组合优化理论

第2章 对偶单纯形法

主讲教师：陈安龙

本讲主要内容

（1）原问题与对偶问题的相关概念

（2）原问题与对偶问题的关系

（3）对偶问题的最优解

（4）对偶单纯形法求最优解

一、问题的提出

对偶性是线性规划问题的最重要的内容之一。每一个线性规划（LP）必然有与之相伴而生的另一个线性规划问题，即任何一个求 maxZ 的LP都有一个求 minZ 的LP。其中的一个问题叫“原问题”，记为“P”，另一个称为“对偶问题”，记为“D”。

例1、资源的合理利用问题

已知资料如表所示，问应如何安排生产计划使得既能充分利用现有资源又使总利润最大?

单件消耗 产品 / 资源	甲	乙	资源限制
A	5	2	170（钢材）
B	2	3	100（煤炭）
C	1	5	150（设备）
单件利润	10	18	

数学模型：

$$\max Z = 10x_1 + 18x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 170 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 100 \\ x_1 + 5x_2 \le 150 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

(原问题)

下面从另一个角度来讨论这个问题：

假定：该厂的决策者不是考虑自己生产甲、乙两种产品，而是将厂里的现有资源用于接受外来加工任务，只收取加工费。试问该决策者应制定怎样的收费标准（合理的）？

分析问题：

1、每种资源收回的费用不能低于自己生产时的可获利润；

2、定价又不能太高，要使对方能够接受。

设y_1, y_2, y_3分别为三种资源的收费单价，所以有下式（从工厂角度）：

$$5y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 10$$

$$2y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 18$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

目标函数(针对外部用户)，用下式可以表达：

$$W = 170y_1 + 100y_2 + 150y_3$$

对外加工用户，W 越小越好，所以

$\min W = 170y_1 + 100y_2 + 150y_3$ 为最好。

该问题的数学模型为：

$$\min W = 170y_1 + 100y_2 + 150y_3$$

$$\begin{cases} 5y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 10 \\ 2y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 18 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

（对偶问题）

模型对比：

$$\max Z = 10x_1 + 18x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 170 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 100 \\ x_1 + 5x_2 \le 150 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

(原问题）

$$\min W = 170y_1 + 100y_2 + 150y_3$$

$$\begin{cases} 5y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 10 \\ 2y_1 + 3y_2 + 5y_3 \ge 18 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

（对偶问题）

对偶问题的形式

定义 设原线性规划问题为

$$\text{Max} \quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$s.t \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_j \ge 0 \left(j = 1,2,\cdots,n\right) \end{cases}$$

则称下列线性规划问题

$$\text{Min} \quad W = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m$$

$$s.t \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \ge c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \ge c_2 \\ \cdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \ge c_n \\ y_i \ge 0 \left(i = 1,2,\cdots,m\right) \end{cases}$$

为其对偶问题，其中y_i $(i=1,2,\ldots,m)$ 称为*对偶变量*。

上述对偶问题称为*对称型对偶问题*。

原问题简记为(P)，对偶问题简记为(D)

对偶问题的矩阵形式

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix};b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$C=\left[c_1,c_2,\cdots,c_n\right]$$

$$Y=\left[y_1,y_2,\cdots,y_m\right]$$

原始问题（P）

Max Z=CX

s.t. $AX\le b$

$X\ge 0$

对偶问题（D）

Min W=Yb

s.t. $YA\ge C$

$Y\ge 0$

原始问题与对偶问题的对应关系

Min W		Max Z				
		$x_1 \geq 0$	$x_2 \geq 0$	…	$x_n \geq 0$	
		x_1	x_2	…	x_n	
$y_1 \geq 0$	y_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	$\leq b_1$
$y_2 \geq 0$	y_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	$\leq b_2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$y_m \geq 0$	y_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	$\leq b_m$
		$\geq c_1$	$\geq c_2$	…	$\geq c_m$	

例1：求线性规划问题的对偶规划

$$Max \quad z = 5x_1 + 6x_2$$

$$s.t \quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 7 \\ 4x_1 + x_2 \le 9 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

解：由原问题的结构可知为对称型对偶问题

$$Min \quad w = 7y_1 + 9y_2$$

$$s.t \quad \begin{cases} 3y_1 + 4y_2 \ge 5 \\ -2y_1 + y_2 \ge 6 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

例2：求线性规划问题的对偶规划

$$Max \quad Z = 5x_1 - 6x_2$$

$$s.t \quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 7 \\ 4x_1 + x_2 \ge 9 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

解：由原问题的结构可知不是对称型对偶问题，可先化为对称型，再求其对偶规划。

$$Max \quad Z = 5x_1 - 6x_2 \qquad s.t \quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 7 \\ -4x_1 - x_2 \le -9 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$Min \quad W = 7y_1 - 9y_2 \qquad s.t \quad \begin{cases} 3y_1 - 4y_2 \ge 5 \\ -2y_1 - y_2 \ge -6 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

继续上页

$$Min \quad W = 7y_1 - 9y_2$$

$$s.t \begin{cases} 3y_1 - 4y_2 \ge 5 \\ -2y_1 - y_2 \ge -6 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$y_2' = -y_2$$

得到对偶问题

$$Min \quad W = 7y_1 + 9y_2'$$

$$s.t \begin{cases} 3y_1 + 4y_2' \ge 5 \\ -2y_1 + y_2' \ge -6 \\ y_1 \ge 0, y_2' \le 0 \end{cases}$$

原问题：

$$Max \quad Z = 5x_1 - 6x_2$$

$$s.t \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 7 \\ 4x_1 + x_2 \ge 9 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

例3：求线性规划问题的对偶规划

$$\begin{aligned} Max \quad & Z = 5x_1 + 6x_2 \\ s.t \quad & \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 7 \\ 4x_1 + x_2 \le 9 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \end{aligned}$$

解：由原问题的结构可知不是对称型对偶问题，可先化为对称型，再求其对偶规划。

$$\begin{aligned} Max \quad & Z = 5x_1 + 6x_2 \\ s.t \quad & \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 7 \\ 3x_1 - 2x_2 \ge 7 \\ 4x_1 + x_2 \le 9 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} Max \quad & Z = 5x_1 + 6x_2 \\ s.t \quad & \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 7 \\ -3x_1 + 2x_2 \le -7 \\ 4x_1 + x_2 \le 9 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \end{aligned}$$

上式已为对称型对偶问题，故可写出它的对偶规划

$$
\begin{aligned}
&Min \quad Z = 7y_1' - 7y_1'' + 9y_2 \\
&s.t \quad \begin{cases} 3y_1' - 3y_1'' + 4y_2 \geq 5 \\ -2y_1' + 2y_1'' + y_2 \geq 6 \\ y_1', y_1'', y_2 \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

令 $y_1 = y_1' - y_1''$ 则上式化为

$$
\begin{aligned}
&Min \quad Z = 7y_1 + 9y_2 \\
&s.t \quad \begin{cases} 3y_1 + 4y_2 \geq 5 \\ -2y_1 + y_2 \geq 6 \\ y_1\text{无限制}, y_2 \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Max \quad Z = 5x_1 + 6x_2 \\
&s.t \quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 7 \\ 4x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

对偶关系对应表

<table>
<tr><th colspan="2">原始问题（对偶问题）</th><th colspan="2">对偶问题（原始问题）</th></tr>
<tr><td colspan="2">目标函数 max</td><td colspan="2">目标函数 min W</td></tr>
<tr><td colspan="2">系数矩阵 A</td><td colspan="2">系数矩阵 A^T</td></tr>
<tr><td colspan="2">目标函数系数为 C</td><td colspan="2">常数列向量为 C^T</td></tr>
<tr><td colspan="2">常数列向量为 b</td><td colspan="2">目标函数系数为 b^T</td></tr>
<tr><td rowspan="4">约束条件</td><td>m 个</td><td>m 个</td><td rowspan="4">对偶变量</td></tr>
<tr><td>≤型(第i个)</td><td>$y_i \ge 0$</td></tr>
<tr><td>＝型(第i个)</td><td>无限制</td></tr>
<tr><td>≥型(第i个)</td><td>$y_i \le 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">决策变量</td><td>n 个</td><td>n 个</td><td rowspan="4">约束条件</td></tr>
<tr><td>$x_j \ge 0$</td><td>≤ 型(第j个)</td></tr>
<tr><td>$x_j \le 0$</td><td>≥型 (第j个)</td></tr>
<tr><td>无限制</td><td>＝型(第j个)</td></tr>
</table>

非规范形式下的原问题与对偶问题

(1) 变量取值范围不符合非负要求的情况

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 \qquad\longrightarrow\qquad \min w = b_1y_1 + b_2y_2$$

$$s.t.\begin{cases} 11x_1 + 12x_2 \le b_1 \\ 21x_1 + 22x_2 \le b_2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad s.t.\begin{cases} 11y_1 + 21y_2 \ge c_1 \\ 12y_1 + 22y_2 \ge c_2 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 \qquad\longrightarrow\qquad \min w = b_1y_1 + b_2y_2$$

$$s.t.\begin{cases} 11x_1 + 12x_2 \le b_1 \\ 21x_1 + 22x_2 \le b_2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \le 0 \end{cases} \qquad s.t.\begin{cases} 11y_1 + 21y_2 \ge c_1 \\ 12y_1 + 22y_2 \le c_2 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 \qquad\longrightarrow\qquad \min w = b_1y_1 + b_2y_2$$

$$s.t.\begin{cases} 11x_1 + 12x_2 \le b_1 \\ 21x_1 + 22x_2 \le b_2 \\ x_1 \ge 0, x_2\text{无约束} \end{cases} \qquad s.t.\begin{cases} 11y_1 + 21y_2 \ge c_1 \\ 12y_1 + 22y_2 = c_2 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

(2) 约束方程不是“≤”的情况

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 \quad\longrightarrow\quad \min w = b_1y_1 + b_2y_2$$

$$s.t.\begin{cases} 11x_1 + 12x_2 \le b_1 \\ 21x_1 + 22x_2 \le b_2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \quad\longrightarrow\quad s.t.\begin{cases} 11y_1 + 21y_2 \ge c_1 \\ 12y_1 + 22y_2 \ge c_2 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 \quad\longrightarrow\quad \min w = b_1y_1 + b_2y_2$$

$$s.t.\begin{cases} 11x_1 + 12x_2 \le b_1 \\ 21x_1 + 22x_2 \ge b_2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases} \quad\longrightarrow\quad s.t.\begin{cases} 11y_1 + 21y_2 \ge c_1 \\ 12y_1 + 22y_2 \ge c_2 \\ y_1 \ge 0, y_2 \le 0 \end{cases}$$

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 \quad\longrightarrow\quad \min w = b_1y_1 + b_2y_2$$

$$s.t.\begin{cases} 11x_1 + 12x_2 \le b_1 \\ 21x_1 + 22x_2 = b_2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases} \quad\longrightarrow\quad s.t.\begin{cases} 11y_1 + 21y_2 \ge c_1 \\ 12y_1 + 22y_2 \ge c_2 \\ y_1 \ge 0, y_2\text{无约束} \end{cases}$$

写出下列问题的对偶问题

$$\max z = x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \le 2 \\ 3x_1 - x_2 + 6x_3 \ge 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0,\ x_3\text{无约束} \end{cases}$$

对偶变量

y_1

y_2

y_3

$$\min w = 2y_1 + y_2 + 4y_3$$

$$s.t.\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 1 \\ 3y_1 - y_2 + y_3 \le 4 \\ -5y_1 + 6y_2 + y_3 = 3 \\ y_1 \ge 0, y_2 \le 0, y_3\text{无约束} \end{cases}$$

变量

$x_1 \ge 0$

$x_2 \le 0$

x_3 无约束

对偶问题的基本性质

定理1 对偶问题(D)的对偶就是原问题(P)。

$$\begin{array}{ll} Max & Z = CX \\ s.t & \begin{cases} AX \le b \\ X \ge 0 \end{cases} \end{array}$$

对偶的定义

$$\begin{array}{ll} Min & W = Yb \\ s.t & \begin{cases} YA \ge C \\ Y \ge 0 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} Max & W' = -Yb \\ s.t & \begin{cases} -YA \le -C \\ Y \ge 0 \end{cases} \end{array}$$

对偶的定义

$$\begin{array}{ll} Min & Z' = -CX \\ s.t & \begin{cases} -AX \ge -b \\ X \ge 0 \end{cases} \end{array}$$

假设线性规划的原问题和对偶问题分别为

$$\max S = CX \qquad\qquad \min W = Yb$$

$$\begin{cases} AX \le b \\ X \ge 0 \end{cases} \quad \text{(P)} \qquad \text{和} \qquad \begin{cases} YA \ge C \\ Y \ge 0 \end{cases} \quad \text{(D)}$$

定理2（弱对偶定理）

若 X 和 Y 分别为原问题(P)及其对偶问题(D)的任意可行解，则有 $CX \le Yb$ 成立。

证明：

$$\begin{cases} AX_0 \le b \\ Y_0 A \ge C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y_0 A X_0 \le Y_0 b \\ Y_0 A X_0 \ge C X_0 \end{cases} \Rightarrow C X_0 \le Y_0 b$$

推论1 若 X 和 Y 分别为原问题(P)及其对偶问题(D)的一对可行解，则问题(P)及问题(D)的都有最优解。

证明： 当X和Y为原问题和对偶问题的一个可行解

有 $AX \le b$ $YA \ge C$

$YAX \le Yb$ $YAX \ge CX$

原问题目标函数值 $\boxed{CX \le YAX \le Yb}$ 对偶问题目标函数值

结论：

(1) **最大值原问题**的任意可行解的目标函数值是其**对偶问题最优值的下界**.

(2) **最小值对偶问题**的任意可行解的目标函数值对应的目标函数值是其**原问题最优值的上界**.

推论2： 若原问题(P)有可行解，但无有限最优解，则对偶问题(D)无可行解。

证明： 使用反正法：假设原问题(P)有可行解，对偶问题（D）也存在可行解

由推论1知，原问题(P)和对偶问题（D）都有最优解，则与原问题无最优解矛盾。

定理3: 若 X^* 和 Y^* 分别是原始问题和对偶问题的可行解，且有 $CX^*=Y^*b$，则 X^* 和 Y^*分别是原始问题和对偶问题的**最优解**.

证明： 设 X 是原始问题的任一可行解

由推论1可得 $CX \le Y^*b$

又已知 $CX^*=Y^*b$

$$\left.\begin{aligned} CX &\le Y^*b \\ CX^* &= Y^*b \end{aligned}\right\} \Rightarrow CX \le CX^*$$

由X 的任意性可知， X^* 是原始问题的最优解.

同理可证 Y^* 是对偶问题的最优解.

说明： 原问题和对偶问题的最优值相等,$CX^*=Y^*b$.

定理 4：(强对偶定理) 如果原问题P有最优解，那么对偶问题D也有最优解，且**目标函数值相等。**

证明： 假设有原问题P和对偶问题D：

(P) $\text{Max} \quad Z = CX$

$$\text{s.t} \quad \begin{cases} AX \le b \\ X \ge 0 \end{cases}$$

(D) $Min \quad W = Yb$

$$s.t \quad \begin{cases} YA \ge C \\ Y \ge 0 \end{cases}$$

设X^*是原始问题的最优解，它对应的最优基为B，则相应的基变量为: $X^*_B = B^{-1}b,$

最优值为 $\text{Max}\ S = CX^* = C_B B^{-1} b$ 检验数为：$C - C_B B^{-1} A \le 0$

令 $Y^* = C_B B^{-1}$ 则 $Y^* A \ge C$ 即Y^*是对偶问题的一个可行解，

而 $Y^* b = C_B B^{-1} b = CX^*$ 由定理3知，Y^*是对偶问题的最优解.

原问题与对偶问题的关系，有且仅有下列三种：

1. 两个都有最优解，且目标函数最优值相等；
2. 两个都无可行解；
3. 一个问题无界，则另一问题无可行解。

例：已知线性规划问题：

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \le 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

试用对偶理论证明该问题无最优解.

解：写出对偶问题,

$$\min w = 2y_1 + y_2$$

$$\begin{cases} -y_1 - 2y_2 \ge 1 \\ y_1 + y_2 \ge 1 \\ y_1 - y_2 \ge 0 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

若原问题有最优解,

则对偶问题也有最优解,

但是观察可知, 对偶问题无可行解, 更不会有最优解,

故原问题无最优解.

定理5：若原始问题的最优解存在，则用单纯形法求解时，其**对偶问题的最优解**可同时在最优单纯形表上得到，且**顺次等于松弛变量或剩余变量对应的检验数的相反数.**

证明：设原问题和对偶问题分别为

$$\max S = CX \qquad\qquad \min W = Yb$$

$$\begin{cases} AX \le b \\ X \ge O \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} YA \ge C \\ Y \ge O \end{cases}$$

引入剩余变量和松弛变量，将约束条件标准化，得到

$$\max S = CX \qquad\qquad \min W = Yb$$

$$\begin{cases} AX + X_s = b \\ X, X_s \ge O \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} YA - Y_S = C \\ Y, Y_S \ge O \end{cases}$$

设B是原问题的最优基，且

$$A=(B\ N), X=\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix}, \quad C=(C_B\ C_N),$$

则有 $$S=C_B X_B + C_N X_N$$ →目标函数

及 $$BX_B + NX_N + X_s = b$$ →约束方程

$$\Rightarrow X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N - B^{-1}X_s$$

$$\Rightarrow S = C_B B^{-1}b + (C_N - C_B B^{-1}N)X_N - C_B B^{-1}X_s$$

则原问题的最优值为: $\max S = C_B B^{-1} b$

再来看对偶问题：

$$\min W = Yb \qquad \begin{cases} YA - Y_S = C \\ Y, Y_S \geq O \end{cases}$$

$$\Rightarrow \min W = Yb \qquad \begin{cases} YB - Y_{S_1} = C_B \\ YN - Y_{S_2} = C_N \\ Y, Y_{S_1}, Y_{S_2} \geq O \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y = Y_{s_1} B^{-1} + C_B B^{-1}$$

$$\Rightarrow Y_{S_2} = C_B B^{-1} N - C_N$$

$$\min W = Yb = (Y_{s_1} B^{-1} + C_B B^{-1}) b = Y_{s_1} B^{-1} b + C_B B^{-1} b$$

由强对偶定理知：

$$\min W = MAX\ S = Y_{s_1} B^{-1} b + C_B B^{-1} b = C_B B^{-1} b$$

$$\Rightarrow Y_{s_1} = 0 \quad \Rightarrow Y = C_B B^{-1}$$

$$S = C_B B^{-1} b + (C_N - C_B B^{-1} N) X_N - C_B B^{-1} X_s$$

		X_B	X_N	X_s
S	$C_B B^{-1} b$	O	$C_N - C_B B^{-1} N$	$-C_B B^{-1}$

$-Y_{S_1}$ $-Y_{S_2}$ $-Y$

其中,Y_{S_1}是的剩余变量,对应原问题中基变量 X_B,

Y_{S_2}是的剩余变量,对应原问题中非基变量 X_N.

原问题单纯形表的检验数行

		X_B	X_N	X_s
S	$C_B B^{-1} b$	O	$C_N - C_B B^{-1} N$	$-C_B B^{-1}$
		$-Y_{S_1}$	$-Y_{S_2}$	$-Y^*$

构成对偶问题的基可行解

$$Y = (Y^*, Y_{S_1}, Y_{S_2})$$

1、若所有分量都大于零，则该解是对偶问题的一个基本可行解；

2、若是最优单纯形表，则该解是对偶问题的最优解.

定理6（互补松弛性） 若 X^*和Y^*分别是原始问题和对偶问题的可行解，且X_s和 Y_s分别为它们的松弛变量和剩余弛变量，则 $Y^*X_s=0$ 和$Y_sX^*=0$ 当且仅当 X^*和Y^* 分别为它们的最优解.

证明：必要性

$$AX^*\le b \Rightarrow AX^*+X_s=b \Rightarrow Y^*AX^*+Y^*X_s=Y^*b$$

$$Y^*A\ge C \Rightarrow Y^*A-Y_s=C \Rightarrow Y^*AX^*-Y_sX^*=CX^*$$

两式相减得： $Y^*X_s+Y_sX^*=CX^*-Y^*b$

若 $Y^*X_s=Y_sX^*=0$ ，则有 $CX^*=Y^*b$

由定理可知，X^*、Y^*分别是原问题和对偶问题的最优解.

下证充分性.

若 X^*、Y^*分别是原问题和对偶问题的最优解,

则 $CX^* = Y^*b$

由必要性证明可知: $Y^*X_s + Y_sX^* = CX^* - Y^*b$

$\Rightarrow Y^*X_s + Y_sX^* = 0$

又 X^*、Y^*、X_s、$Y_s \geq 0$

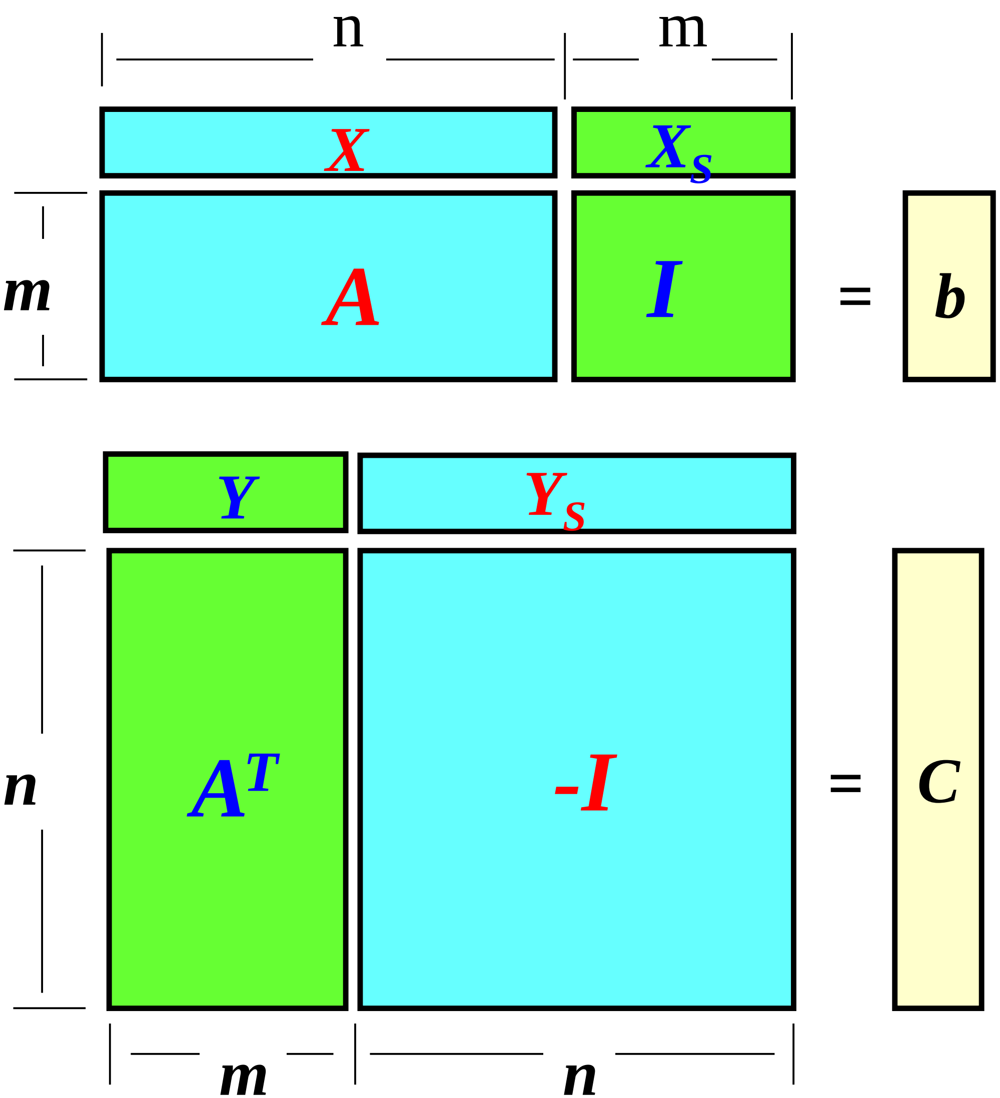
故 $Y^*X_s = 0,\ Y_sX^* = 0.$

原始问题和对偶问题变量、松弛变量的维数

$Max \quad Z=CX$

$s.t. \quad AX+X_S=b$

$X, X_S \geq 0$



$Min \quad W=Yb$

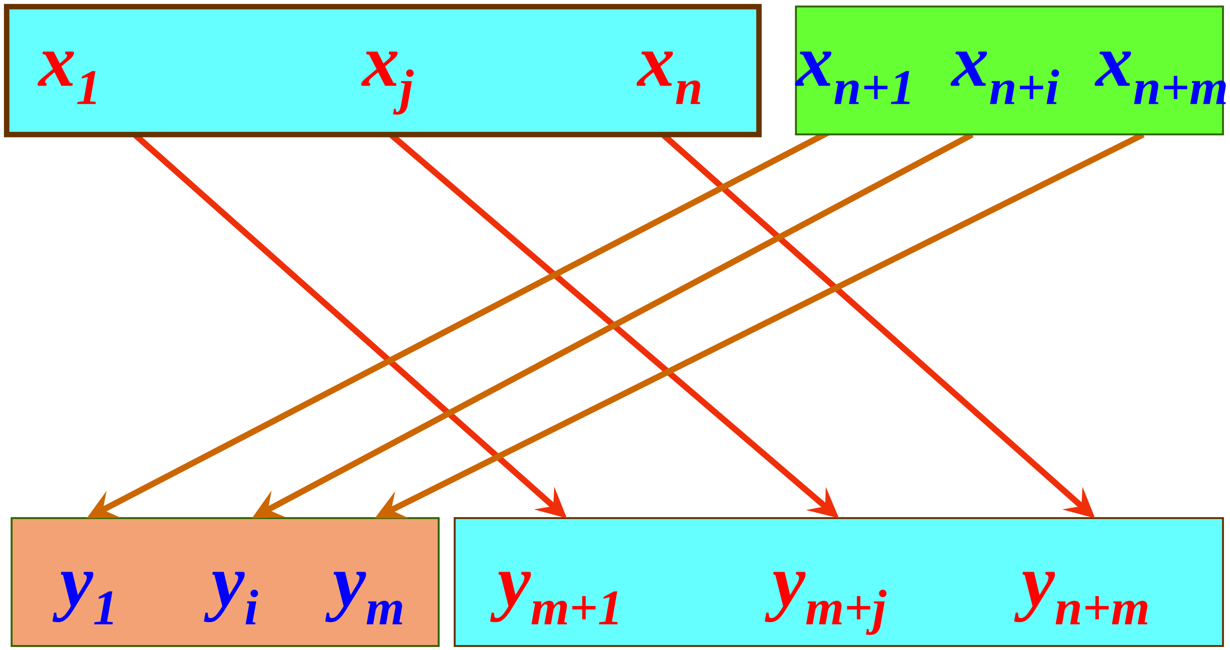
$s.t. \quad YA-Y_S=C$

$W, W_S \geq 0$

$XY_S=0$

$X_SY=0$

原始问题的变量　　原始问题的松弛变量



对偶问题的变量　　对偶问题的松弛变量

$x_j y_{m+j}=0 \quad y_i x_{n+i}=0 \quad (i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n)$

在一对变量中，其中一个大于0，另一个一定等于0

例、已知原问题的最优解为

$X^* =$（0，0，4）^{T}，Z=12 。

试求对偶问题的最优解。

$$\max Z = x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \le 2 \\ 3x_1 - x_2 + 6x_3 \ge 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \le 0, x_3\text{无约束} \end{cases}$$

解：

$$\min W = 2y_1 + y_2 + 4y_3$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 1 & (1) \\ 3y_1 - y_2 + y_3 \le 4 & (2) \\ -5y_1 + 6y_2 + y_3 = 3 & (3) \\ y_1 \ge 0, y_2 \le 0, y_3\text{无约束} \end{cases}$$

将原问题转化如下标准形式，$x_4 \ge 0, x_5 \ge 0, x_6 \ge 0$ 为松弛变量

$$\max Z = x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 - \quad x_2 + 6x_3 - x_5 = 1 \\ \quad x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 + x_6 = 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \le 0, x_3\text{无约束}, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0, x_6 \ge 0 \end{cases}$$

因为 $X^* =(0，0，4)^T$是原问题最优解，则：$x_1=0, x_2=0, x_3=4$

代入上述约束方程组得： $x_4=22, x_5=25, x_6=0$

$$X = (\overbrace{x_1, x_2, x_3}^{X^*}, \overbrace{x_4, x_5, x_6}^{X_s})$$

$$Y = (\underbrace{y_1, y_2, y_3}_{Y^*}, \underbrace{y_4, y_5, y_6}_{Y_s})$$

所以，根据互补松弛条件，必有 $y^*_1= y^*_2=0$，代入对偶问题 (3)式，$y_3=3$。因此，对偶问题的最优解为 $Y^*=(0，0，3)$，$W=12$。

对偶单纯形法

对偶单纯形法是应用对偶原理求解原始线性规划的一种方法——在原始问题的单纯形表格上进行对偶处理。

注意：不是解对偶问题的单纯形法！

对偶单纯形法的基本思想

1、对“单纯形法”求解过程认识的提升

从更高的层次理解单纯形法

初始可行基（对应一个初始基本可行解）

→迭代→另一个可行基（对应另一个基本可行解），

直至所有检验数≤0为止。

所有检验数≤0意味着

$$C_N - C_B B^{-1} N \le 0 \Rightarrow YA \ge C$$ ，

说明原始问题的最优基也是对偶问题的可行基。

换言之，当原始问题的基B既是原始可行基又是对偶可行基时，**B成为最优基**。

定理7 B是线性规划的最优基的充要条件是：B是可行基，同时也是对偶可行基。

LP原问题:

$$Max\,Z = \mathbf{CX}$$
$$s.t.\begin{cases} \mathbf{AX} = \mathbf{b} \\ \mathbf{X} \geq 0 \end{cases}$$

若B是A中的一个基

可行基	对偶可行基
B对应的解是基可行解，则B是可行基	若单纯形乘子 $Y = \mathbf{C_B B^{-1}}$ 是对偶问题的可行解，则B是对偶可行基

$Y = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}$ 是对偶问题的可行解 ⟺ 等价 ⟺ 检验数 $\sigma_N \leq 0$

$$\mathbf{YA} \geq \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C_B B^{-1} A} \geq \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C} - \mathbf{C_B B^{-1} A} \leq 0 \rightarrow \sigma_N \leq 0$$

证明：

$$\mathbf{C}-\mathbf{C_B B^{-1} A}\le \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{C}_B \vdots \mathbf{C}_N)-\mathbf{C_B B^{-1}}(\mathbf{B}\vdots\mathbf{N})\le \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{C}_B \vdots \mathbf{C}_N)-(\mathbf{C_B B^{-1} B}\vdots\mathbf{C_B B^{-1} N})\le \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{C}_B-\mathbf{C_B B^{-1} B}\vdots\mathbf{C}_N-\mathbf{C_B B^{-1} N})\le \mathbf{0}$$

$$\mathbf{C}_B-\mathbf{C_B B^{-1} B}=\mathbf{0}$$

$$\mathbf{C}_N-\mathbf{C_B B^{-1} N}\le \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_N \le 0$$

对偶单纯形法的基本思路：

原问题基可行解

$$\boldsymbol{b}^* = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$$

对偶问题

最优解判断

最优解判断

$$\sigma_j = c_j - z_j \leq 0$$

对偶问题的可行解

对偶单纯形法

基本思路

计算步骤：

求解如右的*LP*问题：

$$\max\ z = cx$$
$$s.t.\quad Ax = b$$
$$x \geq 0$$

Step1 建立初始单纯形表，计算检验数行。

所有决策变量

$c_j \rightarrow$			c_1	…	c_m	…	c_j	…	c_n
C_B	基	$B^{-1}b$	x_1	…	x_m	…	x_j	…	x_n
c_1	x_1	b^*_1	1	…	0	…	a_{1j}	…	a_{1n}
c_2	x_2	b^*_2	0	…	0	…	a_{2j}	…	a_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮		⋮
c_m	x_m	b^*_m	0	…	1	…	a_{mj}	…	a_{mn}
$\sigma_j = c_j - z_j$			0	…	0	…	$c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$	…	$c_n - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{in}$

基变量取值

基向量数字

非基向量数字

检验数

σ_j 小于等于零

Step 2 若 $b^*=B^{-1}b \geq 0$，则停止计算，当前的解 $x=B^{-1}b$ 即为原问题的最优解，否则转入下一步；

Step 3 确定换出基变量：

令 $$b_l^* = \min\{b_i^* \mid 1 \leq i \leq m\}$$

$$\delta_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$$

则取 x_l 为换出基变量；

Step 4 若 $a_{lj}^* \geq 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$ 则停止计算，原问题无可行解，否则转入下一步；

Step 5 确定换入基变量：若 $\theta = \min\left\{\frac{\sigma_j}{a_{lj}^*} \middle| a_{lj}^* < 0, 1 \leq j \leq n\right\} = \frac{\sigma_k}{a_{lk}^*}$

则取 x_k 为换入基变量

Step 6 以 a_{lk}^* 为主元，将主元素变成1，主元列变成单位向量，得到新的单纯形表。

循环以上步骤，直至求出最优解。

3、举例——用对偶单纯形法求解LP：

$$Min\, W = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

化为标准型 →

$$Max\ Z = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_5 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

将两个等式约束两边分别乘以-1，得

$$Max\ Z = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3$$

$$s.t.\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = -4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

以此形式进行列表求解，满足对偶单纯形法的基本条件，具体如下：

$c_j \rightarrow$			-2	-3	-4	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	-3	-1	-2	-1	1	0	
0	x_5	-4	-2	1	-3	0	1	
$c_j - z_j$			-2	-3	-4	0	0	

换出变量 x_5 $\theta = \min\left\{\frac{-2}{-2}, -, \frac{-4}{-3}\right\} = 1$ 换入变量 x_1

$c_j \rightarrow$			-2	-3	-4	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	-3	-1	-2	-1	1	0
0	x_5	-4	[-2]	1	-3	0	1
$c_j - z_j$			-2	-3	-4	0	0
0	x_4	-1	0	[-5/2]	1/2	1	-1/2
-2	x_1	2	1	-1/2	3/2	0	-1/2
$c_j - z_j$			0	-4	-1	0	-1
-3	x_2	2/5	0	1	-1/5	-2/5	1/5
-2	x_1	11/5	1	0	7/5	-1/5	-2/5
$c_j - z_j$			0	0	-9/5	-8/5	-1/5

C_B	X_B	b \ c_j / x_j	-2 (x_1)	-3 (x_2)	-4 (x_3)	0 (x_4)	0 (x_5)
-3	x_2	2/5	0	1	-1/5	-2/5	1/5
-2	x_1	11/5	1	0	7/5	-1/5	-2/5
cj-zj		0	0	0	-3/5	-8/5	-1/5

最优解： $X^*=(11/5，2/5, 0, 0, 0)^T$，

最优值： $\min W = -\max Z^* = -[11/5\times(-2)+2/5\times(-3)] = 28/5$

例： *Max z=-6x₁-3x₂-2x₃*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 20 \\ \dfrac{1}{2}x_1 + \dfrac{1}{2}x_2 + \dfrac{1}{4}x_3 - x_5 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_6 = 10 \\ x_j \geq 0, \text{对一切} j \end{cases}$$

c_j			-6	-3	-2	0	0	0
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_4	-20	-1	-1	-1	1	0	0
0	x_5	-6	-1/2	-1/2	-1/4	0	1	0
0	x_6	-10	-2	-1	-1	0	0	1
z_j			0	0	0	0	0	0
c_j-z_j			-6	-3	-2	0	0	0

找到一个满足最优检验的初始基本解

检验当前解不可行，选择b最小一行的变量作为换出变量；换入变量$\min\{c_j-z_j/a_{ij}\}$

检验当前解不可行，选择**b最小一行**的变量作为换出变量；换入变量**$\min\{c_j-z_j/a_{ij}\}$**

c_j			-6	-3	-2	0	0	0
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-2	x_3	20	1	1	1	-1	0	0
0	x_5	-1	-1/4	-1/4	0	-1/4	1	0
0	x_6	10	1	0	0	-1	0	1
z_j			-2	-2	-2	2	0	0
c_j-z_j			-4	-1	0	-2	0	0

c_j			-6	-3	-2	0	0	0
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-2	x_3	16	0	0	1	-2	4	0
-3	x_2	4	1	1	0	1	-4	0
0	x_6	10	-1	0	0	-1	0	1
z_j			-3	-3	-2	1	4	0
c_j-z_j			-3	0	0	-1	-4	0

最优解： $X^*=(0,4,16,0,0,10)^T$，

最优值： $\max Z^* = -[4\times(-3)+16\times(-2)] = 44$