随机过程与排队论

信息与软件工程学院

顾小丰

Email：guxf@uestc.edu.cn

2020年9月27日星期日

上一讲内容回顾

➢ 马尔可夫过程

- 齐次马氏链的性质
- 初始分布、绝对分布、极限分布
- 遍历性
- 平稳性

本讲主要内容

➢ 齐次马氏链状态的分类

- 互通 首达
- 常返与非常返
- 正常返与零常返
- 状态空间分解
- 不可约马氏链
- 状态的周期性

§ 3.3 齐次马氏链状态的分类

一、互通 首达

如果存在某一个$n \geq 0$，使得$p_{ij}(n)>0$，$i, j \in E$，则称从状态i可到达状态j，记为$i \to j$；否则称状态i不能到达状态j，记为$i \nrightarrow j$，此时对一切n，均有$p_{ij}(n)=0$。

如果$i \to j$且$j \to i$，则称状态i和j互通，或称相通，记为$i \leftrightarrow j$。

容易证明，互通关系具有以下三个性质：

(1)自反性：$i \leftrightarrow i$；

(2)对称性：若$i \leftrightarrow j$则$j \leftrightarrow i$；

(3)传递性：若$i \leftrightarrow j$且$j \leftrightarrow k$，则$i \leftrightarrow k$。

首达

从状态i出发经过n步首次到达状态j的时刻

$$T_{ij}=\min\{n: X(m)=i, X(m+n)=j, n\in N\}$$

称为**首达时刻**。

首达时刻是一个随机变量，它的取值是从状态i出发，使得$X(n)=j$的最小正整数n。

自状态i出发经过n步首次到达状态j的概率

$$f_{ij}(n)=P\{T_{ij}=n|X(m)=i\}$$

$$=P\{X(m+n)=j, X(m+k)\neq j, 1\leq k<n|X(m)=i\}$$

称为**首达概率**。

自状态i出发**迟早(最终)到达**状态j的概率定义为

$$f_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ij}(n)=\sum_{n=1}^{\infty}P\{T_{ij}=n|X(m)=i\}=P\{T_{ij}<+\infty\}$$

返回

当j＝i时

- T_{ii}：表示从状态i出发首次返回i的时刻；
- $f_{ii}(n)$：表示从状态i出发经过n步首次返回i的概率；
- f_{ii}：表示从状态i出发迟早返回i的概率。

$$\mu_{ij}=E(T_{ij})=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{ij}(n)$$

称为自状态i出发首次到达j的平均时间(平均步数)；

$$\mu_i=\mu_{ii}=E(T_{ii})=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{ii}(n)$$

称为自状态i出发首次到达i的平均返回时间(平均返回步数)；

定理1

对任意i, j∈E及n≥1，有

$$p_{ij}(n)=\sum_{m=1}^{n}f_{ij}(m)p_{jj}(n-m)$$

证明 设系统从状态i出发经n步到达状态j，则$T_{ij}\le n$，

$$p_{ij}(n)=P\{X(n)=j|X(0)=i\}=P\{\bigcup_{m=1}^{n}(T_{ij}=m),X(n)=j|X(0)=i\}$$

$$=\sum_{m=1}^{n}P\{T_{ij}=m,X(n)=j|X(0)=i\}$$

$$=\sum_{m=1}^{n}P\{T_{ij}=m|X(0)=i\}\cdot P\{X(n)=j|X(0)=i,T_{ij}=m\}$$

$$=\sum_{m=1}^{n}P\{T_{ij}=m|X(0)=i\}\cdot P\{X(n)=j|X(0)=i,$$

$$X(1)\neq j,X(2)\neq j,\cdots,X(m-1)\neq j,X(m)=j\}$$

$$=\sum_{m=1}^{n}P\{T_{ij}=m|X(0)=i\}\cdot P\{X(n)=j|X(m)=j\}$$

$$=\sum_{m=1}^{n}f_{ij}(m)p_{jj}(n-m)$$

定理2

$$f_{ij}>0 \iff i\to j$$

证明 $\Rightarrow$) 设$f_{ij}>0$，因为 $f_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ij}(n)$，所以至少有一个$n\geq1$，使得$f_{ij}(n)>0$，由定理1得

$$p_{ij}(n)=\sum_{m=1}^{n}f_{ij}(m)p_{jj}(n-m)\geq f_{ij}(n)p_{jj}(0)=f_{ij}(n)>0$$

故$i\to j$。

$\Leftarrow$) 设$i\to j$，则存在$n\geq1$，使得$p_{ij}(n)>0$，由定理1得

$$p_{ij}(n)=\sum_{m=1}^{n}f_{ij}(m)p_{jj}(n-m)>0,$$

从而$f_{ij}(1)$, $f_{ij}(2)$, …, $f_{ij}(n)$中至少有一个大于0，所以

$$f_{ij}=\sum_{m=1}^{\infty}f_{ij}(m)>0$$

推论

$i \leftrightarrow j \Leftrightarrow f_{ij} > 0$ 且 $f_{ji} > 0$

二、常返

如果$f_{ii}=1$，则称状态i是常返状态；

如果$f_{ii}<1$，则称状态i是非常返状态，或瞬时状态。

判别常返状态的准则：

1) 状态j常返的充分必要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n)=+\infty$ ；

2) 状态j非常返的充分必要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(n)<+\infty$ ；

3) 若状态j是非常返的，则 $\lim_{n\to\infty} p_{jj}(n)=0$ 。

返回的次数

定义随机变量

$$Y(n)=\begin{cases}1, & X(n)=j\\ 0, & X(n)\neq j\end{cases}$$

则随机变量$Y=\sum_{n=1}^{\infty}Y(n)$表示质点到达状态j的次数，有

$$E[Y\mid X(0)=j]=E[\sum_{n=1}^{\infty}Y(n)\mid X(0)=j]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}E[Y(n)\mid X(0)=j]=\sum_{n=1}^{\infty}P\{X(n)=j\mid X(0)=j\}=\sum_{n=1}^{\infty}p_{jj}(n)$$

由此可知，$\sum_{n=1}^{\infty}p_{jj}(n)$表示由j出发再返回j的平均次数。

- 当j是常返状态时，返回j的次数是无穷多次；
- 当j是非常返状态时，返回j的次数只能是有限多次。

正常返与零常返

设i是常返状态，$f_{ii}=1$，

平均返回时间有限

1) 如果 $\mu_i=\sum_{n=1}^{\infty} nf_{ii}(n)<+\infty$ ，称状态i是一个正常返状态；

2) 如果 $\mu_i=\sum_{n=1}^{\infty} nf_{ii}(n)=+\infty$ ，称状态i是一个零常返状态，或消极常返状态。

平均返回时间无限

定理

1) 设i是常返状态，则i是零常返的充分必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}(n)=0$；如果j也是零常返状态，则 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}(n)=0$。

2) 如果i↔j，则它们同为常返或非常返；如果它们均为常返时，则它们同为正常返或零常返。

归纳

1) i是非常返 $\Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) < +\infty$，此时 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}(n)=0$;

2) i是零常返 $\Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = +\infty$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}(n)=0$;

3) i是正常返 $\Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = +\infty$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}(n)\neq 0$。

三、状态空间分解

设C是状态空间E的一个子集，若C外的任一状态不可能从C内的任一状态到达，即对任意的$i\in C$，$j\notin C$，总有$p_{ij}(n)=0$，则称C为一个闭集。

重要结论：

1) 整个状态空间E是最大的闭集；
2) $p_{ii}=1$的状态i称为吸收状态。任何一个吸收状态构成最小的单点闭集。
3) 所有常返状态构成一个闭集；
4) 状态空间E必可分解为

这里的“＋”即为集合的并“∪”且两两互不相容

$$E=N+C_1+C_2+\ldots+C_k+\ldots$$

其中N为非常返状态集合，C_1，C_2，…，C_k，…是互不相交且不可细分的常返闭集。

不可约马氏链

一个马氏链，如果除了整个状态空间E构成闭集外，不可能再分解出较小的闭集来，则称此马氏链为不可约马氏链。

结论：

1) 马氏链为不可约马氏链的充分必要条件是任何两个状态都相通；
2) 一个不可约马氏链，或者没有非常返状态，或者没有常返状态。
3) 不可约马氏链是常返的充分必要条件是方程

$$y_i = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} y_j, \qquad i \in E$$

没有非零的有界解。

四、有限马尔可夫链

状态空间E是有限集合的马氏链称为有限马氏链。

有限马氏链具有如下特点：

1) 所有非常返状态所组成的集合不可能是闭集；

2) 没有零常返状态；

3) 必有正常返状态；

4) 状态空间E必可分解为

$$E = N + C_1 + C_2 + \dots + C_k$$

其中，N为非常返状态集合，$C_1, C_2, \dots, C_k$是互不相交且不可细分的常返闭集。

五、状态的周期性

称$d = GCD\{ n：p_{ii}(n)>0 \}$为状态i的周期。

这里，GCD表示最大公约数。

如果i有周期$d>1$，则只有$n=d, 2d, \ldots, kd$(k为正整数)时，$p_{ii}(n)>0$；否则，当n不能被d整除时，$p_{ii}(n)=0$。

如果不存在大于1的d，则称状态i是非周期的，记为d=1。

对于不可约马氏链，若$p_{ii}>0$，则此马氏链是非周期的。

结论：

1) 如果$i \leftrightarrow j$，则状态i和j或者有相同的周期，或者都是非周期的；
2) 如果C是一个常返闭集，则C中的每一个状态或者都是非周期的，或者都是同周期的；
3) 如果马氏链是不可约常返链，那么只要有一个是周期为d($d>1$)的状态，则状态空间E都是周期为d的状态。

六、极限定理

1) 如果j是一个非周期常返状态，则 $\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n)=\frac{1}{\mu_j}f_{ij}$

2) 如果马氏链是不可约非周期常返链，则 $\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n)=\frac{1}{\mu_j}$

其中$\mu_j=E(T_{jj})$。

由此定理知：

1) 不可约非周期正常返状态的齐次马氏链是遍历马氏链。即

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n)=\pi_j>0,\qquad i,j\in E$$

且满足：i)$\pi_j=1/\mu_j$；ii)极限分布$\{\pi_j, j\in E\}$是马氏链唯一的平稳分布，

且 $\lim_{n\to\infty} p_j(n)=\pi_j$，$j\in E$ 。即绝对分布的极限是平稳分布.

2) 不可约非周期常返链是遍历链的充分必要条件是存在平稳分布$\{1/\mu_j, j\in E\}$，即极限分布。

3) 不可约非周期有限马氏链必存在平稳分布，且平稳分布就是极限分布。

例1 两个吸收壁的随机游动

状态空间 E＝{1, 2, 3, 4}

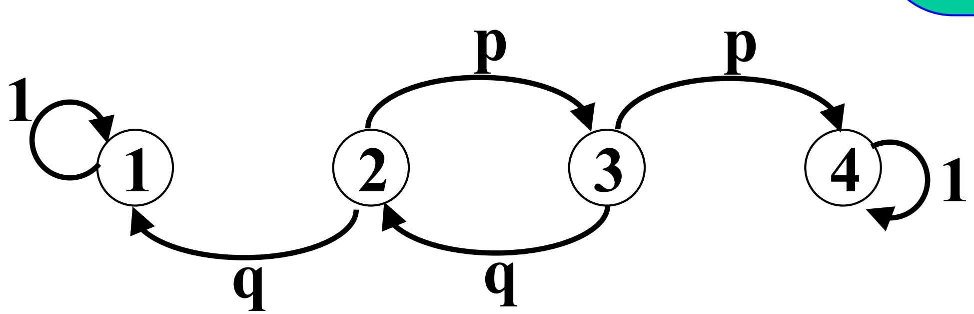
状态转移矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$0 < p < 1$$
$$p + q = 1$$

状态转移图

以状态为结点，以状态转移概率为有向边的权值得到的赋权有向图。



例1(续)

$p_{11}=1$，$f_{11}(1)=1$，　$f_{11}(n)=0\ (n>1)$，$f_{11}=1$，　$\mu_1=1$，故状态1为吸收状态、正常返状态；

$p_{44}=1$，$f_{44}(1)=1$，　$f_{44}(n)=0\ (n>1)$，$f_{44}=1$，　$\mu_4=1$，故状态4为吸收状态、正常返状态；

$p_{22}=0$, $f_{22}(1)=0$, $f_{22}(2)=pq$, $f_{22}(n)=0\ (n>2)$, $f_{22}=pq$，故状态2为非常返状态。状态2和3互通，$2\leftrightarrow3$，具有相同的状态性质，即状态3也为非常返状态。从而

$N=\{2, 3\}$为非常返集；$C_1=\{1\}$、$C_2=\{4\}$都为正常返集。状态空间分解为

$$E=N+C_1+C_2$$

即　$$E=\{1, 2, 3, 4\}=\{2, 3\}+\{1\}+\{4\}$$

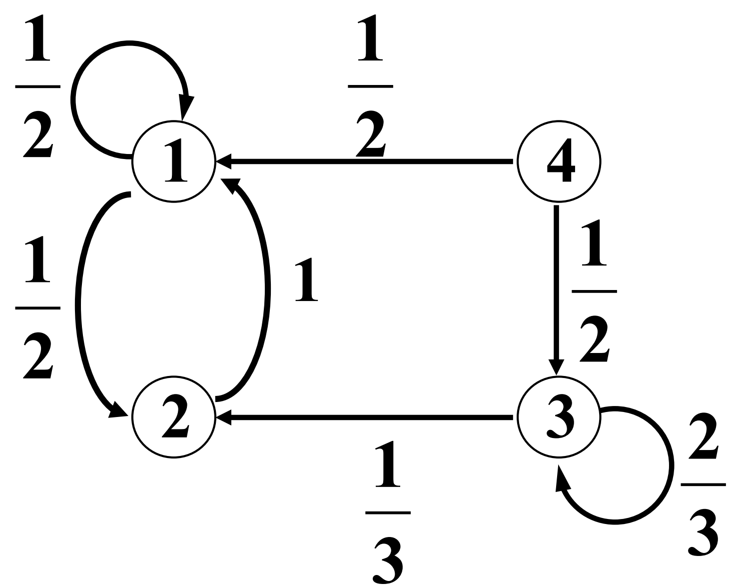
例2

设齐次马氏链的状态空间E＝{1, 2, 3, 4}，

转移矩阵

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

状态转移图



例2(续1)

由图可知，对一切n≥1，$f_{44}(n)=0$，从而

$$f_{44}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{44}(n)<1$$，故状态4为非常返状态；

$f_{33}(1)=\frac{2}{3}$，$f_{33}(n)=0\ (n>1)$，从而 $f_{33}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{33}(n)=\frac{2}{3}<1$，

故状态3非常返状态；

$$f_{11}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{11}(n)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

$$\mu_{11}=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{11}(n)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}<+\infty$$

$$f_{22}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{22}(n)=0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots=1$$

$$\mu_2=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{22}(n)=1\times0+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{2^2}+\cdots+n\times\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots=3<+\infty$$

例2(续2)

非周期正常返状态

故状态1和2都是正常返状态，又d＝1，故都是遍历态。

状态空间分解为

$$E = N + C$$

其中N＝{3, 4}为非常返集；C＝{1, 2}为非周期的正常返闭集。

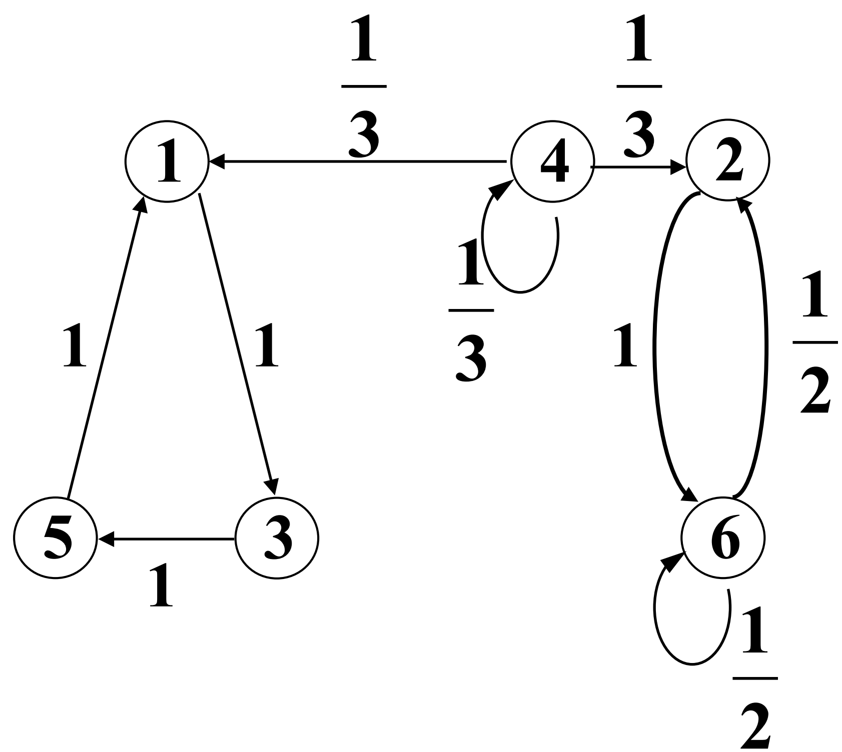
例3

设齐次马氏链的状态空间E＝{1, 2, 3, 4, 5, 6}，

转移矩阵

$$
P=\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}
\end{pmatrix}
$$

状态转移图



例3(续1)

因为$f_{11}(3)=1$，$f_{11}(n)=0$（$n\neq3$），$f_{11}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{11}(n)=1,$

$\mu_1=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{11}(n)=3<+\infty,$ 故状态1为正常返状态，且周期为3.

$1\leftrightarrow3\leftrightarrow5$，从而状态3和5与状态1有相同的状态性质，由此可知，$C_1=\{1, 3, 5\}$是周期为3的正常返闭集。

$$f_{22}(1)=0, f_{22}(2)=\frac{1}{2}, f_{22}(3)=\frac{1}{2^2},\cdots, f_{22}(n)=\frac{1}{2^{n-1}}，(n\neq3)$$

$$f_{22}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{22}(n)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

$$\mu_2=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{22}(n)=\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot\frac{1}{2^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\frac{1}{2^{n-1}}-1=\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2}-1=3<+\infty$$

例3(续2)

故状态2为正常返状态。

$f_{66}(1)>0$，故状态6为非周期状态。

$2\leftrightarrow 6$，从而状态2与状态6有相同的状态性质，它们都是非周期、正常返、遍历状态，故$C_2=\{2, 6\}$是非周期、正常返、遍历闭集。

$$f_{44}(1)=\frac{1}{3}, f_{44}(n)=0(n\geq 2), f_{44}=\sum_{n=1}^{\infty} f_{44}(n)=\frac{1}{3}<1$$

故状态4为非常返状态。由于$f_{44}(1)>0$，故状态4为非周期状态。$N=\{4\}$为非周期非常返集。

该齐次马氏链的状态空间分解为

$$E=N+C_1+C_2$$

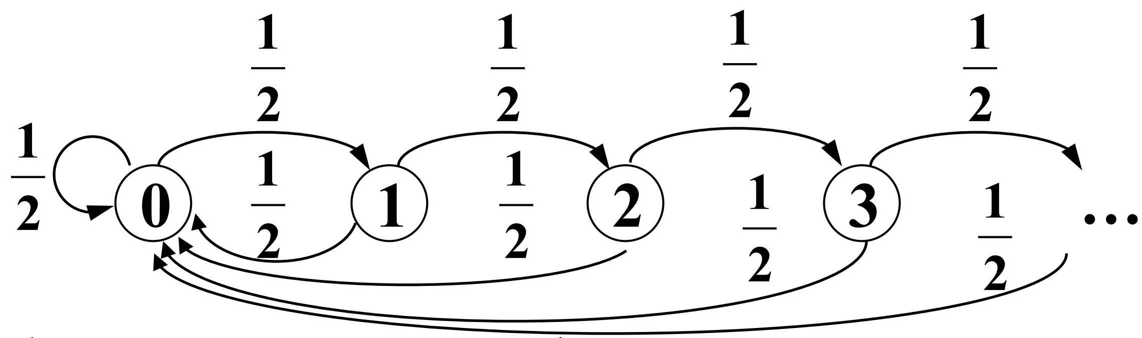
其中$N=\{4\}$为非常返集；$C_1=\{1, 3, 5\}$为周期为3的正常返闭集；$C_2=\{2, 6\}$为非周期、正常返遍历的闭集。

例4

设齐次马氏链的状态空间E＝{0, 1, 2, …}，转移概率为

$$p_{i,i+1}=\frac{1}{2},p_{i0}=\frac{1}{2},i\in E$$

状态转移图



转移矩阵

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

例4(续)

对状态0

$$f_{00}(1)=\frac{1}{2}, f_{00}(2)=\frac{1}{2^2}, \cdots, f_{00}(n)=\frac{1}{2^n}, \cdots$$

$$f_{00}=\sum_{n=1}^{\infty} f_{00}(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$$

$$\mu_0=\sum_{n=1}^{\infty} n f_{00}(n)=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2}=2<+\infty$$

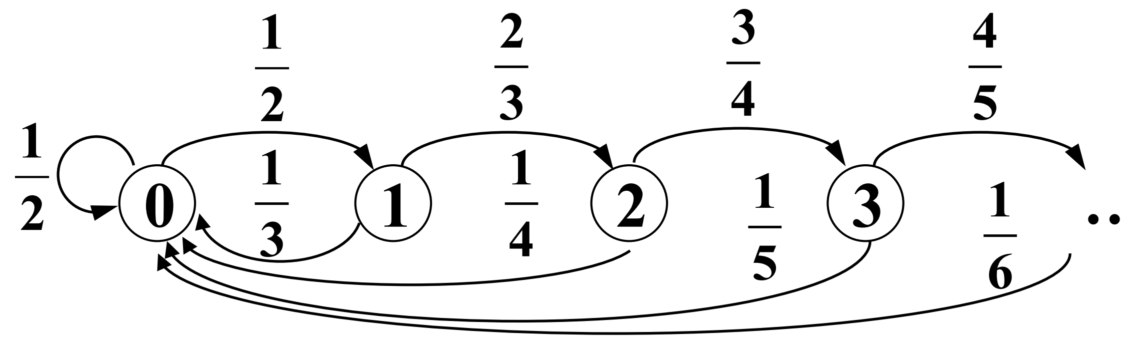
$$p_{00}(1)=p_{00}=\frac{1}{2}>0$$

故状态0为非周期、正常返、遍历状态。又因$p_{i0}=\frac{1}{2}$, $i\in E=\{0, 1, 2, \ldots\}$，从而状态i（i=0, 1, 2, …）与状态0互通，故状态i=1, 2, 3, …与状态0有相同的状态性质，都是非周期、正常返、遍历状态。因此该马氏链为不可约遍历的齐次马氏链。所有状态均为非周期、正常返、遍历状态。

例5

设齐次马氏链的状态空间E＝{0, 1, 2, …}，转移概率为 $p_{00}=\frac{1}{2}, p_{01}=\frac{1}{2}, \quad p_{i,0}=\frac{1}{i+2}, p_{i,i+1}=\frac{i+1}{i+2}, i>0$

状态转移图



转移矩阵 $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \cdots \\ \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$

例5(续)

对状态0

$$f_{00}(1)=\frac{1}{2},\qquad f_{00}(2)=\frac{1}{2\times 3},\qquad f_{00}(3)=\frac{1}{2\times 3\times 4},\quad \cdots\ ,$$

$$f_{00}(n)=\left(\prod_{k=1}^{n+1}k\right)^{-1},\ \cdots$$

$$f_{00}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{00}(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n+1}k\right)^{-1}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$$

故状态0为非常返状态。又因状态i（i = 0, 1, 2, …）与状态0互通，故状态i = 1, 2, 3, …与状态0有相同的状态性质，都是非常返状态。

本讲主要内容

➢ 齐次马氏链状态的分类

- 互通 首达
- 常返与非常返
- 正常返与零常返
- 状态空间分解
- 不可约马氏链
- 状态的周期性

下一讲内容预告

- 齐次马氏链状态的分类
- 连续参数马尔可夫链
  - 转移概率函数、转移矩阵
  - 连续参数齐次马氏链
  - 初始分布、绝对分布、遍历性、平稳分布
  - 转移概率函数的性质
  - 状态转移速度矩阵

习 题 四

P152—154

23.

23. 设齐次马氏链$\{X(n),n=0,1,2,\cdots\}$的状态空间$E=\{1,2,3,4\}$，状态转移矩阵

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 画出状态转移图； (2) 讨论各状态性质； (3) 分解状态空间.