随机过程与排队论

信息与软件工程学院
顾小丰
Email：guxf@uestc.edu.cn

2020年9月27日星期日

上一讲内容回顾

齐次马氏链状态的分类

- 互通 首达
- 常返与非常返
- 正常返与零常返
- 状态空间分解
- 不可约马氏链
- 状态的周期性

本讲主要内容

- 齐次马氏链状态的分类
- 连续参数马尔可夫链
  - 转移概率函数、转移矩阵
  - 连续参数齐次马氏链
  - 初始分布、绝对分布、遍历性、平稳分布
  - 转移概率函数的性质
  - 状态转移速度矩阵

例1 两个吸收壁的随机游动

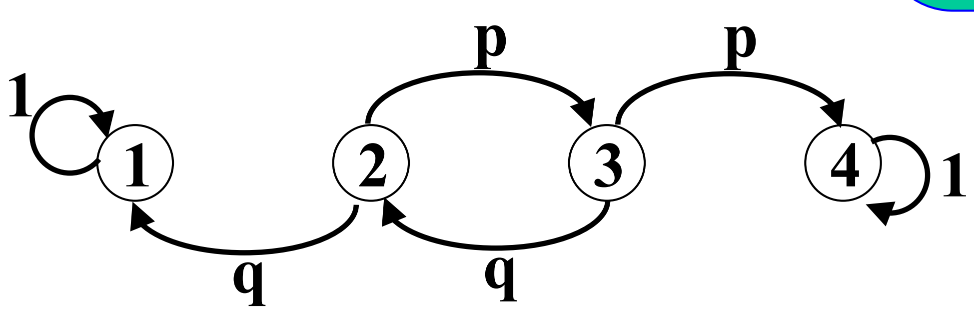
状态空间 $E=\{1, 2, 3, 4\}$

状态转移矩阵

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} 0<p<1 \\ p+q=1 \end{array}$$

状态转移图

以状态为结点，以状态转移概率为有向边的权值得到的赋权有向图。



例1(续)

$p_{11}=1$，$f_{11}(1)=1$， $f_{11}(n)=0\ (n>1)$， $f_{11}=1$， $\mu_1=1$，故状态1为吸收状态、正常返状态；

$p_{44}=1$，$f_{44}(1)=1$， $f_{44}(n)=0\ (n>1)$， $f_{44}=1$， $\mu_4=1$，故状态4为吸收状态、正常返状态；

$p_{22}=0$, $f_{22}(1)=0$, $f_{22}(2)=pq$, $f_{22}(n)=0\ (n>2)$, $f_{22}=pq$，故状态2为非常返状态。 状态2和3互通，$2\leftrightarrow 3$，具有相同的状态性质，即状态3也为非常返状态。从而

$N=\{2, 3\}$为非常返集；$C_1=\{1\}$、$C_2=\{4\}$都为正常返集。状态空间分解为

$$E=N+C_1+C_2$$

即 $$E=\{1, 2, 3, 4\}=\{2, 3\}+\{1\}+\{4\}$$

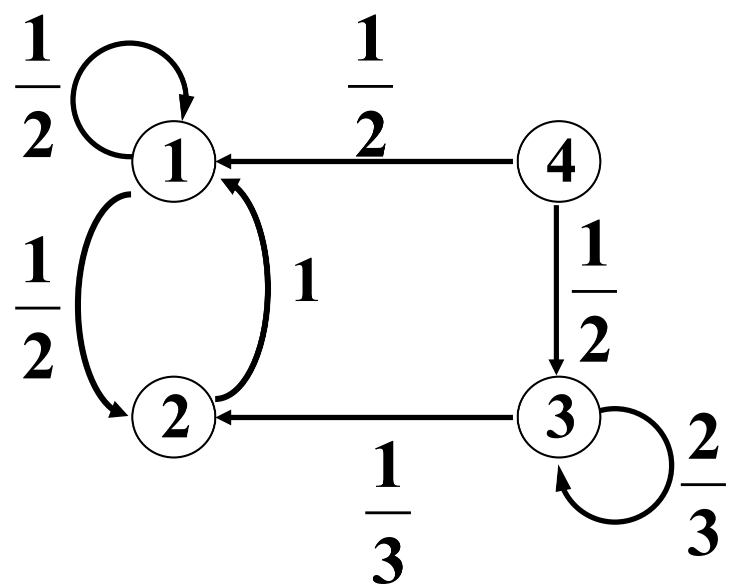
例2

设齐次马氏链的状态空间E＝{1, 2, 3, 4}，

转移矩阵

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

状态转移图



例2(续1)

由图可知，对一切n≥1，$f_{44}(n)=0$，从而

$$f_{44}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{44}(n)<1$$，故状态4为非常返状态；

$f_{33}(1)=\frac{2}{3}$，$f_{33}(n)=0\ (n>1)$，从而 $f_{33}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{33}(n)=\frac{2}{3}<1$，

故状态3非常返状态；

$$f_{11}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{11}(n)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

$$\mu_{11}=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{11}(n)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}<+\infty$$

$$f_{22}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{22}(n)=0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots=1$$

$$\mu_2=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{22}(n)=1\times0+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{2^2}+\cdots+n\times\frac{1}{2^{n-1}}=3<+\infty$$

例2(续2)

非周期正常返状态

故状态1和2都是正常返状态，又d＝1，故都是**遍历态**。

状态空间分解为

$$E=N+C$$

其中$N=\{3, 4\}$为非常返集；$C_1=\{1, 2\}$为正常返闭集。

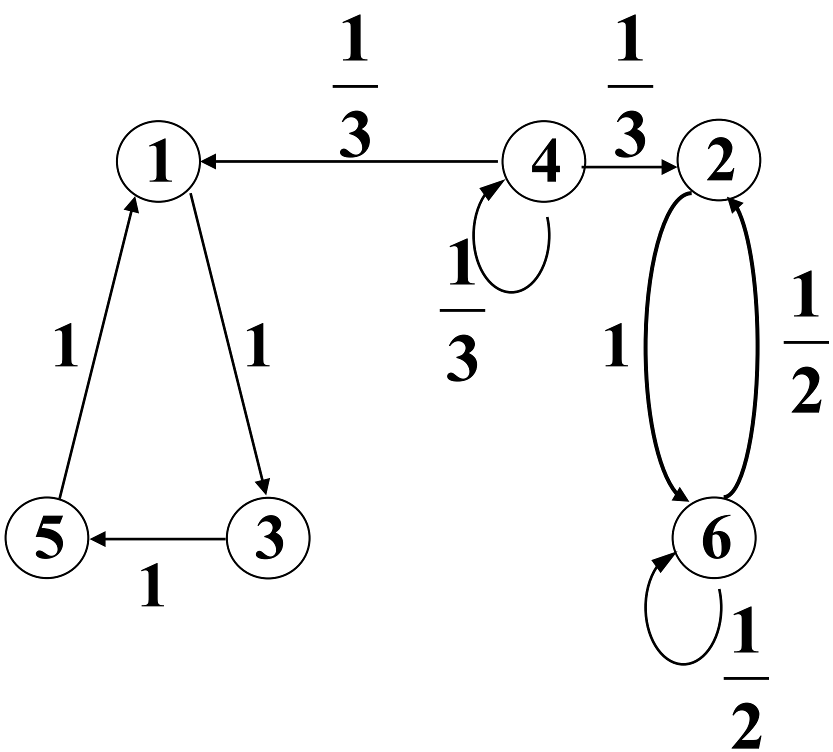
例3

设齐次马氏链的状态空间E＝{1, 2, 3, 4, 5, 6}，

转移矩阵

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

状态转移图



例3(续1)

因为$f_{11}(3)=1$，$f_{11}(n)=0$（$n\neq3$），$f_{11}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{11}(n)=1,$

$\mu_1=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{11}(n)=3<+\infty,$ 故状态1为正常返状态，且周期为3.

$1\leftrightarrow3\leftrightarrow5$，从而状态3和5与状态1有相同的状态性质，

由此可知，$C_1=\{1, 3, 5\}$是周期为3的正常返闭集。

$$f_{22}(1)=0, f_{22}(2)=\frac{1}{2}, f_{22}(3)=\frac{1}{2^2},\cdots, f_{22}(n)=\frac{1}{2^{n-1}}，(n\neq3)$$

$$f_{22}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{22}(n)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

$$\mu_2=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{22}(n)=\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot\frac{1}{2^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\frac{1}{2^{n-1}}-1=\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2}-1=3<+\infty$$

例3(续2)

故状态2为正常返状态。

$f_{66}(1)>0$，故状态6为非周期状态。

$2\leftrightarrow 6$，从而状态2与状态6有相同的状态性质，它们都是非周期、正常返、遍历状态，故$C_2=\{2, 6\}$是非周期、正常返、遍历闭集。

$$f_{44}(1)=\frac{1}{3}, f_{44}(n)=0(n\geq 2), f_{44}=\sum_{n=1}^{\infty} f_{44}(n)=\frac{1}{3}<1$$

故状态4为非常返状态。由于$f_{44}(1)>0$，故状态4为非周期状态。$N=\{4\}$为非周期非常返集。

该齐次马氏链的状态空间分解为

$$E=N+C_1+C_2$$

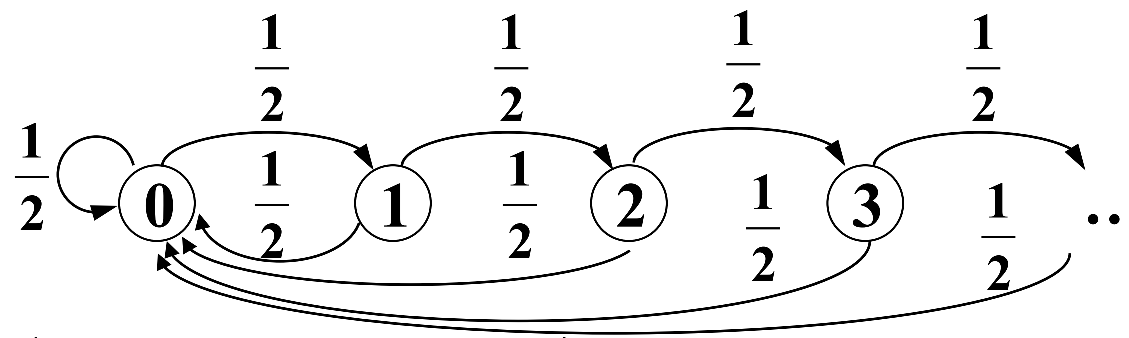
其中$N=\{4\}$为非常返集；$C_1=\{1, 3, 5\}$为周期为3的正常返闭集；$C_2=\{2, 6\}$为非周期、正常返遍历的闭集。

例4

设齐次马氏链的状态空间E＝{0, 1, 2, …}，转移概率为

$$p_{i,i+1}=\frac{1}{2},p_{i0}=\frac{1}{2},i\in E$$

状态转移图



转移矩阵

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots\\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots\\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix}$$

例4(续)

对状态0

$$f_{00}(1)=\frac{1}{2}, f_{00}(2)=\frac{1}{2^2}, \cdots, f_{00}(n)=\frac{1}{2^n}, \cdots$$

$$f_{00}=\sum_{n=1}^{\infty} f_{00}(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$$

$$\mu_0=\sum_{n=1}^{\infty} n f_{00}(n)=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2}=2<+\infty$$

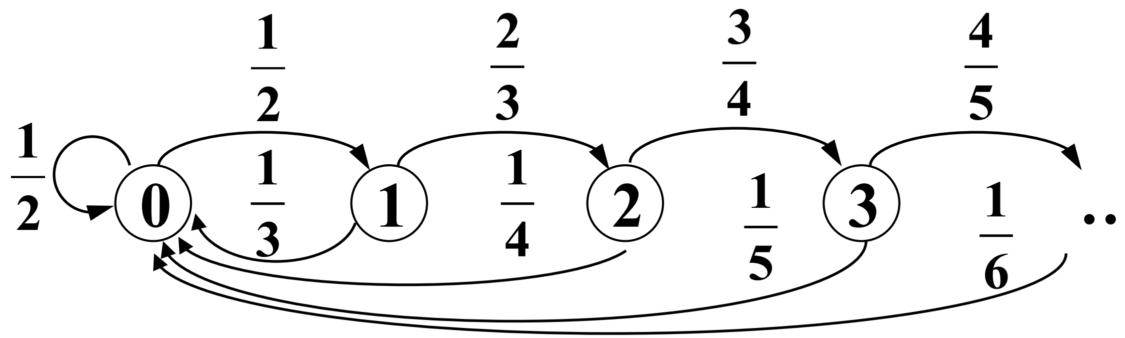
$$p_{00}(1)=p_{00}=\frac{1}{2}>0$$

故状态0为非周期、正常返、遍历状态。又因$p_{i0}=\frac{1}{2}$, $i\in E=\{0, 1, 2, \ldots\}$，从而状态i（i=0, 1, 2, …）与状态0互通，故状态i=1, 2, 3, …与状态0有相同的状态性质，都是非周期、正常返、遍历状态。因此该马氏链为不可约遍历的齐次马氏链。所有状态均为非周期、正常返、遍历状态。

例5

设齐次马氏链的状态空间E＝{0, 1, 2, …}，转移概率为 $p_{00}=\frac{1}{2}, p_{01}=\frac{1}{2},\quad p_{i,0}=\frac{1}{i+2}, p_{i,i+1}=\frac{i+1}{i+2}, i>0$

状态转移图



转移矩阵 $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \cdots \\ \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$

例5(续)

对状态0

$$f_{00}(1)=\frac{1}{2},\qquad f_{00}(2)=\frac{1}{2\times 3},\qquad f_{00}(3)=\frac{1}{2\times 3\times 4},\quad \cdots\ ,$$

$$f_{00}(n)=\left(\prod_{k=1}^{n+1}k\right)^{-1},\quad \cdots$$

$$f_{00}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{00}(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n+1}k\right)^{-1}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$$

故状态0为非常返状态。又因状态i（i = 0, 1, 2, …）与状态0互通，故状态i = 1, 2, 3, …与状态0有相同的状态性质，都是非常返状态。

§3.4 连续参数马尔可夫链

类似离散参数马氏链，只是把离散的时间参数改为连续的时间参数，便可得到类似的结果。

设随机过程$\{X(t), t\geq 0\}$，状态空间$E=\{0, 1, 2, \ldots\}$。若对于$0<t_1<t_2<\ldots<t_n<t_{n+1}$及非负整数$i_1, i_2, \ldots i_n, i_{n+1}$，有

$$P\{X(t_{n+1})=i_{n+1}|X(t_1)=i_1, X(t_2)=i_2, \ldots, X(t_n)=i_n\}$$
$$=P\{X(t_{n+1})=i_{n+1}|X(t_n)=i_n\}$$

即马尔可夫性成立，则称$\{X(t), t\geq 0\}$为**连续参数马尔可夫链**。

转移概率函数

设$\{X(t),\ t\geq 0\}$为连续参数马氏链，对任意$i, j\in E=\{0, 1, 2, \ldots\}$，任意非负实数$s, t$，条件概率

$p_{ij}(s, t)=P\{X(t+s)=j|X(s)=i\}$

称为此马氏链$\{X(t), t\geq 0\}$的转移概率函数，显然

$$0\leq p_{ij}(s,t)\leq 1, \sum_{j\in E} p_{ij}(s,t)=1$$

我们称

$$P(s, t)=(p_{ij}(s, t))_{i, j\in E}$$

为此马氏链的转移矩阵。

这里，$p_{ij}(s, t)$的直观意义是：系统(或质点)在时刻s时处于状态i，再经过t时间转到状态j的条件概率。

连续参数齐次马氏链

若$\{X(t), t\geq 0\}$为连续参数马氏链的转移概率$p_{ij}(s, t)$与时间起点s无关，即

$$p_{ij}(s, t)=P\{X(s+t)=j|X(s)=i\}=p_{ij}(t)$$

则称$\{X(t), t\geq 0\}$为连续参数齐次马氏链。

类似地，

$$P(t)=(p_{ij}(t))_{i, j\in E}$$

称为此齐次马氏链的转移矩阵。

$$0\leq p_{ij}(t)\leq 1, \quad \sum_{j\in E} p_{ij}(t)=1。$$

一般地，我们要求齐次马氏链的转移概率函数满足如下的连续性条件：

$$\lim_{t\to 0^+} p_{ij}(t)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

绝对分布、遍历性、平稳分布

设$\{X(t), t\geq 0\}$为连续参数齐次马氏链

1) $p_j = P\{X(0)=j\}$，$j\in E$，称$\{p_j, j\in E\}$为该马氏链的初始分布；

2) $P_j(t) = P\{X(t)=j\}$，$j\in E$，称$\{p_j(t), j\in E\}$为该马氏链的绝对分布；

3) 如果转移概率极限存在，$\lim\limits_{t\to+\infty} p_{ij}(t) = \pi_j > 0,\ \ i,j\in E$，且与i无关则称此连续参数齐次马氏链为遍历的马氏链，此时，我们说该链具有遍历性。

4) 若$\pi_j>0$，$\sum\limits_{j\in E}\pi_j = 1$，则称$\{\pi_j, j\in E\}$为齐次马氏链$\{X(t), t\geq 0\}$的极限分布。

5) 如果$\{v_j, j\in E\}$满足 $\begin{cases} v_j \geq 0, \sum\limits_{j\in E} v_j = 1 \\ v_j = \sum\limits_{i\in E} v_i p_{ij}(t) \end{cases}$

则称$\{v_j，j\in E\}$为齐次马氏链$\{X(t), t\geq 0\}$的平稳分布。

转移概率函数的性质

1. $0\le p_{ij}(t)\le 1$，$i, j\in E$； $\sum_{j\in E} p_{ij}(t)=1$。

连续性条件：$p_{ij}(+0)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$

2. $p_{ij}(t)$满足C-K方程

$$p_{ij}(t+s)=\sum_{r\in E} p_{ir}(t)p_{rj}(s)$$

矩阵形式： $P(t+s)=P(t)P(s)$

3. 绝对概率满足

$$p_j(t)=\sum_{i\in E} p_i p_{ij}(t)$$

如果齐次马氏链$\{X(t),\ t\ge 0\}$是遍历马氏链，则

$$\lim_{t\to+\infty} p_j(t)=\lim_{t\to+\infty} p_{ij}(t)=\pi_j, \qquad j\in E$$

转移概率函数的性质(续1)

4. 设齐次马氏链$\{X(t), t\geq 0\}$的状态有限，$E=\{0, 1, 2, \ldots, s\}$，如果存在$t_0>0$，使得对任意$i, j\in E$，都有$p_{ij}(t_0)>0$，则此齐次马氏链$\{X(t), t\geq 0\}$为遍历的齐次马氏链。即

$$\lim_{t\to+\infty} p_{ij}(t)=\pi_j,\qquad j\in E$$

存在且与i无关，并且极限分布$\{\pi_j, j\in E\}$是唯一的平稳分布：$\pi_j>0,\quad \sum_{i\in E}\pi_j=1,\quad \pi_j=\sum_{i\in E}\pi_i p_{ij}(t)$。

5. 对固定的i，j，函数$p_{ij}(t)$是$t>0$的一致连续函数。

6. 满足连续性条件的连续参数齐次马氏链$\{X(t), t\geq 0\}$存在下列极限

$$(1)\quad \lim_{t\to 0^+}\frac{1-p_{ii}(t)}{t}=q_{ii}=q_i,\qquad (2)\quad \lim_{t\to 0^+}\frac{p_{ij}(t)}{t}=q_{ij},\quad i\neq j$$

其中q_i表示通过状态i的通过速度(或通过强度)；q_{ij}表示从状态i转移到状态j的速度(或强度)，q_{ij}统称转移速度。

状态转移速度矩阵

设连续参数齐次马氏链{X(t), t≥0}，状态空间E={0, 1, 2, …, s}，下面s+1阶方阵：

$$Q=\begin{pmatrix} -q_{00} & q_{01} & q_{02} & \cdots & q_{0s} \\ q_{10} & -q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1s} \\ q_{20} & q_{21} & -q_{22} & \cdots & q_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ q_{s0} & q_{s1} & q_{s2} & \cdots & -q_{ss} \end{pmatrix}$$

称为齐次马氏链{X(t), t≥0}的状态转移速度矩阵，简称Q-矩阵。

由连续性条件和导数的定义，显然有

$$p'_{ij}(+0)=\begin{cases} -q_{ii}, & i=j \\ q_{ij}, & i\neq j \end{cases}$$

即 $P'(+0)=Q$。

转移概率函数的性质(续2)

7. 设齐次马氏链$\{X(t), t\geq 0\}$，状态空间$E=\{0, 1, 2, \ldots, s\}$，其转移速度

$$q_{ij} \geq 0, \qquad q_{ii} = \sum_{j\in E, j\neq i} q_{ij}$$

8. 设$\{X(t), t\geq 0\}$为连续参数齐次马氏链，当$q_i<+\infty$，$\sum\limits_{j\in E, j\neq i} q_{ij} = q_i$时，满足柯尔莫哥洛夫后退微分方程

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt} = -q_i p_{ij}(t) + \sum_{k\in E, k\neq i} q_{ik} p_{kj}(t)$$

即 $$P'(t) = QP(t)$$

9. 设$\{X(t), t\geq 0\}$为连续参数齐次马氏链, 当$q_i<+\infty$, $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{p_{ij}(t)}{t} = q_{ri}$时，则有柯尔莫哥洛夫前进微分方程

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt} = -p_{ij}(t) q_j + \sum_{k\in E, k\neq j} p_{ik}(t) q_{kj}$$

即 $$P'(t) = P(t)Q$$

转移概率函数的性质(续3)

10. 绝对概率满足（福克-普朗克方程）

$$p'_j(t) = -p_j(t)q_j + \sum_{r\in E, r\neq j} p_r(t)q_{rj}$$

11. 齐次不可约连续参数马氏链{X(t), t≥0}存在极限分布，即为平稳分布$\{\pi_j, j\in E\}$

$$-\pi_j q_j + \sum_{i\in E, i\neq j} \pi_i q_{ij} = 0$$

即　　$\Pi Q = 0$（零向量）

本讲主要内容

- 齐次马氏链状态的分类
- 连续参数马尔可夫链
  - 转移概率函数、转移矩阵
  - 连续参数齐次马氏链
  - 初始分布、绝对分布、遍历性、平稳分布
  - 转移概率函数的性质
  - 状态转移速度矩阵

下一讲内容预告

- 生灭过程

习 题 四

P155

23.

23. 设齐次马氏链$\{X(n), n=0,1,2,\cdots\}$的状态空间$E=\{1,2,3,4\}$，状态转移矩阵

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 画出状态转移图； (2) 讨论各状态性质； (3) 分解状态空间.