随机过程与排队论

信息与软件工程学院
顾小丰
Email：guxf@uestc.edu.cn

2020年9月27日星期日

上一讲主要内容

- 泊松过程
  - 复合泊松过程
- 更新计数过程
- 马尔可夫过程
  - 马尔可夫过程的概念
  - 马尔可夫过程的分类
  - 离散参数马氏链
  - k步转移概率、 k步转移矩阵
  - 齐次马尔可夫链

本讲主要内容

➢ 马尔可夫过程

- 齐次马氏链的性质
- 初始分布、绝对分布、极限分布
- 遍历性
- 平稳性

齐次马氏链的性质1

齐次马氏链$\{X(n), n=0, 1, 2, \ldots\}$的转移概率$p_{ij}(k)$满足C-K方程(Chapman-Kolmogrov)。

$$p_{ij}(k+s)=\sum_{r\in E} p_{ir}(k)p_{rj}(s)$$

采用矩阵记号为：

$$P(k+s)=P(k$$

带条件的乘

全概率公式

$$P(A_1A_2|B)=P(A_1|B)\cdot P(A_2|A_1B)$$

证明

$$p_{ij}(k+s)=P\{X(m+k+s)=j|X(m)=i\}$$

$$=\sum_{r\in E} P\{X(m+k+s)=j, X(m+k)=r \mid X(m)=i\}$$

$$=\sum_{r\in E} P\{X(m+k)=r \mid X(m)=i\}\cdot P\{X(m+k+s)=j \mid X(m)=i, X(m+k)=r\}$$

$$=\sum_{r\in E} P\{X(m+k)=r \mid X(m)=i\}\cdot P\{X(m+k+s)=j \mid X(m+k)=r\}$$

$$=\sum_{r\in E} p_{ir}(k)p_{rj}(s)$$

齐次马氏链的性质2

齐次马氏链$\{X(n), n=0, 1, 2, \ldots\}$的n步转移矩阵等于一步转移矩阵的n次方, 即：$P(n)=P^n$。

证明 由C-K方程有：

$$P(k+s)=P(k)\cdot P(s)。$$

令$k=s=1$, 有：$P(2)=P(1)\cdot P(1)=P^2$；

令$k=2, s=1$, 有：$P(3)=P(2)\cdot P(1)=P^2\cdot P=P^3$；

由数学归纳法得：$P(n)=P^n$。

齐次马氏链的n步转移概率由一步转移概率确定。

齐次马氏链的性质3

给定齐次马氏链$\{X(n), n=0, 1, 2, \ldots\}$, 称

$$p_i = P\{X(0)=i\} \quad i\in E,$$

即$X(0)$概率分布, 为齐次马氏链的初始分布。

其中$0\le p_i\le 1$, $i\in E$且$\sum_{i\in E} p_i = 1$, 记 $\tilde{P}_0 = (p_i, i\in E)$。

给定齐次马氏链$\{X(n), n=0, 1, 2, \ldots\}$, 称

$$p_i(n) = P\{X(n)=i\} \qquad i\in E,$$

即$X(n)$概率分布, 为齐次马氏链的绝对分布。

其中$0\le p_i(n)\le 1$, $i\in E$且$\sum_{i\in E} p_i(n) = 1$, 记 $\tilde{P}_n = (p_i(n), i\in E)$。

性质3 绝对分布由初始分布和转移概率确定, 且满足

$$p_j(n) = \sum_{i\in E} p_i p_{ij}(n) \quad (j\in E)$$ 或记为 $\tilde{P}_n = \tilde{P}_0 P^n$。

证明 $p_j(n) = P\{X(n)=j\} = \sum_{i\in E} P\{X(0)=i\}\cdot P\{X(n)=j \mid X(0)=i\}$

$$= \sum_{i\in E} p_i p_{ij}(n)$$

齐次马氏链的性质4

齐次马氏链的有限维分布由初始分布和转移概率确定，且满足

$$P\{X(n_1)=i_1, X(n_2)=i_2, \ldots, X(n_k)=i_k\}$$

$$=\sum_{i\in E} p_i \cdot p_{ii_1}(n_1)\cdot p_{i_1i_2}(n_2-n_1)\cdots\cdots p_{i_{k-1}i_k}(n_k-n_{k-1})$$

其中$P\{X(n_1)=i_1, X(n_2)=i_2, \ldots, X(n_k)=i_k\}$为齐次马氏链的k维概率分布。

证明 $P\{X(n_1)=i_1, X(n_2)=i_2, \ldots, X(n_k)=i_k\}$

$$=\sum_{i\in E} P\{X(0)=i, X(n_1)=i_1, X(n_2)=i_2, \cdots, X(n_k)=i_k\}$$

$$=\sum_{i\in E} P\{X(0)=i\}\cdot P\{X(n_1)=i_1 \mid X(0)=i\}\cdot$$

$$P\{X(n_2)=i_2 \mid X(0)=i, X(n_1)=i_1\}\cdots\cdots$$

$$\cdot P\{X(n_k)=i_k \mid X(0)=i, X(n_1)=i_1, \cdots, X(n_{k-1})=i_{k-1}\}$$

$$=\sum_{i\in E} P\{X(0)=i\}\cdot P\{X(n_1)=i_1 \mid X(0)=i\}\cdot$$

$$\cdot P\{X(n_2)=i_2 \mid X(n_1)=i_1\}\cdots\cdots P\{X(n_k)=i_k \mid X(n_{k-1})=i_{k-1}\}$$

$$=\sum_{i\in E} p_i \cdot p_{ii_1}(n_1)\cdot p_{i_1i_2}(n_2-n_1)\cdots\cdots p_{i_{k-1}i_k}(n_k-n_{k-1})$$

遍历性、极限分布

设$\{X(n), n=0, 1, 2, \ldots\}$为齐次马氏链, 如果对一切状态i和j, 存在与i无关的极限

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \pi_j > 0 \qquad (i, j \in E)$$

则称此马氏链具有遍历性。

如果$\pi_j>0$, $j\in E$且$\sum_{j\in E}\pi_j=1$, 则称$(\pi_j, j\in E)$为齐次马氏链$\{X(n), n=0, 1, 2, \ldots\}$的极限分布, 或称最终分布, 记为

$$\Pi=(\pi_j, j\in E)$$

齐次马氏链的性质5

设齐次马氏链{X(n), n=0, 1, 2, …}的状态空间E={1, 2, …, s}为有限, 若存在正整数n_0, 对任意i,j∈E, 有$p_{ij}(n_0)>0$, 则此马氏链是遍历的, 且极限分布是方程组

$$\pi_j=\sum_{i=1}^{s}\pi_i p_{ij}, \qquad j=1,2,\cdots,s$$

在满足条件

$$\pi_j>0, \qquad \sum_{j=1}^{s}\pi_j=1$$

下的唯一解。

推论

设齐次马氏链{X(n), n=0, 1, 2, …}具有遍历性, 则

$$\lim_{n\to\infty} p_j(n) = \pi_j, \qquad j \in E$$

即遍历的齐次马氏链的绝对分布与转移概率有相同的极限。

证明 由绝对分布的性质

$$p_j(n) = \sum_{i\in E} p_i p_{ij}(n)$$

两边对n取极限

$$\lim_{n\to\infty} p_j(n) = \sum_{i\in E} p_i \lim_{n\to\infty} p_{ij}(n)$$
$$= \sum_{i\in E} p_i \pi_j = \pi_j \sum_{i\in E} p_i = \pi_j \quad (j \in E)$$

齐次马氏链的性质6

设{X(n), n=0, 1, 2, …}为齐次马氏链, 若存在一个分布$V=(v_j, j\in E)$满足下列条件

(1) $v_j \ge 0, j \in E;$ (2) $\sum_{j\in E} v_j = 1;$ (3) $v_j = \sum_{i\in E} v_i p_{ij};$

则称此马氏链是平稳的, 称$V=(v_j, j\in E)$为此马氏链的平稳分布，即V＝VP。

性质6 遍历的齐次马氏链的极限分布是平稳分布。

证明 设齐次马氏链{X(n), n=0, 1, 2, …}具有遍历性, 即

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \pi_j, \qquad j \in E$$

故$\{\pi_j, j\in E\}$为极限分布, 由C-K方程

$$p_{ij}(n+1) = \sum_{r\in E} p_{ir}(n) p_{rj}$$

令$n\to\infty$有： $$\pi_j = \sum_{r\in E} \pi_r p_{rj}$$

则$(\pi_j, j\in E)$为马氏链{X(n), n=0, 1, 2, …}的平稳分布。

齐次马氏链的性质7

设$\{X(n), n=0, 1, 2, \ldots\}$的平稳分布为$\{v_j, j\in E\}$，则有

$$V=VP^n, \quad n=0, 1, 2, \ldots$$

证明 由平稳分布的定义和C-K方程得

$$v_j=\sum_{i\in E} v_i p_{ij}=\sum_{i\in E}\Big(\sum_{k\in E} v_k p_{ki}\Big)p_{ij}$$

$$=\sum_{k\in E} v_k \sum_{i\in E} p_{ki} p_{ij}=\sum_{k\in E} v_k p_{kj}(2)$$

即有：$V=VP^2$。

容易由数学归纳法证得：

$$v_j==\sum_{i\in E} v_k p_{ij}(n)$$

即证得：$V=VP^n$。

齐次马氏链的性质8

如果齐次马氏链$\{X(n), n=0, 1, 2, \ldots\}$的初始分布$\{p_j, j\in E\}$恰好是平稳分布, 则对一切n有

$$p_j(n) = p_j, \quad n=0, 1, 2, \ldots, j\in E$$

即 $\tilde{P}_n = \tilde{P}_0$。

证明 设初始分布$\{p_j, j\in E\}$是平稳分布, 由性质3和性质7得

$$p_j(n) = \sum_{i\in E} p_i p_{ij}(n) = p_j, \qquad n = 0,1,2,\cdots, \quad j\in E$$

由此性质可知, 如果齐次马氏链的初始分布为平稳分布, 则绝对分布将始终等于初始分布, 而不随时间的推移而改变, 即系统具有平稳性。

重要推论

设齐次马氏链$\{X(n), n=0, 1, 2, \ldots\}$的状态空间有限$E=\{1, 2, \ldots, s\}$, 若存在正整数$n_0$, 对任意$i, j\in E$, n_0步转移概率$p_{ij}(n_0)>0$, 则此链是遍历的, 且极限分布等于平稳分布。

$$\begin{cases} \pi_j = \sum_{i\in E} \pi_i p_{ij} \quad \text{或记} \quad \Pi = \Pi P \\ \pi_j > 0, \sum_{j\in E} \pi_j = 1 \end{cases}$$

此结果在概率上可以具体求出平稳分布, 在代数上是方程组的求解问题, 即系数矩阵是转移矩阵的方程组的求解问题。

齐次马氏链例3

在传送数字0和1的通讯系统中，每一传送数字必须经过若干级。第i级正确传送的概率为p_i, X(0)表示进入系统第一级的数字，X(n)表示离开通讯系统第n级的数字。{X(n), n=0, 1, 2, …}是状态空间E＝{0, 1}的齐次马氏链。若更设$p_i＝p$（与状态无关）。

(1)转移概率矩阵 $P=\begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$ $\quad 0<p<1 \quad p+q=1$

(2)n步转移矩阵

为求P^n，先求P的特征值和特征向量

$$|\lambda I-P|=\begin{vmatrix} \lambda-p & -q \\ -q & \lambda-p \end{vmatrix}=0$$

求得特征值$\lambda_1=1$和$\lambda_2=p-q$，特征向量 $\xi_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \xi_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

齐次马氏链例3(续1)

正交, 将其单位化得 $\eta_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $\eta_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

得正交矩阵 $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$\Delta = B^{-1}PB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p-q \end{pmatrix}$, $P = B\Delta B^{-1}$

$$P^n = B\Delta^n B^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (p-q)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(p-q)^n & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(p-q)^n \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(p-q)^n & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(p-q)^n \end{pmatrix}$$

齐次马氏链例3(续2)

(3)讨论遍历性, 求极限分布和平稳分布

令$n\to\infty$, 由于$|p-q|<1$, 所以

$$\pi_0=\lim_{n\to\infty}p_{i0}(n)=\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{2}+(-1)^i\frac{1}{2}(p-q)^n]=\frac{1}{2},(i=0,1)$$

$$\pi_1=\lim_{n\to\infty}p_{i1}(n)=\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{2}-(-1)^i\frac{1}{2}(p-q)^n]=\frac{1}{2},(i=0,1)$$

由遍历性的定义, 此马氏链遍历。（也可利用性质5, 状态有限, $n_0=1$, $p_{ij}>0$, $i, j\in E$, 知其遍历）

平稳分布等于极限分布

$$\begin{cases}\pi_0=p\pi_0+q\pi_1\\ \pi_1=q\pi_0+p\pi_1\\ \pi_0+\pi_1=1\end{cases}$$

故$(\pi_0, \pi_1)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

齐次马氏链例4

设有6个球(其中2个红球4个白球)分别放于甲、乙两个盒子中，每盒3个。令每次从两个盒子中各取一个球进行交换，X(0)表示开始时甲盒中红球的个数，X(n)，n=1, 2, …表示经过n次交换后甲盒中的红球数。{X(n), n=0, 1, 2, …}是状态空间E＝{0, 1, 2}的齐次马氏链。

(1)初始分布

X(0)	0	1	2
P	1/5	3/5	1/5

$$\frac{C_4^3}{C_6^3} \qquad \frac{C_2^1C_4^2}{C_6^3} \qquad \frac{C_2^2C_4^1}{C_6^3}$$

(2)转移矩阵

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

齐次马氏链例4(续1)

(3)遍历性, 极限分布, 平稳分布

$$P^2=\begin{pmatrix}\frac{7}{27} & \frac{16}{27} & \frac{4}{27}\\ \frac{16}{81} & \frac{49}{81} & \frac{16}{81}\\ \frac{4}{27} & \frac{16}{27} & \frac{7}{27}\end{pmatrix}$$

$p_{ij}(2)>0$, $i, j\in E$, 故此马氏链为遍历的, 其极限分布等于平稳分布。

$(\pi_0, \pi_1, \pi_2)=(\pi_0, \pi_1, \pi_2)P$

$$\begin{cases}\pi_0=\frac{1}{3}\pi_0+\frac{2}{9}\pi_1\\ \pi_1=\frac{2}{3}\pi_0+\frac{5}{9}\pi_1+\frac{2}{3}\pi_2\\ \pi_2=\frac{2}{9}\pi_1+\frac{1}{3}\pi_2\\ \pi_0+\pi_1+\pi_2=1\end{cases}$$

解得平稳分布

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2)=\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$$

齐次马氏链例4(续2)

(4)绝对分布

因初始分布为平稳分布

$$\widetilde{P}_0 = \Pi = \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right),$$

故绝对分布永远等于初始分布。

$$\widetilde{P}_n = \widetilde{P}_0 = \Pi = \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$$

比如, 可以验证

$$\widetilde{P}_2 = \widetilde{P}_0 P^2$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{27} & \frac{16}{27} & \frac{4}{27} \\ \frac{16}{81} & \frac{49}{81} & \frac{16}{81} \\ \frac{4}{27} & \frac{16}{27} & \frac{7}{27} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \widetilde{P}_0 = \Pi$$

齐次马氏链例4(续3)

(4)有限维分布

$$P\{X(1)=1, X(2)=2, X(4)=1\}$$

$$=P\{X(1)=1\}\cdot P\{X(2)=2|X(1)=1\}\cdot P\{X(4)=1|X(1)=1, X(2)=2\}$$

$$=P\{X(1)=1\}\cdot p_{12}\cdot p_{21}(2)$$

$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{16}{27}=\frac{32}{405}$$

$$P\{X(2)=2, X(4)=2|X(1)=1\}$$

$$=P\{X(2)=2|X(1)=1\}\cdot P\{X(4)=2|X(1)=1, X(2)=2\}$$

$$=p_{12}\cdot p_{22}(2)$$

$$=\frac{2}{9}\cdot\frac{7}{27}=\frac{14}{243}$$

齐次马氏链例5

若顾客的购买是无记忆的，即已知顾客现在的购买情况，顾客将来购买的情况不受过去历史购买的影响，而只与现在的购买情况有关。现在市场上供应A、B、C三个不同厂生产的50克袋装味精。X(n)=1、X(n)=2、X(n)=3分别表示顾客第n次购买A、B、C厂的味精。

{X(n), n=1, 2, 3, …}是一个齐次马氏链，状态空间E＝{1, 2, 3}。

若已知第一次顾客购买三个厂味精的概率分布，即初始分布

$$\tilde{P}_1=(P\{X(1)=1\}, P\{X(1)=2\}, P\{X(1)=3\})=(0.2, 0.4, 0.4)$$

又知道一般顾客的购买倾向——转移矩阵

$$P=\begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$$

齐次马氏链例5(续1)

1) 顾客第二次购买各厂味精的概率

$$\tilde{P}_2 = \tilde{P}_1 P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.56 & 0.18 & 0.26 \end{pmatrix}$$

2) 求第1次购买各厂味精的顾客, 经过3次购买, 第4次购买各厂味精的概率

$$\tilde{P}_4 = \tilde{P}_1 P^3 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.722 & 0.128 & 0.150 \\ 0.695 & 0.134 & 0.171 \\ 0.695 & 0.142 & 0.163 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.7004 & 0.1360 & 0.1636 \end{pmatrix}$$

齐次马氏链例5(续2)

3) 预测经过长期多次购买之后, 顾客购买倾向——各厂味精市场占有率

因$p_{ij}>0$, i, $j\in E$, 故为遍历的马氏链, 其极限分布等于平稳分布

$$\begin{cases}(\pi_1,\pi_2,\pi_3)=(\pi_1,\pi_2,\pi_3)P\\ \pi_1+\pi_2+\pi_3=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\pi_1=0.8\pi_1+0.5\pi_2+0.5\pi_3\\ \pi_2=0.1\pi_1+0.1\pi_2+0.3\pi_3\\ \pi_3=0.1\pi_1+0.4\pi_2+0.2\pi_3\\ \pi_1+\pi_2+\pi_3=1\end{cases}$$

解得平稳分布 $(\pi_1,\pi_2,\pi_3)=\left(\frac{60}{84},\frac{11}{84},\frac{13}{84}\right)$

本讲主要内容

- 马尔可夫过程
  - 齐次马氏链的性质
  - 初始分布、绝对分布、极限分布
  - 遍历性
  - 平稳性

下一讲内容预告

➢ 齐次马氏链状态的分类

- 互通 首达
- 常返与非常返
- 正常返与零常返
- 状态空间分解
- 不可约马氏链
- 状态的周期性

习 题 四

P152—154

10.

19.

习　题　四

10. A、B、C三家公司决定在某一时间推销一种新产品. 当时它们各拥有$\frac{1}{3}$的市场,然而一年后,情况发生了如下的变化:

(1) A保住40%的顾客,而失去30%给B,失去30%给C;

(2) B保住30%的顾客,而失去60%给A,失去10%给C;

(3) C保住30%的顾客,而失去60%给A,失去10%给B.

如果这种趋势继续下去,试问第2年底各公司拥有多少份额的市场?(从长远来看,情况又如何?)

19. 设齐次马氏链$\{X(n),n=0,1,2,\cdots\}$的状态空间$E=\{1,2,3\}$,状态转移矩阵

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

(1) 讨论其遍历性;(2) 求平稳分布;(3) 计算下列概率. i) $P\{X(4)=3 \mid X(1)=1,X(2)=1\}$;ii) $P\{X(2)=1,X(3)=2 \mid X(1)=1\}$.