限的洛必塔法则，得

$$1=\lim_{z\to 1^-}P^+(z)=\lim_{z\to 1^-}\frac{-p_0^+A(z)+p_0^+(1-z)A'(z)}{A'(z)-1}=-\frac{p_0^+}{A'(1)-1}$$

又

$$A'(z)=\sum_{j=0}^{\infty}ja_j=E[v_n]=\rho$$

所以

$$1=\frac{p_0^+}{1-\rho}$$

即

$$\rho=1-p_0^+<1$$

推论1

对于嵌入马尔可夫链$\{N_n^+, n\geq 1\}$，

1. 当$\rho=\lambda/\mu\geq 1$时，此马氏链是零常返或非常返的，n步转移概率的极限 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}(n)=0, \quad i,j=0,1,2,\cdots$ 且不存在平稳分布。
2. 当$\rho=\lambda/\mu<1$时，此马氏链是正常返的，n步转移概率的极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}(n)=\lim\limits_{n\to\infty} P\{N_n^+=j\}=p_j^+>0$ 进一步，$\{p_j^+, j\geq 0\}$是唯一的平稳分布,有递推表达式

$$\begin{cases} p_0^+=1-\rho, \\ p_j^+=\dfrac{1}{a_0}\left(p_{j-1}^+-p_0^+a_{j-1}-\sum\limits_{k=1}^{j-1}p_k^+a_{j-k}\right), \quad j\geq 1 \end{cases}$$

其中， $a_j=\int_0^\infty \frac{(\lambda t)^j}{j!}e^{-\lambda t}dG(t), \quad j=0,1,2,\cdots$

推论2

对任意正整数m，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{N_n^+ \le m\} = \begin{cases} \sum_{j=0}^{m} p_j^+, & \rho < 1 \\ 0, & \rho \ge 1 \end{cases}$$

证明：

$$P\{N_n^+ \le m\} = \sum_{j=0}^{m} P\{N_n^+ = j\} = \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{\infty} P\{N(0) = i\}\cdot p_{ij}(n)$$

其中N(0)表示初始时刻t=0时系统中的顾客数，令n→∞，由推论1即得结论。

说明

推论1、2表明，当$\rho<1$时，嵌入马尔可夫链的n步转移概率的极限总存在、为正、不依赖于初始状态，即为平稳分布；当$\rho\geq1$时，不论怎样大的正整数m，第n个顾客服务完毕离开系统时留在系统中的顾客数$\leq m$的概率总趋于0($n\to\infty$)，这说明对长越来越长，系统达不到统计平衡。另外也可证明：若$\rho=1$，则$\{N_n^+, n\geq1\}$为零常返；若$\rho>1$，则$\{N_n^+, n\geq1\}$为非常返。两者的区别在于：当$\rho=1$时，系统始终不空的概率为0；当$\rho>1$时，系统始终不空的概率为正。

推论3

对M/G/1/∞排队系统，若$\rho=\lambda/\mu<1$，则平稳分布$\{p_j^+, j\geq 0\}$的母函数为

$$P^+(z)=\frac{(1-\rho)(1-z)g(\lambda(1-z))}{g(\lambda(1-z))-z}, \qquad |z|<1$$

其中

$$g(\lambda(1-z))=\int_0^\infty e^{-\lambda(1-z)t}dG(t)=\int_0^\infty e^{\lambda zt-\lambda t}dG(t)$$

$$=\int_0^\infty \sum_{j=0}^\infty z^j\frac{(\lambda t)^j}{j!}e^{-\lambda t}dG(t)=\sum_{j=0}^\infty a_j z^j=A(z)。$$

$\{N_n^+, \ n\geq 1\}$ 的平均对长

前面，我们讨论了队长过程$\{N(t), \ t\geq 0\}$的嵌入过程$\{N_n^+, \ n\geq 1\}$的平稳分布。

平均队长为

$$\overline{N}=\sum_{j=0}^{\infty} jp_j^+ = P^{+\prime}(1)=\frac{d}{dz}\left[\frac{(1-\rho)(1-z)A(z)}{A(z)-z}\right]\Bigg|_{z=1}$$

$$=(1-\rho)\left\{\frac{-A(z)\left[A(z)-z\right]+(1-z)\left[A(z)-A'(z)z\right]}{\left[A(z)-z\right]^2}\right\}\Bigg|_{z=1}$$

用求极限的洛必塔法则，得

$$\overline{N}=(1-\rho)\frac{-2\left[A'(1)\right]^2+2A'(1)+A''(1)}{2\left[A'(1)-1\right]^2}$$

$\{N_n^+, n\geq1\}$ 的平均对长(续)

而
$$A'(1)=\sum_{j=0}^{\infty} ja_j = E[v_n]=\rho$$

$$A''(1)=\sum_{j=0}^{\infty} j(j-1)a_j=\sum_{j=0}^{\infty} j^2a_j-\sum_{j=0}^{\infty} ja_j = D[v_n]+E^2[v_n]-E[v_n]$$

$$=\rho+\lambda^2D[\chi]+\rho^2-\rho=\lambda^2D[\chi]+\rho^2$$

故
$$\overline{N}=\rho+\frac{\lambda^2D[\chi]+\rho^2}{2(1-\rho)}=\rho+\frac{\lambda^2E[\chi^2]}{2(1-\rho)}$$

上式称为**扑拉克—辛钦**(Pollaczek-Khinchin)**均值公式**。

扑拉克—辛钦均值公式

上式说明，平均对长只与ρ和D[χ]有关，即只与交通强度和服务分布的方差有关，而与服务分布的其它性质无关。当D[χ] ＝0时，则服务分布为定长分布，$\overline{N}$ 取最小值。一般情况下，平均对长$\overline{N}$ 是服务分布方差的线性函数。平均等待队长为

$$\overline{N}_q=\sum_{j=0}^{\infty} jp_{j+1}^{+}=\sum_{j=0}^{\infty} jp_{j}^{+}-\sum_{j=1}^{\infty} p_{j}^{+}=\overline{N}-(1-p_0^{+})=\frac{\lambda^2 E[\chi^2]}{2(1-\rho)}$$

由Little公式

平均等待时间 $\overline{W}_q=\frac{\overline{N}_q}{\lambda}=\frac{\lambda E[\chi^2]}{2(1-\rho)}$

平均逗留时间 $\overline{W}=\frac{\overline{N}}{\lambda}=\frac{1}{\mu}+\frac{\lambda E[\chi^2]}{2(1-\rho)}$

本讲主要内容

- 二阶段循环排队系统
  - 问题的引入
  - I号台的队长
  - 车辆在I号台的等待时间
- 一般服务的M/G/1/∞排队系统
  - 嵌入马尔可夫链

下一讲内容预告

- 一般服务的M/G/1/∞排队系统
  - 对长
  - 等待时间与逗留时间
  - 忙期
  - 输出过程
- 隐马尔科夫模型简介