随机过程与排队论

信息与软件工程学院

顾小丰

Email：guxf@uestc.edu.cn

2020年9月27日星期日

习题1

病人以每小时3人的泊松流到达医院，假设该医院只有一个医生服务，他的服务时间服从负指数分布，并且平均服务一个顾客时间为15分钟。

（a）医生空闲时间的比例？

（b）有多少病人等待看医生？

（c）病人的平均等待时间？

（d）一个病人等待超过一个小时的概率？

解

由题设知， λ＝3(人/小时)，μ＝4(人/小时)，ρ
$=\frac{3}{4}$，该系统按 M/M/1/∞ 型处理。

a) P{医生空闲}＝P{系统空闲}＝p_0＝1－ρ＝ $\frac{1}{4}$
＝0.25。

b) 平均等待对长 $\overline{N}_q=\frac{\rho^2}{1-\rho}=\frac{(3/4)^2}{1-3/4}=\frac{9}{4}=2.25$

即平均有2.25个病人等待看医生

c) 平均等待时间 $\overline{W}_q=\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}=\frac{3/4}{4(1-3/4)}=\frac{3}{4}=0.75$

即病人的平均等待时间为0.75小时，即45分钟。

解(续)

d) P{等待超过一个小时}

$=P\{W_q>1\}$

$=1-P\{W_q\leqslant 1\}$

$=1-W_q(1)$

$=\rho e^{-\mu(1-\rho)}$

$$=\frac{3}{4}e^{-4(1-\frac{3}{4})}=\frac{3}{4}e^{-1}$$

即病人等待超过一个小时的概率约为 $\frac{3}{4}e^{-1}$。

习题2

一台计算机有2个终端，假定计算一个题目的时间服从负指数分布，平均20分钟。假定题目是以泊松流到达，平均每小时到达5个。求积压题目的概率及平均积压的题目数。

解

由题设知， $\lambda=5$（题/小时），$\mu=3$（题/小时），$c=2$，

该系统按M/M/c/∞型处理。$\rho=5/3$，$\rho_c=5/6$

$$p_0=\left[\sum_{j=0}^{c-1}\frac{\rho^j}{j!}+\frac{c\rho^c}{c!(c-\rho)}\right]^{-1}=\left[\sum_{j=0}^{2-1}\frac{(5/3)^j}{j!}+\frac{2\cdot(5/3)^2}{2!\cdot(2-5/3)}\right]^{-1}$$

$$=\left[1+\frac{5}{3}+\frac{25/9}{1/3}\right]^{-1}=\frac{1}{11}$$

P{积压题目}＝ P{题目到达时需要等待}

$$=\sum_{j=c}^{\infty}p_j=\frac{\rho^c}{(1-\rho_c)\cdot c!}p_0=\frac{(5/3)^2}{(1-5/6)\cdot 2!}\times\frac{1}{11}=\frac{25}{33}$$

平均积压的题目数

$$=\overline{N}_q=\frac{\rho_c}{(1-\rho_c)^2}p_c=\frac{(5/6)\cdot(5/3)^2}{(1-5/6)^2\cdot 2!}\times\frac{1}{11}=\frac{125}{33}$$

习题3

考虑一个M/M/1/K排队系统，λ＝10人/小时，μ＝30人/小时，K＝2。管理者想改进服务机构，提出了两个方案。方案I：增加等待空间，K＝3；方案II：提高服务率，μ＝40人/小时。假设在单位时间内单位服务成本5元和每服务一个顾客收益8元不变得情况下，哪个方案获得更大的收益？当λ＝30人/小时，又有什么结果？

解

单位时间内的纯收入为

$$f = 8\lambda(1 - p_K) - 5\mu = 8\lambda(1 - \frac{(1-\rho)\rho^K}{1-\rho^{k+1}}) - 5\mu$$

方案I(λ＝10人/小时，μ＝30人/小时，K＝3)：

$$f = 8\times 10\times(1 - \frac{(1-1/3)(1/3)^3}{1-(1/3)^4}) - 5\times 30 = -72$$

方案II(λ＝10人/小时，μ＝40人/小时，K＝2):

$$f = 8\times 10\times(1 - \frac{(1-1/4)(1/4)^2}{1-(1/4)^3}) - 5\times 40 = -123.8$$

故方案I比方案II好。

解(续)

当λ=30人/小时:

方案I(λ=30人/小时，μ=30人/小时，K=3):

$$f = 8\lambda(1 - p_K) - 5\mu = 8 \times 30 \times (1 - \frac{1}{3+1}) - 5 \times 30 = 30$$

方案II(λ=30人/小时，μ=40人/小时，K=2):

$$f = 8 \times 30 \times (1 - \frac{(1-3/4)(3/4)^2}{1-(3/4)^3}) - 5 \times 40 = -31.35$$

故方案I比方案II好。

习题4

某系统利用2台计算机进行容错处理。如果1台计算机正常工作时间服从负指数分布，平均10天，而计算机损坏时由1名工程师维修，维修1台计算机的时间是负指数分布的，平均5天。求：2台计算机都正常运行的概率和由于计算机损坏无法运行的概率，系统中平均运行的计算机数。

解

由题设知，λ＝1/10(台/天)，μ＝1/5(台/天)，ρ＝1/2，该系统按M/M/c/m/m型处理，c＝1，m＝2。

P{2台计算机都正常运行}＝p_0

$$=\left[\sum_{i=0}^{m}\frac{m!}{(m-i)!}\rho^i\right]^{-1}=\left[\sum_{i=0}^{2}\frac{2!}{(2-i)!}(\frac{1}{2})^i\right]^{-1}=\frac{2}{5}$$

P{计算机损坏无法运行}＝p_2

$$=\frac{m!}{(m-j)!}\rho^j p_0=\frac{2!}{(2-2)!}(\frac{1}{2})^2\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$$

解(续)

平均发生故障的计算机数

$$\overline{N} = \sum_{j=0}^{m} jp_j = p_1 + 2p_2$$

$$= (1 - p_0 - p_2) + 2p_2 = (1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{5}) + 2 \times \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

系统中平均运行的计算机数为 $2 - \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$ (台)

习题5

某电视台有2部发射机，1部发射1部备用。如果1部正常工作时间服从负指数分布，平均9天，而调整维修1部机器的是负指数分布的，平均3天。求无备用机而正常运转的概率和由于停机无法发射的概率。

解

由题设知，λ＝1/9(台/天)，μ＝1/3(台/天)，ρ＝1/3，该系统按M/M/c/m+k/m型处理，c＝1，m＝1，k＝1。

若无备用机器，即K＝0，化为M/M/c/m/m型系统：

P{无备用机而正常运转}＝p_0

$$=\left[\sum_{i=0}^{m}\frac{m!}{(m-i)!}\rho^{i}\right]^{-1}=\left[\sum_{i=0}^{1}\frac{1!}{(1-i)!}(\frac{1}{3})^{i}\right]^{-1}=\frac{3}{4}$$

解(续)

对M/M/1/1+1/1型系统

$$p_0=\left[\sum_{i=0}^{c-1}\frac{m^i}{i!}\rho^i+\frac{1}{c!}\sum_{i=c}^{K-1}\frac{m^i}{c^{i-c}}\rho^i+\frac{m^K\cdot m!}{c!}\sum_{i=K}^{K+m}\frac{1}{c^{i-c}(m-i+K)!}\rho^i\right]^{-1}$$

$$=\left[\sum_{i=0}^{1-1}\frac{1^1}{i!}(\frac{1}{3})^i+\frac{1^1\cdot 1!}{1!}\sum_{i=1}^{1+1}\frac{1}{1^{i-1}(1-i+1)!}(\frac{1}{3})^i\right]^{-1}$$

$$=\left[1+\frac{1}{3}+(\frac{1}{3})^2\right]^{-1}=\frac{9}{13}$$

P{由于停机无法发射}$=p_2$

$$=\frac{m^K\cdot m!}{(m-j+K)!\cdot c^{j-c}\cdot c!}\rho^j p_0=\frac{1^1\cdot 1!}{(1-2+1)!\cdot 1^{2-1}\cdot 1!}(\frac{1}{3})^2\times\frac{9}{13}=\frac{1}{13}$$

习题6

在一商店，顾客以泊松流到达收银台，平均5分钟到达9个顾客；而服务员每5分钟能服务10个顾客，服务时间服从指数分布。商店经理希望将顾客等待时间不超过1分钟。他有两个方案：

1) 增加一名服务同样效率的服务员,即提高服务率一倍。
2) 增加一新柜台。

试分析选择那种方案？

解

方案1　λ＝9/5(个/分钟)，μ＝4(个/分钟)，ρ＝9/20＜1，该系统按M/M/1/∞型处理，平均等待时间

$$\overline{W_q}=\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}=\frac{\frac{9}{20}}{4\times(1-\frac{9}{20})}=\frac{9}{44}\text{（分钟）}$$

解(续)

方案2　λ＝9/5(个/分钟)，μ＝2(个/分钟)，ρ＝9/10，该系统按M/M/c/∞型处理， c＝2，ρ_c＝9/20＜1，

$$p_0=\left[\sum_{j=0}^{c-1}\frac{\rho^j}{j!}+\frac{c\rho^c}{c!(c-\rho)}\right]^{-1}=\left[1+\frac{9}{10}+\frac{2\times(\frac{9}{10})^2}{2\times(2-\frac{9}{10})}\right]^{-1}=\frac{11}{29}$$

$$p_c=\frac{1}{c!}\rho^c p_0=\frac{1}{2}\times\left(\frac{9}{10}\right)^2\times\frac{11}{29}=\frac{891}{5800}$$

平均等待时间

$$\overline{W_q}=\frac{\rho_c}{\lambda(1-\rho_c)^2}\cdot p_c=\frac{\frac{9}{20}}{\frac{9}{5}\times(1-\frac{9}{20})^2}\times\frac{891}{5800}=\frac{891}{7018}\text{(分钟)}$$

习题7

有一排队系统，顾客到达为参数λ ($\lambda>0$)的泊松过程，顾客到达看到队长为k时，进入系统的概率为$1/(k+1)$；顾客所需的服务时间服从指数分布，具有两个服务率μ_1、μ_2 ($0<\mu_1<\mu_2$)，当对长$<m$（m是一个固定的正整数）时，服务员用速率μ_1工作，当对长$\geq m$时，服务员用速率μ_2工作；系统中只有一个服务台；容量为无穷大，而且到达过程与服务过程彼此独立。试分析该系统什么情况下存在平稳分布，并计算其平稳分布和平均对长。

解

假定$N(t)$表示在时刻t系统中的顾客数，包括正在被服务的顾客数，即$N(t)$表示时刻t系统的队长，$t\geq 0$，且令

$$p_{ij}(\Delta t) = P\{N(t+\Delta t)=j \mid N(t)=i\},\quad i,j=0,1,2,\ldots$$

则

$$p_{i,i+1}(\Delta t)=P\{\text{在}\Delta t\text{内到达且进入1个而服务未完成}\}$$

$$+\sum_{j=2}^{\infty} P\{\text{在}\Delta t\text{内到达且进入j个而服务完j-1个}\}$$

$$=\frac{1}{i+1}(\lambda\Delta t+o(\Delta t))(1-\mu\Delta t+o(\Delta t))+o(\Delta t)$$

$$=\frac{\lambda}{i+1}\Delta t+o(\Delta t)$$

解(续)

$p_{i,i-1}(\Delta t)$ = P{在Δt内到达且进入0个而服务完成1个}

$$+\sum_{j=2}^{\infty} P\{\text{在}\Delta t\text{内到达且进入}j-1\text{个而服务完}j\text{个}\}$$

$$=\begin{cases}(1-\lambda\Delta t+o(\Delta t))(\mu_1\Delta t+o(\Delta t))+o(\Delta t)=\mu_1\Delta t+o(\Delta t) & i<m\\(1-\lambda\Delta t+o(\Delta t))(\mu_2\Delta t+o(\Delta t))+o(\Delta t)=\mu_2\Delta t+o(\Delta t) & i\ge m\end{cases}$$

$p_{ij}(\Delta t)$ = $o(\Delta t)$ ， $|i-j|\ge 2$

于是，$\{N(t), t\ge 0\}$是$E=\{0,1,2,\ldots\}$上的生灭过程，其参数为

$$\begin{cases}\lambda_i=\dfrac{\lambda}{i+1}, & i\ge 0\\ \mu_i=\mu_1, & i=1,2,\cdots,m-1\\ \mu_i=\mu_2, & i\ge m\end{cases}$$

解(续1)

令 $\rho_1=\dfrac{\lambda}{\mu_1},\ \rho_2=\dfrac{\lambda}{\mu_2},\ p_j=\lim\limits_{t\to\infty}p_j(t),\ j\geq 0$，因为

$$1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}=1+\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{j!}\rho_1{}^{j}+\sum_{j=m}^{\infty}\frac{1}{j!}\rho_1{}^{m-1}\rho_2{}^{j-m+1}<\infty$$

$$\frac{1}{\lambda_0}+\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}\right)^{-1}\cdot\frac{1}{\lambda_j}$$

$$=\frac{1}{\lambda}+\sum_{j=1}^{m-1}\frac{\rho_1{}^{-j}}{\lambda}(j+1)!+\sum_{j=m}^{\infty}\frac{\rho_1{}^{-m+1}\rho_2{}^{-j+m-1}}{\lambda}(j+1)!=\infty$$

所以$\{p_j，j\geq 0\}$存在，与初始条件无关，且

解(续2)

$$p_0=\left(1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}\right)^{-1}$$

$$=\left(\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{j!}\rho_1{}^j+\rho_1{}^{m-1}\rho_2{}^{1-m}\sum_{j=m}^{\infty}\frac{1}{j!}\rho_2{}^j\right)^{-1}$$

$$=\left(\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{j!}\rho_1{}^j+\rho_1{}^{m-1}\rho_2{}^{1-m}\left(e^{\rho_2}-\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{j!}\rho_2{}^j\right)\right)^{-1}$$

$$p_j=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}p_0=\begin{cases}\dfrac{\rho_1^j}{j!}p_0, & j=1,2,\cdots,m-1\\[2ex] \dfrac{\rho_1^{m-1}\rho_2^{j-m+1}}{j!}p_0, & j=m,m+1,\cdots\end{cases}$$

解(续3)

平均队长：

$$\overline{N}=E(N)=\sum_{j=0}^{\infty} jp_j=p_0\left(\sum_{j=0}^{m-1} j\frac{\rho_1{}^j}{j!}+\sum_{j=m}^{\infty} j\frac{\rho_1^{m-1}\rho_2^{j-m+1}}{j!}\right)$$

$$=p_0\left(\sum_{j=1}^{m-1}\frac{\rho_1{}^j}{(j-1)!}+\rho_1{}^{m-1}\rho_2{}^{1-m}\sum_{j=m}^{\infty}\frac{\rho_2{}^j}{(j-1)!}\right)$$

$$=p_0\left(\rho_1\sum_{j=0}^{m-2}\frac{\rho_1{}^j}{j!}+\rho_1{}^{m-1}\rho_2{}^{2-m}\sum_{j=m-1}^{\infty}\frac{\rho_2{}^j}{j!}\right)$$

$$=p_0\left(\rho_1\sum_{j=0}^{m-2}\frac{\rho_1{}^j}{j!}+\rho_1{}^{m-1}\rho_2{}^{2-m}(e^{\rho_2}-\sum_{j=0}^{m-2}\frac{\rho_2{}^j}{j!})\right)$$

例1

设随机变量X 的概率密度函数为$f_X(x)=Ae^{-|x|}$，试求：

1) 系数 A；

2) X 落在区间 $(0,1)$ 内的概率；

3) X 的概率分布函数。

解

1) 由 $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$ 知道， $A = 1/I$ ，其中

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x}dx = 2,$$

因此 $A = 1/2$；

2) **由分布函数的性质知**

$$P(0 < X < 1) = \int_0^1 \frac{1}{2}e^{-x}dx = \frac{1}{2}(1 - e^{-1})$$

3) 由概率分布函数和概率密度函数之间的关系知道

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}e^{-|t|}dt = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x}, & x \le 0, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

例2

设$N(t)$是一个参数为λ的泊松过程。设该泊松过程中，每一事件发生时就抛硬币，设正面出现的概率为p。 设$N_1(t)$和$N_2(t)$ 分别为时间$[0,t)$内正面和反面出现的次数。

1) 试求$P\{N_1(t)=j, N_2(t)= k \mid N(t)=k + j\}$；

2) 证明$N_1(t)$和$N_2(t)$分别为相互独立的参数为$p\lambda$和$(1-p)\lambda$的泊松过程。

解

1) 显然，$P\{N_1(t)=j, N_2(t)=k \mid N(t)=k+j\}$表示在抛了 $k+j$ 次硬币后，出现 j 次正面 k 次反面的概率。所以

$$P\{N_1(t)=j, N_2(t)=k \mid N(t)=k+j\}=C_{k+j}^{j}\, p^{j}(1-p)^{k}$$

2) 因为

$$P\{N_1(t)=j, N_2(t)=k\}$$

$$=P\{N_1(t)=j, N_2(t)=k \mid N(t)=k+j\}\cdot P\{N(t)=k+j\}$$

$$=C_{k+j}^{j}\, p^{j}(1-p)^{k}\frac{\lambda^{k+j}}{(k+j)!}e^{-\lambda t}$$

解(续)

对$P\{N_1(t)=j, N_2(t)=k\}$求边缘分布函数

$$P\{N_1(t)=j\}=\sum_{k=0}^{\infty}P\{N_1(t)=j, N_2(t)=k\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}C_{k+j}^{j}\,p^j(1-p)^k\frac{(\lambda t)^{k+j}}{(k+j)!}e^{-\lambda t}$$

$$=\frac{(p\lambda)^j}{j!}e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(1-p)\lambda t]^k}{k!}$$

$$=\frac{(p\lambda)^j}{j!}e^{-\lambda t}e^{(1-p)\lambda t}=\frac{(p\lambda)^j}{j!}e^{-p\lambda t}$$

解(续)

$$P\{N_2(t)=k\}=\sum_{j=0}^{\infty}P\{N_1(t)=j,N_2(t)=k\}$$

$$=\frac{[(1-p)\lambda]^k}{k!}e^{-(1-p)\lambda t}$$

因此有 $P\{N_1(t)=j,N_2(t)=k\}=P\{N_1(t)=j\}\cdot P\{N_2(t)=k\}$

由概率的性质知，$N_1(t)$与$N_2(t)$相互独立。

由泊松过程的定义，易证$N_1(t)$与$N_2(t)$分别为参数为

$p\lambda$和$(1-p)\lambda$的泊松过程泊松过程。

证$N_1(t)$ 为参数为pλ的泊松过程泊松过程

1. 由于$N(0) = 0$，所以$N_1(t)$ 0) = 0。
2. 对任意正整数n≥2，$t_1,t_2,\ldots,t_n \in T$且$t_1 < t_2 < \ldots < t_n$，

   因为泊松过程$N(t)$是独立增量过程，所以

   $N(t_2)- N(t_1), N(t_3)- N(t_2), \ldots, N(t_n)- N(t_{n-1})$相互独立，

   而$N_1(t)$是$N(t)$的一部分，所以

   $N_1(t_2)- N_1(t_1), N_1(t_3)- N_1(t_2), \ldots, N_1(t_n)- N_1(t_{n-1})$相互独立，

   即$N_1(t)$是独立增量过程。
3. 由$N(t)$的平稳性，易得$N_1(t)$也是平稳的，因此有

$$P\{N_1(t) - N_1(s) = j\} = P\{N_1(t-s) = j\} = \frac{[p\lambda(t-s)]^j}{j!} e^{-p\lambda(t-s)}$$

直接计算增量分布

$$P\{N_1(t)-N_1(s)=j\}$$

$$=\sum_{n=k}^{\infty}P\{N_1(t)-N_1(s)=j\mid N(t)-N(s)=n\}\cdot P\{N(t)-N(s)=n\}$$

$$=\sum_{n=j}^{\infty}C_n^j\,p^j(1-p)^{n-j}\frac{[\lambda(t-s)]^n}{n!}e^{-\lambda(t-s)}$$

$$=\sum_{n=j}^{+\infty}\frac{[\lambda(\mathrm{t}-\mathrm{s})]^j[\lambda(\mathrm{t}-\mathrm{s})]^{\mathrm{n}-j}}{n!}e^{-\lambda(t-s)}\frac{n!}{j!(\mathrm{n}-j)!}\mathrm{p}^j(1-\mathrm{p})^{\mathrm{n}-j}$$

$$=\frac{[\lambda\,\mathrm{p}(\mathrm{t}-\mathrm{s})]^j}{j!}e^{-\lambda(t-s)}\sum_{n=j}^{+\infty}\frac{[\lambda(1-\mathrm{p})(\mathrm{t}-\mathrm{s})]^{\mathrm{n}-j}}{(\mathrm{n}-j)!}$$

$$=\frac{[\lambda\,\mathrm{p}(\mathrm{t}-\mathrm{s})]^j}{j!}e^{-\lambda(t-s)}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{[\lambda(1-\mathrm{p})(\mathrm{t}-\mathrm{s})]^{\mathrm{n}}}{n!}$$

$$=\frac{[\lambda\,\mathrm{p}(\mathrm{t}-\mathrm{s})]^j}{j!}e^{-\lambda(t-s)}e^{\lambda(1-\mathrm{p})(t-s)}=\frac{[p\lambda(t-s)]^j}{j!}e^{-p\lambda(t-s)}$$

例3

甲乙两人进行一种比赛，设每局比赛甲胜的概率为p，乙胜的概率为q，和局的概率为r，且0＜p，q，r＜1，p+q+r=1。设每局比赛胜者记1分，负者记-1分，和局记0分。当有一人获得2分时比赛结束。以X_n表示比赛至第n局时甲获得的分数，则$\{X_n, n\geq 1\}$是齐次马尔可夫链。

1）写出状态空间E；

2）求二步转移概率矩阵；

3）求甲已获得1分时，最多再赛两局可以结束比赛的概率。

解

1） E＝{-2, -1, 0, 1, 2}

2）转移概率矩阵 $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & r & p & 0 & 0 \\ 0 & q & r & p & 0 \\ 0 & 0 & q & r & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$P(2)=P^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q+rp & r^2+pq & 2pr & p^2 & 0 \\ q^2 & 2rq & r^2+2pq & 2pr & p^2 \\ 0 & q^2 & 2qr & pq+r^2 & p+pr \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

解（续）

3）最多经两局结束比赛包括两种情形：甲得1分经二步转移至得2分而结束比赛，或甲得-3分经二步转移至得-2分而结束比赛。

因此，有

$$p=p_{45}(2)+p_{41}(2)=(p+pr)+0=p(1+r)$$

例4

在一计算机系统中，每一循环具有误差的概率取决于先前一个循环是否有误差。以0表示误差状态，以1表示无误差状态，设转移矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}0.75 & 0.25\\ 0.5 & 0.5\end{pmatrix}$$

讨论相应齐次马尔可夫链的遍历性，并求其极限分布。

解法1（用定义解）

为求n步转移矩阵P^n，先求P的特征值和特征向量

$$|\lambda I - P| = \begin{vmatrix} \lambda - 0.75 & -0.25 \\ -0.5 & \lambda - 0.5 \end{vmatrix} = 0$$

求得特征值$\lambda_1=1$和$\lambda_2=0.25$，特征向量

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

解法1(续1)

正交，将其单位化得 $\eta_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, $\eta_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$

得矩阵 $B=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$, $B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3}\\ \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{\sqrt{5}}{3}\end{pmatrix}$

$$\Delta=B^{-1}PB=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.25\end{pmatrix},\quad P=B\Delta B^{-1}$$

$$P^n=B\Delta^n B^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.25^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3}\\ \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{\sqrt{5}}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times 0.25^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times 0.25^n\\ \frac{2}{3}-\frac{2}{3}\times 0.25^n & \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times 0.25^n\end{pmatrix}$$

解法1(续2)

因此，有 $\lim\limits_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

由于存在与i无关的极限，$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}(n) = p_j$，所以此链具有遍历性。

因为2/3＋1/3＝1，所以π＝(2/3，1/3)为此链的极限分布。

解法2

由于P中元素皆非0，所以此链具有遍历性。

设 $\Pi = (\pi_0, \pi_1)$，由 $\Pi = \Pi P$ 及 $\pi_0 + \pi_1 = 1$，得方程组

$$\begin{cases} \pi_0 = 0.75\pi_0 + 0.5\pi_1 \\ \pi_1 = 0.25\pi_0 + 0.5\pi_1 \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 \end{cases}$$

得惟一解 $\pi_0 = 2/3$，$\pi_1 = 1/3$，故 $\Pi = (2/3，1/3)$ 是极限分布。

例5

赌徒甲有a元，赌徒乙有b元，两人进行赌博。每赌一局负者给胜者1元，没有和局，直到两人中有一个输光为止。设在每一局中甲乙获胜的概率均为0.5，$X(n)$表示第n局结束时甲的赌金。$\{X(n), n = 0, 1, 2, \ldots\ldots\}$为齐次马尔科夫链。

(1)写出状态空间和状态转移矩阵；

(2)求出甲输光的概率。

解

(1) 状态空间E={0, 1, 2, …, a+b}。状态转移矩阵为

$$
\begin{array}{c}
0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ a+b-1 \\ a+b
\end{array}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

其中0，a+b为吸收壁。

解（续）

(2) 设u_i表示由状态i最终达到0的概率，则有

$$u_0=1,\quad u_{a+b}=0;\quad u_i=\frac{1}{2}u_{i-1}+\frac{1}{2}u_{i+1}$$

所以 $u_i - u_{i-1} = u_{i+1} - u_i$

从而 $u_{i+1} - u_i = u_i - u_{i-1} = \ldots = u_2 - u_1 = u_1 - u_0$

$$u_a - u_0 = u_a - u_{a-1} + u_{a-1} - u_{a-2} + u_{a-2} \ldots - u_1 + u_1 - u_0$$

$$=a(u_1 - u_0)$$

又 $u_{a+b}=0,\quad u_{a+b} - u_0 = (a+b)(u_1 - u_0)$

故 $u_1 = -\frac{1}{a+b}+1 \qquad u_a = 1-\frac{a}{a+b}=\frac{b}{a+b}$

即甲输光的概率为 $\frac{b}{a+b}$

例6

设电话总机在[0, t)接到的电话呼叫数$X(t)$是泊松过程，平均每分钟2次，求：

1. [0, 3)分钟内接到5次呼叫的概率；
2. 在[0, 1)分钟和[2, 3)分钟内各接到2次呼叫的概率；
3. [0, 3)分钟内接到5次呼叫，且第5次呼叫在[2, 3)分钟接到的概率。

解

1. **3分钟内接到5次呼叫的概率**

$$P\{X(3)=5\}=\frac{(3\times 2)^5}{5!}e^{-3\times 2}=\frac{324}{5}e^{-6}$$

2. **在[0, 1)分钟和[2, 3)分钟内各接到2次呼叫的概率**

$$\begin{aligned}&P\{X(1)-X(0)=2, X(3)-X(2)=2\}\\&=P\{X(1)-X(0)=2\}P\{X(3)-X(2)=2\}\\&=(P\{X(1)-X(0)=2\})^2=(P\{X(1)=2\})^2\\&=(\frac{(1\times 2)^2}{2!}e^{-1\times 2})^2=4e^{-4}\end{aligned}$$

解（续）

3. 3分钟内接到5次呼叫，且第5次呼叫在第3分钟到来的概率

$$P\{X(3)=5, X(3)-X(2)\ge 1\}$$

$$=P\{X(3)=5\}\cdot P\{X(3)-X(2)\ge 1 \mid X(3)=5\}$$

$$=P\{X(3)=5\}\cdot\left(1-\frac{P\{X(2)=5, X(3)=5\}}{P\{X(3)=5\}}\right)$$

$$=P\{X(3)=5\}\cdot\left(1-\frac{P\{X(2)=5, X(3)-X(2)=0\}}{P\{X(3)=5\}}\right)$$

$$=\frac{(3\times 2)^5}{5!}e^{-3\times 2}\left(1-\frac{\frac{(2\times 2)^5}{5!}e^{-2\times 2}\frac{(1\times 2)^0}{0!}e^{-1\times 2}}{\frac{(3\times 2)^5}{5!}e^{-3\times 2}}\right)$$

$$=\frac{324}{5}e^{-6}\left(1-\frac{2^5}{3^5}\right)=\frac{844}{15}e^{-6}$$

例7

设齐次马氏链{X(n), n=0, 1, 2, 3, …}的状态空间E = {1, 2, 3}，其初始分布和一步状态转移矩阵如下：

$X(0)$	1	2	3
P	0.2	0.3	0.5

$$P=\begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

1. 求P{X(0)=1, X(2)=3}；
2. 求P{X(2)=2}；
3. 论其遍历性；
4. 求平稳分布。

解

根据已知条件可得

$$P(2)=P^2=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{5}{16} & \frac{5}{16} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

1. P{X(0)=1, X(2)=3}

 = P{X(0)=1} P{X(2)=3 | X(0)=1}

 = $p_1(0)p_{13}(2)$=0.2*3/8 = 3/40

解（续）

2. $$P\{X(2)=2\}=\sum_{i=1}^{3}p_i(0)p_{i2}(2)$$

$$=0.2\times\frac{5}{16}+0.3\times\frac{3}{8}+0.5\times\frac{1}{4}=\frac{3}{10}$$

3. **因为P(2)中所有元素均大于0，所以该齐次马氏链是遍历的。**

解（续1）

4. 遍历的齐次马氏链一定存在极限分布，其极限分布就是平稳分布

$$\begin{cases} \Pi = \Pi P \\ \sum_{i=1}^{3} \pi_i = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 \\ \pi_2 = \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{1}{4}\pi_3 \\ \pi_3 = \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{3}{4}\pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \Pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (\frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{1}{2})$$

例8

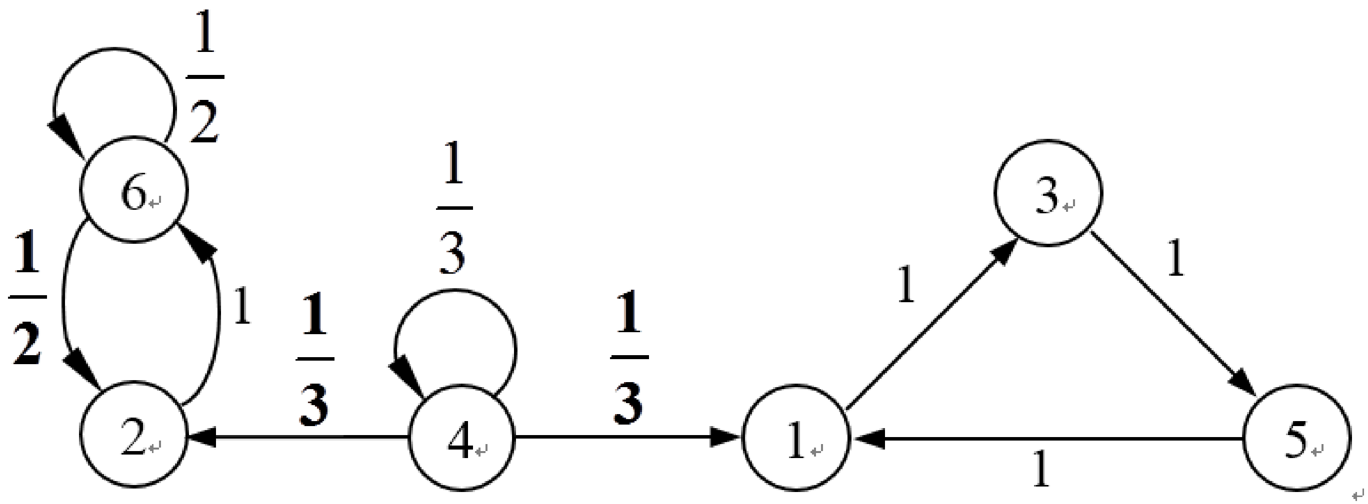
设齐次马氏链{X(n), n=0, 1, 2, 3, …}的状态空间E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}，一步状态转移矩阵如下：

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1. 画出状态转移图；
2. 讨论各状态性质；
3. 分解状态空间。

解

1. 状态转移图：



解（续）

2.　状态性质：

$f_{11}(1)=0$，$f_{11}(2)=0$，$f_{11}(3)=1$，$f_{11}(n)=0$（$n>3$），

$f_{11}=1$，故状态1为常返状态。

而 $\mu_1=\sum_{n=1}^{\infty} n f_{11}(n)=3<+\infty$，

所以状态1为正常返状态。因为$p_{11}(3n)=1>0$（$n>1$)，

所以状态1的周期是3。由于状态1、3、5互通，因此

具有相同的状态性质。

解（续1）

$f_{66}(1)=\frac{1}{2}$，$f_{66}(2)=\frac{1}{2}$，$f_{66}(n)=0$（$n>2$），$f_{66}=1$，故状态6为常返状态。

而 $\mu_6=\sum_{n=1}^{\infty} nf_{66}(n)=\frac{3}{2}<+\infty$，所以状态6为正常返状态。因为$p_{66}>0$，所以状态6是非周期的。由于状态2、6互通，因此具有相同的状态性质。

$f_{44}(1)=\frac{1}{3}$，$f_{44}(n)=0$（$n>1$），$f_{44}<1$，故状态4为非常返状态。

4. 状态空间分解为

$$E=N+C_1+C_2=\{4\}+\{2,6\}+\{1,3,5\}$$

例9

一理发店有理发员2人，供顾客等候的座位有3个；若顾客以泊松流到达，每小时8人；理发时间为负指数分布，每一理发员平均为一人理发需要30分钟。如果顾客到来发现无空座位等候则离去另求服务。试求：

1. 每小时平均损失顾客数；
2. 每小时内平均忙着的理发员数；
3. 顾客排队等待理发的平均时间。

解

由题意，按M/M/c/K混合制排队系统处理，其中c＝2，k＝5，λ＝8（人/小时），μ＝2（人/小时），$\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}=4$

$$p_0=\left[\sum_{j=0}^{c-1}\frac{\rho^j}{j!}+\sum_{j=c}^{K}\frac{\rho^j}{c!c^{j-c}}\right]^{-1}=\frac{1}{125}=0.008$$

$$p_j=\begin{cases}\dfrac{\rho^j}{j!}p_0, & 1\le j\le c-1\\[2ex] \dfrac{\rho^j}{c^{j-c}\cdot c!}p_0, & c\le j\le K\end{cases}$$

$$p_1=\frac{4}{125}\qquad p_2=\frac{8}{125}\qquad p_3=\frac{16}{125}\qquad p_4=\frac{32}{125}\qquad p_5=\frac{64}{125}$$

解(续)

1. 单位时间内平均损失顾客数

$$\overline{\lambda}_e = \lambda p_K = 8 \times \frac{64}{125} = \frac{512}{125}$$

2. 平均忙着的理发员数即为正在被服务的平均顾客数

$$\overline{N}_c = \rho\left(1 - p_k\right) = 4 \times (1 - \frac{64}{125}) = \frac{244}{125}$$

解(续1)

3. **令q_j表示到达且进入系统系统的顾客看到有j个顾客的平稳概率**

$$q_j == \frac{p_{\mathrm{j}}}{1-p_k}, \qquad j = 0,1,2,\cdots,K-1$$

$$q_0 = \frac{1}{61} \quad q_1 = \frac{4}{61} \quad q_2 = \frac{8}{61} \quad q_3 = \frac{16}{61} \quad q_4 = \frac{32}{61}$$

所以，顾客排队等待理发的平均时间

$$\overline{W}_q = \sum_{j=c}^{K-1} \frac{j-c+1}{c\mu} \cdot q_j = \frac{34}{61} \text{（小时）}$$

例10

某货运公司有3辆汽车，2个修理工，假定汽车正常运行时间和修理时间都服从指数分布，每辆车平均30天修理一次，平均修理时间为6天。

求：：

1. 该公司无车可用的概率；
2. 需要修理的汽车的平均数；
3. 每辆汽车等待修理的平均时间；
4. 若再增加1辆汽车备用，此时该公司无车可用的概率。

解

$$p_3 = \frac{3!}{2!\times 2}\times\frac{1}{125}\times\frac{250}{433} = \frac{3}{433}$$

由题意，按M/M/c/m/m系统处理，其中c＝2，m＝3，λ＝$\frac{1}{30}$（辆/天），μ＝$\frac{1}{6}$（辆/天），ρ＝$\frac{\lambda}{\mu}=\frac{1}{5}$，因此

$$p_0 = \left(\sum_{i=0}^{c-1} C_m^i \rho^i + \sum_{i=c}^{m} C_m^i \frac{i!}{c!c^{i-c}}\rho^i\right)^{-1}$$

$$= (1+3\times\frac{1}{5}+3\times\frac{1}{25}+\frac{3!}{2!\times 2}\times\frac{1}{125})^{-1} = \frac{250}{433}$$

$$p_j = \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}p_0 = \begin{cases} C_m^j \rho^j p_0, & j=0,1,2,\cdots,c-1 \\ C_m^j \dfrac{j!}{c!c^{j-c}}\rho^j p_0, & j=c,c+1,\cdots,m \end{cases}$$

$$p_1 = 3\times\frac{1}{5}\times\frac{250}{433} = \frac{150}{433}$$

$$p_2 = 3\times\frac{1}{25}\times\frac{250}{433} = \frac{30}{433}$$

解(续)

1. 该单位无车可用的概率 $p_3=\dfrac{3}{433}$
2. 需要修理的汽车的平均数

$$\overline{N}=\sum_{j=0}^{c-1}\frac{m!\rho^j}{(j-1)!(m-j)!}p_0+\frac{m!}{c!}\sum_{j=c}^{m}\frac{j\rho^j}{(m-j)!c^{j-c}}p_0=\frac{219}{433}\text{（辆）}$$

3. 平均等待队长

$$\overline{N}_q=\sum_{j=c}^{m}(j-c)p_j=p_3=\frac{3}{433}\text{（辆）}$$

每辆汽车等待修理的平均时间

$$\overline{W}_q=\frac{\overline{N}_q}{\lambda(m-\overline{N})}=\frac{1}{12}\text{（天）}$$

解(续1)

4. 由题意，按M/M/c/m+k/m系统处理，其中c＝2，m＝3，k=1，λ＝$\frac{1}{30}$(辆/天)，μ＝$\frac{1}{6}$(辆/天)，ρ＝$\frac{\lambda}{\mu}=\frac{1}{5}$，因此

$$p_0=[\sum_{i=0}^{K-1}\frac{m^i}{i!}\rho^i+\sum_{i=K}^{c-1}\frac{m^K\cdot m!}{i!(m-i+K)!}\rho^i$$

$$+\frac{m^K\cdot m!}{c!}\sum_{i=c}^{K+m}\frac{1}{c^{i-c}(m-i+K)!}\rho^i]^{-1}=\frac{2500}{4549}$$

此时该公司无车可用的概率

$$p_4=\frac{m^K\cdot m!}{(m-j+K)!\cdot c^{j-c}\cdot c!}\rho^j p_0=\frac{3^1\times 3!}{2^{4-2}\times 2!}\times(\frac{1}{5})^4\times\frac{2500}{4549}=\frac{9}{4549}$$

Thank You !

Good Luck !