组合优化理论

第1章 线性规划及单纯形法

主讲教师：陈安龙

若x，y满足约束条件 $\begin{cases} 2x+y-2\le 0, \\ x-y-1\ge 0, \\ y+1\ge 0, \end{cases}$

则z=x+7y的最大值为

线性规划简介

线性规划（***Linear Programming***，简称***LP***）运筹学的一个重要分支，是运筹学中研究较早、发展较快、理论上较成熟和应用上极为广泛的一个分支。

1947年***G.B. Dantying*** 提出了一般线性规划问题求解的方法——单纯形法之后，线性规划的理论与应用都得到了极大的发展。

60年来，随着计算机的发展，线性规划已广泛应用于工业、农业、商业、交通运输、经济管理和国防等各个领域，成为现代化管理的有力工具之一。

e.g. 1 资源的合理利用问题

某工厂在下一个生产周期内生产甲、乙两种产品，要消耗*A*、*B*、*C* 三种资源，已知每件产品对这两种资源的消耗，这两种资源的现有数量和每件产品可获得的利润如表。

问：如何安排生产计划，使工厂获总利润最大？

生产每件产品耗费的原料	产品甲	产品乙	库房可供原料
原料A	2	2	12
原料B	4	0	16
原料C	0	5	15
单位利润（元）	2	3	

生产每件产品耗费的原料	产品甲	产品乙	库房可供原料
原料A	2	2	12
原料B	4	0	16
原料C	0	5	15
单位利润（元）	2	3	

问题分析

可控因素(决策变量):

设在计划期内生产I、II两种产品的数量分别 为 x_1, x_2

目标: 使得总利润最大，即利润函数: $2x_1 + 3x_2$ 达到最大.

受制条件: 计划期内设备的使用量不超过可用量:

设备A: $2x_1 + 2x_2 \le 12$

设备B: $4x_1 \le 16$

设备C: $5x_2 \le 15$

蕴含约束: 产量为非负数

$x_1, x_2 \ge 0$

模 型

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ 4x_1 \le 16 \\ 5x_2 \le 15 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

线性规划问题的数学模型

(1) 规划问题的数学模型的3个组成要素：

决策变量、目标函数、约束条件

(2) 线性规划问题的数学模型：

决策变量为可控的连续变量、

目标函数和约束条件关于决策变量都是线性关系

(3) 一般线性规划问题的数学模型的表示形式：

$$\max(\text{或}\min)\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

目标函数

$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le (\text{或}=,\ge) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le (\text{或}=,\ge) b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le (\text{或}=,\ge) b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \ge 0 \end{cases}$$

约束条件

$x_j; j = 1,2,\ldots,n$
决策变量

以上模型的简写形式

$$\max(\text{或}\min)\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le (\text{或}=,\ge) b_i \quad (i = 1,2,\cdots,m) \\ x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

$c_j; j = 1,2,\ldots,n$
价值系数

向量表示形式

$$\max(\text{或}\min)\ z = CX$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} P_j x_j \le (\text{或}=,\ge) b \\ X \ge 0 \end{cases}$$

其中

价值向量

$$C = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$$

右端向量

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; P_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

矩阵表示形式

$$\max(\text{或}\min)\ z = CX$$

$$s.t.\begin{cases} AX \le (\text{或}=,\ge) b \\ X \ge 0 \end{cases}$$

$$\text{矩阵} A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

为系数矩阵(或约束矩阵)。

线性规划问题的标准形式

(1)标准形式

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$ 取极大

$$s.t.\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & (i = 1,2,\cdots,m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

$b_i \geq 0$,等式约束

非负约束

(2)化为标准形式的方法

① $\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \xrightarrow{z' = -z} \max z' = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{j=1}^{n} (-c_j) x_j$

② $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \xrightarrow{x_{n+1} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \boxed{x_{n+1}} = b_i (x_{n+1} \geq 0)$

松弛变量

线性规划问题的标准形式（续）

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i \xrightarrow{x_{n+1}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - \boxed{x_{n+1}} = b_i (x_{n+1} \ge 0)$$

剩余变量

说明：松弛变量和剩余变量在实际问题中分别表示**未被利用的资源和超用的资源数**，均未转化为价值和利润，所以引进模型后它们**在目标函数中的系数均为零。**

③ x_j 取值无约束 $\xrightarrow{x_j = x_j' - x_j''}$ $x_j' \ge 0, x_j'' \ge 0$

$$x_j \le 0 \xrightarrow{x_j' = -x_j} x_j' \ge 0$$

把问题转化为标准形式

$$\min z = -x_1 + x_2 + x_3$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 \geq -2 \\ x_1 - 2x_2 \geq 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\max z' = x_1 - x_2 - x_3$$

$$s.t.\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 - x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_2 \leq 0, x_i \geq 0, i = 1,4,5 \end{cases}$$

$$x_2 = -x_2'$$
$$x_3 = x_3' - x_3''$$

$$\max z' = x_1 + x_2' - (x_3' - x_3'')$$

$$s.t.\begin{cases} -2x_1 - x_2' + 2(x_3' - x_3'') + x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2' - x_5 = 2 \\ x_1 - x_2' + (x_3' - x_3'') = 5 \\ x_2' \geq 0, x_3' \geq 0, x_3'' \geq 0, x_i \geq 0, i = 1,4,5 \end{cases}$$

后续将在标准形式的基础上讨论线性规划问题的求解方法

线性规划问题的解

线性规划问题

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1)$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = 1, 2, \cdots, m) & (2) \\ x_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots, n) & (3) \end{cases}$$

定义1 在*LP* 问题中，凡满足约束条件(2)(3)的解 $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ 称为*LP* 问题的可行解，所有可行解的集合称为可行解集（或可行域）。

记作： $D=\{ X \mid AX = b, x\geq 0 \}$。

定义2 设*LP*问题的可行域为*D*，若存在$X^* \in D$，使得对任意的$X \in D$都有$CX^* \geq CX$，则称X^*为*LP* 问题的最优解，相应的目标函数值称为最优值，记作： $z^*=CX^*$。

定义 3 在上述 LP 问题中，约束方程组（2）的系数矩阵 A 的任意一个 $m\times m$ 阶的**非奇异的子方阵** B（即 $|B|\neq 0$），称为 LP 问题的一个**基阵或基**。

记：

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}=(P_1,\cdots,P_m)$$

$$N=\begin{bmatrix} a_{1m+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mm+1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=(P_{m+1},\cdots,P_n)$$

称 p_i $(i=1,2,\ldots,m)$ 为**基向量**;

x_i $(i=1,2,\ldots,m)$ 为**基变量**;

p_j $(j=m+1,\ldots,n)$ 为**非基向量**;

x_j $(j=m+1,\ldots,n)$ 为**非基变量**

则： $A=(B,N)$

$A=(B,N)$ $X_B=(x_1,\ldots,x_m)^T$， $X_N=(x_{m+1},\ldots,x_n)^T$

则 $X=\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix}$， 代入约束方程（2），得

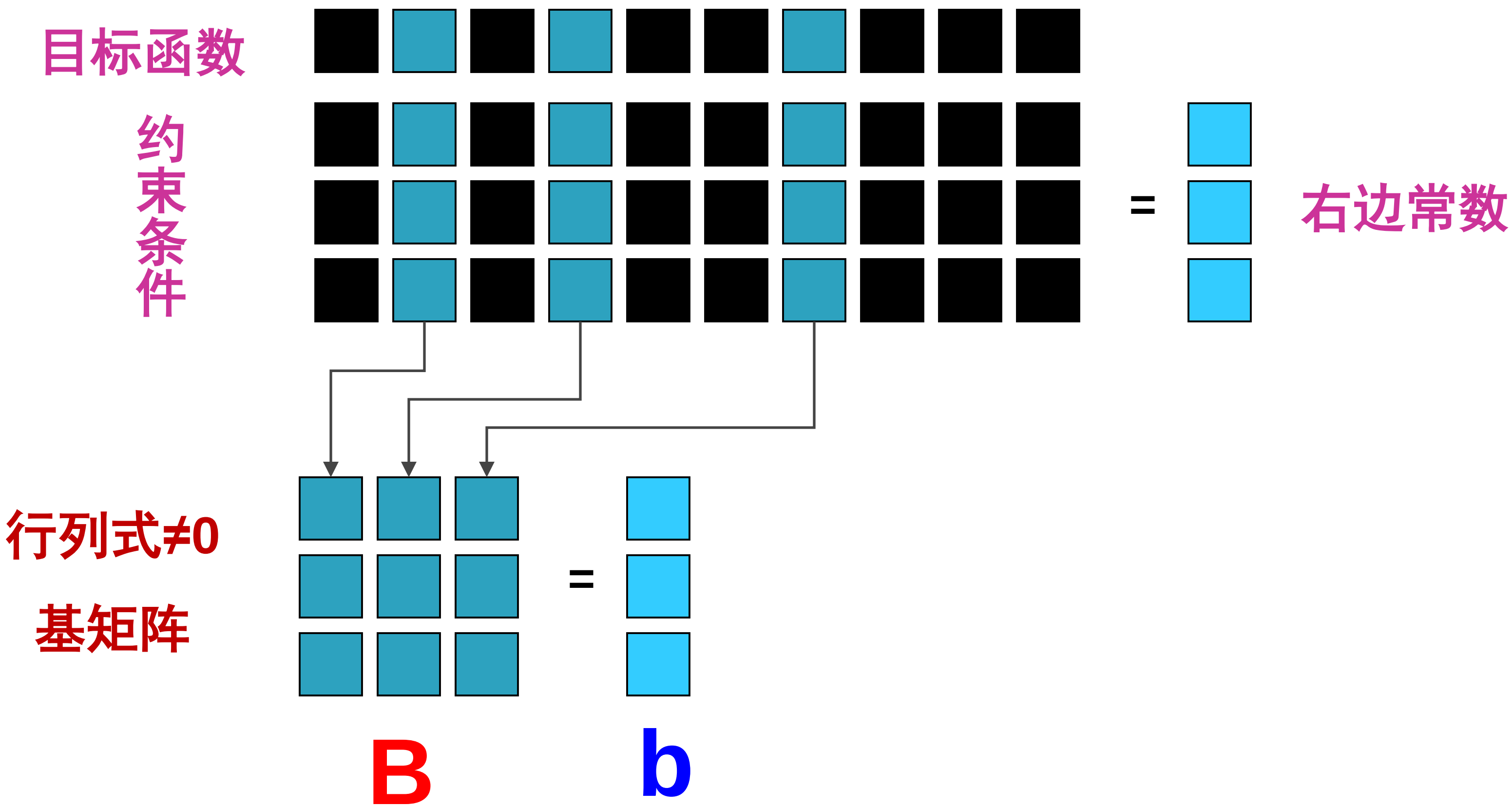
$$(B \quad N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix}=b \longrightarrow BX_B+NX_N=b \longrightarrow X_B=B^{-1}b-B^{-1}NX_N$$

令：$X_N=0 \longrightarrow X_B=B^{-1}b \longrightarrow X=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}\cdots\cdots(4)$

称（4）为相应于基 B 的基解

如果$X_B\geq 0$,称（4）为相应于基 B 的基可行解

线性规划的基矩阵、基变量、非基变量图示



例：列出下述线性规划问题的全部基、基解、基可行解、最优解

$$\min z = 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,3,4 \end{cases}$$

解：系数矩阵

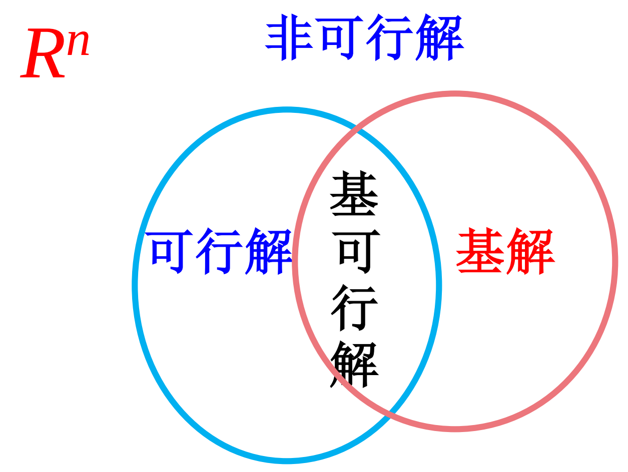
$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$R(A)=2$

基	基解				是基可行解？	目标函数值
	x_1	x_2	x_3	x_4		
$P_1\ P_2$	-4	5.5	0	0	×	
$P_1\ P_3$	2/5	0	11/5	0	√	43/5
$P_1\ P_4$	-1/3	0	0	11/6	×	
$P_2\ P_3$	0	1/2	2	0	√	5 √
$P_2\ P_4$	0	-1/2	0	2	×	
$P_3\ P_4$	0	0	1	1	√	5 √

线性规划问题解的基本特征

最多有$C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$种



定义 4 在LP问题的一个基可行解中，如果它的所有的基变量取值大于0，则称它是非退化的解；反之，如果有一个基变量取零值，则称它是退化的解。一个LP问题，如果它的所有基可行解都是非退化的就称该问题是非退化的，否则就称它是退化的。

下面将要讨论或者回答下列问题

线性规划问题最优解在哪里？

如何求线性规划问题最优解？

定理1 设 X是 LP 问题的**可行解**

(1) 若 $X=0$，则它一定是基可行解；

(2) 若 $X\neq 0$，则 X 是基可行解的充要条件是**它的非零分量所对应的列向量线性无关。**

证明：(1) 如果$X=0$是LP问题的可行解，由定义可知：

则它一定是对应该LP任意基B的基可行解

(2) **必要性**，由基可行解的定义显然成立。

充分性： $\because X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是可行解， $\therefore x_i \geq 0, i=1,2,\cdots,n$

不失一般性不妨， $x_i>0, i=1,\cdots,k, x_{k+1}=x_{k+2}=\cdots x_n=0$

若 $P_1, P_2, \cdots, P_k$ 线性无关，m为基矩阵的秩，

则必有 $k \leq m$.

当 $k = m$ 时，$P_1, P_2, \cdots, P_k$ 恰好构成一个基，

从而 $(x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0)^T$ 为相应的基可行解。

当 $k < m$ 时,而 $R(A)=m$,

则一定可以从其余列向量中找出 m-k 个

与 $P_1, P_2, \cdots, P_k$ 构成一个基，其对应的解恰好为 X.

定理 2： 如果一个 LP 问题有可行解，则它**必有基可行解**。

证明： 设 $X=(x_1, x_2,\ldots, x_n)^T$ 是 LP 问题的一个可行解，如果 $X=0$，则由定理1知，它是 LP 问题的一个基可行解，定理成立。

如果 $X\neq 0$，不妨设 X 的前 k 个分量为非零分量。

则有 $x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_k p_k = b$，及 $x_1>0, x_2>0,\ldots, x_k>0$，

分两种情况讨论：

(1) 如果 $p_1, p_2,\ldots, p_k$ 线性无关,即 X 的非零分量对应的列向量线性无关，则由定理1知，它是 LP 的一个基可行解，定理成立。

(2) 如果 $p_1,p_2,\ldots,p_k$ 线性相关，则必存在一组不全为零的数 $\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_k$ 使得

$$\sum_{j=1}^{k}\delta_j p_j = 0 \qquad (5)$$

构造法的证明思路

定理 2 证明（续）

假定有$\delta_i \neq 0$，　取 $\varepsilon = \min\left\{ \dfrac{x_i}{|\delta_i|} \middle| \delta_i \neq 0 \right\}$　(6)

作 $X_1 = X + \varepsilon\delta \quad X_2 = X - \varepsilon\delta$ 其中 $\delta = (\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_k, 0, \cdots, 0)^T$

由（6）式知，必有 $x_j \pm \varepsilon\delta_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \quad (7)$

即 $X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$ 又因为由（5）式知

$$\sum_{j=1}^{n}(x_j \pm \varepsilon\delta_j)p_j = \sum_{j=1}^{n} x_j p_j \pm \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \delta_j p_j = b$$

故有，$AX_1 = b$，$AX_2 = b$，即 X_1, X_2 也是LP的两个可行解。

再由 ε 的取法知，在式（7） 的诸式中，

$$x_j \pm \varepsilon\delta_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad (7)$$

至少有一个等于零，于是所作的可行解 X_1 或 X_2 中，它的非零分量的个数至少比 x 的减少1，如果这些非零分量所对应的列向量线性无关，则 X_1 或 X_2 为基可行解，定理成立。

否则，可以从 X_1 或 X_2 出发，重复上述步骤，再构造一个新的可行解 X_1 或 X_2 ，使它的非零分量的个数继续减少。这样经过有限次重复之后，必可找到一个可行解 X_s 或 X_{s+1} 使它的非零分量对应的列向量线性无关，故可行解 X_s 或 X_{s+1} **必为基可行解**。证毕。

定理 3： 如果一个 LP 问题有最优解，则**必存在一个基可行解是它的最优解**。

证明： 设 $X^*=(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*)$ 是 LP 的一个最优解。

如果 X^* 是基可行解，则定理成立；

如果 X^* 不是基可行解，则由定理2的证明过程可构造两个可行解 $X_1=X^*+\varepsilon\delta \quad X_2=X^*-\varepsilon\delta$

它的非零分量的个数比 X^* 的减少，且有

$$CX_1=CX^*+\varepsilon C\delta \quad CX_2=CX^*-\varepsilon C\delta \qquad (8)$$

又因为 X^* 是最优解，故有 $CX^*\geq CX_1,\quad CX^*\geq CX_2 \qquad (9)$

由式（8）和（9）知，必有 $\varepsilon C\delta=0$ 故 $CX_1=CX_2=CX^*$

即 X_1,X_2 仍为最优解。 如果 X_1,X_2 是基可行解，则定理成立。

否则，按定理2证明过程，可得基可行解 X_s 或 X_{s+1} 使得

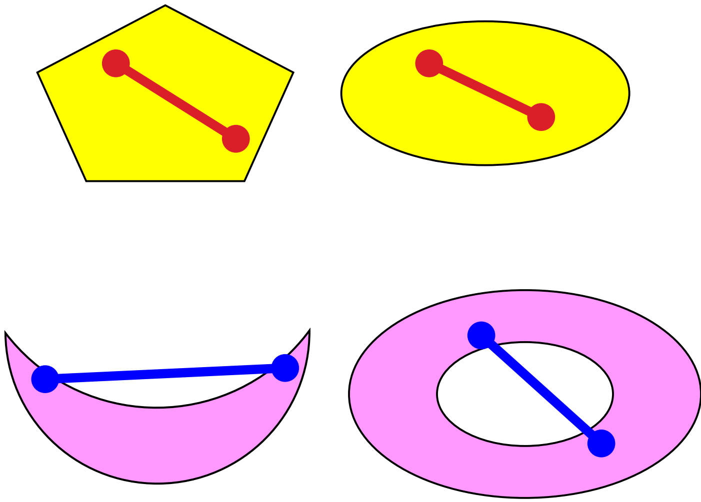
$CX_s=CX^*$ 或 $CX_{s+1}=CX^*$ 即得基可行解 X_s 或 X_{s+1} 为最优解。

定理 2、定理 3 为 LP 问题的基本定理

定理4所需的预备知识：凸集和顶点

凸集： 如果集合S中任意两个点X_1、X_2，其连线上的所有点也都是集合S中的点，即对任何 $X_1 \in S, X_2 \in S$ 有 $\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2 \in S \ (0 < \lambda < 1)$

则称 S 是一个凸集。



几何意义： 如果集合中任意两点连线上的一切点都在该集合中，则称该集合为凸集。

Note: 空集和单点集也是凸集。

凸组合: 设凸集R^n，$X_i \in R^n, \lambda_i \ge 0, i = 1, 2, \ldots, k$，且$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$

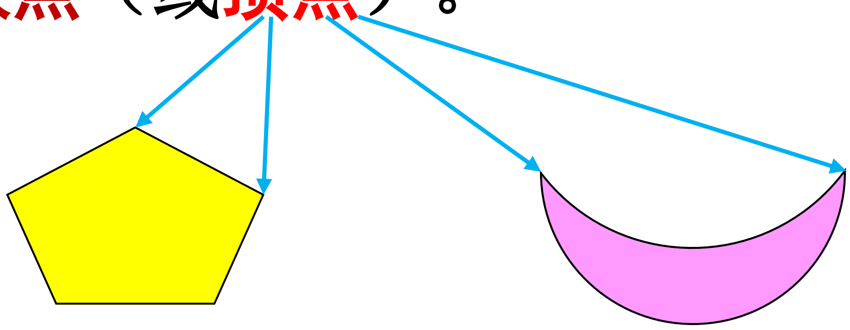
则称 $X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_k X_k$

为点 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 的一个凸组合。

极点: 设凸集 $S \subset R^n, X \in S$ 如果X不能用S中的不同两点X_1，X_2表示为

$$X = \lambda X_1 + (1-\lambda) X_2 \qquad (0 < \lambda < 1)$$

则称 X 为 S 的一个极点（或顶点）。



定理 4： LP 问题的可行解集 $D=\left\{X \middle| AX=b, X\geq 0\right\}$ 是凸集。

证明： 设C表示线性规划问题的可行域

$$\max z = CX$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} P_j x_j = b\\ X\geq 0\end{cases}$$

$\forall X_1=(x_{11},x_{12},\cdots,x_{1n}), X_2=(x_{21},x_{22},\cdots,x_{2n})\in C$

则有 $\sum_{j=1}^{n} P_j x_{1j}=b, \sum_{j=1}^{n} P_j x_{2j}=b, X_1\geq 0, X_2\geq 0$

令 $X=aX_1+(1-a)X_2\in C\ (0<a<1)$

即 $x_j=ax_{1j}+(1-a)x_{2j}\ (0<a<1, j=1,\cdots,n)$

则有 $\sum_{j=1}^{n} P_j x_j=\sum_{j=1}^{n} P_j[ax_{1j}+(1-a)x_{2j}]$

$$=a\sum_{j=1}^{n} P_j x_{1j}+\sum_{j=1}^{n} P_j x_{2j}-a\sum_{j=1}^{n} P_j x_{2j}=ab+b-ab=b$$

显然 $x_j\geq 0, j=1,\cdots,n$ 证毕

定理 4： LP 问题的可行域 $D=\{X \mid AX=b, X\geq 0\}$ 是凸集。

证明： 设F表示线性规划问题的可行域

$$\max z = CX$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} P_j x_j = b \\ X \geq 0\end{cases}$$

$\forall X_1=(x_{11},x_{12},\cdots,x_{1n}), X_2=(x_{21},x_{22},\cdots,x_{2n})\in F$

则有 $\sum_{j=1}^{n} P_j x_{1j}=b, \sum_{j=1}^{n} P_j x_{2j}=b, X_1\geq 0, X_2\geq 0$

令 $X=aX_1+(1-a)X_2\in F\ (0<a<1)$

即 $x_j=ax_{1j}+(1-a)x_{2j}\ (0<a<1, j=1,\cdots,n)$

则有 $\sum_{j=1}^{n} P_j x_j=\sum_{j=1}^{n} P_j[ax_{1j}+(1-a)x_{2j}] = a\sum_{j=1}^{n} P_j x_{1j}+\sum_{j=1}^{n} P_j x_{2j}-a\sum_{j=1}^{n} P_j x_{2j}$

$$=ab+b-ab=b$$

显然 $x_j\geq 0, j=1,\cdots,n$ **证毕**

定理5 线性规划问题的**基可行解**对应线性规划问题**可行域的顶点**。

证明： (1) X不是基可行解 ➡ X不是可行域的顶点

X是**可行解，但不是基可行解**,所有**分量均非负**

不失一般性, 不妨设X的前k个分量为正，由X是可行解，得

$$\sum_{i=1}^{k} P_i x_i = b \qquad (1)$$

假设 $P_1,\cdots,P_k$ **线性相关，**

即存在不全为零的数$\delta_i, i=1,\cdots,k$

使得

$$\sum_{i=1}^{k} \delta_i P_i = 0 \qquad (2)$$

$(2)\times\mu,(\mu\neq 0)$, 得

$$\sum_{i=1}^{m} \mu\delta_i P_i = 0 \qquad (3)$$

$(1)+(3)$, 得

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i+\mu\delta_i)P_i = b$$

$(1)-(3)$, 得

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i-\mu\delta_i)P_i = b$$

令 $X^{(1)}=[x_1+\mu\delta_1,x_2+\mu\delta_2,\cdots,x_k+\mu\delta_k,0,\cdots,0]$

$$X^{(2)}=[x_1-\mu\delta_1,x_2-\mu\delta_2,\cdots,x_k-\mu\delta_k,0,\cdots,0]$$

选取适当的μ值，使

$$x_i\pm\mu\delta_i\geq 0,i=1,\cdots,m$$

则 $X^{(1)}\in S,X^{(2)}\in S,$ 又 $X=\dfrac{X^{(1)}+X^{(2)}}{2}$

即:X不是可行域的顶点。

注：定理2,若某个LP问题存在可行解,则至少存在一个基可行解.

(2)X不是可行域的顶点 ➡ X不是基可行解

X是可行解,所有分量均非负
不失一般性, 不妨设

$$X=(x_1,x_2,\cdots,x_r,0,\cdots,0)^T$$

由已知得,其不是可行域的顶点.

从而 $\exists\ Y\in S, Z\in S, Y\neq Z$

有 $X=aY+(1-a)Z\ (0<a<1)$

即

$$x_i=ay_i+(1-a)z_i\ (i=1,\cdots,n)$$

因 $a>0, 1-a>0$

固有当x_i=0时，必有y_i= z_i=0

因有 $\sum_{i=1}^{n}P_i x_i=\sum_{i=1}^{r}P_i x_i=b$

$$\sum_{i=1}^{n}P_i y_i=\sum_{i=1}^{r}P_i y_i=b \quad (*)$$

$$\sum_{i=1}^{n}P_i z_i=\sum_{i=1}^{r}P_i z_i=b \quad (**)$$

$(*)-(**)$ 得 $\sum_{i=1}^{r}(y_i-z_i)P_i=0$

因 (y_i-z_i) 不全为零

故 $P_1,P_2,\cdots,P_r$ 线性相关

即X不是基可行解。证毕

前面定理1-5得出的重要结论

线性规划问题最优解一定是基可行解

线性规划问题的可行域是凸集

基可行解一定是可行域的顶点

求线性规划问题最优解本质是凸优化问题

单纯形法的基本思想

单纯形法（*Simplex Method*）是1947年由 *G.B.Dantzig* 提出，是解 *LP* 问题最有效的算法之一，且已成为整数规划和非线性规划某些算法的基础。

基本思路：

基于 *LP* 问题的标准形式，先设法找到一个**基可行解**，**判断它是否是最优解，如果是则停止计算**；否则，则转换到**目标函数值不减（最优值为求最大值）的一个相邻基可行解**.（**如果最小值是最优解，则是相邻目标函数值不增**）

（相邻基可行解是指它们之间仅有一个基变量不相同）。

如何确定初始基可行解

由前面的定理3可知：**如果一个LP问题有最优解，则一定在某个基可行解处得到。**单纯形法的基本思想就是**先找到一个初始基可行解**，判断它是否最优，如若不是，就**找一个更好的基可行解，再进行判断**。如此迭代下去，直至找到最优基可行解，或者判定该问题无界！

$$\max\ z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j \qquad (1)$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i\ (i=1,2,\cdots,m) & (2)\\ x_j\ge 0 \qquad (j=1,2,\cdots,n) & (3)\end{cases}$$

化为标准形式

$$\max z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+\sum_{i=1}^{m}0x_{si}$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+x_{si}=b_i\ (i=1,2,\cdots,m)\\ x_j\ge 0,\ x_{si}\ge 0\ (j=1,2,\cdots,n;i=1,2,\cdots,m)\end{cases}$$

系数矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

取单位矩阵 $(P_{s1},\cdots,P_{sm})$ 作为基，则 $X=(0,\cdots,0,b_1,b_2,\cdots,b_m)^T$

就是初始基可行解.

从初始基可行解转化为另一基可行解

设初始基可行解为 $X^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)^T$

$$\sum_{i=1}^{n}P_i x_i^0=b$$

不失一般性, 假定前m个坐标为非零，因 $X^0\in S$, 固有

$$\sum_{i=1}^{m}P_i x_i^0=b \quad (*)$$

方程组(*)的增广矩阵可写为

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} P_1 & P_2 & & P_m & P_{m+1} & \cdots & P_j & & P_n & b \end{array}\\
\left[\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & b_1\\
0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2,m+1} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} & b_2\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 1 & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} & b_m
\end{array}\right]
\end{array}$$

因$(P_1,\cdots,P_m)$是一个基，**其余向量可由它们线性表示，**则

$$P_j=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}P_i\ ,j=1,2,\cdots,n \quad 或 \quad P_j-\sum_{i=1}^{m}a_{ij}P_i=0$$

上式$\times\theta,(\theta>0)$, $\quad \theta(P_j-\sum_{i=1}^{m}a_{ij}P_i)=0 \qquad (**)$

$(*)+(**)$ 得 $\quad \sum_{i=1}^{m}(x_i^0-\theta a_{ij})P_i+\theta P_j=b$

由上式知，$X^1=(x_1^0-\theta a_{1j},\ldots,x_m^0-\theta a_{mj},0,\cdots,\theta,\cdots,0)$ 满足 $\sum_{i=1}^{n}P_i x_i^1=b$

要使X^1是一个基可行解(最多有m个正分量)，而 $\theta>0$,

$x_i^0-\theta a_{ij}\geq 0\ ,i=1,2,\cdots,m$ 同时成立且**至少有一个等号成立**。

$$x_i^0 - \theta a_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \cdots, m$$

当$a_{ij} \leq 0$时，无论 θ 如何取值，都无法使上式等式成立。

故可令 $\theta = \min\limits_i \left\{ \dfrac{x_i^0}{a_{ij}} \middle| a_{ij} > 0 \right\} = \dfrac{x_l^0}{a_{lj}}$

则由上式，知 $x_i^0 - \theta a_{ij} \begin{cases} = 0\ (i = l) \\ \geq 0\ (i \neq l) \end{cases}$ $(*)$

则X^1中的正分量个数最多有m个，可证

$P_1, \cdots, P_{l-1}, P_{l+1} \cdots, P_m, P_j$ 线性无关，

故只需按$(*)$来确定的θ值， X^1就是一个新的基可行解。

一个基可行解转化为另一基可行解的方法

P_l作为换出向量，P_j作为换入向量；

相应地，x_l作为换出变量， x_j作为换入变量.

最优性检验和解的判别

将基可行解X^0和X^1分别代入目标函数得

$$X^0=(x_1^0,\cdots,x_m^0,0,\cdots,0)^T,$$

$$X^1=(x_1^0-\theta a_{1j},\cdots,x_m^0-\theta a_{mj},0,\cdots,\theta,\cdots,0)^T$$

$$z^0=\sum_{i=1}^{m}c_i x_i^0$$

$$z^1=\sum_{i=1}^{m}c_i(x_i^0-\theta a_{ij})+\theta c_j=\sum_{i=1}^{m}c_i x_i^0+\theta(c_j-\sum_{i=1}^{m}c_i a_{ij})$$

$$=z^0+\theta(c_j-\sum_{i=1}^{m}c_i a_{ij})$$

$\because \theta>0,\ \therefore$ 当$c_j-\sum_{i=1}^{m}c_i a_{ij}>0$时，就有$z^1>z^0$ 说明X^0不是最优解

$c_j-\sum_{i=1}^{m}c_i a_{ij}$ 通常简写为 c_j-z_j 或σ_j 检验数

线性规划问题的最优解分析

考虑线性规划问题：$(LP)\begin{cases} Max \quad Z = CX \\ S.T. \begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases} \end{cases}$

则 $A=(B,N)$，$X=(X_B,X_N)^T$，$C=(C_B,C_N)$

目标函数 $Z = CX = (C_B, C_N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = C_B X_B + C_N X_N$

约束条件 $AX = (B, N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = b \Rightarrow (I, B^{-1}N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = B^{-1}b$

$$\Longrightarrow \quad X_B + B^{-1}NX_N = B^{-1}b$$

$$Z = C_B B^{-1}b + (C_N - C_B B^{-1}N)X_N$$

$$AX \Rightarrow (I, B^{-1}N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = X_B + B^{-1}NX_N = B^{-1}b$$

由上述等式可看出，当$X_N=0$, $X_B=B^{-1}b$,满足$AX=b$条件

当$X_B=B^{-1}b\geq 0$， $X_N=0$ 时，B是可行基，X是基可行解

对于目标函数 $Z = C_B B^{-1}b + (C_N - C_B B^{-1}N)X_N$

当 $C_N - C_B B^{-1}N \leq 0$ 时，B是最优基，X是最优解,为了讨论问题的方便，改写为如下：

$$\left[I, B^{-1}N\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a^*_{1,m+1} & \cdots & a^*_{1k} & \cdots & a^*_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a^*_{2,m+1} & \cdots & a^*_{2k} & \cdots & a^*_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a^*_{m,m+1} & \cdots & a^*_{mk} & \cdots & a^*_{mn} \end{bmatrix} \qquad B^{-1}b = \begin{bmatrix} b^*_1 \\ b^*_2 \\ \vdots \\ b^*_m \end{bmatrix}$$

检验系数: $\sigma = C - C_B B^{-1}A = [C_B, C_N] - C_B(I, B^{-1}N)$

$= [0, C_N - C_B B^{-1}N]$

则基变量检验数为: 0

非基变量检验数 $\sigma_N = C_N - C_B B^{-1}N$

$$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}, j = m+1, \cdots, n$$

$$z = z_0 + \sum_{j=m+1}^{n} \sigma_j x_j, \quad z_0 = C_B B^{-1} b$$

$\sigma_j \le 0$ 时,达到最优。

从上述分析过程可知，可以将线性规划问题的的标准形式改写为如下形式：

$$Max\ z = z_0 + \sum_{j=m+1}^{n} \sigma_j x_j \qquad \sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}, j = m+1, \cdots, n$$

$$s.t. \quad x_i + \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}^* x_j = b_i^* \ (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$x_i \geq 0，\ x_j \geq 0 (i = 1, 2, \ldots, m；\ j = m+1, m+2, \ldots, n)$$

或者

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,m+1}^* & \cdots & a_{1k}^* & \cdots & a_{1n}^* \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2,m+1}^* & \cdots & a_{2k}^* & \cdots & a_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{m,m+1}^* & \cdots & a_{mk}^* & \cdots & a_{mn}^* \end{bmatrix} \times X = \begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ \vdots \\ b_m^* \end{bmatrix}$$

定理 6 在 *LP* 问题中，当检验数满足最优准则

$$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}^* \le 0, j = m+1,\cdots,n$$ 时，如果存在 $\sigma_k = 0$

($m+1 \le k \le n$)，则该 *LP* 问题有**无穷多个最优解**。

证明： 设LP问题有最优解X^0：$X^0 = (x_1^0,\cdots,x_m^0,0,\cdots,0)^T$，

最优值为：$Z^0 = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i^0$

由前面定理可知X^0也是线性规划问题的基可行解

σ_k对应约束矩阵的第k列 θ取$\left(0, \min_i \left\{ \frac{x_i^0}{a_{ik}^*} \middle| a_{ik}^* > 0 \right\}\right]$的任意值

则可构造 $X^1 = (x_1^0 - \theta a_{1k}^*,\cdots,x_m^0 - \theta a_{mk}^*,0,\cdots,\theta,\cdots,0)^T$

如果 $a_{ik}^* \le 0$, 显然 $x_i^0 - \theta a_{ik}^* \ge 0$; 当 $a_{ik}^* \ge 0$, 由构造知 $x_i^0 - \theta a_{ik}^* \ge 0$

X^1满足:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,m+1}^* & \cdots & a_{1k}^* & \cdots & a_{1n}^* \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2,m+1}^* & \cdots & a_{2k}^* & \cdots & a_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{m,m+1}^* & \cdots & a_{mk}^* & \cdots & a_{mn}^* \end{bmatrix} \times X^1 = \begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ \vdots \\ b_m^* \end{bmatrix}$$

则X^1是为LP问题的可行解

$$z^1 = \sum_{i=1}^{m} c_i (x_i^0 - \theta a_{ij}^*) + \theta c_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i^0 + \theta (c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}^*) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i^0 + \theta \sigma_k$$

因为 $\sigma_k = 0$ （$m+1 \le k \le n$），所以θ在上述区间取任何值都有最优值

$$Z^1 = Z^0 = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i^0,$$ 因此，有无穷多个最优解

定理 7 在 *LP* 问题中，如果存在非基变量的检验数$\sigma_k > 0$ ($m+1 \le k \le n$)，且有 $a_{ik}^* \le 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$ 即 $p_k^* \le 0$

则该 *LP* 问题**解无界（无最优解）**。

证明： $$Max\ z = z_0 + \sum_{j=m+1}^{n} \sigma_j x_j \qquad \sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}, j = m+1, \cdots, n$$

$$s.t. \quad x_i + \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}^* x_j = b_i^* \ (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$x_i \ge 0, \ x_j \ge 0 (i = 1, 2, \ldots, m; \ j = m+1, m+2, \ldots, n)$$

观察知 LP问题有可行解X^0： $X^0 = (b_1^*, \cdots, b_m^*, 0, \cdots, 0)^T$,

由于有 $a_{ik}^* \le 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$

对于任意 $\theta > 0$ 构造 $X^1 = (b_1^* - \theta a_{1k}^*, \cdots, b_m^* - \theta a_{mk}^*, 0, \cdots, \theta, \cdots, 0)^T$

下面证明X^1是该LP问题的可行解

$$X^1=(b_1^*-\theta a_{1k}^*,\cdots,b_m^*-\theta a_{mk}^*,0,\cdots,\theta,\cdots,0)^T$$

X^1是满足：
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,m+1}^* & \cdots & a_{1k}^* & \cdots & a_{1n}^* \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2,m+1}^* & \cdots & a_{2k}^* & \cdots & a_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{m,m+1}^* & \cdots & a_{mk}^* & \cdots & a_{mn}^* \end{bmatrix} \times X^1 = \begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ \vdots \\ b_m^* \end{bmatrix}$$

$$z^1=\sum_{i=1}^m c_i(b_i^*-\theta a_{ij}^*)+\theta c_j=\sum_{i=1}^m c_i b_i^*+\theta(c_j-\sum_{i=1}^m c_i a_{ij}^*)=\sum_{i=1}^m c_i b_i^*+\theta\sigma_k$$

$\because \sigma_k>0$，θ可取任意大于0的值,且为该LP问题的可行解

$\therefore Z^1=\sum_{i=1}^m c_i b_i^*+\theta\sigma_k$，在$\theta\to+\infty$时，$Z^1\to+\infty$

说明：1)当所有的$\sigma_j < 0$时，现有基可行解X^0即为最优解。

2)当在 $\sigma_j \le 0$中，如果有某个非基变量x_j的$\sigma_j = c_j - z_j = 0$，

且按$\theta = \min\limits_i \left\{ \dfrac{x_i^0}{a_{ij}} \middle| a_{ij} > 0 \right\} = \dfrac{x_l^0}{a_{lj}}$ 可以找到$\theta > 0$，

这表明可以找到另一个基可行解使目标函数也达到最大，此时该规划有无穷多最优解。

3)如果存在某个 $\sigma_j > 0$，又P_j的所有分量$a_{ij} \le 0$，则对任意$\theta > 0$，恒有 $x_i^0 - \theta a_{ij} \ge 0$，而$\theta$取值可无限大，

故目标函数也可无限增大，此时规划问题有无界解。

4)如果存在某个 $\sigma_j > 0$，又P_j的某个分量$a_{ij} > 0$，则可按前述构造新的基可行解,使目标函数值增大.

- 在单纯形法的一次迭代过程中,迭代前后的两个基有**m-1**个相同的列向量，这样的**基称为相邻基**。
- 在几何上，可以严格证明相邻基所对应的要么是可行域多面凸集的相邻顶点，要么是同一顶点;
- 因此直观地说，**单纯形法是从可行域多面凸集的一个顶点迭代到与其相邻的另一个顶点，直至找到最优解或判定问题无界**。

单纯形法的计算步骤

Step1:求出线性规划的初始基可行解，列出初始单纯形表。

先化成标准形式, 设法使系数矩阵中包含一个单位矩阵, 不妨设此单位矩阵是$(P_1,P_2,\ldots,P_m)$, 以此作为基可得一个初始基可行解$X=(b_1,b_2,\ldots,b_m)$.

构造初始单纯形表

所有变量对应的价值系数

所有决策变量

		$c_j \rightarrow$	c_1	…	c_m	…	c_j	…	c_n
C_B	基	b	x_1	…	x_m	…	x_j	…	x_n
c_1	x_1	b_1	1	…	0	…	a_{1j}	…	a_{1n}
c_2	x_2	b_2	0	…	0	…	a_{2j}	…	a_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮		⋮
c_m	x_m	b_m	0	…	1	…	a_{mj}	…	a_{mn}
		$\sigma_j=c_j-z_j$	0	…	0	…	$c_j-\sum_{i=1}^{m}c_i a_{ij}$	…	$c_n-\sum_{i=1}^{m}c_i a_{in}$

基变量对应的价值系数

基变量

基变量取值

基向量数字

非基向量数字

检验数

单纯形法的计算步骤(续)

Step2 进行最优性检验

若表中所有的 $\sigma_j \le 0$, 则表中的基可行解就是问题的最优解，计算结束。否则转下一步。

在所有的 $\sigma_j > 0$ 中，如果有某个$\sigma_k > 0$，所对应的 x_k 的系数列向量$P_k \le 0$（即 $a_{ik} \le 0$，$i = 1,2,\ldots,m$），则此问题解无界，停止计算。否则转入下一 步;

单纯形法的计算步骤(续)

Step3 基可行解转换，得到新单纯形表。

(1) 确定换入基变量.

$\sigma_k = \max_j \{\sigma_j \mid \sigma_j > 0\}, \sigma_k$ 对应的变量x_k作为换入基的变量.

(2) 确定换出基变量. $\theta = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{ik}} \middle| a_{ik} > 0 \right\} = \frac{b_l}{a_{lk}}$,

x_l作为换出基的变量，a_{lk}称为主元素。

(3) 生成新的单纯形表

以a_{lk} 为主元进行换基变换，用初等行变换将 x_k 所对应的列向量变换成单位列向量，即

$$P_k' = \begin{pmatrix} a_{1k}' \\ a_{2k}' \\ \vdots \\ a_{rk}' \\ \vdots \\ a_{mn}' \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Step4 将检验数行中的第k个元素也变换为零，得到新的单纯形表。重复第二、三步一直到计算终止。

单纯形法的计算步骤(续)

$c_j \rightarrow$			c_1	…	c_l	…	c_m	…	c_j	…	c_k	…	c_n
C_B	基	b	x_1	…	x_l	…	x_m	…	x_j	…	x_k	…	x_n
c_1	x_1	b_1'	1	…	$-\frac{a_{1k}}{a_{lk}}$	…	0	…	a_{1j}'	…	0	…	a_{1n}'
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮		⋮		⋮		⋮
c_k	x_k	$\frac{b_l}{a_{lk}}$	0	…	$\frac{1}{a_{lk}}$	…	0	…	a_{lj}'	…	1	…	a_{ln}'
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮		⋮		⋮		⋮
c_m	x_m	b_m'	0	…	$-\frac{a_{mk}}{a_{lk}}$	…	1	…	a_{mj}'	…	0	…	a_{mn}'
$\sigma_j = c_j - z_j$			0	…	$(c_l - z_l)'$	…	0	…	$(c_j - z_j)'$	…	0	…	$(c_n - z_n)'$

例1 用单纯形法求解线性规划问题

$$\max \ z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ 4x_1 \le 16 \\ 5x_2 \le 15 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

解： 将上述问题化为标准形式

$$\max \ z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$s.t. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 5x_2 + x_5 = 15 \\ x_j \ge 0 (j = 1, \cdots, 5) \end{cases}$$

P_3, P_4, P_5 组成初始基，

得到初始基可行解

$$X = (0,0,12,16,15)$$

初始单纯形表

$c_j \to$			2	3	0	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	12	2	2	1	0	0
0	x_4	16	4	0	0	1	0
0	x_5	15	0	[5]	0	0	1
$\sigma_j = c_j - z_j$			2	3	0	0	0

$\because \sigma_2 > \sigma_1 > 0 \quad \therefore x_2$为入基变量

$\because \theta = \min\limits_i \left\{ \dfrac{12}{2}, \cdots, \dfrac{15}{5} \right\} = 3, \quad \therefore x_5$ 为出基变量

$c_j \to$			2	3	0	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	12	2	2	1	0	0
0	x_4	16	4	0	0	1	0
0	x_5	15	0	[5]	0	0	1
$\sigma_j=c_j-z_j$			2	3	0	0	0

$c_j \to$			2	3	0	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	6	[2]	0	1	0	-2/5
0	x_4	16	4	0	0	1	0
3	x_2	3	0	1	0	0	1/5
$\sigma_j=c_j-z_j$			2	0	0	0	-3/5

$$\because \sigma_1 = 2 > 0 \quad \therefore x_1\text{为入基变量}$$

$$\because \theta = \min\left\{\frac{6}{2}, \frac{16}{4}, -\right\} = 3,$$

$$\therefore x_3\text{为出基变量}$$

$c_j \to$			2	3	0	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	3	1	0	1/2	0	-1/5
0	x_4	4	0	0	-2	1	4/5
3	x_2	3	0	1	0	0	1/5
$\sigma_j=c_j-z_j$			0	0	-1	0	-1/5

上表中所有的 $\sigma_j \le 0$, 得到最优解为：$X=(3,3,0,4,0)$.

最优值为：$z^* = 15$

问题

由定理知，一个非退化的线性规划问题一定可以在有限步内得到最优解或判定无最优解。
但是对于一个退化问题，情况又怎样呢？

例2 $$\max\ z=\frac{3}{4}x_1-150x_2+\frac{1}{50}x_3-6x_4$$

$$\begin{cases}\frac{1}{4}x_1-60x_2-\frac{1}{25}x_3+9x_4+x_5=0\\ \frac{1}{2}x_1-90x_2-\frac{1}{50}x_3+3x_4+x_6=0\\ x_3+x_7=1\\ x_j\ge 0\ (j=1,2,3,\cdots,7)\end{cases}$$

取 x_5, x_6, x_7 作为初始可行基。可见，它是一个退化的可行基。列出它的单纯形表，并进行迭代

$c_j \rightarrow$			3/4	-150	1/50	-6	0	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_5	0	[1/4]	-60	-1/25	9	1	0	0
0	x_6	0	1/2	-90	-1/50	3	0	1	0
0	x_7	1	0	0	1	0	0	0	1
$c_j - z_j$			3/4	-150	1/50	-6	0	0	0
3/4	x_1	0	1	-240	-4/25	36	4	0	0
0	x_6	0	0	[30]	3/50	-15	-2	1	0
0	x_7	1	0	0	1	0	0	0	1
$c_j - z_j$			0	30	7/50	-33	-3	0	0
3/4	x_1	0	1	0	[8/25]	-84	-12	8	0
-150	x_2	0	0	1	1/500	-1/2	-1/15	1/30	0
0	x_7	1	0	0	1	0	0	0	1
$c_j - z_j$			0	0	2/25	-18	-1	-1	0
1/50	x_3	0	25/8	0	1	-525/2	-75/2	25	0
-150	x_2	0	-1/160	1	0	[1/40]	1/120	-1/60	0
0	x_7	1	-25/8	0	0	525/2	75/2	-25	1
$c_j - z_j$			-1/4	0	0	3	2	-3	0

$c_j \to$			3/4	-150	1/50	-6	0	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1/50	x_3	0	25/8	0	1	-525/2	-75/2	25	0
-150	x_2	0	-1/160	1	0	[1/40]	1/120	-1/60	0
0	x_7	1	-25/8	0	0	525/2	75/2	-25	1
c_j -z_j			-1/4	0	0	3	2	-3	0
1/50	x_3	0	-125/2	10500	1	0	[50]	-150	0
-6	x_4	0	-1/4	40	0	1	1/3	-2/3	0
0	x_7	1	125/2	-10500	0	0	-50	150	1
c_j -z_j			1/2	-120	0	0	1	-1	0
0	x_5	0	-5/4	210	1/50	0	1	-3	0
-6	x_4	0	1/6	-30	-1/150	1	0	[1/3]	0
0	x_7	1	0	0	1	0	0	0	1
c_j -z_j			7/4	-330	-1/50	0	0	2	0
0	x_5	0	1/4	-60	-1/25	9	1	0	0
0	x_6	0	1/2	-90	-1/50	3	0	1	0
0	x_7	1	0	0	1	0	0	0	1
c_j -z_j			3/4	-150	1/50	-6	0	0	0

上述迭代过程中，初始表与最后表完全相同，即迭代6次后，又回到初始基。出现了“死循环”，永远也得不到最优解。

注： 在实际计算中, **单纯形方法出现死循环的现象是极其少见**的. 为了解决这个问题, 1952年, A .Charnes 提出摄动法; 1954年, G. B .Dantzig 提出字典序法.

波兰特法则

1974年, R . G . Bland利用组合方法**成功地解决了退化的线性规划问题**, 并提出了两条简便的规则, 称为勃兰特法则：

①选取$\sigma_j > 0$中**下标最小**的非基变量 x_k为换入变量，其中

$$k = \min\{j : \sigma_j > 0\}.$$

②选取最小比中**下标最小**的x_l基变量为换出变量。

人工变量法

前面讨论了在标准型中系数矩阵有单位矩阵，很容易确定一组基可行解。在实际问题中有些模型**并不含有单位矩阵**，为了得到一组基向量和初基可行解，**在约束条件的等式左端加一组虚拟变量，得到一组基变量**。这种人为加的变量称为人工变量，构成的可行基称为**人工基**，**用大M法或两阶段法**求解，这种用人工变量作桥梁的求解方法称为**人工变量法**。

人工变量法

例: 用单纯形法求解线性规划问题

$$\max \quad z = -3x_1 + x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \ge 1 \\ 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

解：化为标准形式

$$\max \quad z = -3x_1 + x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - x_5 = 1 \\ 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_j \ge 0 (j = 1, \cdots, 5) \end{cases}$$

系数矩阵

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

增加列向量, 构造出单位阵

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

约束条件可相应表为:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - x_5 + x_6 = 1 \\ 3x_2 + x_3 + x_7 = 9 \\ x_j \ge 0 (j = 1, 2, \cdots, 7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - x_5 + x_6 = 1 \\ 3x_2 + x_3 + x_7 = 9 \\ x_j \geq 0 (j = 1, 2, \cdots, 7) \end{cases}$$

人工变量

x_6, x_7

约束条件中增加人工变量后, 目标函数如何处理?

对任何可行解，原问题的等式约束必须满足，故在**最优解中人工变量取值必须为零.**

为此, 令目标函数中人工变量的系数为足够大的一个负值, **用 -*M*表示**, **只要当人工变量的取值不为0, 目标函数就不可能极大化.**

$$\max \ z = -3x_1 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 - Mx_7$$

暗示着在目标函数取最优值时，人工变量变为非基变量，且为0

$c_j \to$			-3	0	1	0	0	$-M$	$-M$
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_4	4	1	1	1	1	0	0	0
$-M$	x_6	1	-2	[1]	-1	0	-1	1	0
$-M$	x_7	9	0	3	1	0	0	0	1
c_j-z_j			$-2M-3$	$4M$	1	0	$-M$	0	0
0	x_4	3	3	0	2	1	1	-1	0
0	x_2	1	-2	1	-1	0	-1	1	0
$-M$	x_7	6	[6]	0	4	0	3	-3	1
c_j-z_j			$6M-3$	0	$4M+1$	0	$3M$	$-4M$	0
0	x_4	0	0	0	0	1	-1/2	1/2	-1/2
0	x_2	3	0	1	1/3	0	0	0	1/3
-3	x_1	1	1	0	[2/3]	0	1/2	-1/2	1/6
c_j-z_j			0	0	3	0	3/2	$-M-3/2$	$-M+1/2$
0	x_4	0	0	0	0	1	-1/2	1/2	-1/2
0	x_2	5/2	-1/2	1	0	0	-1/4	1/4	1/4
1	x_3	3/2	3/2	0	1	0	3/4	-3/4	1/4
c_j-z_j			-9/2	0	0	0	-3/4	$-M+3/4$	$-M-1/4$

例：用大M法解下列线性规划

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ x_1、x_2、x_3 \geq 0 \end{cases}$$

解：首先将数学模型化为标准形式

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 10 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,\cdots,5 \end{cases}$$

系数矩阵中不存在单位矩阵，无法建立初始单纯形表。

故人为添加两个单位向量，**得到人工变量单纯形法数学模型：**

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3 - Mx_6 - Mx_7$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 10 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \cdots, 7 \end{cases}$$

其中：**M是一个很大的抽象的数，不需要给出具体的数值，**可以理解为它能大于给定的任何一个确定数值；再用前面介绍的单纯形法求解该模型，计算结果见下表。

c_j			3	2	-1	0	0	-M	-M	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ_i
-M	x_6	4	-4	3	1	-1	0	1	0	4
0	x_5	10	1	-1	2	0	1	0	0	5
-M	x_7	1	2	-2	1	0	0	0	1	1
σ_j			3-2M	2+M	-1+2M↑	-M	0	0	0	
-M	x_6	3	- 6	5	0	-1	0	1	-1	3/5
0	x_5	8	-3	3	0	0	1	0	-2	8/3
-1	x_3	1	2	-2	1	0	0	0	1	—
σ_j			5-6M	5M↑	0	-M	0	0	1-2M	
2	x_2	3/5	-6/5	1	0	-1/5	0	1/5	-1/5	
0	x_5	31/5	3/5	0	0	3/5	1	-3/5	-7/5	31/3
-1	x_3	11/5	-2/5	0	1	-2/5	0	2/5	6/5	
σ_j			5 ↑	0	0	0	0	-M	8/5-M	
2	x_2	13	0	1	0	1	2	-1	-3	
3	x_1	31/3	1	0	0	1	5/3	-1	-7/3	
-1	x_3	19/3	0	0	1	0	2/3	0	4/15	
σ_j			0	0	0	-5	-25/3	5-M	13+4/15 -M	

两阶段法的基本思想

第一阶段：通过求解辅助问题的最优基可行解得到原问题的**初始基可行解**。

第二阶段：求原问题的最优解

辅 助 问 题

设原问题为

$$\max z = c^{\mathrm{T}} x$$

$$s.t.\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

不妨假设 $b \geq 0$

如果某一个元素小于0, 该方程两边乘于-1后则可以使右端数变成正数。

考虑如下辅助问题:

$$\min g = \sum_{i=n+1}^{n+m} x_i$$

$$s.t.\begin{cases} Ax + x_a = b \\ x \geq 0, x_a \geq 0 \end{cases}$$

其中 $x_a = (x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m})^{\mathrm{T}}$

首先用单纯形法解辅助问题。

原问题与辅助问题的关系

1. 若原问题有可行解, 则辅助规划的最优值为0, 反之亦然。

2. 由于$b \geq 0$,所以以 $x_a = (x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m})^{\mathrm{T}}$为基变量,

就可以得到辅助规划的初始基可行解 $(0, b^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$

3. 辅助规划有可行解 $(0, b^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$同时 $x_a \geq 0$,所以 $\sum_{i=n+1}^{n+m} x_i \geq 0$

即辅助问题的目标函数有下界, 所以该问题一定有最优解。

4. 先求辅助规划的最优基可行解 $(\tilde{x}, \tilde{x}_a)$,如果最优值为0，则

$\tilde{x}_a = 0$,所以 $\tilde{x}$是原问题的可行解。由于$(\tilde{x}, \tilde{x}_a)$是辅助规划

的基可行解,所以其非零分量对应系数矩阵的列向量线性无关。

所以 $\tilde{x}$ 的非零分量对应的系数矩阵的列向量也线性无关, 所以

$\tilde{x}$是原问题的基可行解。

例: 用两阶段法求解线性规划问题

原问题

$$\max \ z = -3x_1 + x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \ge 1 \\ 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

解：化为标准形式

$$\max \ z = -3x_1 + x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - x_5 = 1 \\ 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_j \ge 0 (j = 1, \cdots, 5) \end{cases}$$

辅助问题

$$\max \ z = -x_6 - x_7$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - x_5 + x_6 = 1 \\ 3x_2 + x_3 + x_7 = 9 \\ x_j \ge 0 (j = 1, \cdots, 5) \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & P_7 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$c_j \rightarrow$			0	0	0	0	0	-1	-1
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_4	4	1	1	1	1	0	0	0
-1	x_6	1	-2	[1]	-1	0	-1	1	0
-1	x_7	9	0	3	1	0	0	0	1
c_j -z_j			-2	4	0	0	-1	0	0
0	x_4	3	3	0	2	1	1	-1	0
0	x_2	1	-2	1	-1	0	-1	1	0
-1	x_7	6	[6]	0	4	0	3	-3	1
c_j -z_j			6	0	4	0	3	-4	0
0	x_4	0	0	0	0	1	-1/2	1/2	-1/2
0	x_2	3	0	1	1/3	0	0	0	1/3
0	x_1	1	1	0	[2/3]	0	1/2	-1/2	1/6
c_j -z_j			0	0	0	0	0	-1	-1

0	x_4	0	0	0	0	1	-1/2	1/2	-1/2
0	x_2	3	0	1	1/3	0	0	0	1/3
0	x_1	1	1	0	2/3	0	1/2	-1/2	1/6
$c_j - z_j$			0	0	0	0	0	-1	-1

$c_j \rightarrow$			-3	0	1	0	0
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	0	0	0	0	1	-1/2
0	x_2	3	0	1	1/3	0	0
- 3	x_1	1	1	0	[2/3]	0	1/2
$c_j - z_j$			0	0	3	0	3/2
0	x_4	0	0	0	0	1	-1/2
0	x_2	5/2	-1/2	1	0	0	-1/4
1	x_3	3/2	3/2	0	1	0	3/4
$c_j - z_j$			-9/2	0	0	0	-3/4

求辅助问题的三种情况

1. $\sum_{i=n+1}^{n+m} x_i = 0$ 且 x_a 为非基变量，则此时 $\tilde{x}$ 是原问题的基可行解，且基变量不变。在最优基可行解的单纯形表里删除 x_a 对应的列，同时计算出检验数就可以得到原问题的单纯形表。

2. $\sum_{i=n+1}^{n+m} x_i = 0$ 且 x_a 中有部分变量为基变量，此时 $\tilde{x}$ 是原问题的基可行解，不同的是基变量会有些改变。

3. $\sum_{i=n+1}^{n+m} x_i > 0$，则原问题没有可行解。