随机过程与排队论

信息与软件工程学院

顾小丰

Email：guxf@uestc.edu.cn

2020年9月27日星期日

上一讲内容回顾

➢ M/M/c/∞

$$W_q(t)=P\{Wq\le t\}=1-\frac{p_c}{1-\rho_c}e^{-\mu(c-\rho)t},\quad t\ge 0$$

$$\overline{W}_q=\frac{\rho_c}{\lambda(1-\rho_c)^2}\cdot p_c$$

$$W(t)=\begin{cases}1-[1+\frac{p_c}{1-\rho_c}\mu t]\cdot e^{-\mu t}, & \rho=c-1\\ 1-e^{-\mu t}-\frac{p_c}{(c-\rho-1)(1-\rho_c)}[e^{-\mu t}-e^{-\mu(c-\rho)t}], & \rho\ne c-1\end{cases}$$

$$\overline{W}=\frac{\rho_c}{\lambda(1-\rho_c)^2}\cdot p_c+\frac{1}{\mu}$$

本讲主要内容

- **M/M/c/K混合制排队系统**
  - 问题的引入
  - 队长
  - 等待时间与逗留时间

§5.6 M/M/c/K混合制排队系统

下面我们讨论一种混合制排队系统，系统中有K个位置，c个服务台独立并行服务，c≤K。当K个位置已被顾客占用时，新到的顾客就自动离开，当系统中有空位置时，新到的顾客就进入系统排队等待服务。

1.问题的叙述

- 顾客到达为参数λ(λ＞0)的泊松过程；
- 每个顾客所需的服务时间独立、服从参数为μ(μ＞0)的负指数分布，且到达过程与服务过程彼此独立；
- 容量为K，即系统中有K个位置；
- 系统中有c个服务台独立地平行工作，c≤K；
- 当K个位置已被顾客占用时，新到的顾客就自动离开，当系统中有空位置时，新到的顾客就进入系统排队等待服务。

2.队长与等待对长

我们用N(t)表示在时刻t系统中的顾客数，令

$p_{ij}(\Delta t)=P\{N(t+\Delta t)=j|N(t)=i\}$，$i,j=0,1,2,\ldots$

则类似§5.5的分析，有

$$p_{ij}(\Delta t)=\begin{cases}\lambda\Delta t+o(\Delta t), & j=i+1,\quad i=0,1,2,\cdots K-1\\ i\mu\Delta t+o(\Delta t), & j=i-1,\quad i=1,2,\cdots c-1\\ c\mu\Delta t+o(\Delta t), & j=i-1,\quad i=c,c+1,c+2,\cdots,K\\ o(\Delta t), & |i-j|\geq 2\end{cases}$$

于是，$\{N(t),\ t\geq 0\}$是状态空间$E=\{0,1,2,\ldots,K\}$上的生灭过程，其参数为

$$\begin{cases}\lambda_i=\lambda, & i=0,1,2,\cdots,K-1\\ \mu_i=\begin{cases}i\mu, & 1\leq i<c\\ c\mu, & c\leq i\leq K\end{cases}\end{cases}$$

定理

令$\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}$，$p_j=\lim\limits_{t\to\infty}P\{N((t)=j\}$，$j\geq 0$，则对一切$\rho$，有$\{p_j$，$j\geq 0\}$存在，与初始条件无关，且

$$p_0=\left[\sum_{j=0}^{c-1}\frac{\rho^j}{j!}+\sum_{j=c}^{K}\frac{\rho^j}{c!c^{j-c}}\right]^{-1}$$

$$\begin{cases} p_0=\left(1+\displaystyle\sum_{j=1}^{K}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}\right)^{-1}=\left(1+\displaystyle\sum_{j=1}^{c-1}\frac{\lambda^j}{\mu^j\cdot j!}+\sum_{j=c}^{K}\frac{\lambda^j}{\mu^c\cdot c!\cdot(c\mu)^{j-c}}\right)^{-1}=\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{c-1}\frac{\rho^j}{j!}+\sum_{j=c}^{K}\frac{\rho^j}{c!\cdot c^{j-c}}\right)^{-1} \\ p_j=\dfrac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}p_0=\begin{cases}\dfrac{\rho^j}{j!}p_0, & 1\leq j\leq c-1 \\ \dfrac{\rho^j}{c^{j-c}\cdot c!}p_0, & c\leq j\leq k\end{cases} \end{cases}$$

■

平均等待对长

由于M/M/c/K是损失制，损失的概率为：$p = p_K = \dfrac{\rho^k}{c!\cdot c^{K-c}} p_0$

单位时间内平均损失的顾客数为：$\overline{\lambda}_e = \lambda p_K$

单位时间内平均进入系统的顾客数为：$\lambda_e = \lambda(1 - p_K)$

平均等待对长为（$\rho_c = \rho/c$）

$$\overline{N}_q = \sum_{j=c}^{K}(j-c)p_j = \frac{p_0}{c!}\sum_{j=c}^{K}\frac{(j-c)}{c^{j-c}}\rho^j = \frac{p_0}{c!}\sum_{j=c+1}^{K}\frac{(j-c)c^c}{c^j}\rho^j$$

$$= \frac{c^c p_0}{c!}\sum_{j=c+1}^{K}(j-c)\rho_c{}^j = \frac{\rho^c \rho_c p_0}{c!}\sum_{j=c+1}^{K}(j-c)\rho_c{}^{j-c-1}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{c^c}{2c!}(K-c)(K-C+1)p_0, & \rho_c = 1 \\ \dfrac{\rho^c \rho_c p_0}{(1-\rho_c)^2 c!}\left[1 - \rho_c{}^{K-c+1} - \rho_c{}^{K-c}(1-\rho_c)(K-c+1)\right], & \rho_c \neq 1 \end{cases}$$

平均等待对长（ $\rho_c \neq 1$）

$$\overline{N}_q = \frac{\rho^c \rho_c p_0}{c!} \sum_{j=c+1}^{K} (\rho_c^{\,j-c})' = \frac{\rho^c \rho_c p_0}{c!} \left(\sum_{j=c+1}^{K} \rho_c^{\,j-c}\right)'$$

$$= \frac{\rho^c \rho_c p_0}{c!} \left(\frac{\rho_c (1-\rho_c^{k-c})}{1-\rho_c}\right)'$$

$$= \frac{\rho^c \rho_c p_0}{c!} \frac{(1-(k-c+1)\rho_c^{k-c})(1-\rho_c)+\rho_c-\rho_c^{k-c+1}}{(1-\rho_c)^2}$$

$$= \frac{\rho^c \rho_c p_0}{(1-\rho_c)^2 c!} (1-(k-c+1)\rho_c^{k-c}-(k-c)\rho_c^{k-c+1})$$

$$= \frac{\rho^c \rho_c p_0}{(1-\rho_c)^2 c!} \left[1-\rho_c^{K-c+1}-\rho_c^{K-c}(1-\rho_c)(K-c+1)\right]$$

平均对长

令N_c表示平衡时正在被服务的顾客数，则

$$P\{N_c = j\} = p_j,\quad j = 0,1,2,\cdots c-1; \qquad P\{N_c = c\} = \sum_{j=c}^{K} p_j$$

正在被服务的平均顾客数为：

$$\overline{N}_c = \sum_{j=0}^{c-1} j p_j + c\sum_{j=c}^{K} p_j = \sum_{j=0}^{c-1} \frac{\rho^j}{(j-1)!} p_0 + \frac{\rho^c}{(c-1)!} p_0 + \sum_{j=c+1}^{K} \frac{\rho^j}{c!\,c^{j-c-1}} p_0$$

$$= \rho\left[\sum_{j=0}^{c-2} \frac{\rho^j}{j!} p_0 + \frac{\rho^{c-1}}{(c-1)!} p_0 + \sum_{j=c+1}^{K} \frac{\rho^{j-1}}{c!\,c^{j-1-c}} p_0\right]$$

$$= \rho\left(\sum_{j=0}^{c-1} \frac{\rho^j}{j!} p_0 + \sum_{j=c}^{K-1} \frac{\rho^j}{c!\,c^{j-c}} p_0\right) = \rho(1 - p_k)$$

平均对长：

$$\overline{N} = \overline{N}_q + \overline{N}_c = \overline{N}_q + \rho(1 - p_K)$$

3.等待时间与逗留时间

假定顾客是先到先服务。设p_j^-表示到达的顾客看到系统中有j个顾客的平稳概率，则有

$$p_j^- = p_j,\quad j=0,1,2,\ldots$$

但是，此处到达的顾客不一定进入系统，因此令q_j表示到达且进入系统系统的顾客看到有j个顾客的平稳概率，则

$$q_j = P\{N^- = j \mid 新顾客能进入系统\}$$

$$= \frac{P\{N^- = j\}\cdot P\{新顾客能进入系统 \mid N^- = j\}}{P\{新顾客能进入系统\}}$$

$$= \frac{p_j}{1-p_K},\qquad j = 0,1,2,\cdots,K-1$$

结论

在统计平衡下，进入系统接受服务的顾客的等待时间分布函数为：

$$W_q(t) = P\{Wq \le t\} = \begin{cases} \sum_{j=0}^{c-1} q_j, & t = 0 \\ \sum_{j=0}^{c-1} q_j + \sum_{j=c}^{k-1} q_j \cdot \int_{0^+}^{t} \frac{c\mu(c\mu x)^{j-c}}{(j-c)!} e^{-c\mu x} dx, & t > 0 \end{cases}$$

平均等待时间为：$\overline{W}_q = \sum_{j=c}^{K-1} \frac{j-c+1}{c\mu} \cdot q_j$

平均逗留时间为：$\overline{W} = \overline{W}_q + \frac{1}{\mu}$

M/M/1/K

$$p_j = \begin{cases} \dfrac{(1-\rho)\rho^j}{1-\rho^{k+1}}, & \rho \neq 1 \\ \dfrac{1}{K+1}, & \rho = 1 \end{cases} \qquad 0 \le j \le K$$

$$\overline{N} = \begin{cases} \dfrac{\rho}{1-\rho} - \dfrac{(K+1)\rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}}, & \rho \neq 1 \\ \dfrac{K}{2}, & \rho = 1 \end{cases}$$

$$\overline{N}_q = \begin{cases} \dfrac{\rho^2}{1-\rho} - \dfrac{(K+\rho)\rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}}, & \rho \neq 1 \\ \dfrac{K(K-1)}{2(K+1)}, & \rho = 1 \end{cases}$$

$$W_q(t) = P\{Wq \le t\} = \begin{cases} q_0, & t = 0 \\ 1 - \sum_{j=1}^{k-1} q_j \cdot \left[\sum_{i=0}^{j} \dfrac{(\mu t)^i}{i!} e^{-\mu x} \right], & t > 0 \end{cases}$$

$$W(t) = q_0 \sum_{j=0}^{k-1} \rho^j \left[1 - e^{-\mu t} \sum_{i=0}^{j} \frac{(\mu t)^i}{i!} \right], \qquad t \ge 0$$

M/M/c/c

1) 爱尔朗公式

$$p_j = \frac{\rho^j}{j!} \Big/ \sum_{i=0}^{c} \frac{\rho^i}{i!}, \qquad j = 0,1,2,\cdots c$$

2）顾客损失（c个服务台均忙）的概率

$$p_c = \frac{\rho^c}{c!} \Big/ \sum_{i=0}^{c} \frac{\rho^i}{i!}$$

3）由于不允许排队，所以

$$\overline{N}_q = 0; \qquad \overline{N} = \overline{N}_c = \rho(1 - p_c)$$

$$\overline{W}_q = 0; \qquad \overline{W} = \frac{1}{\mu}$$

说明

对于M/M/c/K系统：

1. 令$K\to\infty$，即为M/M/c/∞系统；
2. 令$c=1$，$K\to\infty$，即为M/M/1/∞系统；
3. 令$c\to\infty$，即为M/M/∞系统。

例1

设有一个信息交换中心，信息流为泊松流，每分钟到达240份，线路输出率为每秒800个字符，信息长度（包括控制字符）近似负指数分布，平均长度176个字符。要使在任何瞬间缓冲器充满的概率不超过0.005，问缓冲器的容量K至少应取多大？

解

按M/M/1/K系统处理，信息平均到达率λ＝240份/分＝4份/秒，μ＝800/176 ＝4.546份/秒，ρ＝λ/μ＝0.88。缓冲器充满的概率p_K应满足

$$p_k = \frac{(1-\rho)\rho^K}{1-\rho^{k+1}} \leq 0.005$$

经计算有：p_{25}＝0.009045，p_{26}＝0.004464。

所以$K \geq 26$，即缓冲器的容量至少应为26个单位。

例2

在M/M/1/K排队系统中，设服务率为μ（未知），单位时间内单位服务成本为e元，每服务一个顾客获得g元，在到达率λ已知的条件下，求最佳服务率μ^*，使得单位时间内纯收入达到最大？

解：

令f(μ)表示单位时间内的纯收入，则

$$f(\mu)=\lambda g(1-p_K)-e\mu=\lambda g(1-\frac{(1-\rho)\rho^K}{1-\rho^{k+1}})-e\mu$$

因为λ、g、e已知，ρ＝λ/μ，所以f(μ)只是μ的函数。

由 $\frac{df(\mu)}{d\mu}=0$ 得 $\rho^K\frac{K-(K+1)\rho+\rho^{K+1}}{(1-\rho^{k+1})^2}=\frac{e}{g}$

由上式可得$\rho^*=\lambda/\mu^*$，于是可得服务率$\mu^*=\lambda/\rho^*$。

例2(续)

现有一个M/M/1/3 排队系统，其顾客到达率$\lambda=3.6$人/小时，每个顾客所需的平均服务时间为10分钟，服务一个顾客收入2元，服务机构运行单位时间的费用为1元。对于这样一个系统，其单位时间内的纯收入为

$$f=\lambda g(1-p_3)-e\mu=0.46\text{（元）}$$

但是，按照前面的最优方案定出$\rho^*=1.21$，从而确定出最佳服务率$\mu^*=\lambda/\rho^*=3$（人/小时），在这样的服务率下，其单位时间内的纯收入为$f^*=1.86$（元）。

因此，在给定的服务率$\mu=6$（人/小时）下未必是最优的的运营策略。

例3

设某计算机有4个终端，用户按泊松流到达，平均每10分钟到达1.5个用户。假定每个用户平均用机时间为20分钟，用机时间服从负指数分布，如果4个终端被占用，则用户到其它计算机处接受服务，求此系统的各项指标（顾客损失的概率、单位时间内实际进入系统的平均顾客数、平均忙的终端数）。

解：

这是M/M/4/4损失制系统，λ=9（人/小时），μ=3（人/小时），ρ=λ/μ=3。

- 顾客损失的概率为：

$$p_4 = \frac{3^4}{4!} \Big/ \left(1+3+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\frac{3^4}{4!}\right) = 0.235$$

- 单位时间内实际进入系统的平均顾客数为：

$$\lambda_e = \lambda(1-p_4) = 9\times(1-0.235) = 6.885(\text{人}/\text{小时})$$

- 平均忙的终端数为：

$$\overline{N}_c = \rho(1-p_4) = 3\times(1-0.235) = 2.295(\text{个})$$

本节习题

1. 考虑一个M/M/1/K排队系统，$\lambda=10$人/小时，$\mu=30$人/小时，K＝2。管理者想改进服务机构，提出了两个方案。方案I：增加等待空间，K＝3；方案II：提高服务率，$\mu=40$人/小时。假设在单位时间内单位服务成本5元和每服务一个顾客收益8元不变得情况下，哪个方案获得更大的收益？当$\lambda=30$人/小时，又有什么结果？

本讲主要内容

- **M/M/c/K混合制排队系统**
  - 问题的引入
  - 队长
  - 等待时间与逗留时间

下一讲内容预告

- 有限源的简单排队系统
- M/M/c/m/m系统
  - 问题的引入
  - 队长——故障的机器数
  - 等待时间与逗留时间——故障机器等待维修的时间
  - 其它重要指标
- M/M/c/m/m损失制系统
  - 问题的引入
  - 队长——故障的机器数
- 有备用品的M/M/c/m+K/m系统
  - 问题的引入
  - 故障的机器数