随机过程与排队论

信息与软件工程学院
顾小丰
Email：guxf@uestc.edu.cn

2020年9月27日星期日

上一讲内容回顾

- 生灭过程

本讲主要内容

- **排队论简介**
  - 排队的概念
  - 基本的排队系统
  - 排队系统的基本组成
  - 经典排队系统的符号表示方法
- **无限源的简单排队系统—M/M/1/∞**
  - 问题的引入
  - 队长

第四章 排队论简介

- 排队论，又称为随机服务系统理论，是研究拥挤现象的一门学科，它通过研究各种服务系统在排队等待中的概率特性，来解决系统的最优设计和最优控制。

- 排队论起源于20世纪初丹麦电信工程师A.K. Erlang对电信系统的研究，现已发展成为一门应用广泛的学科，在电信、交通运输、生产与库存管理、计算机系统设计、计算机通信网络、军事作战、柔性制造系统和系统可靠性等众多领域，有着非常重要的应用。

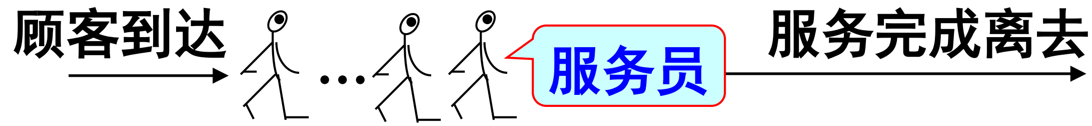
排队的概念

排队是日常生活和工作中常见的现象，由两个方面构成：

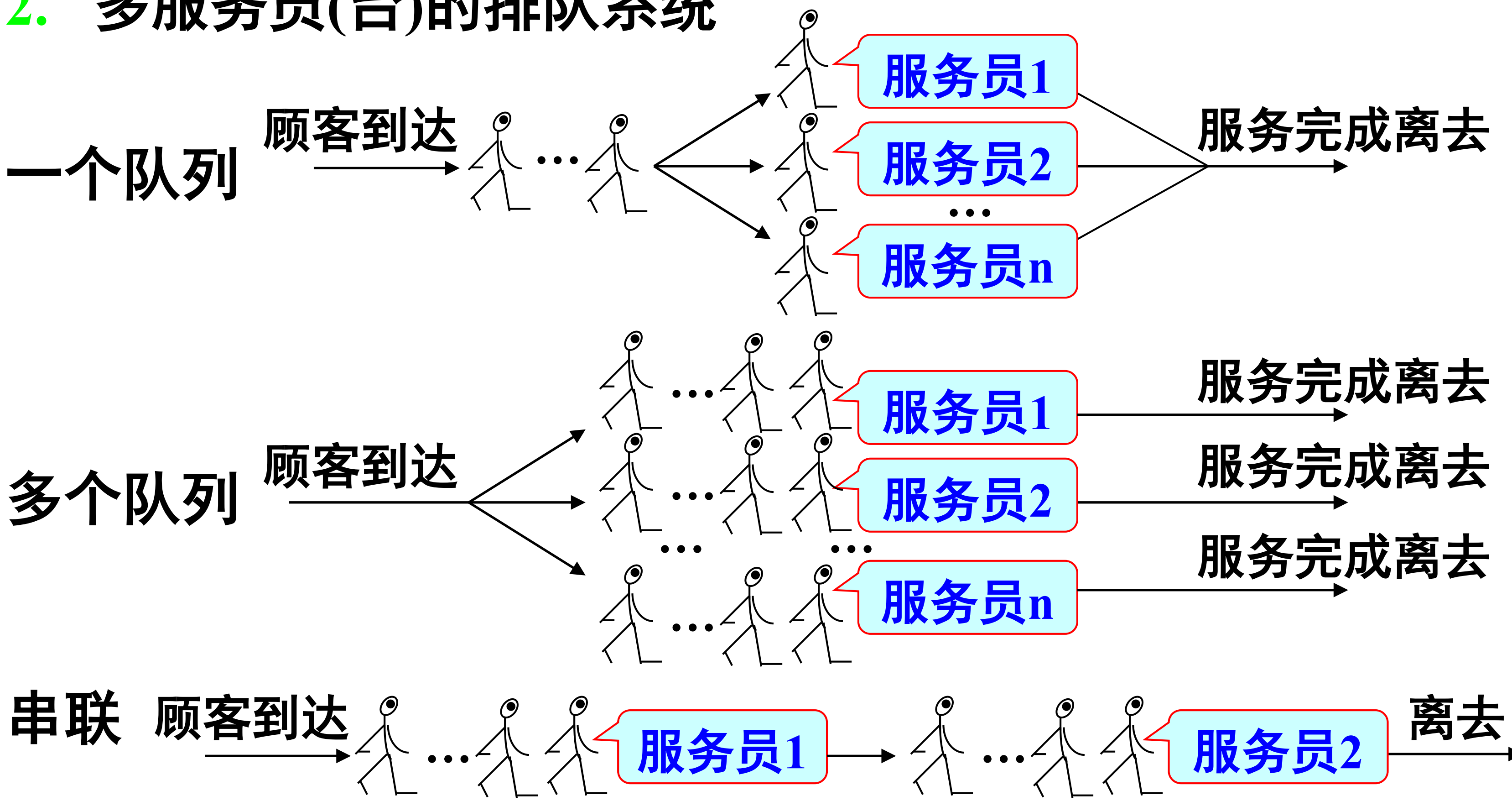
1. 要求得到服务——顾客
2. 提供服务——服务员或服务台
3. 顾客与服务台(二者缺一不可)就构成一个排队系统，或称为随机服务系统。

基本的排队系统

1. 单服务员(台)的排队系统



2. 多服务员(台)的排队系统



排队系统的基本组成

1. 输入过程

描述顾客来源及顾客按怎样的规律抵达。

2. 排队规则

服务是否允许排队，顾客是否愿意排队。在排队等待的情况下服务的顺序是什么。

3. 服务机构

服务台的数目
服务时间分布

输入过程

- 描述顾客来源及顾客按怎样的规律抵达。

1) **顾客总体数**

   顾客的来源可能是有限的，也可能是无限的

2) **到达类型**

   顾客是单个到达，还是成批到达

3) **顾客相继到达的间隔时间服从什么概率分布，分布函数是什么，到达的间隔时间之间是否独立**

- 在排队论中，一般假定顾客到达的间隔时间序列 $\{\tau_n|n\geq1\}$ 相互独立、同分布。

排队规则

- 服务是否允许排队，顾客是否愿意排队。在排队等待的情况下服务的顺序是什么。

1) **损失制** 顾客到达时，若所有服务台均被占，服务机构不允许顾客等待，此时该顾客就自动离去
2) **等待制** 顾客到达时，若所有服务台均被占，他们就排队等待服务
   a) 先到先服务
   b) 后到先服务
   c) 随机服务
   d) 有优先权服务：强拆型优先权、非强拆型优先权
3) **混合制** 损失制与等待制的混合
   a) 对长(容量)有限的混合制
   b) 等待时间有限的混合制
   c) 逗留时间有限的混合制

服务机构

1) 服务台的数目

在多个服务台的情况下，是串联或是并联

2) 顾客所需的服务时间服从什么概率分布，每个顾客所需的服务时间是否相互独立，是成批服务或是单个服务

经典排队系统的符号表示方法

一个排队系统是由许多条件决定的，为简明起见，在经典的排队系统中，常采用3～5个英文字母表示一个排队系统，字母之间用斜线隔开：

- 第一个字母表示输入的分布类型
- 第二个字母表示服务时间的分布类型
- 第三个字母表示服务台的数目
- 第四个字母表示系统的容量
- 第五个字母表示顾客源中的顾客数目。

几个经典排队系统的符号表示

- $M/M/c/\infty$：输入过程是泊松流，服务时间服从负指数分布，有c个服务台平行服务($0<c\le\infty$)，容量为无穷的等待制系统
- $M/G/1/\infty$：输入过程是泊松流，服务时间独立、服从一般概率分布，只有1个服务台，容量为无穷的等待制系统
- $E_k/G/1/K$：相继到达的间隔时间独立、服从k阶爱尔朗分布，服务时间独立、服从一般概率分布，只有1个服务台，容量为k($0\le k<\infty$)的混合制系统
- $D/M/c/K$：相继到达的间隔时间独立、服从定长分布，服务时间独立、服从负指数分布，有c个服务台平行服务，容量为k($c\le k<\infty$)的混合制系统
- $M^r/M/1/\infty$：顾客以每批为固定的r个成批到达，批与批的到达间隔时间独立、服从负指数分布，服务时间独立、服从负指数分布，有1个服务台，容量为无穷的等待制系统
- $M^X/M^r/1/\infty$：顾客成批到达，每批到达的数量X是具有某个离散型概率分布律的随机变量，批与批的到达间隔时间独立、服从负指数分布；顾客成批服务、每批为r个顾客，且服务时间独立、服从负指数分布；有1个服务台；容量为无穷的等待制系统

描述排队系统的主要数量指标

- 队长：系统中的顾客数(包括正在接受服务的顾客)
- 等待队长：系统中的排队等待的顾客数
- 等待时间：服务止这段时间
- 逗留时间：之和
- 系统的忙即开始，直到系统时间
- 系统的闲
- 忙期循环：
- 输出过程：也称离去过程，指接受服务完毕的顾客相继离开系统的过程。

忙期反映了系统中服务员的工作强度。在排队系统中，统计平衡下忙期与闲期是交替出现的。

刻画输出过程的主要指标是相继离去的间隔时间和在一段已知时间内离去顾客的数目，这些指标从一个侧面反映了系统的工作效率。

第五章 无限源的简单排队系统

- 顾客总体是无限的
- 输入过程是简单流
- 服务时间服从负指数分布

§ 5.1 M/M/1/∞

1. 问题的叙述

- 顾客到达为参数$\lambda(\lambda>0)$的泊松过程，即相继到达的间隔时间序列$\{\tau_n, n\geq1\}$独立、服从参数为$\lambda(\lambda>0)$的负指数分布$F(t)=1-e^{-\lambda t}$，$t\geq0$；
- 顾客所需的服务时间序列$\{\chi_n, n\geq1\}$独立、服从参数为$\mu(\mu>0)$的负指数分布$G(t)=1-e^{-\mu t}$，$t\geq0$；
- 系统中只有一个服务台；
- 容量为无穷大，而且到达过程与服务过程彼此独立。

2.队长

假定N(t)表示在时刻t系统中的顾客数，包括正在被服务的顾客数，即N(t)表示时刻t系统的队长，t≥0，且令

$$p_{ij}(\Delta t)=P\{N(t+\Delta t)=j|N(t)=i\}，i,j=0,1,2,\ldots$$

则

1) $p_{i,i+1}(\Delta t)=P\{$在Δt内到达一个而服务未完成$\}$

$$+\sum_{j=2}^{\infty}P\{\text{在}\Delta t\text{内到达}j\text{个而服务完}j-1\text{个}\}$$

$$=P\{\tau_1\le\Delta t，\chi_1>\Delta t\}$$

$$+\sum_{j=2}^{\infty}P\{\tau_1+\ldots+\tau_j\le\Delta t<\tau_1+\ldots+\tau_{j+1}, \chi_1+\ldots+\chi_{j-1}\le\Delta t<\chi_1+\ldots+\chi_j\}$$

$$=(1-e^{-\lambda\Delta t})e^{-\mu\Delta t}+o(\Delta t)$$

$$=\lambda\Delta t+o(\Delta t)\qquad i=0,1,2,\ldots$$

队长(续1)

2) $p_{i,i-1}(\Delta t)=P\{$在Δt内未到达而服务完成一个$\}$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}P\{在\Delta t内到达j个而服务完j+1个\}$$

$$=P\{\tau_1>\Delta t,\ \chi_1\le\Delta t\}$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}P\{\tau_1+\ldots+\tau_j\le\Delta t<\tau_1+\ldots+\tau_{j+1},$$

$$\chi_1+\ldots+\chi_{j+1}\le\Delta t<\chi_1+\ldots+\chi_{j+2}\}$$

$$=(1-e^{-\mu\Delta t})e^{-\lambda\Delta t}+o(\Delta t)$$

$$=\mu\Delta t+o(\Delta t)\qquad i=1,2,3,\ldots$$

3) 类似分析可得

$$p_{ij}(\Delta t)=o(\Delta t),\qquad |i-j|\ge 2$$

队长(续2)

综合上述1)2)3)得

$$p_{ij}(\Delta t)=\begin{cases}\lambda\Delta t+o(\Delta t) & j=i+1, i\ge 0\\ \mu\Delta t+o(\Delta t) & j=i-1, i\ge 1\\ o(\Delta t) & |i-j|\ge 2\end{cases}$$

{N(t)，t≥0}是可列无限状态E＝{0,1,2,…}上的生灭过程，其参数为

$$\begin{cases}\lambda_i=\lambda, & i\ge 0\\ \mu_i=\mu, & i\ge 1\end{cases}$$

此生灭过程的绝对分布$p_j(t)$＝P{N(t)=j}，j=0,1,2,…的福克一普朗克方程组为

$$\begin{cases}p'_0(t)=-\lambda_0 p_0(t)+\mu_1 p_1(t)\\ p'_j(t)=-(\mu_j+\lambda_j)p_j(t)+\lambda_{j-1}p_{j-1}(t)+\mu_{j+1}p_{j+1}(t), j\ge 1\end{cases}$$

队长(续3)

$$1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}<\infty$$

$$\frac{1}{\lambda_0}+\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}\right)^{-1}\cdot\frac{1}{\lambda_j}=\infty$$

$$\pi_0=\left(1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}\right)^{-1}$$

$$\pi_k=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}\pi_0=\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}\pi_{k-1},k=1,2,3,\cdots$$

当$\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda,\mu_0=\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu$时

$$\pi_k=\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k,k=0,1,2,\cdots$$

结论

在统计平衡的条件下(ρ<1)：

平均队长

$$\overline{N}=E(N)=\sum_{j=0}^{\infty}jp_j=\sum_{j=0}^{\infty}j(1-\rho)\rho^j$$

$$=\rho(1-\rho)\sum_{j=0}^{\infty}j\rho^{j-1}=\rho(1-\rho)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\rho^j\right)'$$

$$=\rho(1-\rho)\left(\frac{1}{1-\rho}\right)'=\frac{\rho}{1-\rho}$$

结论(续1)

等待队长的分布

$$P\{N_q = j\} = \begin{cases} p_0 + p_1 = 1-\rho^2, & j=0 \\ p_{j+1} = (1-\rho)\rho^{j+1}, & j \ge 1 \end{cases}$$

平均等待队长

$$\overline{N}_q = \sum_{j=0}^{\infty} j p_{j+1} = \sum_{j=0}^{\infty} j(1-\rho)\rho^{j+1}$$

$$= \rho^2(1-\rho)\sum_{j=0}^{\infty} j\rho^{j-1} = \rho^2(1-\rho)\sum_{j=0}^{\infty}\left(\rho^j\right)'$$

$$= \rho^2(1-\rho)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\rho^j\right)' = \rho^2(1-\rho)\left(\frac{1}{1-\rho}\right)' = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

队长的方差

结论(续2)

$$D(N)=E(N^2)-E^2(N)=\sum_{j=0}^{\infty} j^2 p_j-\overline{N}^2$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty} j^2(1-\rho)\rho^j-\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)^2$$

$$=\rho(1-\rho)\sum_{j=0}^{\infty}((\rho^{j+1})''-(\rho^j)')-\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)^2$$

$$=\rho(1-\rho)((\sum_{j=0}^{\infty}\rho^{j+1})''-(\sum_{j=0}^{\infty}\rho^j)')-\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)^2$$

$$=\rho(1-\rho)((\frac{\rho}{1-\rho})''-(\frac{1}{1-\rho})')-\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)^2=\frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

结论(续3)

等待队长的方差

$$D(N_q) = E(N_q^2) - E^2(N_q) = \sum_{j=1}^{\infty} j^2 p_{j+1} - \overline{N_q}^2$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} j^2 (1-\rho)\rho^{j+1} - \left(\frac{\rho^2}{1-\rho}\right)^2$$

$$= \frac{\rho^2(1+\rho) - \rho^4}{(1-\rho)^2}$$

结论(续4)

在等待条件下的等待队长分布

$$P\{N_q=j\mid N_q\ge 1\}=\frac{P\{N_q=j,N_q\ge 1\}}{P\{N_q\ge 1\}}=\frac{P\{N_q=j\}}{P\{N_q\ge 1\}}$$

1-P{N_q=0}
=1-(1- ρ^2)
=ρ^2

$$=\frac{(1-\rho)\rho^{j+1}}{\rho^2}=(1-\rho)\rho^{j-1},\quad \rho<1,j\ge 1$$

=p_{j-1}

在等待条件下的平均等待队长

$$E(N_q\mid N_q\ge 1)=\sum_{j=1}^{\infty}j(1-\rho)\rho^{j-1}=\frac{1}{1-\rho},\quad \rho<1$$

根据队长分布意知：

$p_0=1-\rho$也是系统空闲的概率，而ρ正是系统繁忙的概率。显然，ρ越大，系统就越繁忙。

本讲主要内容

- 排队论简介
  - 排队的概念
  - 基本的排队系统
  - 排队系统的基本组成
  - 经典排队系统的符号表示方法
- 无限源的简单排队系统—M/M/1/∞
  - 问题的引入
  - 队长

下一讲内容预告

- 无限源的简单排队系统—M/M/1/∞
  - 等待时间与逗留时间
  - Little公式
  - 忙期
  - 输出过程
  - M/M/1/∞应用举例