

# 组合优化理论

主讲教师：陈安龙

# 第9章 最大流问题

- ◆ 最大流问题的应用背景
- ◆ 对应用问题抽象建模
- ◆ 容量网络流的基本概念
- ◆ 最大流问题的数学描述
- ◆ 最大流的数学特性
- ◆ **Ford -Fulkerson**算法

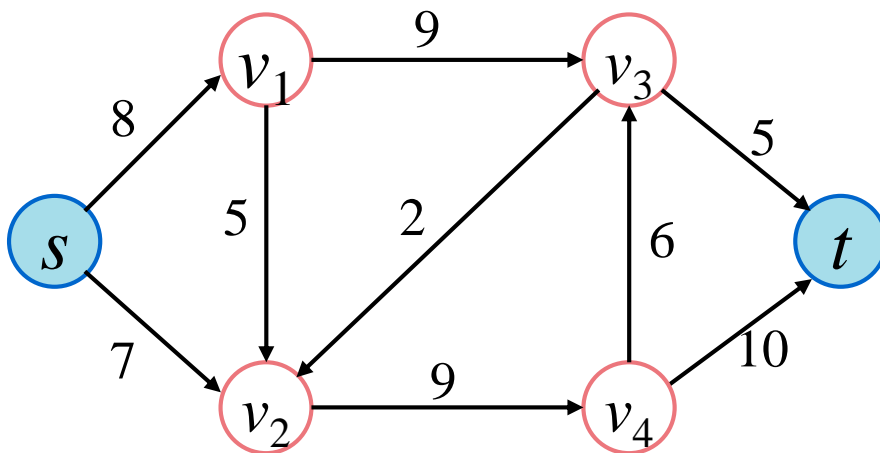
# 应用背景

- ◆ 在一个输油管网中，有生产石油的油井、储存石油的油库、转运石油的中间泵站，同时，还有各种口径不同的输油管。当输油管网建好后，单位时间内最多可把多少石油从油井输送到油库？具体采用什么样的实施方案？

分析：就输油管网问题，可用顶点表示油井、油库和中间泵站，用有向边表示输油管，用有向边上的权表示单位时间沿相应的输油管可以输送石油的最大数量（容量）。

# 问题的抽象

- ◆ 如果我们把图看做输油管道网， $s$  为起点， $t$  为终点， $v_1, v_2, v_3, v_4$  为中转站，边上的数表示该管道的最大输油能力，问应该如何安排各管道输油量，才能使从  $s$  到  $t$  的总输油量最大？



# 网络流的基本概念

抽象为带权有向图  $D = (V, A, C)$

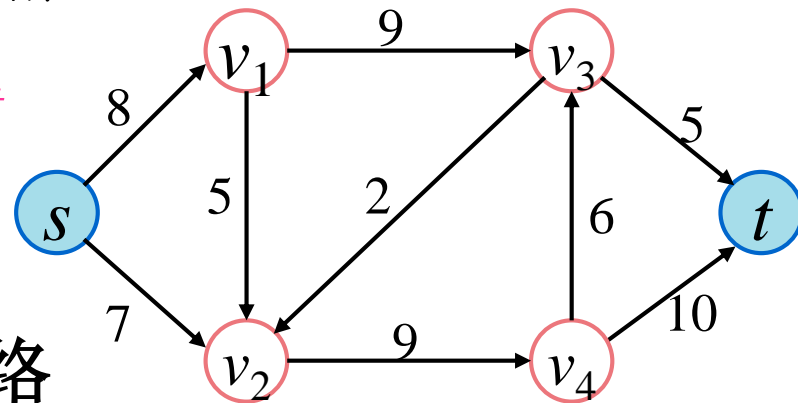
容量：D的每条弧 $(v_i, v_j)$ 有非负数 $C_{i,j}$

发点（源）：一个入度为0的起点  $s$

收点（汇）：一个出度为0的点  $t$

中间点：其余点

称网络  $D = (V, A, C)$  为容量网络



# 可行流

对D 中任一弧 $(v_i, v_j)$ 都给定一个实际流量 $f_{ij}$   
流的集合 $f = \{f_{ij}\}$

运输问题中，每个运输方案就是一个流

满足下面条件的流：

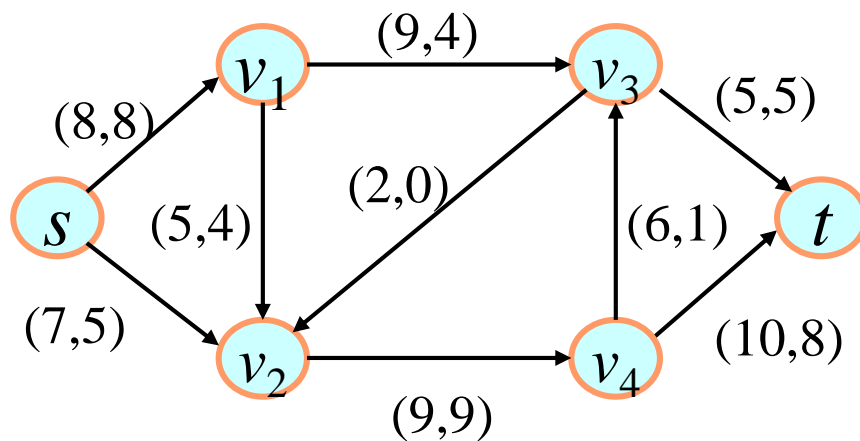
(1)容量限制条件  $0 \leq f_{ij} \leq c_{ij}$

(2)中间点平衡条件  $\sum_k f_{ki} = \sum_j f_{ij}$

中间节点  
输入量=输出量

用 $v(f)$ 表示网络中从 $s \rightarrow t$ 的流量  $v(f) = \sum_j f_{sj} = \sum_j f_{jt}$

如果网络的流量为0的可行流： $f = \{0\}$



# 容量网络的最大流问题

在容量网络中，寻求一个流  $\{f_{ij}\}$  使其流量  $v(f)$  最大

且满足

$$0 \leq f_{ij} \leq c_{ij} \quad (v_i, v_j) \in A$$
$$\sum f_{ij} - \sum f_{ji} = \begin{cases} v(f) & (v_i = s) \\ 0 & (v_i \neq s, t) \\ -v(f) & (v_i = t) \end{cases}$$

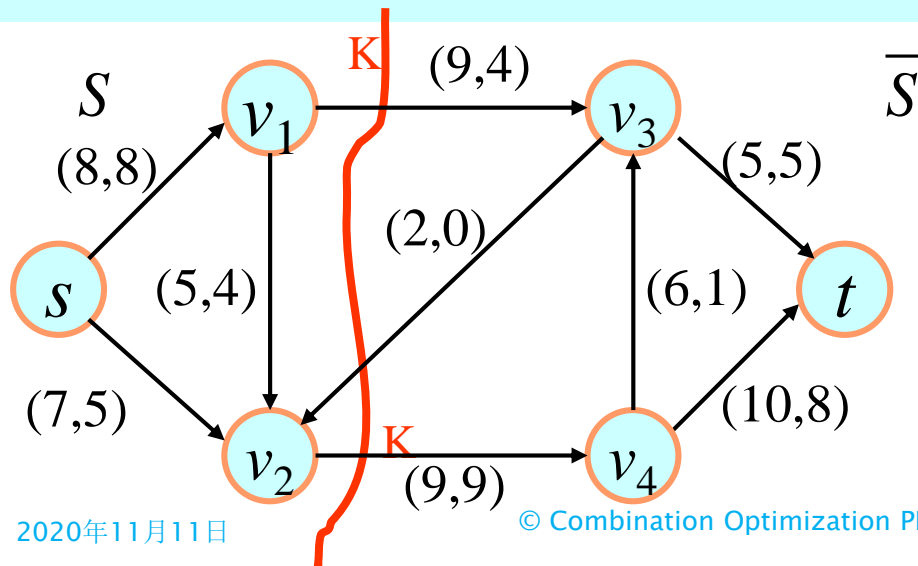
此为一个特殊的规划问题，将会看到利用图的特点，解决这个问题较为直观方便。

# 截集和截集的容量

设有网络 $D=\{V,A,C\}$ ，点 $s$ 与点 $t$ 分别是集合 $V$ 中的源点和汇点，若点集 $V$ 被剖分成两个非空集合

$S, \bar{S} = V \setminus S$ ，且满足  $s \in S, t \in \bar{S}$ ，使以 $S$ 中的点为始点， $\bar{S}$ 中的点为终点的 $A$ 中弧的集合称为截集，记为  $(S, \bar{S})$

截集的容量是截集中各弧的容量之和，用 $c(V_1, \bar{V}_1)$ 表示



$$S = \{s, v_1, v_2\}, \bar{S} = \{v_3, v_4, t\}$$

$$\text{截集: } \{(v_1, v_3), (v_2, v_4)\}$$

$$\text{截集的容量为 } 9+9=18$$



**定理1:** 设 $f$ 是容量网络 $D$ 的任意一个可行流,  $(S, \bar{S})$ 是 $D$ 的任意一个截, 则:

$$v(f) = \sum_{(v_i, v_j) \in (S, \bar{S})} f_{ij} - \sum_{(v_j, v_i) \in (\bar{S}, S)} f_{ji}$$

**定理2:** 设 $f$ 是容量网络 $D$ 的任意一个可行流, 则:

$$\sum_{v_j \in N^+(t)} f_{tj} - \sum_{v_j \in N^-(s)} f_{jt} = -v(f)$$

**定理3:** 设 $f$ 是容量网络 $D$ 的任意一个可行流,  $(S, \bar{S})$ 是 $D$ 的任意一个截, 则:  $v(f) \leq c(S, \bar{S})$

**定理4:** 设  $f$  容量网络  $D$  的任意一个可行流,  $(S, \bar{S})$  是  $D$  的任意一个截, 如果  $v(f) = c(S, \bar{S})$  则  $f$  是  $D$  的最大流,  $(S, \bar{S})$  是  $D$  中容量最小的截。

**定理5: (最大流最小截定理)** 任何带发点和汇点的容量网络中都存在最大流和最小截, 并且最大流的流值等于最小截的容量。

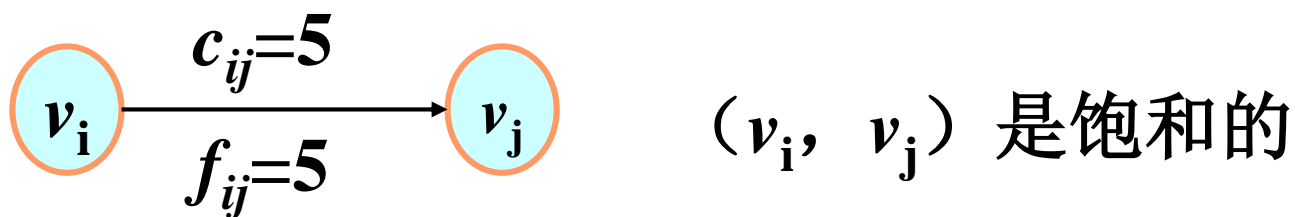
# 最小截集的意义

- ◆ 网络从发点到收点的各通路中，由容量决定其通过能力，**最小截集**则是这此路中的**咽喉部分**，或者叫**瓶颈**，其容量最小，它决定了整个网络的最大通过能力。要提高整个网络的运输能力，必须首先改造这个咽喉部份的通过能力。

# 可行流的分类

设  $f=\{f_{ij}\}$  是网络  $D=(V,A,C)$  的一个可行流

1、如果  $f_{ij}=c_{ij}$ ，该弧是饱和弧；



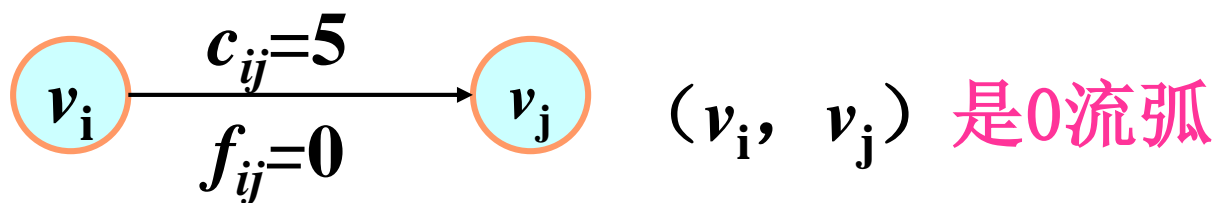
2、如果  $0 \leq f_{ij} < c_{ij}$ ，该弧是非饱和弧；



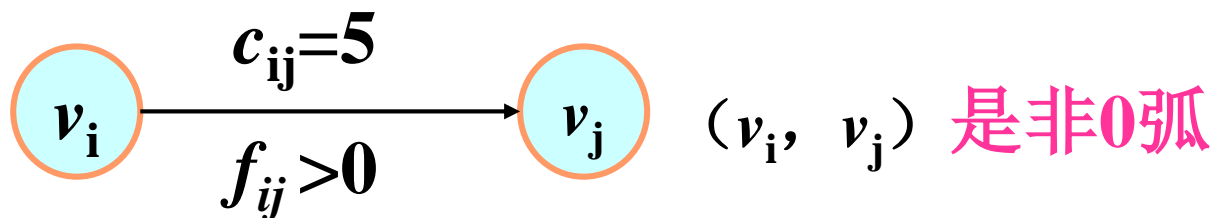
## 可行流的分类（续）

设  $f = \{f_{ij}\}$  是网络  $D=(V,A,C)$  的一个可行流

3、如果  $f_{ij}=0$ ，该弧是0流弧；



4、如果  $f_{ij}>0$ ，该弧是非0弧；



# 增广路径---增广链

◆在最大流问题中，研究的是有向网络图。但在求最大流的方法中，则要使用无向网络中的路径(链)。

网络图 $D$ 中，若 $\mu$ 为 $v_s v_1 v_2 \cdots v_k v_t$ 的一条链，给 $\mu$ 定向为从 $v_s$ 到 $v_t$ ，

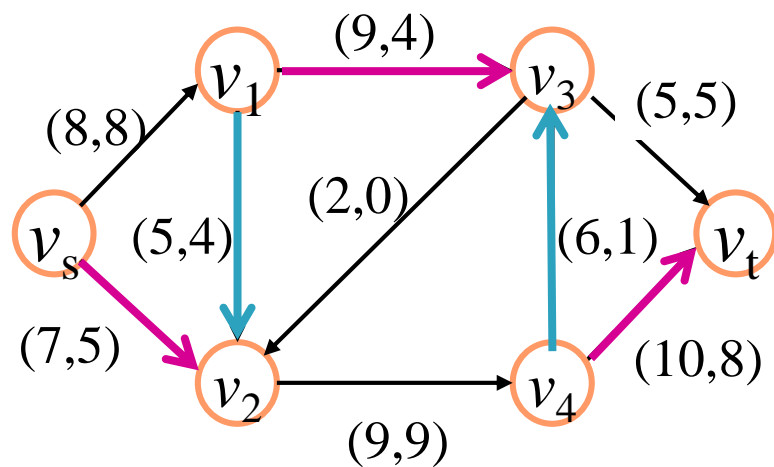
(1)前向弧集 $\mu^+$ ：  $v_i$ 到 $v_j$ 与 $\mu$ 同向；

(2)后向弧集 $\mu^-$ ：  $v_i$ 到 $v_j$ 与 $\mu$ 反向。

$$\mu = v_s v_2 v_1 v_3 v_4 v_t$$

$$\mu^+ = \{(v_s, v_2), (v_1, v_3), (v_4, v_t)\}$$

$$\mu^- = \{(v_1, v_2), (v_4, v_3)\}$$

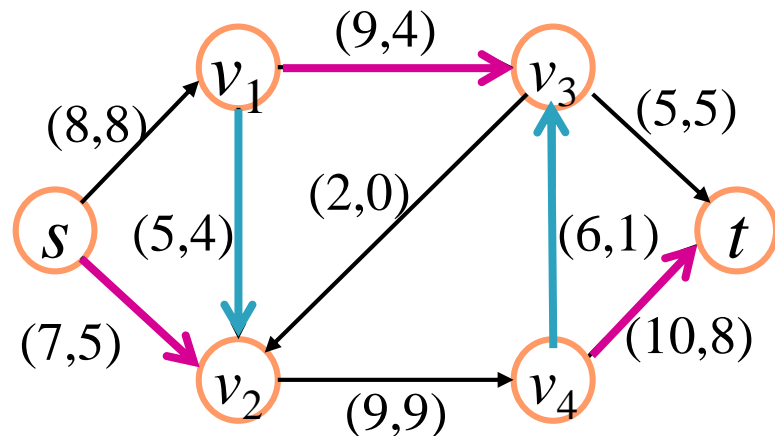


# 增广路径

$f$  是可行流,

若  $\begin{cases} 0 \leq f_{ij} < c_{ij} & \text{每一个 } (v_i, v_j) \in \mu^+ \\ 0 < f_{ij} \leq c_{ij} & \text{每一个 } (v_i, v_j) \in \mu^- \end{cases}$

则称  $\mu$  为可行流  $f$  的从  $s$  到  $t$  的可增广路径。



## 如何对网络图D的流量进行调整?

$$\delta_{ij} = \begin{cases} c_{ij} - f_{ij} & (v_i, v_j) \in \mu^+ \\ f_{ij} & (v_i, v_j) \in \mu^- \end{cases}$$

$$\delta = \min\{\delta_{ij}\} > 0$$

$$f^* = \begin{cases} f_{ij} + \delta & (v_i, v_j) \in \mu^+ \\ f_{ij} - \delta & (v_i, v_j) \in \mu^- \\ f_{ij} & \text{非增广链上的弧} \end{cases}$$

$$v(f^*) = v(f) + \delta$$

**定理6 (最大流量的充要条件):**  $f$  是容量网络  $D$  中的可行流, 则  $f$  是  $D$  的最大流, **当且仅当**  $D$  中**不存在**  $f$  的增广路径.



# 求最大流的2F(Ford,Fulkerson)算法--标号算法

## 1.标号过程(寻找可增广链):

(1) 给 $v_s$ 以标号 $(\Delta, +\infty)$

(2) 对已标号的 $v_i$ ,考虑 $v_i$ 的所有未标号的邻接点 $v_j$ :

(a)若 $v_j$ 是 $v_i$ 发出的前向非饱和弧的终点,

即 $f_{ij} < c_{ij}$ ,令 $\delta_j = \min\{c_{ij} - f_{ij}, \delta_i\}$ ,标号为 $(+v_i, \delta_j)$ ; 否则不标号

(b)对 $v_j$ 是 $v_i$ 发出的后向非零弧的起点,

即 $f_{ji} > 0$ ,令 $\delta_j = \min\{f_{ji}, \delta_i\}$ ,标号为 $(-v_i, \delta_j)$ ; 否则不标号

(3)重复(2)直到 若 $v_t$ 未得到标号, 说明不存在 $v_s$ 到 $v_t$ 的增广链;  
否则按如下方法调整。

## 2.调整过程 (增加流量):

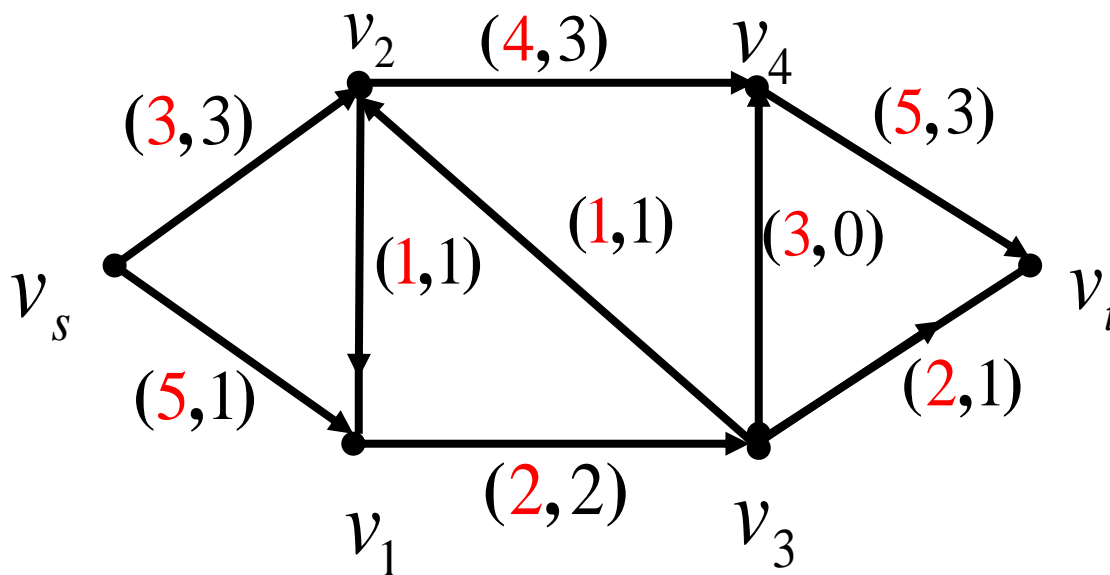
(1) 令 $f'_{ij} = \begin{cases} f_{ij} + \delta_t & \text{增广链上的前向弧} \\ f_{ij} - \delta_t & \text{增广链上的后向弧} \\ f_{ij} & \text{不在增广链上} \end{cases}$

有 $v(f') = v(f) + \delta_t$

(2) 去掉所有标号, 回到第1步, 对可行流 $f'$ 重新标号。

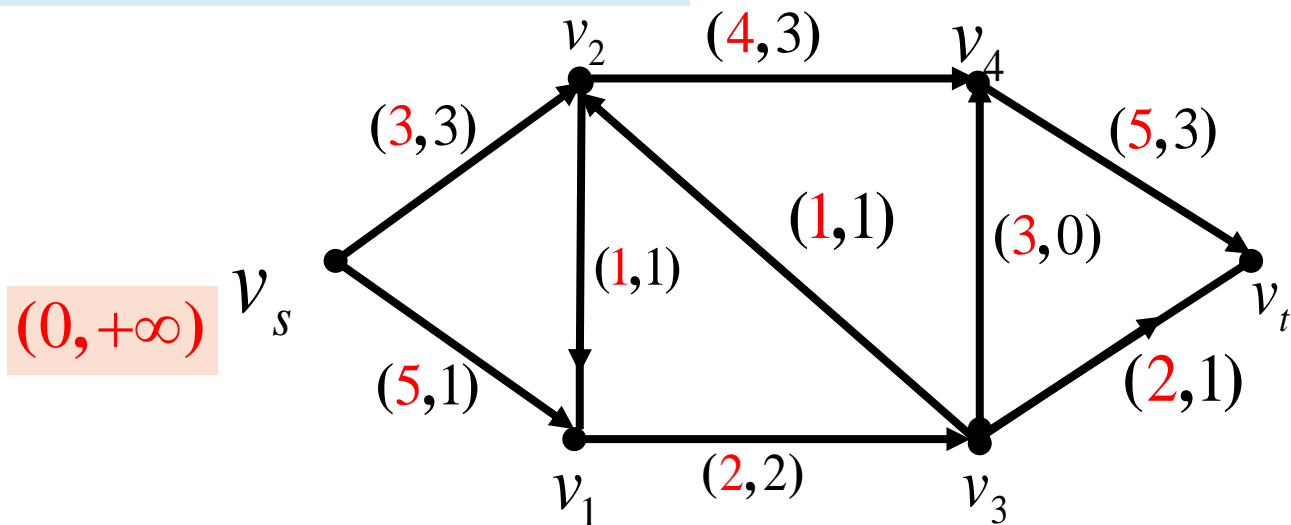
# 例1：用标号法求图所示网络的最大流

弧旁的数是( $c_{ij}, f_{ij}$ )



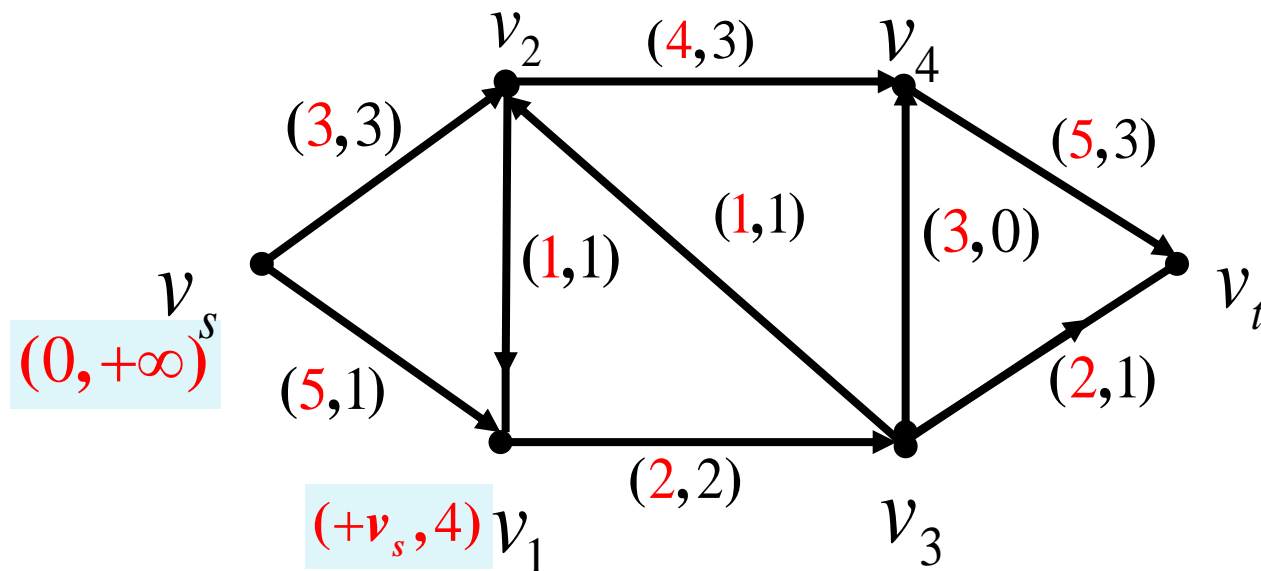
# 1) 寻找增广链:

a) 先给  $v_s$  标号  $(0, +\infty)$



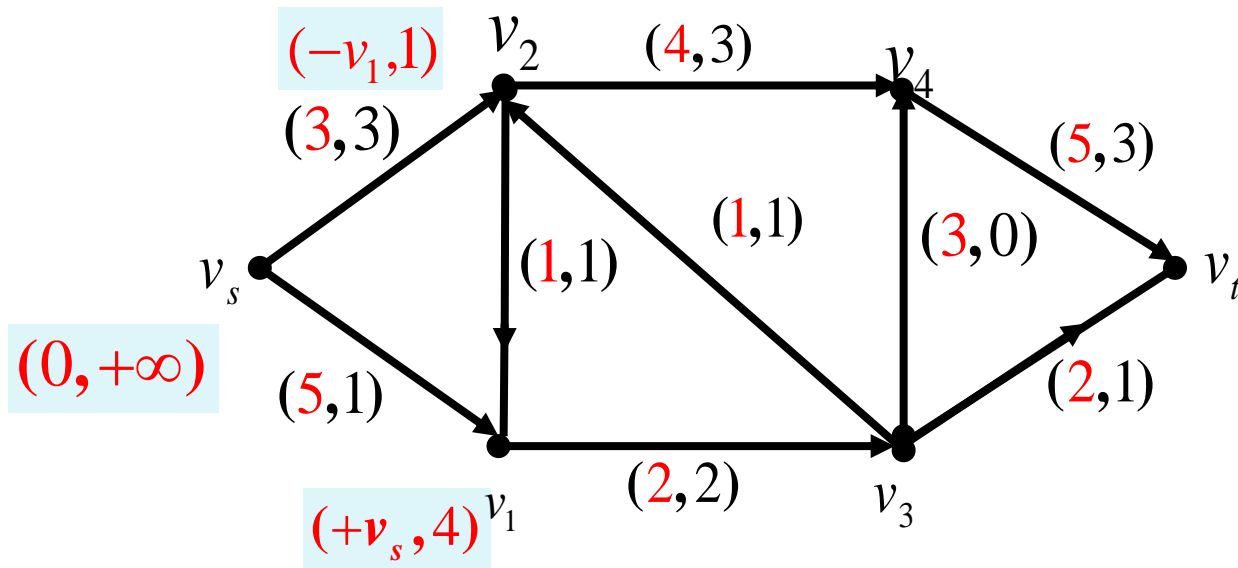
b) 接着检查与相邻接的点  $v_1, v_2$

$v_2$  已饱和, 流量不可再增; 再检查  $v_1$ , 可调整量为  $5-1=4$ , 可提供量  $+\infty$ , 取调整量  $\delta(v_1) = \min[+\infty, 5-1] = 4$



给  $v_1$  标号  $(+v_s, 4)$ , 其中  $(+v_s, 4)$  表示  $v_1$  的所调整量 4 来自  $v_s$ , 且为正向流（向前流）。

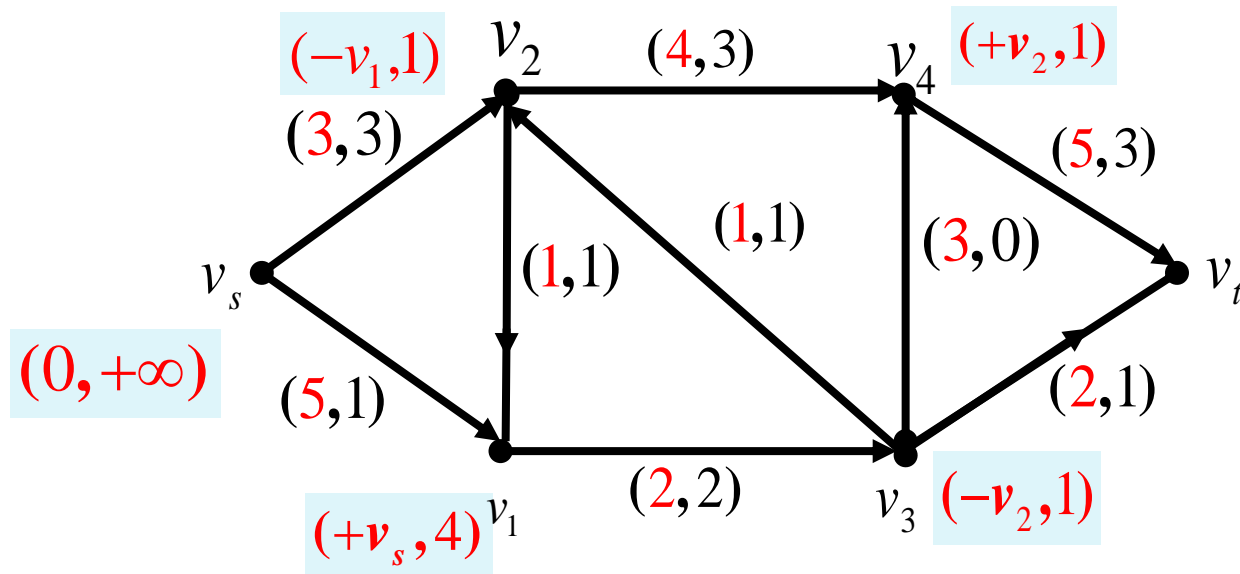
**c)** 对已标号点（可望调整点）接着向下检查。  $v_3$  已饱和。再检查与  $v_1$  相邻接且未标号的点  $v_2$



而  $v_2$  对  $v_1$  来讲是流入，现欲增加流出量，应该压缩  $v_2$  的流入量，只要  $v_2$  的流入量  $f_{21} > 0$ ，可令调整量为

$$\delta(v_2) = \min[\delta(v_1), 1] = 1$$

给  $v_2$  标号为  $(-v_1, 1)$ ，表示可控量，反方向流量。



d) 下面检查与  $v_2$  相邻接且未标号的点  $v_4$ ，同理，调整量：

$$\delta(v_4) = \min[\delta(v_2), 1] = 1 \quad \text{给 } v_4 \text{ 标号为 } (+v_2, 1)$$

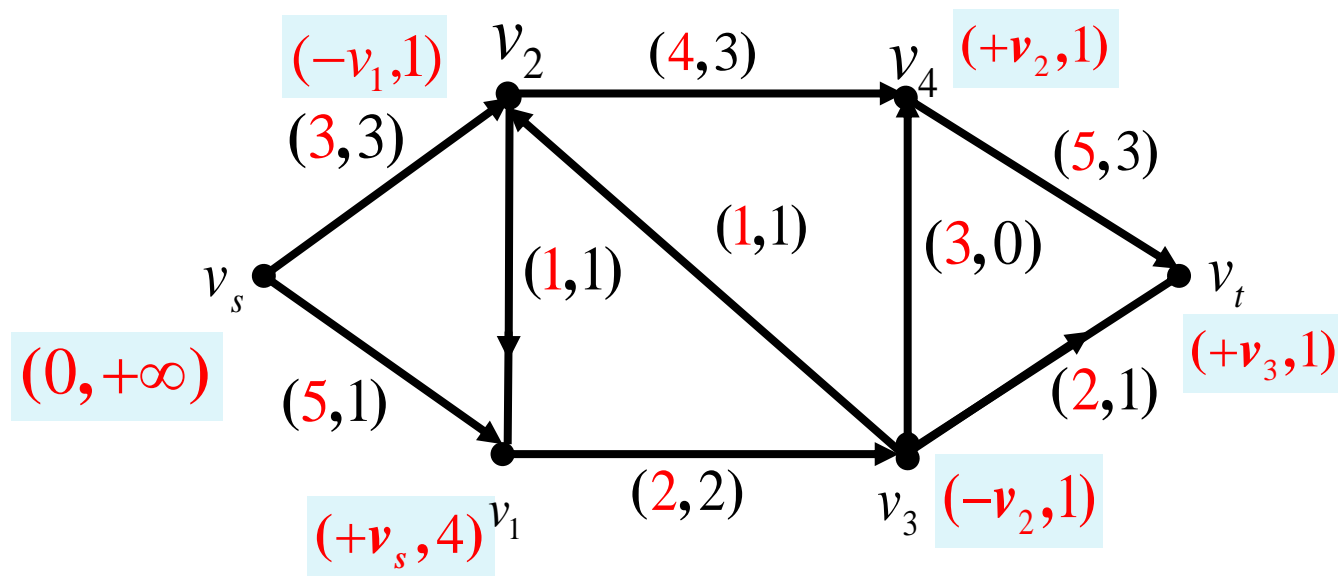
因为流从点  $v_3$  流入  $v_2$ ，且  $f_{32} = 1 > 0$

$$\delta(v_3) = \min[\delta(v_2), 1] = 1 \quad \text{给 } v_3 \text{ 标号 } (-v_2, 1)$$

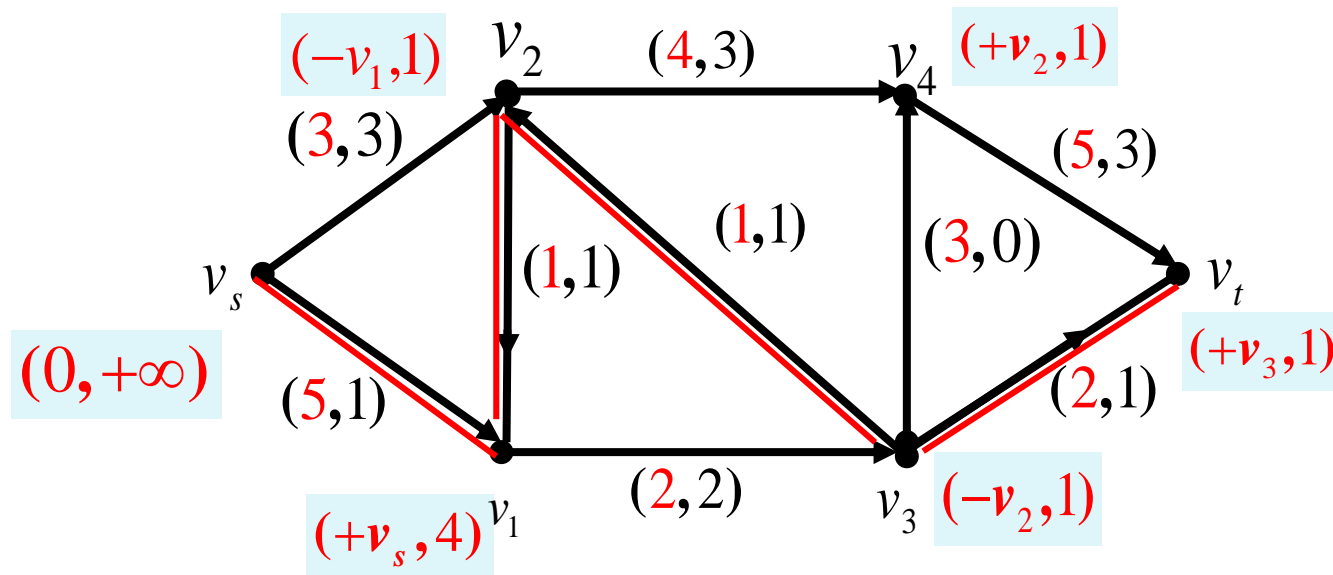
e) 在  $v_3, v_4$  中任选一个进行检查。假设选  $v_3$

$$\delta(v_t) = \min[\delta(v_3), (C_{3t} - f_{3t})] = \min[1, 1] = 1$$

给  $v_t$  标号  $(+v_3, 1)$



# 反向回溯追踪

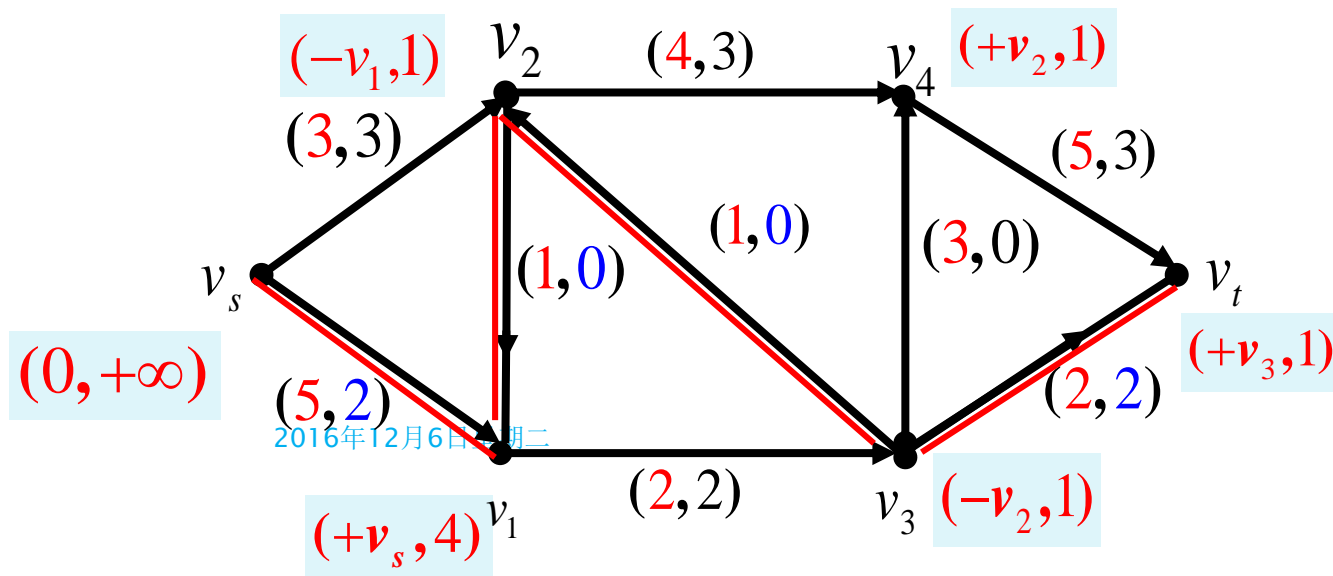


从 $v_t$ 开始，根据标注进行反向回溯，直到 $v_s$ 为止  
得到可增广路径 $v_s v_1 v_2 v_3 v_t$

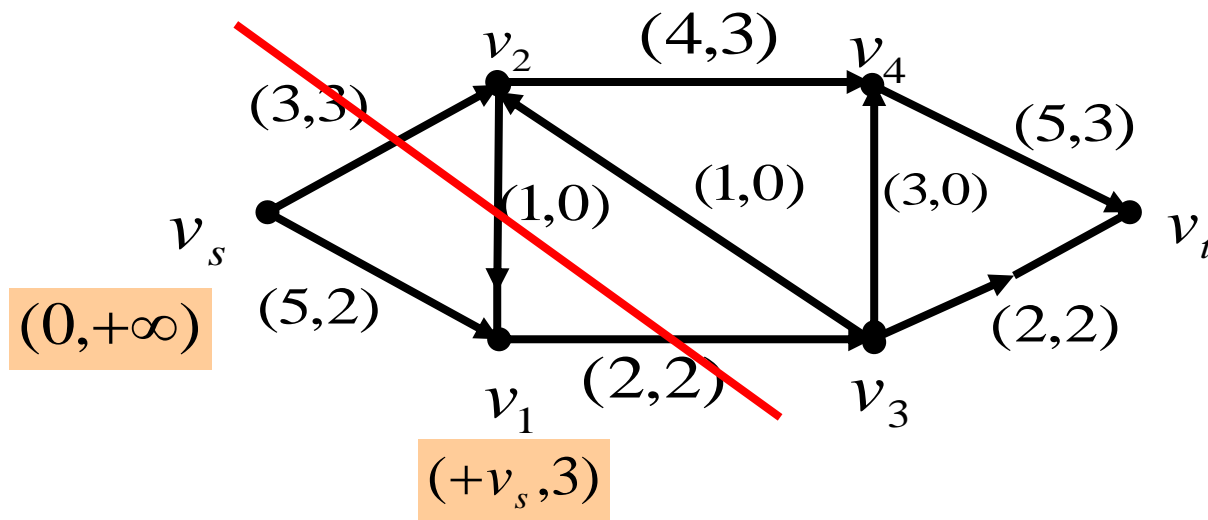


## 2) 调整流量

- ◆从 $v_s$ 到 $v_t$ 所画出的红线即为增广链。沿该增广链，从 $v_t$ 倒推，标“+”号的在实际流量上加上该调整量，标“-”符号的在实际流量上减去该调整量。完成调整过程。



# 重新开始标号，寻找新的增广路径

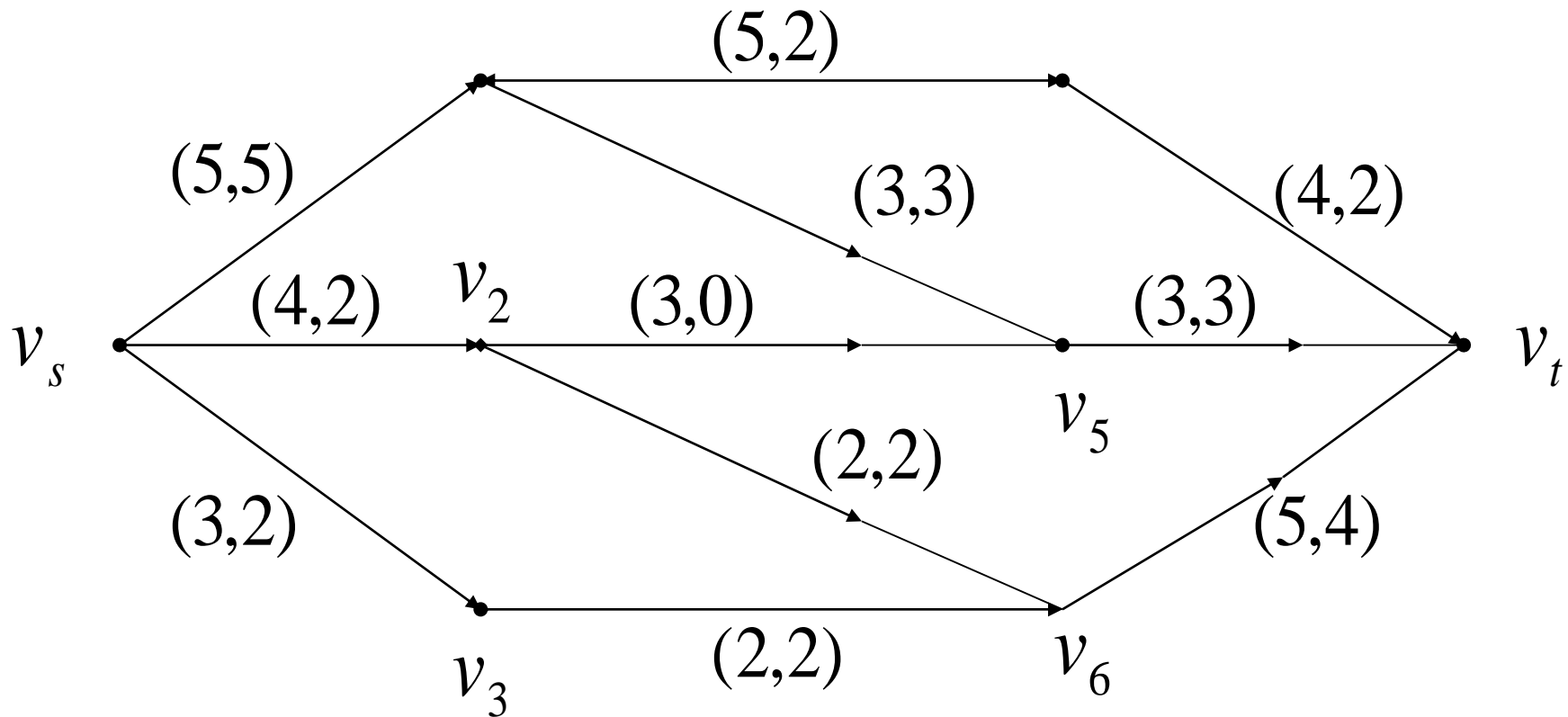


当标注与 $v_s$ 相邻的点 $v_1$ 为 $(+v_s, 3)$ 后，与 $v_1$ 相邻接的点 $v_2, v_3$ ，都不满足标号条件，标号无法继续，且没有完成标号。此时最大流量即为所求：
$$v(f)_{\max} = f_{s2} + f_{13} = 5$$

标号点集 $V_1 = \{v_s, v_1\}$ ; 未标号点集 $V \setminus V_1 = \{v_2, v_3, v_4, v_t\}$ .

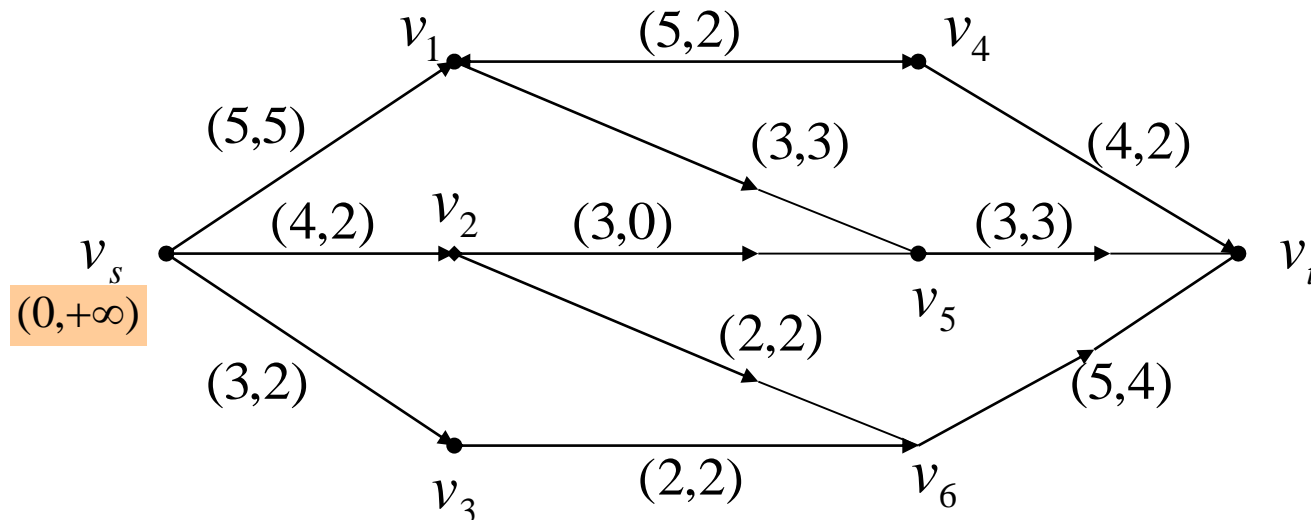
截集 $(V, V \setminus V_1) = \{(v_s, v_2), (v_1, v_3)\}$ , 截集容量 $C(V, V \setminus V_1) = 3 + 2 = 5$

**例2:** 用标号法求网络图的最大流，弧旁的数是 $(c_{ij}, f_{ij})$



# 1) 寻找可增广链:

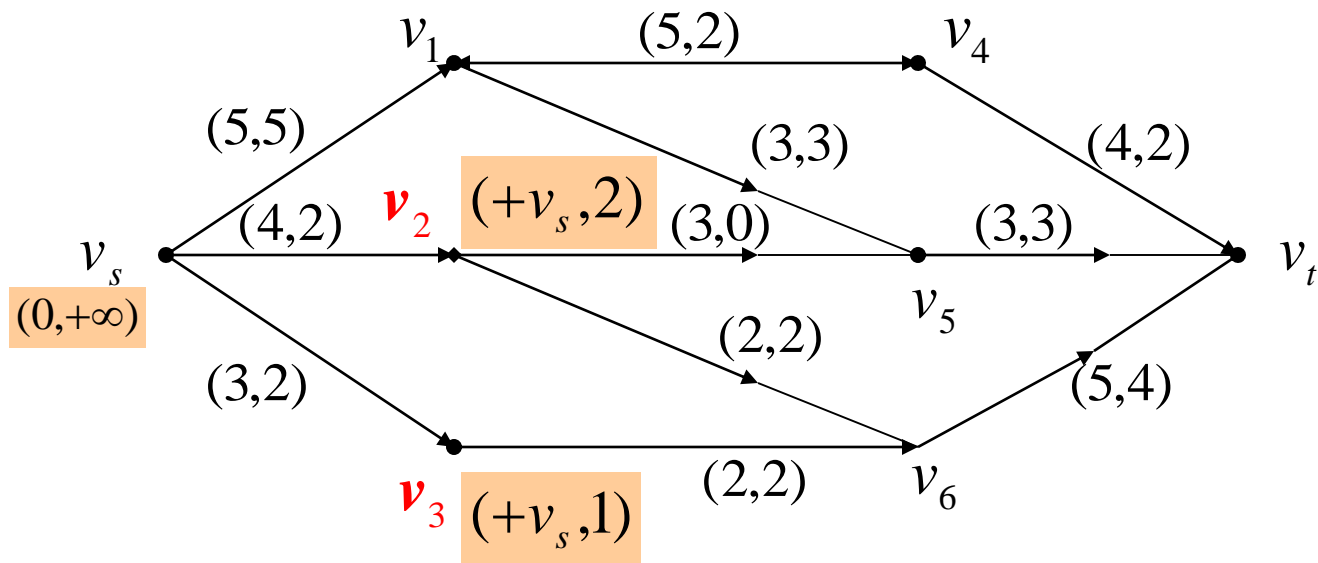
a) 先给标号  $v_s(0, +\infty)$



b) 接着检查与相邻接的点  $v_1$   $v_2$   $v_3$

$v_1$  已饱和，流量不可再增。再检查  $v_2$ ，可调整量为  $4-2=2$ ，可提供量  $+\infty$ ，取调整量

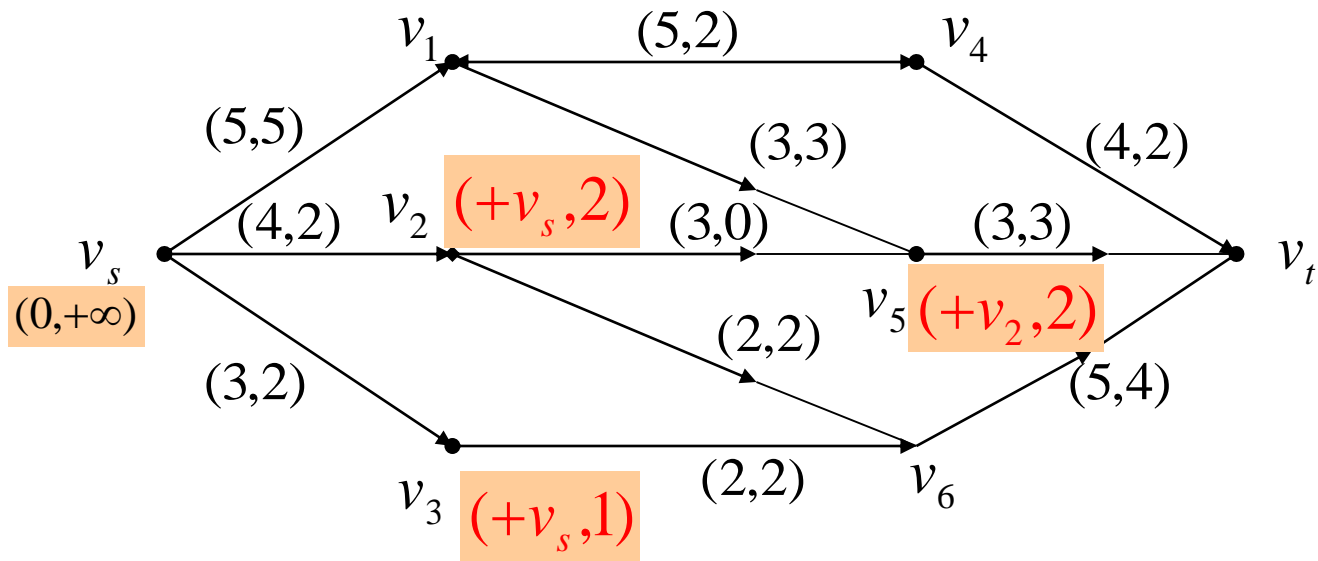
$$\delta_2 = \min\{4-2, +\infty\} = 2$$



给  $v_2$  标号  $(+v_s, 2)$ ，其中  $+v_s$  表示  $v_2$  的所调整量 **2** 来自  $v_s$ ，且为正向流（向前流）。

同理，给  $v_3$  标号  $(+v_s, 1)$

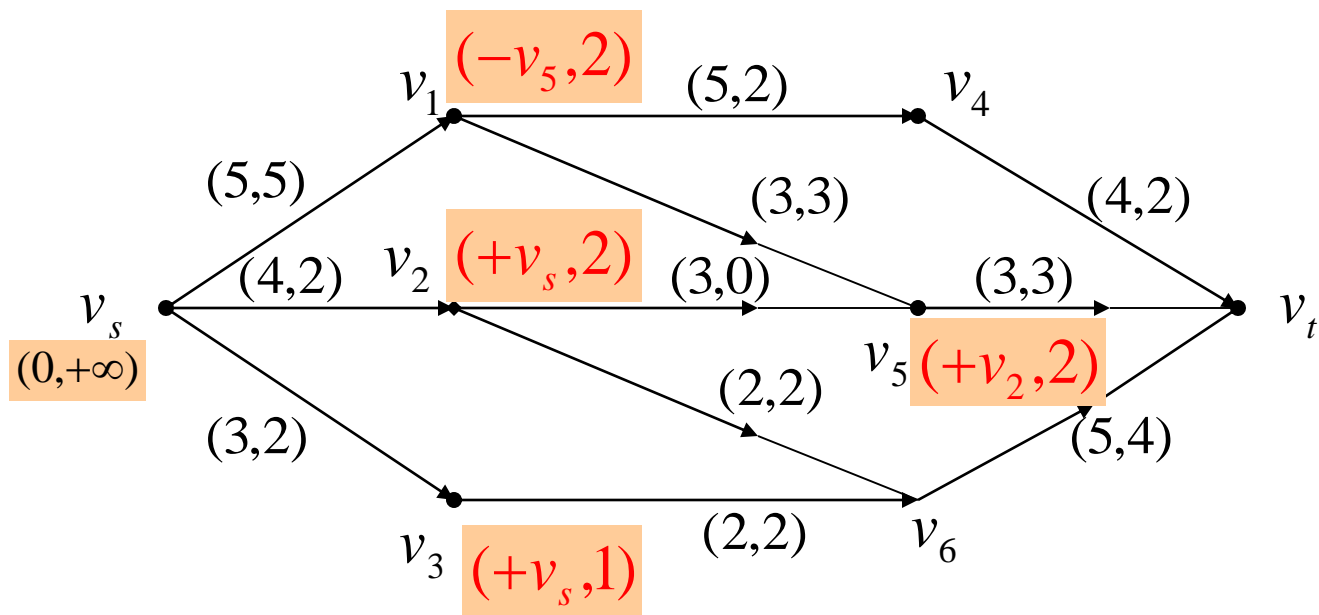
**c)** 下对已标号点（可望调整点）接着向下检查。 $v_6$  已饱和。再检查与  $v_2$  相邻接且未标号的点  $v_5, v_6$



调整量为

$$\delta_5 = \min\{3 - 0, 2\} = 2$$

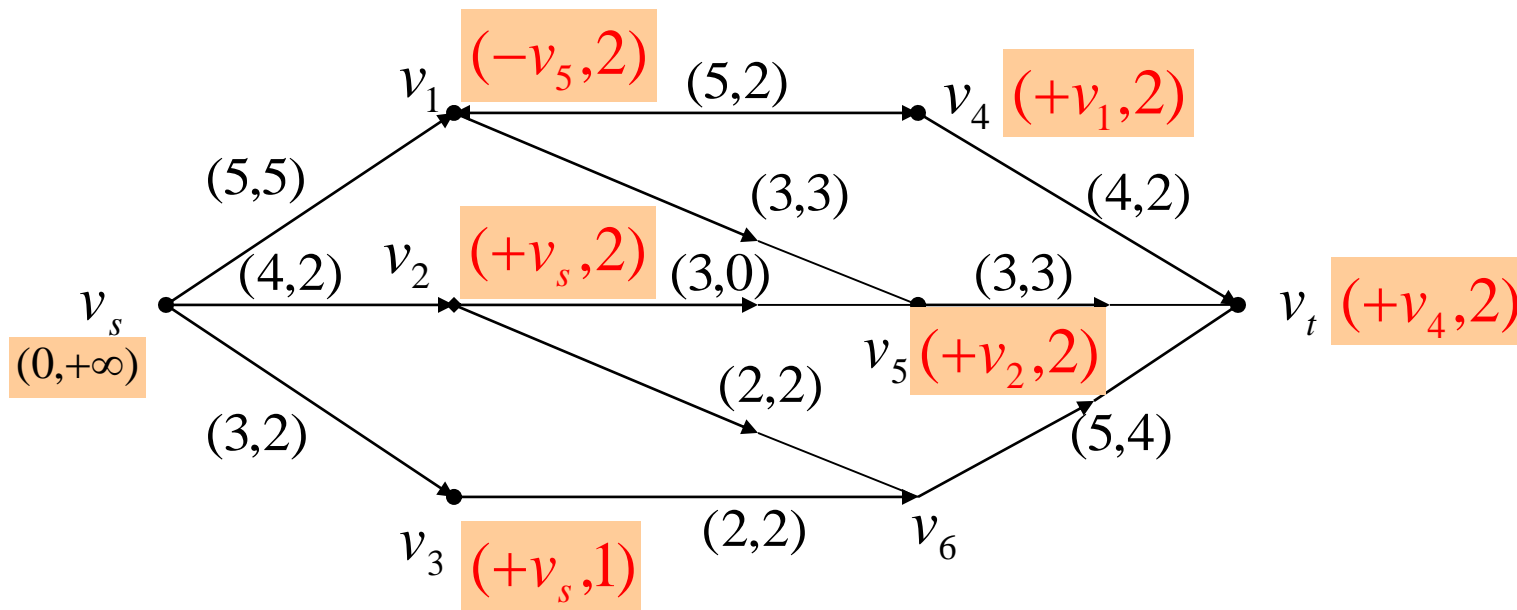
给  $v_5$  标号为  $(+v_2, 2)$



d) 检查与  $v_5$  相邻接且未标号的点  $v_1, v_t$ 。而  $v_1$  对  $v_5$  来讲是流入，现欲增加流出量，应该压缩  $v_1$  的流入量，只要流入量  $f_{15} > 0$ ，可令调整量为

$$\delta_1 = \min\{3, 2\} = 2$$

给  $v_1$  标号为  $(-v_5, 2)$  表示可控量，反方向流量。



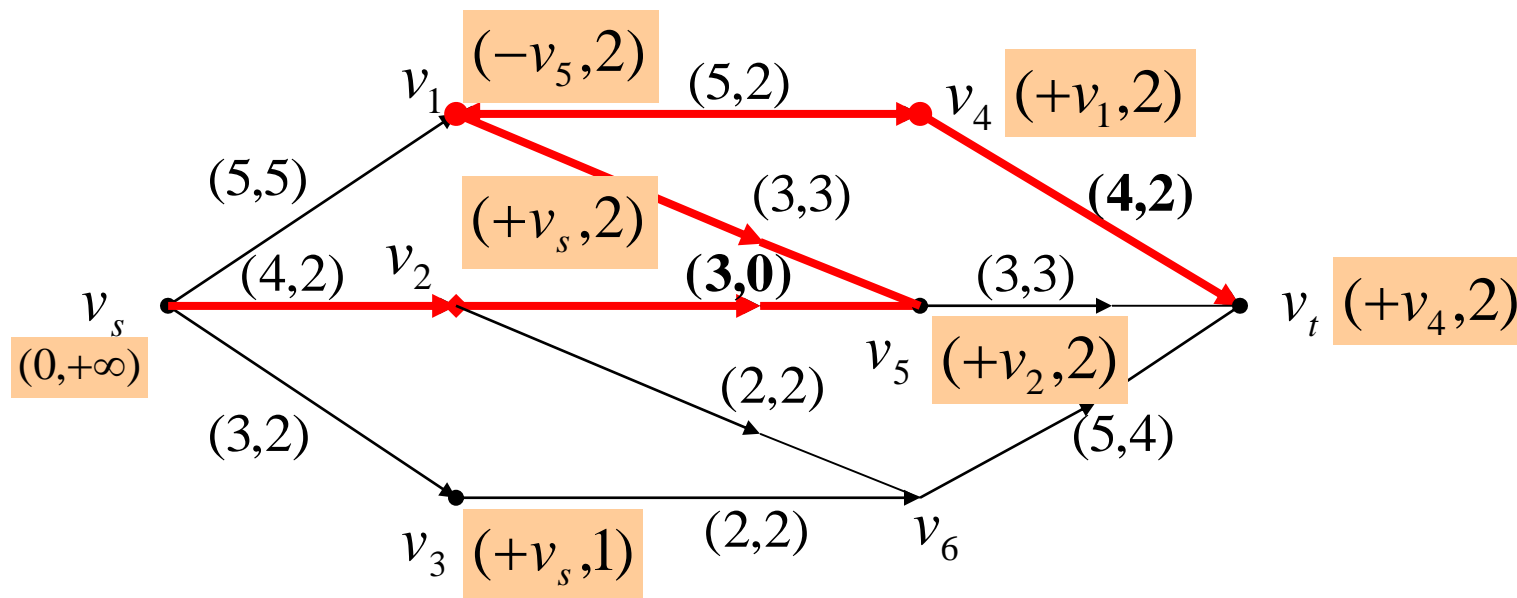
f) 下面检查与  $v_1$  相邻接且未标号的点  $v_4$ ，同理，调整量：

$$\delta_4 = \min\{5 - 2, 2\} = 2$$

给  $v_4$  标号为  $(+v_1, 2)$ 。

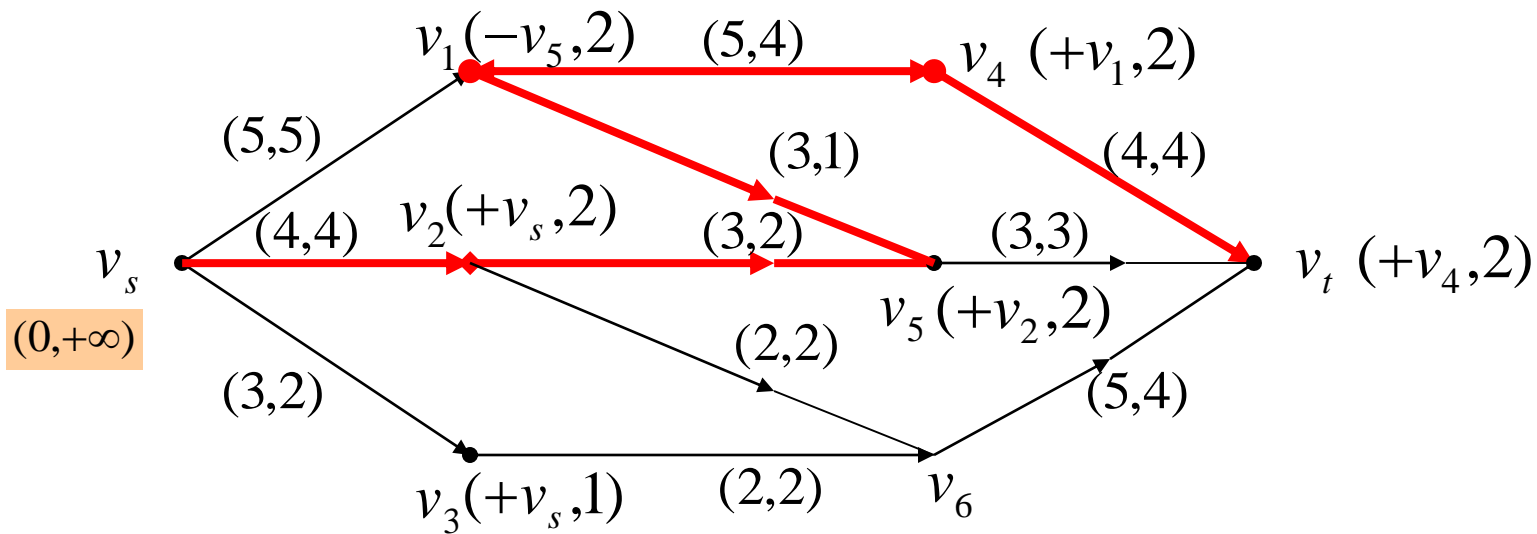
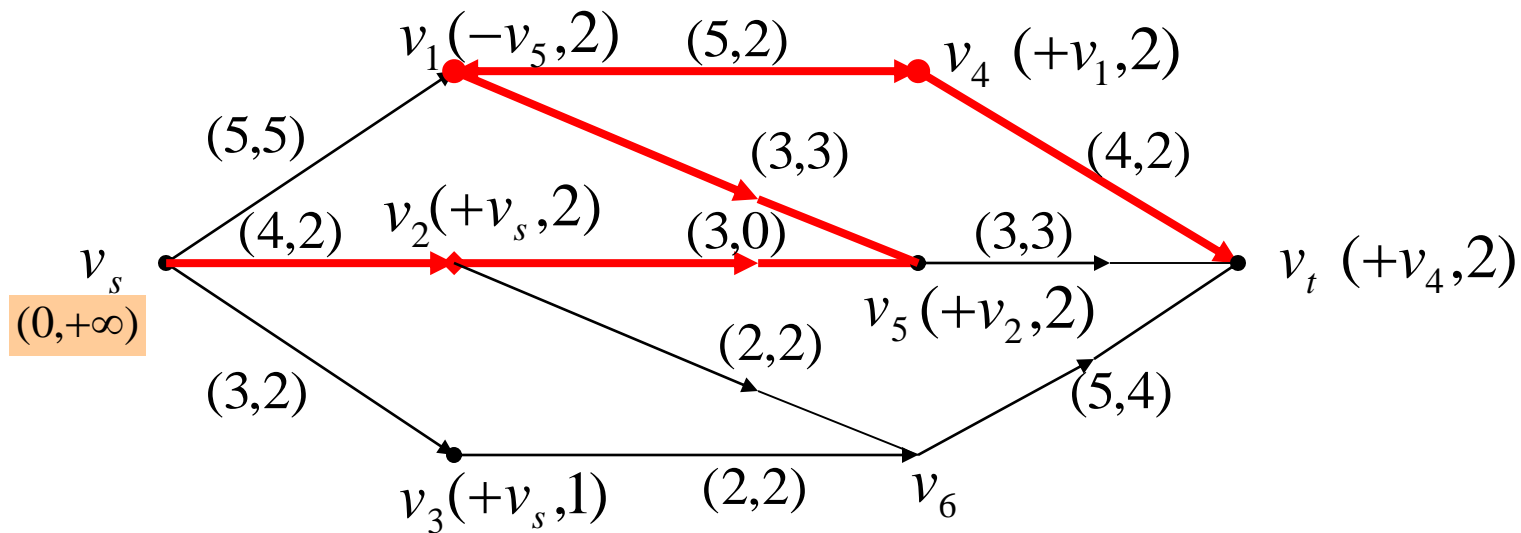
g) 最后，给  $v_t$  标号  $(+v_4, 2)$ 。  $\delta_t = \min\{4 - 2, 2\} = 2$

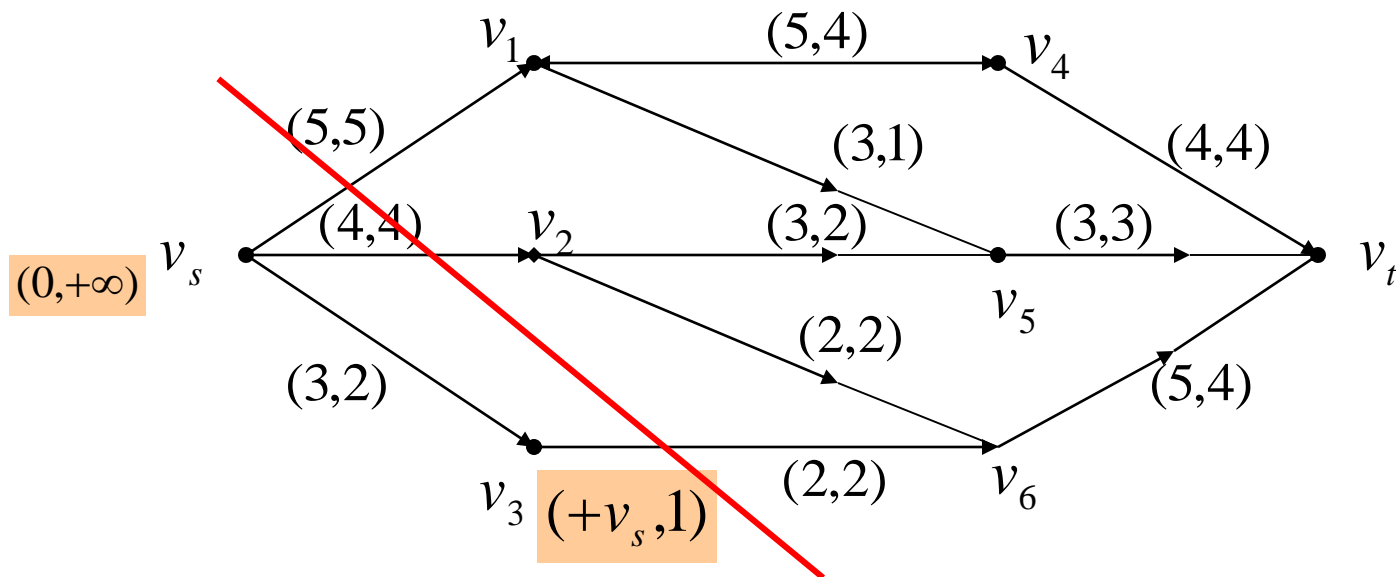




反向追踪

2) 调整流量：从  $v_s$  到  $v_t$  所画出的红线即为可增广链。沿该可增广链，从  $v_t$  倒推，标“+”号的在实际流量上加上该调整量，标“-”符号的在实际流量上减去该调整量。完成调整过程。





重新开始标号，寻找可增广链。

当标到  $(+v_s, 1)$  时,  $v_s$  与  $v_3$ , 相邻接的点  $v_1, v_2, v_6$  都不满足标号条件, 标号无法继续, 且  $v_t$  没有完成标号。此时最大流量即为所求。

$$w = f_{s1}^* + f_{s2}^* + f_{s3}^* = 5 + 4 + 2 = 11$$

标号点集  $V = \{v_s, v_3\}$ ;

割集  $(V, \bar{V}) = \{(v_s, v_1), (v_s, v_2), (v_3, v_6)\}$

未标号集  $\bar{V} = \{v_1, v_2, v_4, v_5, v_6, v_t\}$ ; 割集容量  $C(V, \bar{V}) = c_{s1} + c_{s2} + c_{36} = 11$