随机过程与排队论

信息与软件工程学院

顾小丰

Email：guxf@uestc.edu.cn

2020年9月27日星期日

上一讲内容回顾

- 具有

$$\rho^{j+1}$$

$$\left(\frac{1-\rho_1^{m}}{1-\rho_1}+\frac{\rho_2\rho_1^{m-1}}{1-\rho_2}\right)^{-1},\quad j=0$$

$$\overline{W}=\frac{\overline{N}}{\lambda}$$

$$=\frac{1}{\lambda}p_0\left\{\frac{\rho_1[1+(m-1)\rho_1^{m}-m\rho_1^{m-1}]}{(1-\rho_1)^2}+\frac{\rho_2\rho_1^{m-1}[m-(m-1)\rho_2]}{(1-\rho_2)^2}\right\}$$

$$\overline{W}_q=\frac{\overline{N}_q}{\lambda}$$

$$=\frac{1}{\lambda}p_0\left\{\frac{\rho_1+(m-2)\rho_1^{m+1}-(m-1)\rho_1^{m}}{(1-\rho_1)^2}+\frac{\rho_1^{m-1}\rho_2[(m-1)-(m-2)\rho_2]}{(1-\rho_2)^2}\right\}$$

本讲主要内容

- M/M/c/∞排队系统
  - 问题的引入
  - 队长
  - 等待时间与逗留时间
  - 输出过程

§5.5 M/M/c/∞排队系统

下面我们讨论系统中有c（c≥1）个服务台独立并行服务的情形。当顾客到达时，若有空闲的服务台便立即接受服务。若系统中没有空闲的服务台，则排队等待，直到有空闲的服务台再接受服务。

1.问题的叙述

- 顾客到达为参数λ（λ＞0）的泊松过程；
- 顾客所需的服务时间序列$\{\chi_n, n\geq 1\}$独立、服从参数为μ（μ＞0）的负指数分布；
- 系统中有c（c≥1）个服务台独立并行服务；
- 系统容量为无穷大，而且到达与服务是彼此独立的。

2.队长

我们用N(t)表示在时刻t系统中的顾客数，令

$$p_{ij}(\Delta t)=P\{N(t+\Delta t)=j|N(t)=i\}，\quad i,j=0,1,2,\ldots$$

则类似§5.4的分析，有

$$p_{ij}(\Delta t)=\begin{cases}\lambda\Delta t+o(\Delta t), & j=i+1,\ \ i\ge 0\\ i\mu\Delta t+o(\Delta t), & j=i-1,\ \ i=1,2,\cdots c-1\\ c\mu\Delta t+o(\Delta t), & j=i-1,\ \ i\ge c\\ o(\Delta t), & |i-j|\ge 2\end{cases}$$

于是，$\{N(t)，t\ge 0\}$是可列无限状态$E=\{0,1,2,\ldots\}$上的生灭过程，其参数为

$$\begin{cases}\lambda_i=\lambda, & i\ge 0\\ \mu_i=\begin{cases}i\mu, & 1\le i<c\\ c\mu, & i\ge c\end{cases}\end{cases}$$

定理

$$1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}=1+\sum_{j=1}^{c-1}\frac{\rho^j}{j!}+\sum_{j=c}^{\infty}\frac{\rho^{c-1}}{(c-1)!}\frac{\rho^{j-c+1}}{c^{j-c+1}}$$

$$=\sum^{c-1}\rho^j+\rho^{c-1}\sum^{\infty}\rho^{j-c+1}\begin{cases}<\infty, & \rho_c<1\end{cases},$$

$$\begin{cases}p_0=\left(1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}\right)^{-1}=\left(1+\sum_{j=1}^{c-1}\frac{\lambda^j}{\mu^j\cdot j!}+\sum_{j=c}^{\infty}\frac{\lambda^j}{\mu^c\cdot c!\cdot(c\mu)^{j-c}}\right)^{-1}\\ \qquad=\left(\sum_{j=0}^{c-1}\frac{\rho^j}{j!}+\frac{c\rho^c}{c!\cdot(c-\rho)}\right)^{-1}\\ p_j=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}p_0=\begin{cases}\frac{\rho^j}{j!}p_0, & 1\le j\le c-1\\ \frac{\rho^j}{c^{j-c}\cdot c!}p_0, & j\ge c\end{cases}\end{cases}$$

等待对长N_q

由于系统中有c个服务台，所以顾客到达时需要等待的概率为

$$p=\sum_{j=c}^{\infty}p_j=\frac{1}{1-\rho_c}p_c,\qquad \rho_c=\frac{\lambda}{c\mu},\qquad p_c=\frac{\rho^c}{c!}p_0$$

在统计平衡下，等待队长N_q有分布：

$$P\{N_q=0\}=\sum_{j=0}^{c}p_j,\qquad P\{N_q=k\}=p_{c+k},\quad k=1,2,3,\cdots$$

所以$\rho_c<1$时，有

$$\overline{N}_q=E[N_q]=\sum_{j=c}^{\infty}(j-c)p_j=\sum_{j=c}^{\infty}(j-c)\frac{\rho^j}{c^{j-c}\cdot c!}p_0=\frac{\rho^c p_0}{c!}\sum_{j=c}^{\infty}(j-c)\left(\frac{\rho}{c}\right)^{j-c}$$

$$=\frac{\rho^c p_0}{c!}\sum_{j=c}^{\infty}(j-c)\rho_c^{\,j-c}=\frac{\rho^c\rho_c p_0}{c!}\left(\sum_{j=1}^{\infty}x^j\right)'\Bigg|_{x=\rho_c}=\frac{\rho_c}{(1-\rho_c)^2}p_c$$

N_c

令N_c表示系统平衡时，正在被服务的顾客数，则

$$P\{N_c=k\}=p_k, 0\le k\le c-1; P\{N_c=c\}=\sum_{j=c}^{\infty}p_j=\frac{1}{1-\rho_c}p_c$$

所以

$$\overline{N}_c=E[N_c]=\sum_{j=0}^{c-1}jp_j+c\sum_{j=c}^{\infty}p_j=\sum_{j=1}^{c-1}\frac{\rho^j p_0}{(j-1)!}+\frac{\rho^c p_0}{(c-1)!}\sum_{j=0}^{\infty}\rho_c^{\ j}$$

$$=\rho\{1-\sum_{j=c-1}^{\infty}p_j\}+\frac{\rho^c p_0}{(1-\rho_c)\cdot(c-1)!}=\rho\{1-p_{c-1}-\sum_{j=c}^{\infty}p_j\}+\frac{\rho^c p_0}{(1-\rho_c)\cdot(c-1)!}$$

$$=\rho\{1-\frac{\rho^{c-1}p_0}{(c-1)!}-\frac{\rho^c p_0}{(1-\rho_c)\cdot c!}\}+\frac{\rho^c p_0}{(1-\rho_c)\cdot(c-1)!}$$

$$=\rho-\frac{\rho^c p_0}{(c-1)!}-\frac{\rho^{c+1}p_0}{(1-\rho_c)\cdot c!}+\frac{\rho^c p_0}{(1-\rho_c)\cdot(c-1)!}=\rho$$

与服务台个数c无关。

平均对长

由于$N＝N_q＋N_c$，所以平均对长为

$$\overline{N}=\overline{N}_q+\overline{N}_c=\frac{\rho_c}{(1-\rho_c)^2}p_c+\rho, \qquad \rho_c<1$$

特别

- 当$c＝1$时，上述结果化为M/M/1/∞排队系统的有关结果；
- 当$c\rightarrow\infty$时，上述结果化为M/M/∞排队系统的有关结果。

3.等待时间与逗留时间

假定顾客是先到先服务。

设p_j^-表示到达的顾客看到系统中有j个顾客的平稳概率。对于M/M/c/∞排队系统，有

$$p_j^- = p_j,\ j=0,1,2,\ldots$$

定理

当ρ_c<1，在统计平衡下，进入系统接受服务的顾客的等待时间分布函数为

$$W_q(t) = P\{Wq \le t\} = 1 - \frac{p_c}{1-\rho_c} e^{-\mu(c-\rho)t}, \quad t \ge 0$$

平均等待时间为

$$\overline{W}_q = \frac{\rho_c}{\lambda(1-\rho_c)^2} \cdot p_c$$

证明

当t＝0时，有

$$W_q(0)=P\{W_q=0\}=\sum_{j=0}^{c-1}p_j^-=p_0\sum_{j=0}^{c-1}\frac{\rho^j}{j!}=1-\frac{p_c}{1-\rho_c}$$

当t＞0时，有

$$W_q(t)=P\{W_q\le t\}=P\{W_q=0\}+P\{0<W_q\le t\}$$

$$=W_q(0)+\sum_{j=c}^{\infty}P\{0<W_q\le t,N^-=j\}$$

$$=W_q(0)+\sum_{j=c}^{\infty}P\{0<W_q\le t\mid N^-=j\}\cdot p_j^-$$

证明(续1)

在到达顾客看到已有j (j≥c)个顾客的条件下，由于服务台均忙，所以顾客必须等待j-c+1个顾客服务完毕才能被服务。

在忙的条件下，由于每个服务台离去的顾客均是参数为μ的泊松流，因此c个服务台的离去流的合成是参数为cμ的泊松流，这样相继离去顾客的离去间隔时间服从参数为cμ的负指数分布，故顾客的等待时间等于这j-c+1个顾客相继离去的间隔时间之和，其分布为参数为cμ的j-c+1阶爱尔朗分布，即

$$P\{0 < W_q \le t \mid N^- = j\} = \int_0^t \frac{c\mu(c\mu x)^{j-c}}{(j-c)!} e^{-c\mu x} dx$$

证明(续2)

于是

$$W_q(t)=W_q(0)+\sum_{j=c}^{\infty}\frac{\rho^j p_0}{c^{j-c}\cdot c!}\int_0^t \frac{c\mu(c\mu x)^{j-c}}{(j-c)!}e^{-c\mu x}dx$$

$$=1-\frac{p_c}{1-\rho_c}+\frac{p_c}{1-\rho_c}[1-e^{-(1-\rho_c)c\mu t}]=1-\frac{p_c}{1-\rho_c}e^{-(c-\rho)\mu t}$$

而平均等待时间为

$$\overline{W}_q=E[W_q]=\int_0^{\infty} t dW(t)$$

$$=0\cdot(1-\frac{p_c}{1-\rho_c})+\int_{0^+}^{\infty} t\frac{p_c(c-\rho)\mu}{1-\rho_c}e^{-(c-\rho)\mu t}dt$$

$$=\frac{\rho_c}{\lambda(1-\rho_c)^2}\cdot p_c \text{。} \blacksquare$$

逗留时间

由于逗留时间$W=W_q+\chi$，且W_q与χ相互独立，于是

$$W(t)=P\{W\le t\}=\int_0^t P\{W_q\le t-x\}dP\{\chi\le x\}$$

$$=\int_0^{t^-}[1-\frac{p_c}{1-\rho_c}e^{-(c-\rho)\mu(t-x)}]\cdot\mu e^{-\mu x}dx+(1-\frac{p_c}{1-\rho_c})\cdot\mu e^{-\mu t}$$

$$=\begin{cases}1-[1+\dfrac{p_c}{1-\rho_c}\mu t]\cdot e^{-\mu t}, & \rho=c-1\\[2ex] 1-e^{-\mu t}-\dfrac{p_c}{(c-\rho-1)(1-\rho_c)}[e^{-\mu t}-e^{-\mu(c-\rho)t}], & \rho\ne c-1\end{cases}$$

平均逗留时间为

$$\overline{W}=\overline{W}_q+E[\chi]=\frac{\rho_c}{\lambda(1-\rho_c)^2}\cdot p_c+\frac{1}{\mu}$$

可以验证，Little公式成立。

5.输出过程

令N_t表示在一个顾客离去（从离去的时刻开始计时）之后又经过t时间时，在系统中的顾客数，在平衡状态下有

$$P\{N_t=n\}=p_n,\quad n=0,1,2,\ldots$$

又令T表示平衡状态下相继离去的间隔时间，以及

$$F_n(t)=P\{N_t=n,\ T>t\},\quad t\geq 0$$

因此

$$P\{T>t\}=\sum_{n=0}^{\infty}F_n(t),\qquad t\geq 0$$

下面建立$F_n(t)$的微分方程，对增量Δt，有

$$F_n(t+\Delta t)=P\{N_{t+\Delta t}=n, T>t+\Delta t\}$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}P\{N_{t+\Delta t}=n, T>t+\Delta t; N_t=j, T>t\}$$

输出过程(续1)

$$= \sum_{j=0}^{\infty} P\{N_{t+\Delta t} = n, T > t + \Delta t \mid N_t = j, T > t\} \cdot F_j(t)$$

$$= \begin{cases} F_n(t) + [\lambda \cdot F_{n-1}(t) - (\lambda + c\mu) \cdot F_n(t)]\Delta t + o(\Delta t), & c \le n \\ F_n(t) + [\lambda \cdot F_{n-1}(t) - (\lambda + n\mu) \cdot F_n(t)]\Delta t + o(\Delta t), & 1 \le n < c \end{cases}$$

$$F_0(t + \Delta t) = F_0(t) - \lambda F_0(t)\Delta t + o(\Delta t)$$

将上式右端的$F_n(t)$移到左端，然后两端同时除以Δt，再令$\Delta t \to 0$，得

$$\begin{cases} F_n'(t) = \lambda \cdot F_{n-1}(t) - (\lambda + c\mu) \cdot F_n(t), & c \le n \\ F_n'(t) = \lambda \cdot F_{n-1}(t) - (\lambda + n\mu) \cdot F_n(t), & 1 \le n < c \\ F_0'(t) = -\lambda F_0(t), & \end{cases}$$

其初始条件为

$$F_n(0) = P\{N_0 = n\} = p_n, \qquad n = 0,1,2,\cdots$$

输出过程(续2)

解上述带初始条件的常微分方程，得

$$F_n(t) = p_n e^{-\lambda t}, \qquad t \geq 0, \qquad n = 0,1,2,\cdots$$

于是

$$P\{T > t\} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t) = e^{-\lambda t}, \qquad t \geq 0$$

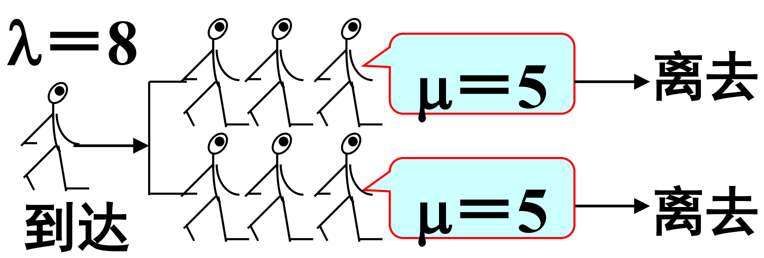
此式表示在统计平衡下，相继输出的间隔时间服从参数为λ（λ>0）的负指数分布。

另外，在统计平衡下，输出的间隔时间相互独立，因此统计平衡下的输出过程与到达过程相同。当c→∞时，就是M/M/∞系统，因此在统计平衡下M/M/∞系统的输出过程与到达过程相同。

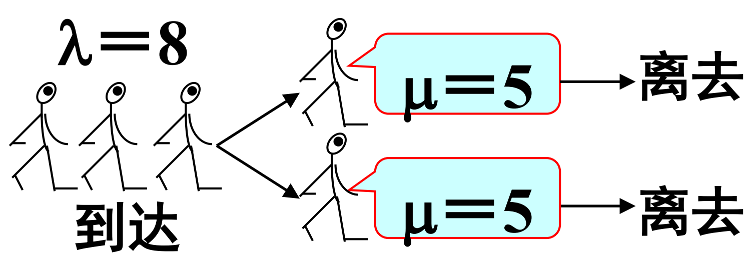
例1

某售票点有两个售票口，顾客按参数λ＝8人/分钟的泊松流到达，每个窗口的售票时间均服从参数μ＝5人/分钟的负指数分布，试比较以下两种排队方案的运行指标：

1) 顾客到达以后，以1/2的概率站成两个队列，如下图a；
2) 顾客到达后排成一个队列，顾客发现哪个窗口空闲时，就接受该窗口的服务，如下图b。



a.分解为两个平行子系统



b.两(多)通道排队系统

解 1)

实际上，这个系统分为两个独立的M/M/1/∞系统，每个系统顾客的到达均为参数$\lambda_1=\lambda_2=4$(人/分钟)的泊松流，且$\rho=4/5$，于是

$$p_0=1-\rho=0.2; \qquad \overline{N_q}=\frac{\rho^2}{1-\rho}=3.2(\text{人})$$

$$\overline{N}=\frac{\rho}{1-\rho}=4(\text{人}); \qquad \overline{W_q}=\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}=0.8(\text{分钟})$$

顾客需要等待的概率$P\{N\geq 1\}=1-p_0=0.8$

解 2)

这个系统实际上为M/M/2/∞系统，$\rho=8/5$，$\rho_c=4/5$，于是

$$p_0=\left(\sum_{j=0}^{c-1}\frac{\rho^j}{j!}+\frac{c\rho^c}{c!\cdot(c-\rho)}\right)^{-1}=\left(1+1.6+\frac{2\times1.6^2}{2\times0.4}\right)^{-1}=0.111$$

$$\overline{N_q}=\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!\cdot(c-\rho)^2}p_0=\frac{1.6^3}{1\times0.4^2}\times0.111=2.84\,(人)$$

$$\overline{N}=\overline{N}_q+\rho=2.84+1.6=4.44(人)$$

$$\overline{W_q}=\frac{\overline{N}_q}{\lambda}=\frac{2.84}{8}=0.355(分钟)$$

$$P\{N\ge2\}=\frac{1}{1-\rho_c}p_c=\frac{1}{1-0.8}\times\frac{1.6^2}{2!}\times0.111=0.7104$$

上述结果表明，采用多服务员单队列的排队系统方案，其各项运行指标都优于多队列的排队系统。

例2

在M/M/c/∞排队系统中，设λ、μ已知，c待定。假定每个服务设备单位时间的成本为$e_2\mu$元，每个顾客留在系统逗留单位时间的损失费为e_1元，试确定最佳的c^*，使得单位时间内的平均总费用最小？

解 令f(c)表示单位时间内的平均总费用，则

$$f(c)=ce_2\mu+e_1\overline{N}=ce_2\mu+e_1[\rho+\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!\cdot(c-\rho)^2}p_0]$$

$$=ce_2\mu+e_1\cdot\left[\rho+\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!\cdot(c-\rho)^2}\cdot\left(\sum_{j=0}^{c-1}\frac{\rho^j}{j!}+\frac{\rho^c}{(c-1)!\cdot(c-\rho)^2}\right)^{-1}\right]$$

$$=ce_2\mu+e_1\tilde{f}(c)$$

其中，$\tilde{f}(c)=\rho+\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!\cdot(c-\rho)^2}\cdot\left(\sum_{j=0}^{c-1}\frac{\rho^j}{j!}+\frac{\rho^c}{(c-1)!\cdot(c-\rho)^2}\right)^{-1}$

例2(续)

下面用边际分析法求最佳的c^*。因为$f(c^*)$为最小值，所以

$$f(c^*)) \le f(c^*-1) \quad 且 \quad f(c^*) \le f(c^*+1)$$

于是

$$\tilde{f}(c^*-1)-\tilde{f}(c^*) \ge \frac{e_2}{e_1}\mu \qquad \tilde{f}(c^*)-\tilde{f}(c^*+1) \le \frac{e_2}{e_1}\mu$$

因此最佳的c^*应满足条件

$$\tilde{f}(c^*)-\tilde{f}(c^*+1) \le \frac{e_2}{e_1}\mu \le \tilde{f}(c^*-1)-\tilde{f}(c^*)$$

依次对c＝1, 2, 3, …求出$\tilde{f}(c)$的值，并计算两个之差。检查$\frac{e_2}{e_1}\mu$落入上面不等式的哪个区间，从而可确定出最佳的c^*。

本节习题

1. 一台计算机有2个终端，假定计算一个题目的时间服从负指数分布，平均20分钟。假定题目是以泊松流到达，平均每小时到达5个。求积压题目的概率及平均积压的题目数。

本讲主要内容

- $M/M/c/\infty$排队系统
  - 问题的引入
  - 队长
  - 等待时间与逗留时间
  - 输出过程

下一讲内容预告

- **M/M/c/K混合制排队系统**
  - 问题的引入
  - 队长
  - 等待时间与逗留时间