随机过程与排队论

信息与软件工程学院

顾小丰

Email：guxf@uestc.edu.cn

2020年9月27日星期日

上一讲内容回顾

- **重要随机过程**
  - 独立过程
  - 独立增量过程
  - 正态过程
  - 维纳过程

本讲主要内容

- **泊松过程**
  - 泊松过程的两个定义及其等价性
  - 泊松过程的概率分布
  - 泊松过程的数字特征
  - 泊松过程的性质
  - 非齐次泊松过程

3.泊松过程

泊松过程是一种很重要的计数过程，它在随机过程的理论和应用方面都起着重要的作用，特别在运筹学和排队论中的作用更为显著。

泊松过程的实例很多，例如：在[0, t)时间内，

1) 到达某超级市场的顾客数N(t)；
2) 某电话交换台的呼唤数N(t)；
3) 某车间发生故障的机器数N(t)；
4) 某计数器接受到的粒子数N(t)；
5) 某通信系统出现的误码数N(t)；

等等，$\{N(t), t\geq 0\}$都是泊松过程的典型实例。

泊松过程的定义1

如果取非负整数值的计数过程$\{N(t),\ t\geq 0\}$满足：

1) $N(0)=0$；
2) 具有独立增量；
3) 对任意$0\leq s<t$, $N(t)-N(s)$服从参数为$\lambda(t-s)$泊松分布，即

$$P\{N(t)-N(s)=k\}=\frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!}e^{-\lambda(t-s)},\quad k=0,1,2,\cdots$$

则称$\{N(t),\ t\geq 0\}$为参数(或平均率、强度)为λ的(齐次)泊松过程。

泊松过程的定义2

如果取非负整数值得计数过程$\{N(t), t\geq 0\}$满足下列条件：

a) $N(0)=0$；

b) 具有平稳独立增量；

c) $P\{N(h)=1\}=\lambda h+o(h)$；

d) $P\{N(h)\geq 2\}=o(h)$

则称$\{N(t), t\geq 0\}$为参数(或平均率、强度)为λ的(齐次)泊松过程。

等价定理

定理 泊松过程的定义1与定义2是等价的。

证明 $1\Rightarrow2$：条件a)与1)相同。条件b)可由2)和3)直接得到。

$$P\{N(h)=1\}=P\{N(h)-N(0)=1\}=\frac{(\lambda h)}{1!}e^{-\lambda h}$$

$$=\lambda h[1-\lambda h+o(h)]=\lambda h+o(h)$$

即c)。

$$P\{N(h)\geq 2\}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(\lambda h)^k}{k!}e^{-\lambda h}$$

$$=\left[\frac{(\lambda h)^2}{2!}+o(h)\right][1-\lambda h+o(h)]=o(h)$$

即d)。

证明

$2\Rightarrow 1$：条件1)与a)相同。条件2)由b)直接

N(t)(t≥0)服从参数为λt泊松分布。

$$\sum_{i=0}^{\infty} P\{N(h)=i\}=1$$

设$p_k(t)$＝P{N(t)=k}，利用归纳法证明：

$$p_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}, k=0,1,2,\cdots$$

独立增量 程

(1) k=0，$p_0(t+h)=P\{N(t+h)=0\}$

$=P\{N(t)=0, N(t+h)-N(t)=0\}$

平稳性

$=P\{N(t)=0\}P\{N(t+h)-N(t)=0\}$

$=P\{N(t)=0\}P\{N(h)=0\}=p_0(t)[1-\lambda h+o(h)]$

因为 $$\frac{p_0(t+h)-p_0(t)}{h}=-\lambda p_0(t)+\frac{o(h)}{h},$$

令$h\to 0$得，$\begin{cases} p_0'(t)=-\lambda p_0(t) \\ p_0(0)=P\{N(0)=0\}=1 \end{cases}$ 解得：$p_0(t)=e^{-\lambda t}$。

证明(续1)

(2) $k\geq 1$

$$p_k(t+h) = P\{N(t+h)=k\}$$

$$= \sum_{j=0}^{k} P\{N(t)=j, N(t+h)-N(t)=k-j\}$$

$$= \sum_{j=0}^{k} P\{N(t)=j\}P\{N(h)=k-j\}$$

$$= \sum_{j=0}^{k} p_j(t)p_{k-j}(h) = p_k(t)p_0(h) + p_{k-1}(t)p_1(h) + \sum_{j=0}^{k-2} p_j(t)p_{k-j}(h)$$

$$= p_k(t)[1-\lambda h+o(h)]+p_{k-1}(t)[\lambda h+o(h)]+o(h),$$

$$\frac{p_k(t+h)-p_k(t)}{h} = -\lambda p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) + \frac{o(h)}{h},$$

令 $h\to 0$ 得，$\begin{cases} p_k'(t) = -\lambda p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) \\ p_k(0) = P\{N(0)=k\} = 0 \end{cases}, (k=1,2,3,\cdots)$

证明(续2)

k=1时，
$$\begin{cases} p_1'(t) = -\lambda p_1(t) + \lambda e^{-\lambda t} \\ p_1(0) = 0 \end{cases}$$

解得：$p_1(t)=\lambda t e^{-\lambda t}$，所以k=1时结论成立。

假设k-1时结论成立， $p_{k-1}(t) = \dfrac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t}$。

解 $\begin{cases} p_k'(t) = -\lambda p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) \\ p_k(0) = 0 \end{cases}$， 得 $p_k(t) = \dfrac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$。

结论成立。

由归纳法知，对一切k=0, 1, 2, …，结论成立。

得证
$$P[N(t)=k] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, k = 0,1,2,\cdots。$$

再由平稳独立增量性质，对一切0≤s<t,
$$P[N(t)-N(s)=k] = P[N(t-s)=k] = \frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)}, k = 0,1,2,\cdots。$$

得出3)。

泊松过程的概率分布和数字特征

1. 一维概率分布及均值和方差函数

1) 对任意$t>0$, $N(t)\sim\psi(\lambda t)$,

$$P\{N(t)=k\}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t};$$

2) 均值函数 $m(t)=E[N(t)]=\lambda t$;

3) 方差函数 $D(t)=D[N(t)]=\lambda t$。

2. 一维特征函数

$$\varphi(u)=E[e^{iuN(t)}]=\sum_{k=0}^{\infty}e^{iuk}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda te^{iu})^k}{k!}e^{-\lambda t}=e^{\lambda te^{iu}}e^{-\lambda t}=e^{\lambda t(e^{iu}-1)}$$

泊松过程的概率分布和数字特征

3.　二维概率分布

平稳独立增量过程

$$P\{N(s)=j,\ N(t)=k\}$$

$$\overset{t>s}{=} P\{N(s)-N(0)=j,\ N(t)-N(s)=k-j\}$$

$$= P\{N(s)=j\} \cdot P\{N(t-s)=k-j\}$$

$$= \frac{(\lambda s)^j}{j!} e^{-\lambda s} \frac{[\lambda(t-s)]^{k-j}}{(k-j)!} e^{-\lambda(t-s)}$$

$$= \frac{\lambda^k s^j (t-s)^{k-j}}{j!(k-j)!} e^{-\lambda t}, \quad 0 < s < t$$

泊松过程的概率分布和数字特征

4. 协方差函数和相关函数

协方差函数 $C(s, t) = \lambda \min(s, t)$，

相关函数 $R(s, t) = \lambda \min(s, t) + \lambda^2 st$。

证明 $R(s, t) = E[N(s)N(t)]$

$$= E\{N(s)[N(t)-N(s)+N(s)]\} \quad s<t$$

$$= E[N(s)]E[N(t)-N(s)]+E[N^2(s)]$$

$$= \lambda s \cdot \lambda(t-s)+\lambda s+(\lambda s)^2 = \lambda s+\lambda^2 st$$

$$C(s, t) = R(s, t)-m(s)m(t) = \lambda s+\lambda^2 st-\lambda s\lambda t = \lambda s$$

一般地，$C(s, t) = \lambda \min(s, t)$，

$$R(s, t) = \lambda \min(s, t) + \lambda^2 st。$$

泊松过程的性质1

泊松过程是平稳独立增量过程；

设N(t)表示区间[0, t)内事件出现的次数，{N(t), t≥0}是参数为λ的泊松过程，设$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$分别表示事件第1、2、…、n次出现的时间，称$\tau_k$为事件第k次出现的等待时间；$T_k(k\geq 1)$表示事件第k-1次出现到第k次出现的点间间距。

$$T_k = \tau_k - \tau_{k-1}，\ k=1, 2, \ldots, n，\ \tau_0=0$$

$$\tau_k = T_1+T_2+\ldots+T_k，\ k=1, 2, \ldots, n$$

泊松过程的性质2

设$\{N(t), t\geq 0\}$是参数为λ的泊松过程，$\{T_n, n=1, 2, \ldots\}$为点间间距序列，则T_n，$n=1$，2，…是相互独立同分布的随机变量，且都服从参数为λ的(负)指数分布。

证明 因为T_1表示事件第1次出现以前所需要的时间，所以事件$\{T_1>t\}$表示在$[0, t)$内泊松事件还没有出现，因此，事件$\{T_1>t\}$的发生当且仅当没有泊松事件在在$[0, t)$内出现，于是对$t\geq 0$，有

$$P\{T_1>t\}=P\{N(t)=0\}=e^{-\lambda t}$$

$$P\{T_1\leq t\}=1-P\{T_1>t\}=1-e^{-\lambda t}$$

对$t<0$，有 $P\{T_1>t\}=1$

因此，T_1的分布函数为 $F_{T_1}(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t}, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$

T_1的概率密度为 $f_{T_1}(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}, & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$ $E(T_1)=\dfrac{1}{\lambda}$

即T_1服从参数为λ的（负）指数分布。

T_2表示事件第1次出现至第2次出现的点间间距

$P\{T_2>t|T_1=s_1\}=P\{$在(s_1, s_1+t)内没有事件出现$|T_1=s_1\}$

$=P\{N(s_1+t)-N(s_1)=0|\ N(s_1)-N(0)=1\}$

$=P\{N(s_1+t)-N(s_1)=0\}$

$=P\{N(t)=0\}=e^{-\lambda t}$

平稳独立增量过程

$$P\{T_2>t, T_1>s\}=\int_t^{+\infty}\int_s^{+\infty} f(x,y)dxdy$$

$$=\int_t^{+\infty}\int_s^{+\infty} f_{T_2|T_1}(x|y)f(y)dxdy=\int_s^{+\infty} P\{T_2>t\,|\,T_1=y\}f(y)dy$$

$$=\int_s^{+\infty} e^{-\lambda t}f(y)dy=e^{-\lambda t}P\{T_1>s\}=P\{T_2>t\}\cdot P\{T_1>s\}$$

当s＝0时，可见T_2也服从参数为λ的（负）指数分布且T_2与T_1独立同分布。

类似地，可用数学归纳法证明当n>2时，T_n， n=1, 2, …相互独立，都参数为λ的（负）指数分布。

泊松过程的性质3

设$\{N(t), t\geq 0\}$是参数为λ的泊松过程，$\{\tau_n, n = 1, 2, \ldots\}$为等待时间序列，则$\tau_n \sim \Gamma(n, \lambda)$，即概率密度为：

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\lambda t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0。\end{cases}$$

即n阶爱而朗分布。

证明

因事件$\{\tau_n \le t\}$等价于事件$\{N(t) \ge n\}$，故τ_n的分布函数为

$$F(t) = P\{\tau_n \le t\} = P\{N(t) \ge n\} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad t \ge 0$$

于是τ_n的概率密度

$$f(t) = F'(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \lambda \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} - \sum_{k=n}^{\infty} \lambda \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

$$= \lambda \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} - \sum_{k=n}^{\infty} \lambda \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

$$=\lambda\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t},\quad t\ge 0$$

当$t<0$时，$f(t)=0$，

故 $$f(t)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^n}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-\lambda t}, & t\ge 0,\\ 0, & t<0。\end{cases}$$

则$\tau_n \sim \Gamma(n,\lambda)$，即n阶爱而朗分布。

（注：也可以利用特征函数进行证明，见第3讲P47）

非齐次泊松过程

如果计数过程$\{N(t), t\geq 0\}$满足下列条件：

a) $N(0)=0$；

b) $\{N(t), t\geq 0\}$是独立增量过程；

c) $P\{N(t+\Delta t)-N(t)=1\}=\lambda(t)\Delta t+0(\Delta t)$；

d) $P\{N(t+\Delta t)-N(t)\geq 2\}=0(\Delta t)$

则称$\{N(t), t\geq 0\}$为参数(或平均率、强度)为$\lambda(t)$的非齐次泊松过程。

特别，当$\lambda(t)=\lambda$时，即为齐次泊松过程。

定理

若过程{N(t), t≥0}是非齐次泊松过程，则在时间间距[t_0, t_0+t)内事件A出现k次的概率为：

$$P\{N(t_0+t)-N(t_0)=k\}=\frac{[m(t_0+t)-m(t_0)]^k}{k!}e^{-[m(t_0+t)-m(t_0)]}$$

$$k=0,1,2,\cdots$$

式中 $m(t)=\int_0^t \lambda(s)ds$

证明

记$P_k(t, t_0)=\mathrm{P}\{[N(t_0+t)-N(t_0)]=k\}$

$P_0(t+\Delta t, t_0)=\mathrm{P}\{[N(t_0+t+\Delta t)-N(t_0)]=0\}$

$=\mathrm{P}\{[N(t_0+t)-N(t_0)]=0, [N(t_0+t+\Delta t)-N(t_0+t)]=0\}$

$=\mathrm{P}\{[N(t_0+t)-N(t_0)]=0\}\cdot\mathrm{P}\{[N(t_0+t+\Delta t)-N(t_0+t)]=0\}$

$=P_0(t, t_0)\cdot[1-\lambda(t_0+t)\,\Delta t + o(\Delta t)]$

整理得

$$\frac{P_0(t+\Delta t, t_0)-P_0(t, t_0)}{\Delta t}=-\lambda(t_0+t)P_0(t, t_0)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

令$\Delta t\to 0$得 $$\frac{\mathrm{d}P_0(t, t_0)}{\mathrm{d}t}=-\lambda(t_0+t)P_0(t, t_0)$$

$$\ln P_0(t,t_0) = -\int_0^t \lambda(t_0+s)\mathrm{d}s = -\int_{t_0}^{t_0+t} \lambda(s)\mathrm{d}s$$

故

$$P_0(t,t_0) = e^{-\int_{t_0}^{t_0+t} \lambda(s)\mathrm{d}s}$$

同理有

$P_k(t+\Delta t, t_0)=\mathrm{P}\{[N(t_0+t+\Delta t)-N(t_0)]=k\}$

$=\mathrm{P}\{[N(t_0+t)-N(t_0)]=k, [N(t_0+t+\Delta t)-N(t_0+t)]=0\}$

$+ \mathrm{P}\{[N(t_0+t)-N(t_0)]=k-1, [N(t_0+t+\Delta t)-N(t_0+t)]=1\}$

$+ \mathrm{P}\{[N(t_0+t)-N(t_0)]\le k-2, [N(t_0+t+\Delta t)-N(t_0+t)] \ge 2\}$

$=P_k(t, t_0)\cdot[1-\lambda(t_0+t) \Delta t] + P_{k-1}(t, t_0)\cdot\lambda(t_0+t) \Delta t + \mathrm{o}(\Delta t)]$

整理得

$$\frac{P_k(t+\Delta t,t_0)-P_0(t,t_0)}{\Delta t}=-\lambda(t_0+t)P_k(t,t_0)+\lambda(t_0+t)P_{k-1}(t,t_0)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

令$\Delta t\to 0$得

$$\frac{dP_k(t,t_0)}{dt}=-\lambda(t_0+t)P_k(t,t_0)+\lambda(t_0+t)P_{k-1}(t,t_0)$$

K=1有

$$\frac{dP_1(t,t_0)}{dt}+\lambda(t_0+t)P_1(t,t_0)=\lambda(t_0+t)P_0(t,t_0)=e^{-\int_{t_0}^{t_0+t}\lambda(s)ds}$$

利用初始条件，$P_1(0,t_0)=0$，解得

$$P_1(t,t_0)=\left(\int_{t_0}^{t_0+t}\lambda(s)\mathrm{d}s\right)\cdot e^{-\int_{t_0}^{t_0+t}\lambda(s)\mathrm{d}s}$$

利用数学归纳法，可以证得

$$P_k(t,t_0)=\frac{1}{k!}\left(\int_{t_0}^{t_0+t}\lambda(s)\mathrm{d}s\right)^{\mathrm{k}}\cdot e^{-\int_{t_0}^{t_0+t}\lambda(s)\mathrm{d}s}$$

$$=\frac{[m(t_0+t)-m(t_0)]^k}{k!}e^{-[m(t_0+t)-m(t_0)]}$$

其中 $m(t)=\int_0^t\lambda(s)ds$

例

某镇有一小商店，每日8:00开始营业。从8:00到11:00平均顾客到达率线性增加，在8:00顾客平均到达5人/小时；11:00到达率达最高峰20人/小时。从11:00到13:00平均顾客到达率为20人/小时。从13:00到17:00平均顾客到达率线性下降，17:00顾客到达率为12人/小时。假设在不相交的时间间隔内到达商店的顾客数是相互独立的，试问在8:30到9:30时间内无顾客到达商店的概率为多少？在这段时间机内到达商店的顾客的均值为多少？

解

设8:00为t=0，11:00为t=3，13:00为t=5，17:00为t=9，第二天8:00可以为t=9。于是，顾客到达率是周期为9的函数：

$$\lambda(t)=\begin{cases}5+5t, & 0<t\le 3\\ 20, & 3<t\le 5\\ 20-2(t-5), & 5<t\le 9\end{cases}$$

$$\lambda(t)=\lambda(t-9)$$

根据题意，在[0, t)内到达的顾客数{N(t), t≥0}是一个非齐次泊松过程。

在8:30到9:30无顾客到达商店的概率为

$$p_0(1,0.5)=e^{-[m(1.5)-m(0.5)]}=e^{-\int_{0.5}^{1.5}\lambda(t)dt}=e^{-\int_{0.5}^{1.5}(5+5t)dt}=e^{-10}$$

在8:30到9:30到达商店的顾客均值为

$$m(1.5)-m(0.5)=\int_0^{1.5}(5+5t)dt-\int_0^{0.5}(5+5t)dt=10$$

本讲主要内容

➢ 泊松过程

- 泊松过程的两个定义及其等价性
- 泊松过程的概率分布
- 泊松过程的数字特征
- 泊松过程的性质
- 非齐次泊松过程

下一讲内容预告

- 泊松过程
  - 复合泊松过程
- 更新计数过程
- 马尔可夫过程
  - 马尔可夫过程的概念
  - 马尔可夫过程的分类
  - 离散参数马氏链

习 题 三

P98　12.　15.　19.

12. 已知寻呼台在$[0,t)$内收到的呼唤次数$\{N(t),t\geq 0\}$是泊松过程，每分钟平均收到2次呼唤：

(1) 求2分钟内收到3次呼唤的概率；

(2) 已知$[0,3)$内收到5次呼唤，求$[0,2)$内收到3次呼唤的概率.

15. 设$\{N_1(t),t\geq 0\}$是参数为λ_1的泊松过程，$\{N_2(t),t\geq 0\}$是参数为λ_2的泊松过程，二者相互独立，设

$$X(t)=N_1(t)+N_2(t),Y(t)=N_1(t)-N_2(t)$$

(1) 证明$\{X(t),t\geq 0\}$是参数为$\lambda=\lambda_1+\lambda_2$的泊松过程；

(2) 证明$\{Y(t),t\geq 0\}$不是泊松过程.

19. 设$N(t)$表示某发射源在$[0,t)$内发射的粒子数，$\{N(t),t\geq 0\}$是平均率为λ的泊松过程. 若每一个发射的粒子都以概率p的可能被记录. 且一粒子的记录不仅独立于其他粒子的记录，也独立于$N(t)$. 若以$M(t)$表示在$[0,t)$内被记录的粒子数. 证明$\{M(t),t\geq 0\}$是一平均率为λp的泊松过程.

课堂练习—下课交

13. 设{ $N(t), t \geq 0$}是平均率为$\lambda = 2$的泊松过程，

分别求：

① $E(N(2)N(3))$

② $P(N(2)=1, N(3)=2)$

③ $P(N(3)=2 \mid N(2)=1)$