随机过程与排队论

信息与软件工程学院

顾小丰

Email：guxf@uestc.edu.cn

2020年9月27日星期日

本讲主要内容

- 齐次马氏链状态的分类
- 连续参数马尔可夫链
  - 转移概率函数、转移矩阵
  - 连续参数齐次马氏链
  - 初始分布、绝对分布、遍历性、平稳分布
  - 转移概率函数的性质
  - 状态转移速度矩阵

本讲主要内容

- 生灭过程

§ 3.5 生灭过程

设{X(t), t≥0}是连续参数齐次马氏链，状态空间E＝{0, 1, 2, …, N}，如果它的状态转移速度矩阵为

$$
Q=\begin{pmatrix}
-\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_{N-1} & -(\lambda_{N-1}+\mu_{N-1}) & \lambda_{N-1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_N & -\mu_N
\end{pmatrix}
$$

则称{X(t), t≥0}为生灭过程。

生灭过程的转移概率

上述生灭过程$\{X(t), t\geq 0\}$的定义可等价地用转移概率$p_{ij}(t)$表示为：

$$\begin{cases} p_{i,i+1}(t)=\lambda_i t+o(t), & \lambda_i>0, i=0,1,2,\cdots,N-1; \lambda_N=0 \\ p_{i,i-1}(t)=\mu_i t+o(t), & \mu_i>0, i=,1,2,\cdots,N; \mu_0=0 \\ p_{ii}(t)=1-(\mu_i+\lambda_i)t+o(t), & i=0,1,2,\cdots,N-1 \\ p_{ij}(t)=o(t), & |i-j|\geq 2; i,j=0,1,2,\cdots,N \end{cases}$$

生灭过程的状态空间可以推广到可数无穷多个状态的情形。

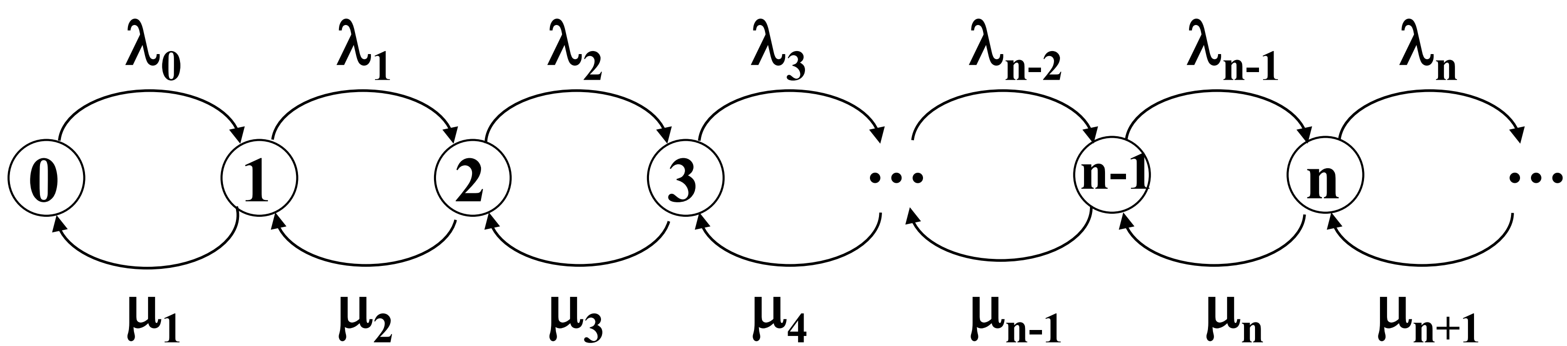
生灭过程的概率意义

设X(t)表示时刻t时某生物群体的个数，{X(t), t≥0}为生灭过程，由上式可见，在长度为t的一小段时间内，如果忽略t的高阶无穷小量o(t)后，生灭过程的状态变化只有3种情况：

1) $i \to i+1$，状态增加1，可理解为“生”了一个个体，其概率为$\lambda_i t$，其生长率为λ_i；
2) $i \to i-1$，状态减少1，可理解为“死”了一个个体，其概率为$\mu_i t$，其死亡率为μ_i；
3) $i \to i$，状态不增不减，群体个数不变，其概率为$1-(\mu_i+\lambda_i)t$；
4) 状态增加或减少2个或2个以上的概率为0。

生灭过程的所有状态都是互通的，但在有限短时间内，只能在相邻两个状态内变化，或者“生”一个，或者“死”一个，或者状态无变化，故称之为生灭过程。

生灭过程的状态转移速度图



生灭过程满足的柯尔莫哥洛夫方程

柯尔莫哥洛夫后退方程：P’(t)＝QP(t)，P(+0)＝I(单位阵)

$$\begin{cases} p'_{0j}(t) = -\lambda_0 p_{0j}(t) + \lambda_0 p_{1j}(t) \\ p'_{ij}(t) = -(\mu_i + \lambda_i) p_{ij}(t) + \lambda_i p_{i+1,j}(t) + \mu_i p_{i-1,j}(t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad i = 1,2,\cdots,N-1 \\ p'_{Nj}(t) = -\mu_N p_{Nj}(t) + \mu_N p_{N-1,j}(t) \end{cases}$$

柯尔莫哥洛夫前进方程：　P’(t)＝P(t)Q，P(+0)＝I

$$\begin{cases} p'_{i0}(t) = -\lambda_0 p_{i0}(t) + \mu_1 p_{i1}(t) \\ p'_{ij}(t) = -(\lambda_j + \mu_j) p_{ij}(t) + \lambda_{j-1} p_{i,j-1}(t) + \mu_{j+1} p_{i,j+1}(t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad j = 1,2,\cdots,N-1 \\ p'_{iN}(t) = -\mu_N p_{iN}(t) + \lambda_{N-1} p_{i,N-1}(t) \end{cases}$$

福克—普朗克方程

绝对概率满足福克—普朗克方程：

$$\begin{cases} p'_0(t) = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t) \\ p'_j(t) = -(\mu_j + \lambda_j) p_j(t) + \lambda_{j-1} p_{j-1}(t) + \mu_{j+1} p_{j+1}(t) \\ \qquad\qquad j = 1,2,\cdots,N-1 \\ p'_N(t) = -\mu_N p_N(t) + \lambda_{N-1} p_{N-1}(t) \end{cases} \quad (1)$$

推广到无限状态E{0, 1, 2, …, n, …}为：

$$\begin{cases} p'_0(t) = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t) \\ p'_j(t) = -(\mu_j + \lambda_j) p_j(t) + \lambda_{j-1} p_{j-1}(t) + \mu_{j+1} p_{j+1}(t) \\ \qquad\qquad j = 1,2,\cdots,N,\cdots \end{cases} \quad (2)$$

福克—普朗克方程解的存在性

1) 对有限状态E＝{0, 1, 2, …, N}的生灭过程，若满足 $p_j(t)\geq 0$， $\sum_{j=0}^{N} p_j(t) \leq 1$ ，则对任给的初始条件，方程组(1)的解存在、唯一，而且

$$p_j(t) \geq 0, \qquad \sum_{j=0}^{N} p_j(t) = 1, \qquad t \geq 0$$

2) 对可列无限状态E＝{0, 1, 2, …, n, …}的生灭过程，若

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n}+\frac{\mu_n}{\lambda_n\lambda_{n-1}}+\cdots+\frac{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_2}{\lambda_n\lambda_{n-1}\cdots\lambda_2\lambda_1}\right)=\infty$$

而且满足$p_j(t)\geq 0$，$\sum_{j=0}^{\infty} p_j(t) \leq 1$，则对任给的初始条件，方程组(2)的解存在、唯一，且

$$p_j(t) \geq 0, \qquad \sum_{j=0}^{\infty} p_j(t) = 1, \qquad t \geq 0$$

极限定理

令 $\pi_j = \lim\limits_{t\to\infty} p_j(t)$， $j \in E$

1) 对有限状态E＝{0, 1, 2, …, N}的生灭过程，{π_j， j=0, 1, 2, …, N}存在，与初始条件无关，且

$$\pi_j > 0, \quad \sum_{j=0}^{N} \pi_j = 1$$

即{π_j， j=0, 1, …, N}为平稳分布。

2) 对可列无限状态E＝{0, 1, 2, …, n, …}的生灭过程，若有条件

$$1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}<\infty \quad 及 \quad \frac{1}{\lambda_0}+\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}\right)^{-1}\cdot\frac{1}{\lambda_j}=\infty$$

成立，则{π_j， j=0, 1, 2, …}存在，与初始条件无关，且 $\pi_j > 0$， $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$，即{$\pi_j$， j=0, 1, …, n, …}为平稳分布。

有限状态生灭过程的平稳分布

有限状态E={0, 1, 2, …, N}的生灭过程{X(t), t≥0}是遍历的齐次连续参数马氏链。生灭过程存在极限分布即为平稳分布Π＝{π_j, j∈E}。

$$\Pi Q = 0$$

即

$$\begin{cases} \lambda_0\pi_0 = \mu_1\pi_1 \\ (\mu_j+\lambda_j)\pi_j = \lambda_{j-1}\pi_{j-1}+\mu_{j+1}\pi_{j+1},\ j=1,2,\cdots,N-1 \\ \mu_N\pi_N = \lambda_{N-1}\pi_{N-1} \\ \sum_{j\in E}\pi_j = 1 \end{cases}$$

有限状态生灭过程的平稳分布的解

解得生灭过程$\{X(t), t\ge 0\}$，$E=\{0, 1, 2, \dots, N\}$的平稳分布$\Pi=\{\pi_j, j\in E\}$为：

$$\begin{cases}\pi_0=\left(1+\sum_{j=1}^{N}\dfrac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}\right)^{-1}\\ \pi_k=\dfrac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}\pi_0=\dfrac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}\pi_{k-1}, k=1,2,\cdots,N\end{cases}$$

当

$\lambda_0=\lambda_1=\dots=\lambda_{N-1}=\lambda$，

$\mu_1=\mu_2=\dots=\mu_N=\mu$

时，有

$$\begin{cases}\pi_0=\left(\sum_{j=0}^{N}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^j\right)^{-1}=\dfrac{1-\lambda/\mu}{1-\left(\lambda/\mu\right)^{N+1}}\\ \pi_k=\left(\lambda/\mu\right)^k\pi_0,\quad k=1,2,\cdots,N\end{cases}$$

无限状态生灭过程的平稳分布

无限状态E={0, 1, 2, …, }的生灭过程{X(t), t≥0}若满足

$$1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}<\infty \quad 及 \quad \frac{1}{\lambda_0}+\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}\right)^{-1}\cdot\frac{1}{\lambda_j}=\infty$$

是遍历的齐次连续参数马氏链。生灭过程存在极限分布即为平稳分布$\Pi=\{\pi_j, j\in E\}$。

$$\Pi Q=0$$

即

$$\begin{cases}\lambda_0\pi_0=\mu_1\pi_1\\(\mu_j+\lambda_j)\pi_j=\lambda_{j-1}\pi_{j-1}+\mu_{j+1}\pi_{j+1}, j=1,2,\cdots,\\\sum_{j\in E}\pi_j=1\end{cases}$$

无限状态生灭过程的平稳分布的解

解得生灭过程$\{X(t), t\geq 0\}$，$E=\{0, 1, 2, \ldots, \}$的平稳分布$\Pi=\{\pi_j, j\in E\}$为：

$$\begin{cases} \pi_0 = \left(1+\sum_{j=1}^{\infty}\dfrac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}\right)^{-1} \\ \pi_k = \dfrac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}\pi_0 = \dfrac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}\pi_{k-1}, k=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

特别，当$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda$，$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu$时，只要$\lambda/\mu < 1$，则$\{\pi_j, j\in E\}$存在，且有

$$\pi_k = \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k, k=0,1,2,\cdots$$

注

1. 由生灭过程$\{X(t), t\geq 0\}$ 的平稳分布可得：

$$\mu_j\pi_j = \lambda_{j-1}\pi_{j-1}$$

此式的概率解释为：当群体大小X(t)处于统计平衡时，在一个很小的时间区间t时，群体大小增加1的概率($\approx\lambda_{j-1}\pi_{j-1}$)等于群体大小减少1的概率($\approx\mu_j\pi_j$)。

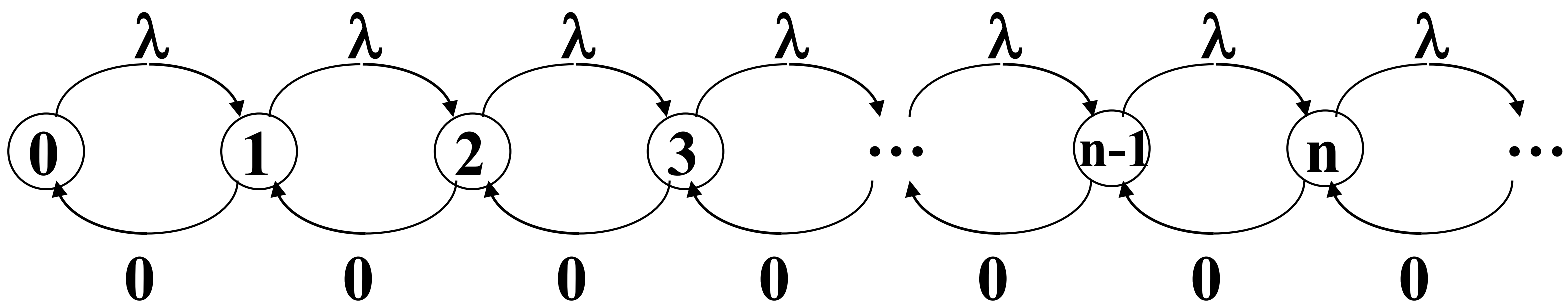
2. 当$\mu_j=0$时，生灭过程$\{X(t), t\geq 0\}$为纯生过程，即“灭”是不可能的；当$\lambda_j=0$时，生灭过程$\{X(t), t\geq 0\}$为纯灭过程，即“生”是不可能的

例1

泊松过程{N(t), t≥0}是生率为λ的纯生过程。

状态空间E＝{0, 1, 2, …}

状态转移速度图



状态转移速度矩阵

$$Q=\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

例1(续)

前进方程： $P'(t)=P(t)Q$， $P(+0)=I$

即
$$\begin{cases} p'_{ij}(t)=-\lambda p_{ij}(t)+\lambda p_{ij-1}(t), j=1,2,\cdots \\ p'_{i0}(t)=-\lambda p_{i0}(t) \\ p_{ij}(0)=\delta_{ij} \end{cases}$$

独立增量

增量的平稳性

解得转移概率 $p_{ij}(t)=\begin{cases} \dfrac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\lambda t}, & j=i,i+1,\cdots \\ 0, & 其它 \end{cases}$

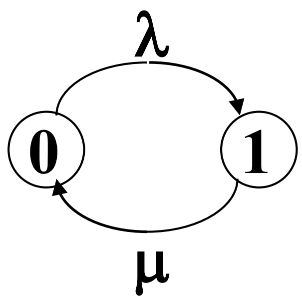
也可直接按转移概率的定义来求$P_{ij}(t)$： **(平稳独立增量过程)**

$$\begin{aligned} P_{ij}(t) &= P\{N(t+s)=j|N(s)=i\} \\ &= P\{N(t+s)-N(s)=j-i|N(s)-N(0)=i-0\} \\ &= P\{N(t+s)-N(s)=j-i\} = P\{N(t)=j-i\} \\ &= \begin{cases} \dfrac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\lambda t}, & j\ge i \\ 0, & j<i \end{cases} \end{aligned}$$

例2 机器维修问题

一部机器正常工作时间服从参数为λ的负指数分布，若出故障，维修时间服从参数为μ的负指数分布，二者独立。令X(t)表示时刻t出故障的机器数，则{X(t)，t≥0}是一个状态空间E＝{0, 1}的生灭过程。

状态转移速度图



状态转移速度矩阵

$$Q=\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu\end{pmatrix}$$

前进方程： $P'(t)=P(t)Q$， $P(+0)=I$

即

$$\begin{cases} p'_{00}(t)=-\lambda p_{00}(t)+\mu p_{01}(t), & p_{00}(0)=p_{11}(0)=1 \\ p'_{01}(t)=\lambda p_{00}(t)-\mu p_{01}(t), & p_{01}(0)=p_{01}(0)=0 \\ p'_{10}(t)=-\lambda p_{10}(t)+\mu p_{11}(t), & p_{00}(t)+p_{01}(t)=1 \\ p'_{11}(t)=\lambda p_{10}(t)-\mu p_{11}(t), & p_{10}(t)+p_{11}(t)=1 \end{cases}$$

例2(续1)

解得

$$\begin{cases} p_{00}(t)=\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}+\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} \\ p_{01}(t)=\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}-\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} \\ p_{10}(t)=\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}-\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} \\ p_{11}(t)=\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}+\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} \end{cases}$$

极限分布

$$\begin{cases} \pi_0=\lim\limits_{t\to\infty}p_{00}(t)=\lim\limits_{t\to\infty}p_{10}(t)=\dfrac{\mu}{\lambda+\mu} \\ \pi_1=\lim\limits_{t\to\infty}p_{01}(t)=\lim\limits_{t\to\infty}p_{11}(t)=\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} \end{cases}$$

例2(续2)

平稳分布(等于极限分布)

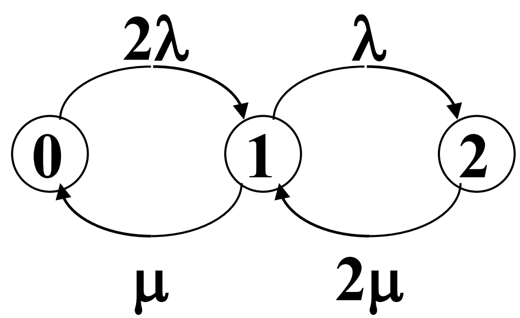
$$(\pi_0 \quad \pi_1)\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix} = (0 \quad 0)$$

$$\begin{cases} -\lambda\pi_0 + \mu\pi_1 = 0 \\ \lambda\pi_0 - \mu\pi_1 = 0 \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_0 = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} \\ \pi_1 = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} \end{cases}$$

例3

设有2个通信通道，每个通道正常工作时间服从参数为λ的负指数分布。2个通道出故障是统计独立的，若通道出故障，由2个维修人员独立维修。修理的时间服从参数为μ的负指数分布。假设2个通道在$t=0$时正常工作，设$X(t)$表示时刻t时出故障的通道数，则$\{X(t), t\geq 0\}$是状态空间$E=\{0, 1, 2\}$的生灭过程。

状态转移速度图



状态转移速度矩阵

$$Q=\begin{pmatrix} -2\lambda & 2\lambda & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & 2\mu & -2\mu \end{pmatrix}$$

例3(续)

平稳分布 $\Pi Q = 0, \quad \sum_{j\in E} \pi_j = 1$

即
$$\begin{cases} -2\lambda\pi_0 + \mu\pi_1 = 0 \\ 2\lambda\pi_0 - (\lambda+\mu)\pi_1 + 2\mu\pi_2 = 0 \\ \lambda\pi_2 - 2\mu\pi_3 = 0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} \pi_0 = \dfrac{\mu^2}{(\lambda+\mu)^2} \\ \pi_1 = \dfrac{2\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2} \\ \pi_2 = \dfrac{\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2} \end{cases}$$

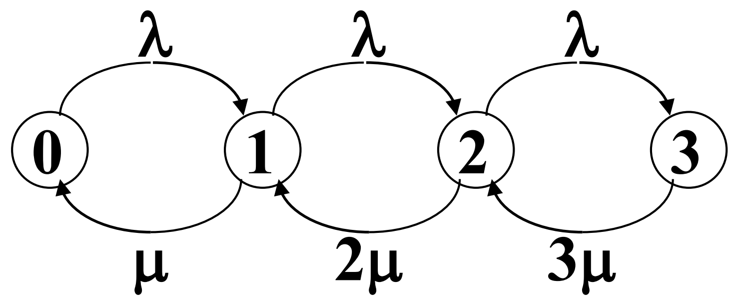
即平稳分布 $\Pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)$

$$= \left(\frac{\mu^2}{(\lambda+\mu)^2}, \frac{2\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2}, \frac{\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2} \right)$$

例4 电话问题

考虑有3条线路的电话交换台。呼唤次数是参数为λ的泊松过程；通话时间服从参数为μ的负指数分布，二者相互独立。用户不等待。设$X(t)$表示时刻t时通话线路数，则$\{X(t),\ t\geq 0\}$是状态空间$E=\{0, 1, 2, 3\}$的生灭过程。

状态转移速度图



状态转移速度矩阵

$$Q=\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & 3\mu & -3\mu \end{pmatrix}$$

例4(续)

平稳分布 $\Pi Q=0,\quad \sum_{j\in E}\pi_j=1$

即 $\begin{cases}-\lambda\pi_0+\mu\pi_1=0\\ \lambda\pi_0-(\lambda+\mu)\pi_1+2\mu\pi_2=0\\ \lambda\pi_1-(\lambda+2\mu)\pi_2+3\mu\pi_3=0\\ \lambda\pi_2-3\mu\pi_3=0\\ \pi_0+\pi_1+\pi_2+\pi_3=1\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\pi_1=\dfrac{\lambda}{\mu}\pi_0\\ \pi_2=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^2\pi_0\\ \pi_3=\dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^3\pi_0\end{cases}$

即平稳分布$\Pi=(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$，其中

$$\pi_0=\left[\sum_{k=0}^{3}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right]^{-1},\quad \pi_i=\frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i\left[\sum_{k=0}^{3}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right]^{-1},\quad i=1,2,3$$

本讲主要内容

- 生灭过程

下一讲内容预告

- **排队论简介**
  - 排队的概念
  - 基本的排队系统
  - 排队系统的基本组成
  - 经典排队系统的符号表示方法
- **无限源的简单排队系统——M/M/1/∞**

习 题 四

P156-157

28.

31.

33.

28. 某电话总机有 2 条中继线. 设电话呼叫按平均率为 λ 的泊松过程到达，平均每分钟有 2 次呼叫. 通话时间服从参数为 μ 的指数分布，每次平均通话 3 分钟，呼叫和通话相互独立. 若顾客发觉线路占满就不等待而离去. 设 $X(t)$ 表示时刻 t 时通话线路数 $\{X(t), t\geq 0\}$ 是一个生灭过程.

(1) 画出状态转移速度图；

(2) 写出状态转移速度矩阵；

(3) 求平稳分布.

习 题 四

31. 假定有 3 台机器由一个工人修理，每台机器出故障是独立的，故障时间服从平均值为 $\frac{1}{\lambda}$ 的指数分布，只要一台机器出故障，修理工就应开始修理它，除非他正忙于修理另外的机器. 修理时间服从平均值为 $\frac{1}{\mu}$ 的指数分布. 设 $X(t)$ 表示时刻 t 出故障的机器数. $\{X(t), t\geqslant 0\}$ 是一个生灭过程.

(1) 画出状态转移速度图；

(2) 写出状态转移速度矩阵；

(3) 求平稳分布.

33. 某校长接待室由正副校长 2 人接待来访师生. 来访者以泊松过程到达，平均每 15 min 来 1 人，接待时间服从指数分布. 每人平均接待 20 min. 接待室共有 3 个座位供来访者(包括正被接待的人)坐. 若来访者看到没有空位即离去. 设 $X(t)$ 表示时刻 t 时在接待室的来访者人数. $\{X(t), t\geqslant 0\}$ 是一个生灭过程.

(1) 画出状态转移速度图；

(2) 写出状态转移速度矩阵 Q；

(3) 求平稳分布.