组合优化理论

第7章 装箱问题

主讲教师：陈安龙

第7章 装箱问题

§1 装箱问题的描述

§2 装箱问题的最优解值下界

§3 装箱问题的近似算法

装箱问题（*Bin Packing*）是一个经典的组合优化问题，有着广泛的应用，在日常生活中也屡见不鲜 .

§1 装箱问题的描述

设有许多具有同样结构和负荷的箱子 B_1，B_2，…其数量足够供所达到目的之用 . 每个箱子的负荷（可为长度、重量 *etc.*）为 C ,今有 n 个负荷为 w_j，$0 < w_j < C$ $j = 1, 2, \ldots, n$ 的物品 J_1，J_2，…，J_n 需要装入箱内.

装箱问题：

是指寻找一种方法，使得能以**最小数量的箱子数**将 J_1，J_2，…，J_n 全部装入箱内.

§1 装箱问题的描述

由于 $w_i < C$，所以 BP 的最优解的箱子数不超过 n .

设 $y_i = \begin{cases} 1 & \text{箱子 } B_i \text{ 被使用} \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$ $i = 1 \sim n;$

$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{物品 } J_j \text{ 放入箱子 } B_i \text{ 中} \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$ $i, j = 1 \sim n.$

则装箱问题的整数线性规划模型为：

$$\min \quad z = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$(BP) \quad s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} w_j x_{ij} \le C y_i \qquad i = 1 \sim n \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 1 \sim n \qquad (2)$$

$$y_i = 0 \ \text{or} \ 1, \quad x_{ij} = 0 \ \text{or} \ 1 \qquad i, j = 1 \sim n.$$

约束条件（1）表示：一旦箱子 B_i 被使用，放入 B_i 的物品总负荷不超过 C ；

约束条件（2）表示：每个物品恰好放入一个箱子中 .

上述装箱问题是这类问题最早被研究的，也是提法上最简单的问题，称为一维装箱问题 . 但 $BP \in NPC.$

装箱问题的其他一些提法：

1、在装箱时，不仅考虑长度，同时考虑重量或面积、体积 *etc* . 即二维、三维、…装箱问题；

2、对每个箱子的负荷限制不是常数 C；而是C_i，$i = 1 \sim n.$

3、物品J_1，J_2，…，J_n 的负荷事先并不知道，来货是随到随装；即 在线（*On-Line*）装箱问题；

4、由于场地的限制，在同一时间只能允许一定数量的箱子停留现场可供使用, *etc* .

BP 的应用举例：

1、下料问题 轧钢厂生产的线材一般为**同一长度**，而用户所需的线材则可能具有各种不同的尺寸，如何根据用户提出的要求，用最少的线材**截出所需的定货**；

2、二维 *BP* 玻璃厂生产出**长宽一定的大平板玻璃**，但用户所需玻璃的长宽可能有许多差异，如何根据用户提出的要求，用最少的平板玻璃**截出所需的定货**；

3、计算机的存贮问题 如要把大小不同的共 **10 *MB*** 的文件拷贝到磁盘中去，而每张磁盘的容量为 **1. 44 *MB***，已知每个文件的字节数不超过 **1.44 *MB***，而且**一个文件不能分成几部分存贮**，如何用最少的磁盘张数完成 .

4、生产流水线的平衡问题 给定流水节拍 ***C***，如何设置最少的工作站，（按一定的紧前约束）沿着流水线将任务分配到各工作站上 . 称为**带附加优先约束的 *BP***.

BP 是容量限制的工厂选址问题的特例之一.

§2 装箱问题的最优解值下界

由于 *BP* 是 *NPC* 问题，所以求解考虑 一是尽可能改进简单的穷举搜索法，减少搜索工作量．如： 分支定界法、启发式（近似）算法．

$$\min \quad z = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$(BP) \quad s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} w_j x_{ij} \le C y_i \qquad i = 1 \sim n \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 1 \sim n \qquad (2)$$

$$y_i = 0 \ \ or \ \ 1, \quad x_{ij} = 0 \ \ or \ \ 1 \qquad i, j = 1 \sim n.$$

是松弛问题的最优解，最优值为：$z_{opt} = \dfrac{1}{C} \sum_{i=1}^{n} w_i$

§2 装箱问题的最优解值下界

***Theorem* 8.1** *BP* 最优值的一个下界为 $L_1 = \left\lceil \frac{1}{C}\sum_{i=1}^{n} w_i \right\rceil$

$\lceil a \rceil$ 表示不小于 a 的最小整数.

***Theorem* 8.2**

对于 *BP* 的任一实例 I,设 a 是任意满足 $w = \min\{w_j \mid w_j \in I\}$

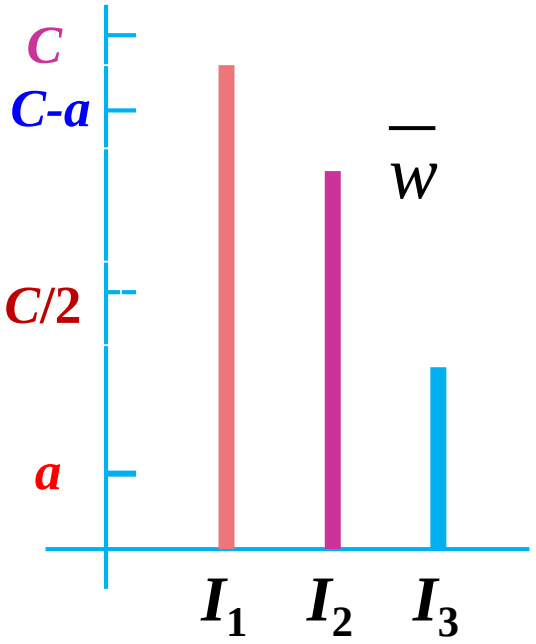
$0 \le a \le \frac{C}{2}, a \le w$ 的整数

记 $I_1 = \{\text{物品}\ \ j \mid w_j > C - a\}$, $I_2 = \left\{\text{物品}\ \ j \mid C - a \ge w_j > \frac{C}{2}\right\}$,

$I_3 = \left\{\text{物品}\ \ j \mid \frac{C}{2} \ge w_j \ge a\right\}$,

则 $L(a) = |I_1| + |I_2| + \max\left\{0, \left\lceil \frac{1}{C}\left(\sum_{j\in I_3} w_j - (|I_2|C - \sum_{j\in I_2} w_j)\right)\right\rceil\right\}$

是最优解的一个下界.



Proof : 仅考虑对 I_1, I_2, I_3 中物品的装箱 .

$\because$ $I_1 \cup I_2$ 中物品的长度大于 $C/2$,

每个物品需单独放入一个箱子,

这就需要 $|I_1|+|I_2|$ 个箱子 .

又 $\because$ I_3 中每个物品长度至少为 a ,

$\therefore$ 它不能与 I_1 中的物品共用箱子, 但可能与 I_2 中的物品共用箱子, 由于放 I_2 中物品的 $|I_2|$ 个箱子的剩余总长度为 $\overline{C} = |I_2|C - \sum_{j \in I_2} w_j$

在最好的情形下, $\overline{C}$ 被 I_3 中的物品全部充满, 故剩下总长度 $\overline{w} = \sum_{j \in I_3} w_j - \overline{C}$ 将另外至少 $\left\lceil \frac{\overline{w}}{C} \right\rceil$ 个附加的箱子 .

$\overline{w}$ 可能为负数

$$\therefore \quad L(a)=|I_1|+|I_2|+\max\left\{0,\left\lceil\frac{1}{C}\left(\sum_{j\in I_3}w_j-\left(|I_2|C-\sum_{j\in I_2}w_j\right)\right)\right\rceil\right\}$$

是最优解的一个下界 .

问 $L(a)\geq L_1=\left\lceil\frac{1}{C}\sum_{i=1}^{n}w_i\right\rceil$?

未必！ 如 $(w_j<a,\ \ j=1\sim n)$

§2 装箱问题的最优解值下界

Corollary 8.1 记 $L_2 = \max\left\{ L(a) \middle| 0 \le a \le \frac{C}{2}, a \text{ 为整数} \right\}$

则 L_2 是装箱问题的最优解的一个下界，且 $L_2 \ge L_1$.

Proof : L_2 为最优解的下界是显然的 .

(若证明 $L(0) \ge L_1$ ，则可得 $L_2 \ge L_1$)

$$L(a) = |I_1| + |I_2| + \max\left\{0, \left\lceil \frac{1}{C}\left(\sum_{j\in I_3} w_j - (|I_2|C - \sum_{j\in I_2} w_j)\right)\right\rceil\right\}$$

当 $a = 0$ 时，$I_1 = \varnothing$， $I_2 \cup I_3$ 是所有物品 .

$$L(0) = 0 + |I_2| + \max\left\{0, \left\lceil \frac{1}{C}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j - |I_2|C\right)\right\rceil\right\}$$

$$= |I_2| + \max\{0, L_1 - |I_2|\} = \max\{|I_2|, L_1\} \ge L_1$$

$\therefore$ $L_2 \ge L(0) \ge L_1$

§3 装箱问题的近似算法

一、NF (Next Fit) 算法

设物品 J_1，J_2,…，J_n 的长度分别为 w_1，w_2,…，w_n 箱子 B_1，B_2，…的长均为 C，按物品给定的顺序装箱 .

先将 J_1 放入 B_1, 如果 $w_1 + w_2 \le C$ 则将 J_2 放入 B_1 …

如果 $w_1 + w_2 + \cdots + w_j \le C$ 而 $w_1 + w_2 + \cdots + w_j + w_{j+1} > C$

则 B_1 已放入 J_1，J_2,…，J_j，将其关闭，将 J_{j+1} 放入 B_2.

同法进行，直到所有物品装完为止 . 计算复杂性为 $O(n)$.

特点： 1、按物品**给定的顺序**装箱；

2、**关闭原则** .

对当前要装的物品 J_i 只关心具有最大下标的已使用过的箱子 B_j 能否装得下？

能. 则 J_i 放入 B_j；否. 关闭 B_j，J_i 放入新箱子 B_{j+1}.

§3 装箱问题的近似算法

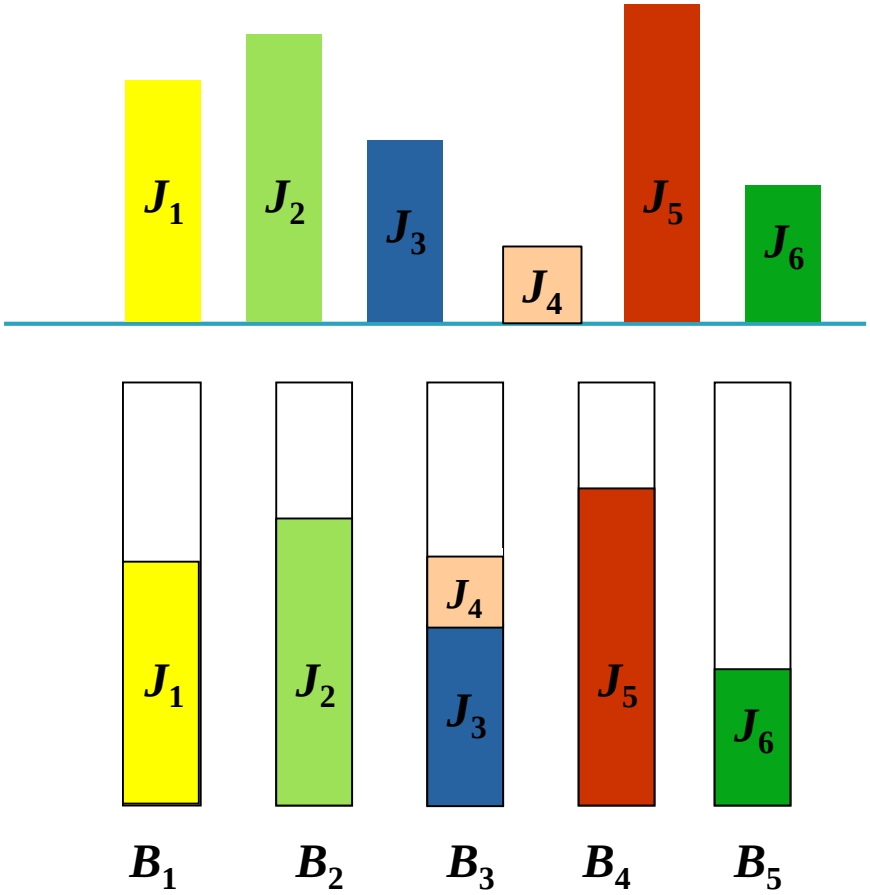
物品	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6
w_j	6	7	4	2	8	3

Example 1 $I : C = 10$

Solution :

首先，将 J_1 放入 B_1;

由于 J_2 在 B_1 中放不下，所以关闭 B_1，将 J_2 放入 B_2，J_3 在 B_2 中放不下(不考虑 B_1 是否能装)，所以关闭 B_2 将 J_3 放入 B_3，…



∴ 解为: $x_{11} = x_{22} = x_{33} = x_{34} = x_{45} = x_{56} = 1$ 其余为零，

Theorem 8.3 $\dfrac{z_{NF}(I)}{z_{opt}(I)} \le 2$

Proof : 设 I 为任一实例，$z_{opt}(I) = k$. (要证$z_{NF}(I) \le 2k$)

显然，由 $k = z_{opt}(I) \ge \dfrac{1}{C}\sum_{i=1}^{n} w_i$ 得 $\sum_{i=1}^{n} w_i \le Ck$

反证 如果 $z_{NF}(I) > 2k$， 则 对任意 $i = 1, 2, \ldots, k$ 由于起用第 $2i$ 个箱子是因为**第 $2i$ -1 个箱子放不下第$2i$ 个箱子中第一个物品**,因此这两个箱子中物品的总长度大于 C，所以前 $2k$ 个箱子中物品的总长度大于 Ck .

这与 $\sum_{i=1}^{n} w_i \le Ck$ 矛盾 . $\therefore \dfrac{z_{NF}(I)}{z_{opt}(I)} \le 2$.

§3 装箱问题的近似算法

$I:C=10$

二、FF (First Fit) 算法

物品	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6
w_j	6	7	4	2	8	3

用 NF 算法装箱，当放入 J_3 时，仅看 B_2, 是否能放入，因 B_1 已关闭，但事实上，B_1 此时是能放得下 J_3 的 .

设物品 J_1，J_2,…，J_n 的长度分别为 w_1，w_2,…，w_n 箱子 B_1，B_2，…的长均为 C，按物品给定的顺序装箱 .

先将 J_1 放入 B_1，若 $w_1+w_2\le C$，则 J_2 放入 B_1，否则，J_2 放入 B_2；若 J_2 已放入 B_2，对于 J_3 则依次检查 B_1、B_2，若 B_1 能放得下，则 J_3 放入 B_1，否则查看 B_2，若 B_2 能放得下，则 J_3 放入 B_2，否则启用 B_3, J_3 放入 B_3.

一般地，$J_1,\ldots,J_j$ 已放入 $B_1,\ldots,B_i$ 箱子，对于 J_{j+1}，则依次检查 B_1，$B_2,\ldots,B_i$，将 J_{j+1} 放入首先找到的能放得下的箱子，如果都放不下，则启用箱子 B_{i+1}，将 J_{j+1} 放入 B_{i+1}，如此继续，直到所有物品装完为止.

特点：1、按物品给定的顺序装箱；

2、对于每个物品 J_j 总是放在能容纳它的具有最小标号的箱子.

计算复杂性为 $O(n\log n)$.

§3 装箱问题的近似算法

***Theorem* 8.4** $\dfrac{z_{FF}(I)}{z_{opt}(I)} \le \dfrac{7}{4}$.

***Theorem* 8.5**

对任意实例 I，$z_{FF}(I) \le \dfrac{17}{10} z_{opt}(I) + 1$

而且存在 $z_{opt}(I)$ 任意大的实例 I，使 $z_{FF}(I) \ge \dfrac{17}{10}(z_{opt}(I) - 1)$

因而 $R_{FF}^{\infty} = \dfrac{17}{10}$.

物品	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6
w_j	6	7	4	2	8	3

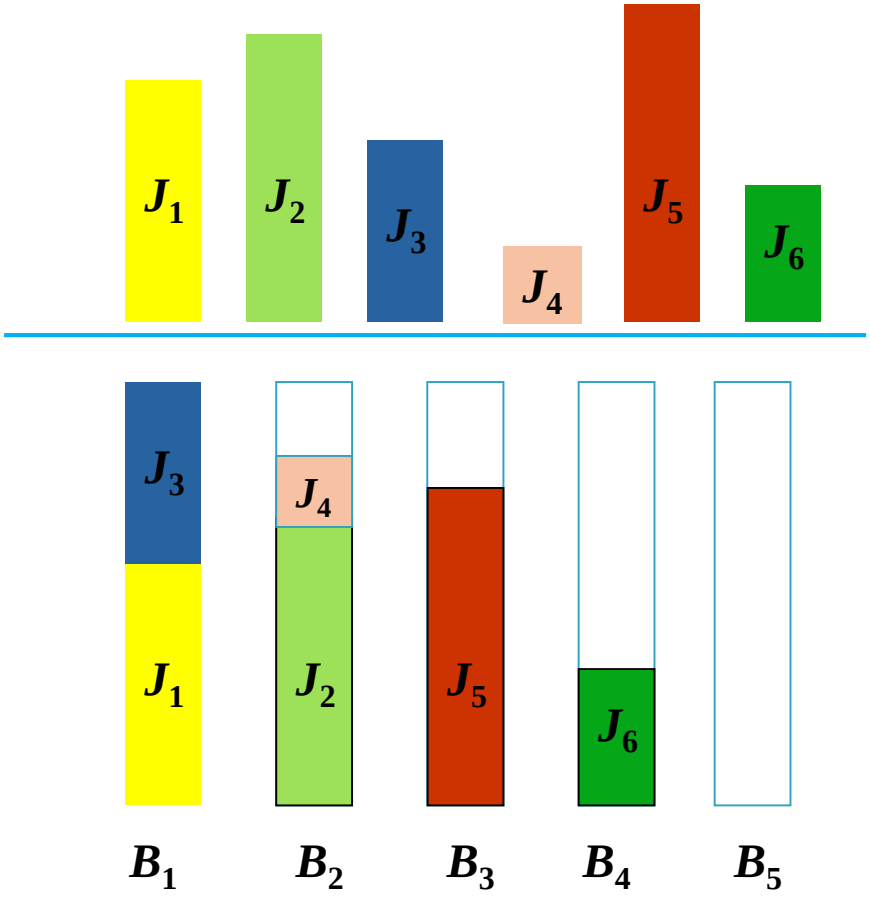
Example 2 $I : C = 10$

Solution :

首先，将 J_1 放入 B_1;

由于 J_2 在 B_1 中放不下，所以将 J_2 放入 B_2，

对于 J_3，先检查 B_1 是否能容纳下，能．所以将 J_3 放入 B_1，…



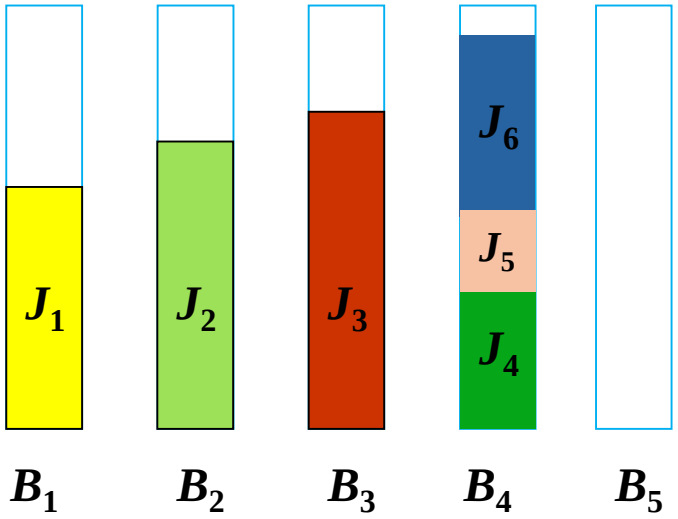
∴ **解为：**

$x_{11} = x_{22} = x_{13} = x_{24} = x_{35} = x_{46} = 1$ 其余为零，$z_{FF}(I) = 4.$

物品	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6
w_j	6	7	8	3	2	4

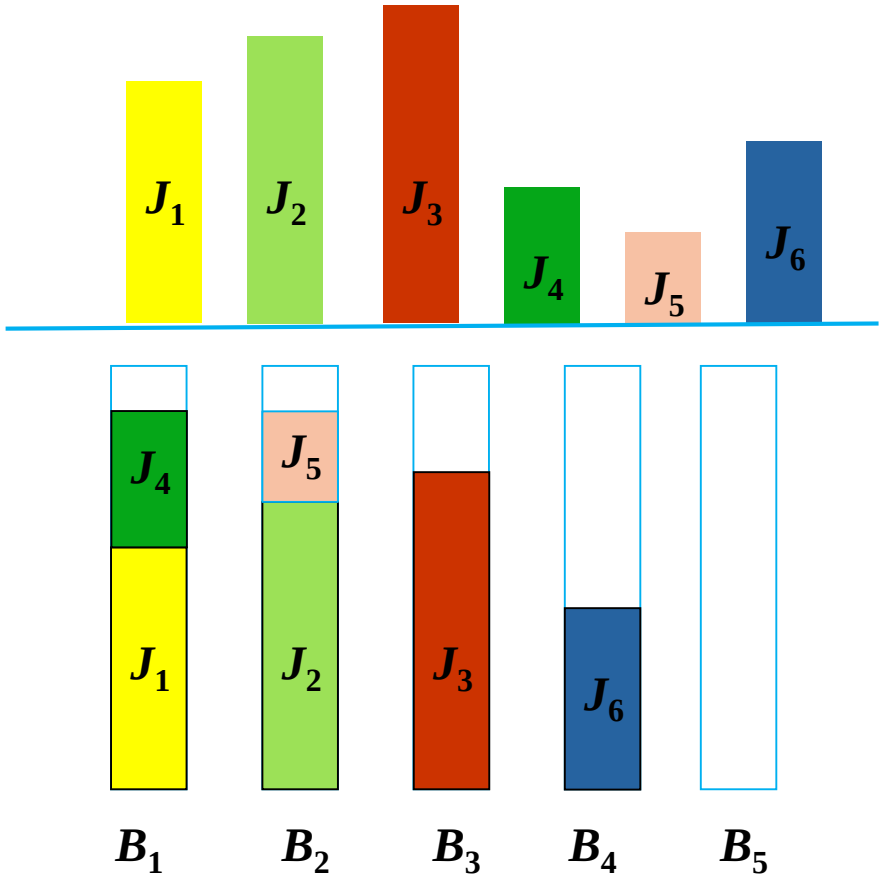
Example 3 $I : C = 10$

Solution :



用 *NF* 算法 $z_{NF}(I) = 4$

用 *FF* 算法 $z_{FF}(I) = 4$



用 *FF* 算法装箱，当放入 J_4 时，B_1 能容纳 J_4 就放入 B_1，而事实上，**放入 B_2 更好**.

三、BF (Best Fit) 算法

与 FF 算法相似，按物品给定的顺序装箱，区别在于对于每个物品 J_j 是放在一个使得 J_j 放入之后，B_i 所剩余长度为最小者 .

即在处理 J_j 时，若 B_1，B_2,…，B_i 非空，而 B_{i+1} 尚未启用，设 B_1，B_2,…，B_i 所余的长度为 $\overline{w}_1, \overline{w}_2, \cdots, \overline{w}_i$，若 $w_j > \max\limits_{1\le k\le i} \overline{w}_k$ 则将 J_j 放入 B_{i+1} 内；

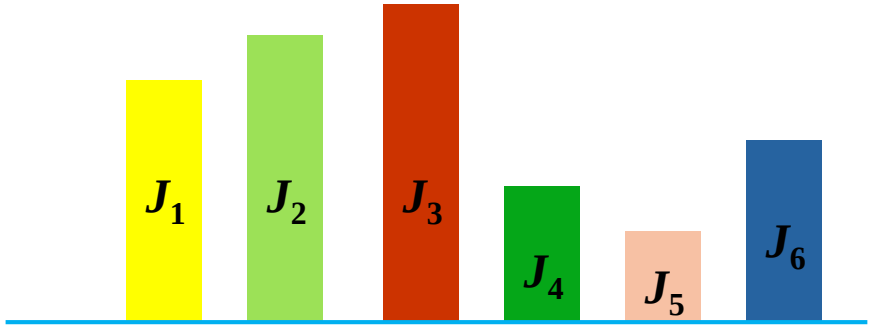
否则，从 $w_j \le \overline{w}_k$ 的 B_k 中，选取 一个 B_l $(1 \le l \le i)$

使得 $\overline{w}_l - w_j = \min\limits_{\overline{w}_k \ge w_j} (\overline{w}_k - w_j)$ 为最小者 .

BF 算法的绝对性能比、计算复杂性与 FF 算法相同 .

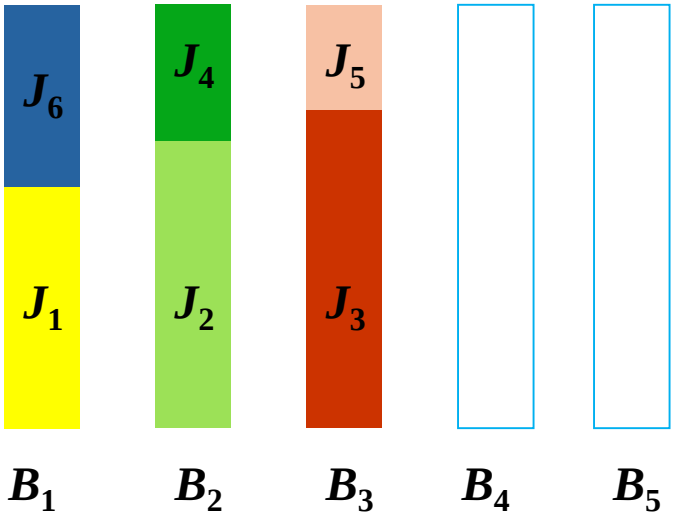
Example 4 $I:C=10$

物品	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6
w_j	6	7	8	3	2	4



Solution :

用 *BF* 算法



$\because \quad L_1 = \left\lceil \frac{1}{10}\sum_{j=1}^{6} w_j \right\rceil = 3$

解为:

而 $z_{BF}(I) = L_1$, $\therefore$ 此为最优解.

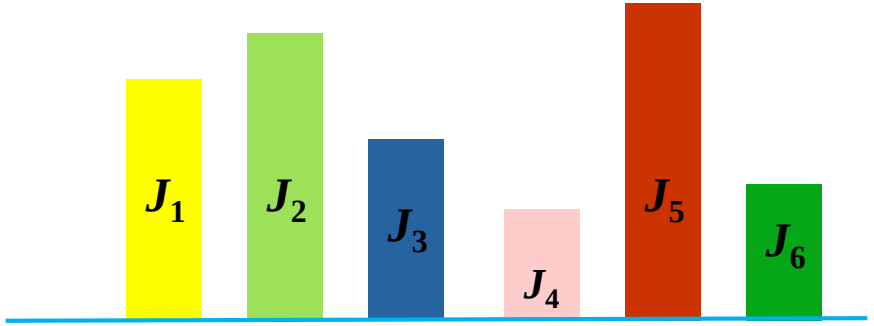
$x_{11} = x_{22} = x_{33} = x_{24} = x_{35} = x_{16} = 1$ 其余为零, $z_{BF}(I) = 3.$

四、FFD (First Fit Decreasing) 算法

FFD 算法是先将物品按长度从大到小排序，然后用 FF 算法对物品装箱．该算法的计算复杂性为 $O(n\log n)$.

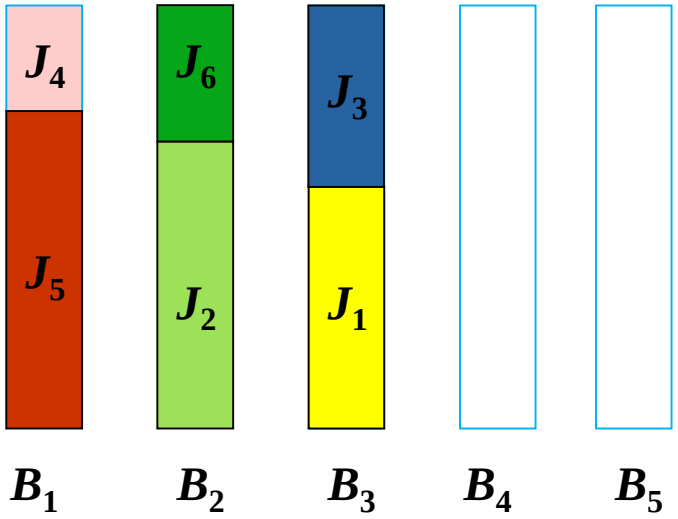
Example 5 $I: C = 10$

物品	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6
w_j	6	7	4	2	8	3



Solution : 已知：$z_{FF}(I) = 4$

物品	J_5	J_2	J_1	J_3	J_6	J_4
w_j	8	7	6	4	3	2



$z_{FFD}(I) = 3$ 是最优的．

NFD 算法？ BFD 算法？

定理 8.6 $R_{FFD}(I)=\frac{3}{2}$. $R_{FFD}=\max\left\{\frac{z_{FFD}(I)}{z_{opt}(I)}\,|\,\forall I\right\}$

Proof: 显然对任意实例 I，有 $z_{FFD}(I)\geq z_{opt}(I)$

记 $z_{FFD}(I)=l$ $z_{opt}(I)=l^*$

首先证明两个结论：

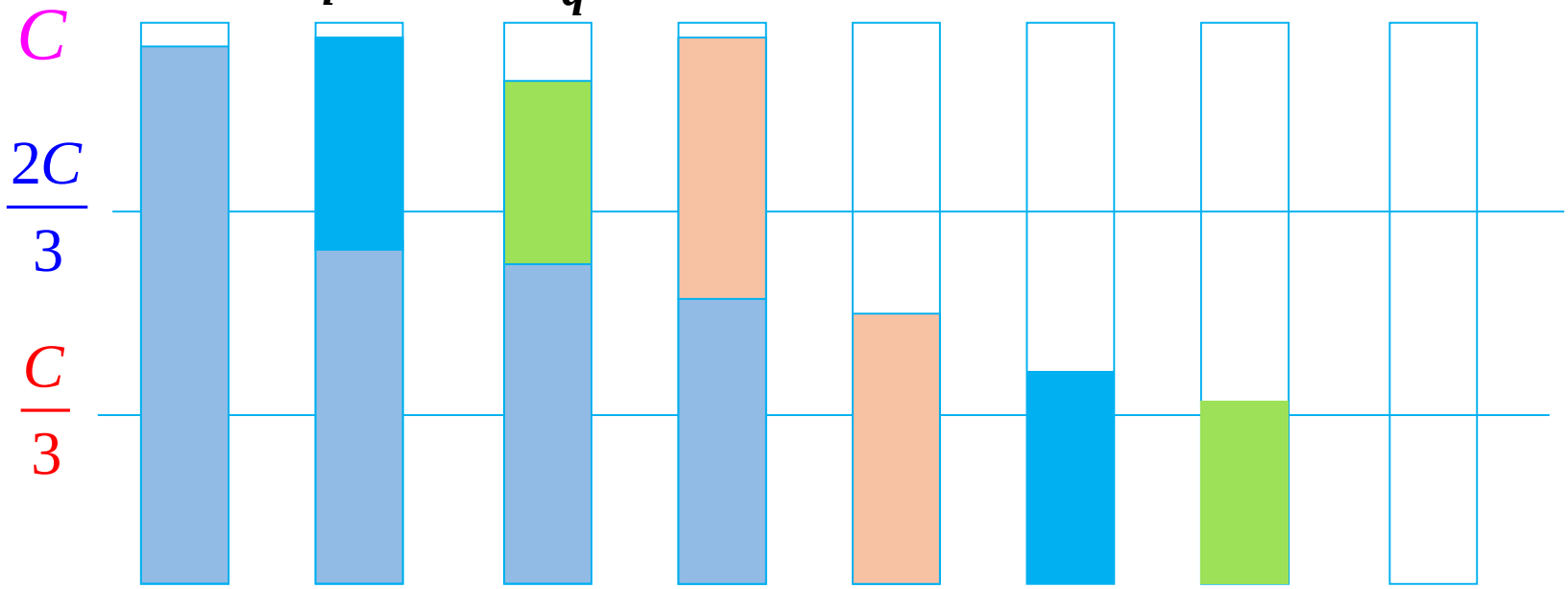
(1) *FFD* 算法所用的第 $l^*+1,l^*+2,...,l$ 个箱子中,每个的物品长度不超过 $\frac{C}{3}$;

记 w_i 是放入第 l^*+1个箱子中的**第一个物品**,只需证 $w_i\leq\frac{C}{3}$

用反证法，若不然，则有 $w_1,...,w_i>\frac{C}{3}$ ，因此 *FFD* 算法中前 l^*个箱子中, 每个箱子至多有两个物品 .

可证明存在 $k \geq 0$ 使前 k 个恰各含一个物品，后 $l^* - k$ 个箱子各含两个物品.

因为若不然，则存在两个箱子 $B_p, B_q, p < q$, 使 B_p 有两个物品 $w_{t_1}, w_{t_2} (t_2 > t_1)$，$B_q$ 有一个物品 w_{t_3} 因物品已从大到小排列，故 $w_{t_1} \geq w_{t_3}, w_{t_2} \geq w_i$, 因此 $C \geq w_{t_1} + w_{t_2} \geq w_{t_3} + w_i$.从而可以将 w_i 放入 B_q 中，矛盾.



因为 FFD 未将 $w_{k+1},\cdots,\ w_i$ 放入前 k 个箱子，说明其中任一个箱子已放不下，故在最优解中也至少有 k 个箱子不含 $w_{k+1},\cdots,\ w_i$ 中任一个物品．假设就是前 k 个箱子，因此在最优解中，$w_{k+1},\cdots,\ w_{i-1}$ 也会两两放入第 $k+1,...,l^*$ 个箱子中，且因为这些物品长度大于 $\frac{C}{3}$，所以每个箱子中只有两个物品，且 $w_i > \frac{C}{3}$ 已放不下．但最优解中 w_i 必须放入前 l^* 个箱子中，矛盾．故 $w_i \le \frac{C}{3}$

(2) FFD 算法放入第 $l^*+1,...,l$ 个箱子中物品数不超过 l^*-1

$\because\ \sum_{i=1}^{n} w_i \le l^* C,$ 而如果至少有 l^* 个物品放入第 $l^*+1,...,l$ 个箱子中，记前 l^* 个物品的长度为 $a_1,\ldots,a_{l^*}$．

记 FFD 算法中前 l^* 个箱子中每个箱子物品总长为 b_j，$j=1\sim l^*$ 显然，对任意 $j=1\sim l^*$，$b_j+a_j>C$ 否则长为 a_j 的物品可放入第 j 个箱子中，因此

$$\sum_{j=1}^{n} w_j \geq \sum_{j=1}^{l^*} b_j + \sum_{j=1}^{l^*} a_j = \sum_{j=1}^{l^*} (b_j + a_j) > l^* C$$

矛盾 .

所以 (2) 结论成立 .

由(1)、(2) 知 FFD 算法比最优算法多用的箱子是用来放至多 l^*-1 个物品，而每个物品长不超过 $\frac{C}{3}$，因此

$$\frac{z_{FFD}(I)}{z_{opt}(I)} \le \frac{z_{opt}(I)+\left\lceil \frac{z_{opt}(I)-1}{3} \right\rceil}{z_{opt}(I)} \le 1+\frac{z_{opt}(I)+1}{3z_{opt}(I)} = \frac{4}{3}+\frac{1}{3z_{opt}(I)}$$

因为 如果 $z_{opt}(I)=1$，则 $z_{FFD}(I)=1$，故不妨设 $z_{opt}(I)\ge 2$

因此 $$\frac{z_{FFD}(I)}{z_{opt}(I)} \le \frac{4}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{2}$$

考虑实例 I：物品集长度为 $\left\{\frac{C}{2},\frac{C}{3},\frac{C}{3},\frac{C}{3},\frac{C}{4},\frac{C}{4}\right\}$，C 为箱长.

$z_{opt}(I)=2$, $z_{FFD}(I)=3$ 说明 $\frac{3}{2}$ 是不可改进的 .□

比较 *NF* 算法、*FF (BF)* 算法、*FFD* 算法，它们的近似程度一个比一个好，但这并不是说 *NF*、*FF(BF)* 就失去了使用价值 .

1、*FF(BF)*、*FFD* 算法都要将所有物品全部装好后 , 所有箱子才能一起运走，而 *NF* 算法无此限制，很适合装箱场地小的情形；

2、*FFD* 算法要求所有物品全部到达后才开始装箱，而 *NF*、*FF(BF)* 算法在给某一物品装箱时，可以不知道下一个物品的长度如何，适合在线装箱 .

存储罐注液问题

某化工厂有 9 个不同大小的存储罐，有一些已经装某液体．现新到一批液体化工原料需要存储，这些液体不能混合存储，它们分别是 1200 m^3 苯，700 m^3 丁醇，1000 m^3 丙醇，450 m^3 苯乙醇和1200 m^3 四氢呋喃．下表列出每个存储罐的属性(单位: m^3), 问应如何将新到的液体原料装罐，才能使保留未用的存储罐个数最多?

存储罐编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
容 量	500	400	400	600	600	900	800	800	800
当前内容	-	苯	-	-	-	-	四氢呋喃	-	-
体 积		100					300		

***Solution*：** 分别记苯、丁醇、丙醇、苯乙醇、四氢呋喃为第1，2，3，4，5种液体．显然，新到液体应尽可能装入已存有此种液体的罐中．

所以余下液体为：900 m^3 苯，700 m^3 丁醇，1000m^3 丙醇，450 m^3 乙醇和700 m^3 四氢呋喃．剩余空罐为1，3，4，5，6，8，9．由于不允许混合，每种液体至少需要1个空罐．

令 $$x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{第 } i \text{ 种液体装入第 } j \text{ 个存储罐}\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

记第 j 个空罐的容量为 c_j，$j = 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9,$

第 i 种剩余液体的体积为 l_i，$i = 1, 2, 3, 4, 5$.

存储罐编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
容 量	500	400	400	600	600	900	800	800	800
当前内容	-	苯	-	-	-	-	四氢呋喃	-	-
体 积		100					300		

整数规划模型：

$$\sum_{i=1}^{5} x_{ij} = 1$$ 表示第j个空罐被使用

$$\min \quad z = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 2、7}}^{9} \sum_{i=1}^{5} x_{ij}$$

$$s.t. \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 2、7}}^{9} c_j x_{ij} \geq l_i \quad i = 1 \sim 5$$

每种液体的体积不能超过装这些液体的罐子的总容量

$$\sum_{i=1}^{5} x_{ij} \leq 1。\ j = 1,3,4,5,6,8,9$$

每个罐子至多装一种液体

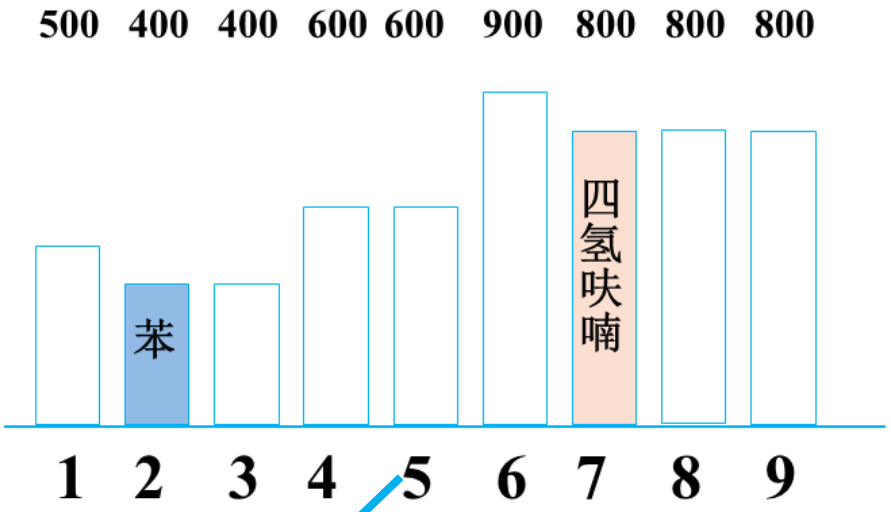
$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad i = 1 \sim 5;$$

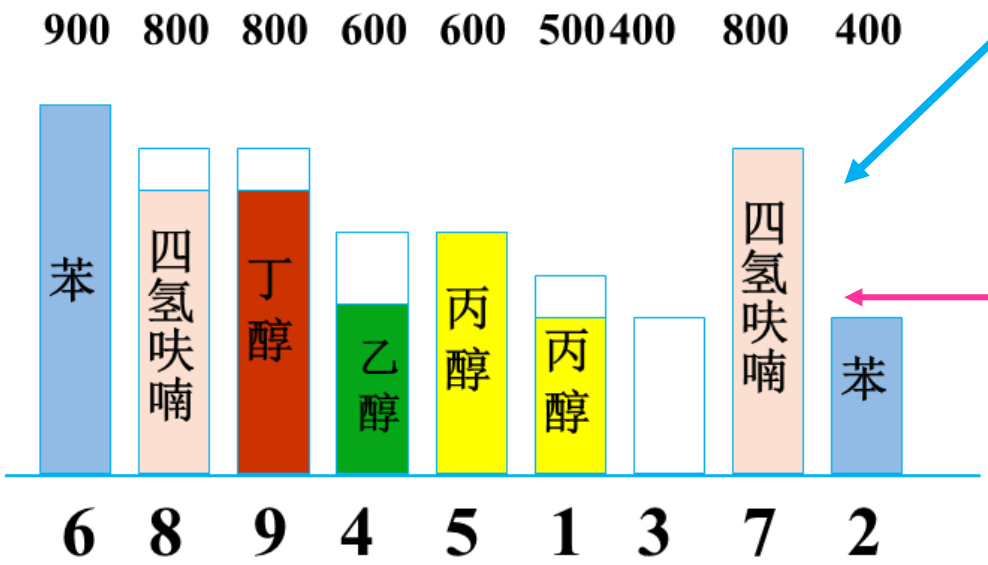
$$j = 1,3,4,5,6,8,9$$

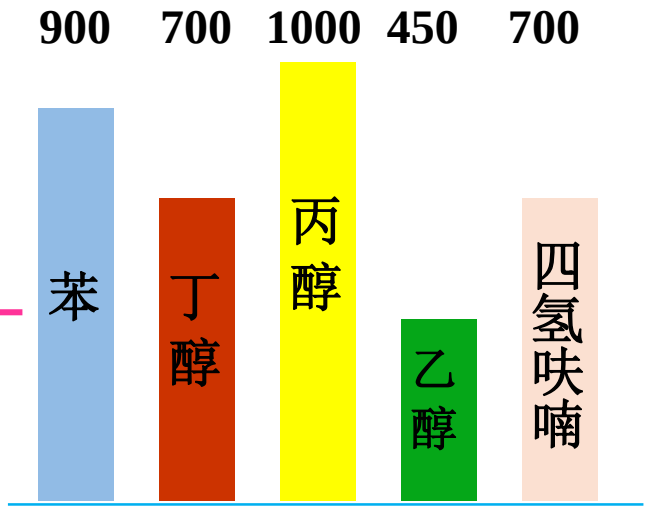
将 l_i、c_j 代入，可用 *Lindo* 、*Lingo* 等软件求解 .

当问题的数据很大时，*IP* 的计算复杂性很高，可考虑采用近似算法或启发式算法求解 .

如利用 ***FFD*** 算法思想：对每一种液体，将空罐按容积非增序排列；若需 k 个罐子，则装入相邻的k 个罐子，且这 k 个空罐中最大容积空罐序号最大 .

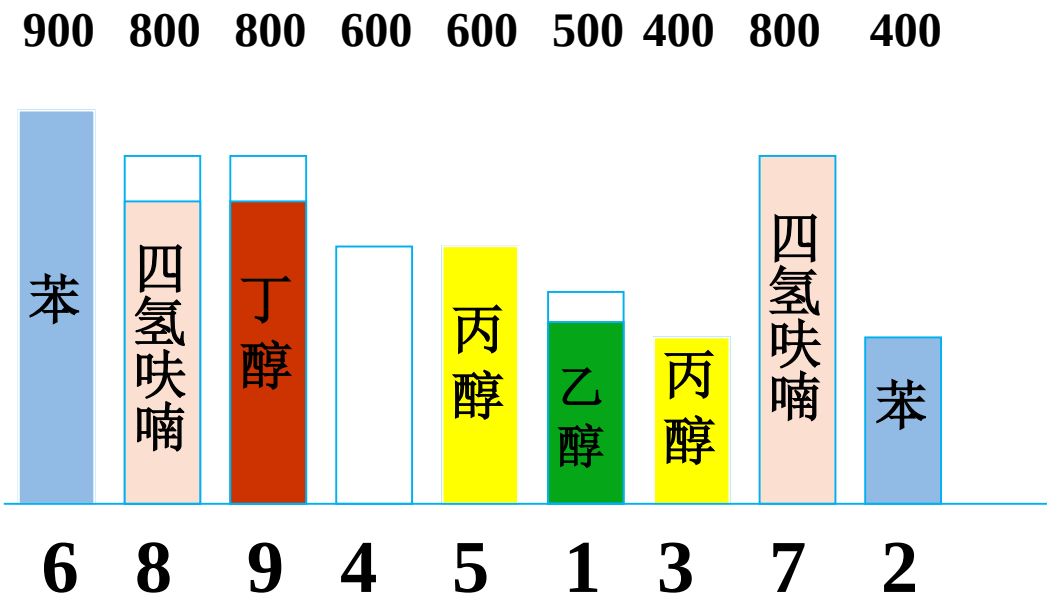


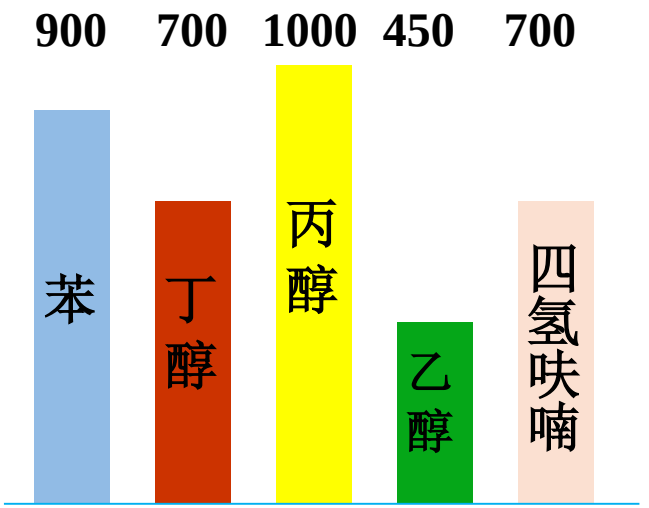




如果结合BF算法，且只需要一个空罐的液体先装，效果会好一些.

后一种装法的空罐容积大，这是因为只需一个空罐的液体先装时，这部分装罐实现了最优．需要两个及以上空罐时，寻找最优算法的计算量就会变大．





本章结束