随机过程与排队论

信息与软件工程学院

顾小丰

Email：guxf@uestc.edu.cn

2020年9月27日星期日

上一讲内容回顾

概率空间

- 随机试验、样本空间、随机事件体、概率、概率空间、概率的性质
- 条件概率、乘法公式、事件的独立性、全概率公式与贝叶斯公式

本讲主要内容

- 随机变量及其分布程
  - 随机变量、分布函数
  - 离散型随机变量及其分布律
  - 连续型随机变量及其概率密度
- 常见的随机变量及其分布
- n维随机变量
- 随机变量函数的分布

§1.2 随机变量及其分布

一、随机变量

设(Ω, F, P)为概率空间，如果定义样本空间Ω上的一个单值实函数X＝X(ω)，ω∈Ω，满足

$$\{\omega：X(\omega)<x\}\in F \quad -\infty<x<+\infty$$

则称X(ω)为**随机变量**。随机变量缩写为**R.V.**。

二、分布函数

P({ω: X(ω)<x}) 的简写

设X＝X(ω)是概率空间(F，P)上的随机变量，对任意实数x，定义函数

$$F(x)=P\{X<x\} \quad -\infty<x<+\infty$$

称为R.V.X的**概率分布函数**，简称**分布函数**。

分布函数的性质

1. $0 \le F(x) \le 1$;

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) \triangleq F(-\infty) = 0;$$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) \triangleq F(+\infty) = 1;$$

2. F(x)是单调不减函数，即对任意$x_1<x_2$，有

$$F(x_1) \le F(x_2);$$

3. F(x)是左连续函数，即对任意x有

$$F(x-0)=F(x)。$$

三、离散型随机变量及其分布律

若随机变量X至多只取可列无穷多个数值：x_1, $x_2, \ldots, x_n, \ldots$，令$p_k = P\{X = x_k\}$，它满足：

$$(1)\ p_k \geq 0, \qquad (2)\ \sum_k p_k = 1,$$

则称X为**离散型随机变量**，并称

$$P\{X = x_k\} = p_k, \quad k=1, 2, \ldots$$

为X的**分布律**或**概率分布**。

离散型X.V.X的**分布函数**：

$$F(x) = P\{X < x\} = \sum_{x_k < x} p_k \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

它是左连续单调不减的阶梯函数，在$x = x_k$处有第一类跳跃型间断点，其跳跃度为p_k。

离散型R.V.X的表示

分布律(函数形式)：$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}p_k\delta(x-x_k)$

分布函数：$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}p_k\mu(x-x_k)$

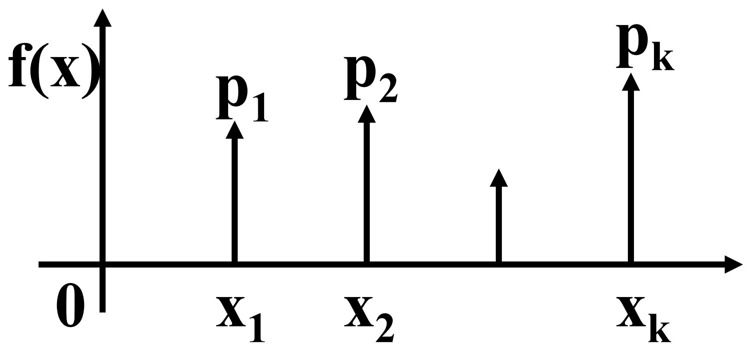
其中δ(x)为**单位脉冲函数**，μ(x)为**单位阶跃函数**，定义为：

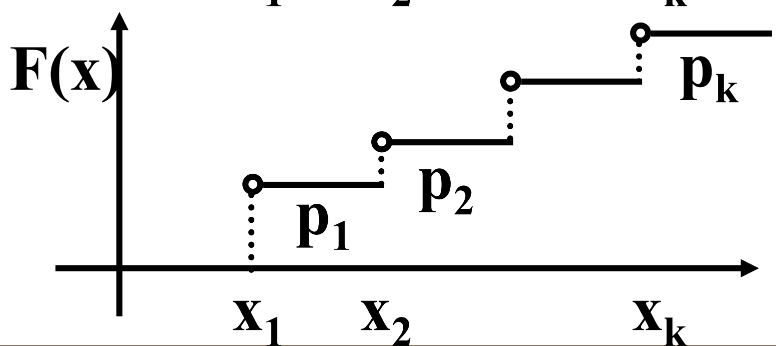
$$\delta(x)=\begin{cases}+\infty, & x=0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1$$

$$\mu(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

$$\mu'(x)=\delta(x)$$





例

设R.V.X的分布律为：

X	0	1	2
P	3/10	6/10	1/10

求X的分布律和分布函数。

解：$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}p_k\delta(x-x_k)=\frac{3}{10}\delta(x)+\frac{3}{5}\delta(x-1)+\frac{1}{10}\delta(x-2)$$

$$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}p_k\mu(x-x_k)=\frac{3}{10}\mu(x)+\frac{3}{5}\mu(x-1)+\frac{1}{10}\mu(x-2)$$

$$=\begin{cases}0, & -\infty<x\le 0,\\ \dfrac{3}{10}, & 0<x\le 1,\\ \dfrac{9}{10}, & 1<x\le 2,\\ 1, & 2<x<+\infty.\end{cases}$$

四、连续型随机变量

若存在非负可积函数f(x)，对任意实数x，使得R.V.X的分布函数满足：

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

则称X为连续型随机变量，称f(x)为连续型随机变量的概率密度函数，简称概率密度。

概率密度函数的性质

1. $f(x) \geq 0$；　　2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$;

如果一个函数f(x)具有性质1)、2)，则它一定是某个R.V.X的概率密度。

3) 在f(x)的连续点处，$F'(x)=f(x)$；

4) 连续型R.V.X取某个值的概率为0，即

$$P\{X=x\}=0,\quad x\in(-\infty, +\infty);$$

5) 连续型R.V.X落在区间的概率，与区间的开、闭无关，即

$$P\{a\leq X\leq b\}=P\{a<X\leq b\}=P\{a<X<b\}$$

$$=P\{a\leq X<b\}=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$$

故对连续型R.V.X而言，$P\{X\leq x\}=P\{X<x\}=F(x)$.

例

注 P{X>1}也可直接由分布函数得出：

$$P\{X>1\}=1-F(1)=1-(1-\frac{1}{2}e^{-1})=\frac{1}{2}e^{-1}$$

已知

求：1)分布函 ……)概率P{X>1}。

解 1) $F(x$ …… $(u)du$

$$=\begin{cases}\int^{x} \cdots du=\frac{1}{2}e^{x}, & x<0\\ \int \cdots \frac{1}{2}e^{u}du+\int_{0}^{x}\frac{1}{2}e^{-u}du=1-\frac{1}{2}e^{-x}, & x\geq 0\end{cases}$$

2) $$P\{X>1\}=\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-x}dx=\frac{1}{2}e^{-1}$$

五、常见的随机变量及其分布

1. <0－1>分布(两点分布)

如果R.V.X的分布律为：

X	0	1
P	p	q

$0<p<1$，$p+q=1$

则称R.V.X服从<0－1>分布，记为X～<0－1>分布或X～B(0, 1)。

一个随机试验仅有两种结果，A和 $\overline{A}$，定义随机变量

$$X=\begin{cases}1, & A\text{出现}\\ 0, & \overline{A}\text{出现}\end{cases}$$

$P(A)=p$，$P(\overline{A})=q=1-p$，即X～<0－1>分布。

2. 贝努里试验、二项分布

如果随机试验E满足：将一个试验在相同条件下重复进行n次，

1. 各次试验仅有两个结果A和$\overline{A}$，事件A的概率在各次试验中保持不变，$P(A)=p$，$P(\overline{A})=1-p$；
2. 各次试验的结果互不影响，

则称随机试验E为**n次贝努里试验**。

定理 在n次贝努里试验E中，事件A出现的次数X的分布律为：

$$p_k = P\{X=k\} = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad 0<p<1, p+q=1, k=0,1,\cdots,n$$

如果随机变量X的分布律为 $p_k = P\{X=k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$ $0<p<1$，$p+q=1$，$k=0, 1, 2, \ldots, n$，则称X服从**参数为n, p的二项分布**，记为**$X \sim B(n, p)$**。

3. 泊松(S.D.Poisson)分布

如果R.V.X的分布律为

很重要，记住！！！

$$p_k = P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \qquad \lambda > 0, k = 0,1,2,\cdots$$

则称R.V.X服从参数为λ的泊松分布，记为X～ψ(λ)。

泊松分布在理论和应用上都很重要，例如，在单位时间内，某电话交换台接到的电话呼叫次数；到达某服务台的顾客数；某放射源放射的粒子数；某自动控制系统损坏的元件个数；等等，都服从泊松分布。

4. 均匀分布

如果R.V.X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

则称R.V.X在区间(a, b)上服从**均匀分布**，记为 **X～U(a, b)**，X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b\\ 1, & b<x<+\infty\end{cases}$$

5. (负)指数分布(寿命分布)

如果R.V.X的概率密度为

很重要，记住！！！

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}\qquad \lambda>0$$

则称R.V.X服从参数为λ的（负）指数分布(寿命分布)，X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

6. 正态分布(高斯分布)

如果R.V.X的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\qquad -\infty<x<\infty$$

则称R.V.X服从参数为μ和σ²的正态分布(高斯分布)，记为X～N(μ, σ²)，X的分布函数为

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt,\qquad -\infty<x<+\infty$$

特别地，μ=0, σ²=1时的正态分布称为标准正态分布，记为R.V.X～N(0, 1)，其概率密度和分布函数特别记为：

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{\tau^2}{2}}d\tau,\quad -\infty<x<\infty$$

7. Γ-分布

如果R.V.X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}\qquad \begin{pmatrix}\alpha>0\\ \beta>0\end{pmatrix}$$

则称R.V.X服从参数为α, β的 **Γ-分布**，记为**X～Γ(α, β)**。

这里，Γ-函数定义为

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx\qquad(\alpha>0)$$

可证得

$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$，$\Gamma(n+1)=n!$，$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$，

$\Gamma(1)=1$。

8. χ^2-分布

如果R.V.X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

则称R.V.X服从**自由度为n的χ^2-分布**，记为X～

$\chi^2(n)$，显然， $\chi^2(n)=\Gamma(\frac{n}{2},\frac{1}{2})$

9. k阶爱尔朗(Erlang)分布

如果R.V.X的概率密度为

很重要，记住！！！

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

则称R.V.X服从参数为λ（λ>0）的 k阶爱尔朗分布，记为$X\sim E_k$，其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\lambda x)^i}{i!}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

六、二维随机变量

如果X和Y是定义在同一概率空间(Ω, F, P)上的两个随机变量，则称(X, Y)为**二维随机变量**，记为**二维R.V.(X, Y)**。

设(X, Y)是二维随机变量，定义函数

$$F(x, y) = P\{X<x, Y<y\},$$

$$-\infty<x<+\infty,\quad -\infty<y<+\infty$$

为R.V.(X, Y)的**二维联合分布函数**。

二维联合分布的性质

1. $0 \le F(x, y) \le 1$；$F(+\infty, +\infty) = 1$；

   $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0$；

2. F(x, y)对每个变量都是单调不减函数；

3. F(x, y)对每个变量都是左连续函数；

4. 对任意$x_1<x_2$，$y_1<y_2$，有

   $F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \ge 0$。

离散型二维随机变量

如果二维若随机变量(X, Y)至多只取可列无穷多对数值(x_i, y_j)，$i, j = 1, 2, \ldots$，令$p_{ij}=P\{X=x_i, Y=y_j\}$，它满足：

(1) $p_{ij} \geq 0$，　　(2) $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}=1$，

则称(X, Y)为离散型二维随机变量。

称　$p_{ij}=P\{X=x_i, Y=y_j\}$，$i, j = 1, 2, \ldots$

为(X, Y)的联合分布律。称

$$F(x,y)=\sum_{x_i<x}\sum_{y_i<y} P\{X<x_i, Y<y_j\}=\sum_{x_i<x}\sum_{y_i<y} p_{ij}$$

为(X, Y)的联合分布函数。

边缘分布律、条件分布律

称 $p_{i\cdot}=P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij},\quad i=1,2,\cdots$

为R.V.X的边缘分布律。称

$$p_{\cdot j}=P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij},\quad j=1,2,\cdots$$

为R.V.Y的边缘分布律。称

$$p_{i|j}=p_{ij}\big/p_{\cdot j},\quad i,j=1,2,\cdots$$

为在已知Y=y_j的条件下，R.V.X的条件分布律。称

$$p_{j|i}=p_{ij}\big/p_{i\cdot},\quad i,j=1,2,\cdots$$

为在已知X=x_i的条件下，R.V.Y的条件分布律。

如果$p_{ij}=p_{i.}p_{.j}$，i,j=1,2,…，则称R.V.X与Y相互独立

例

袋中有3个白球和2个红球。分别a)不放回、b)有放回地逐一摸球，共摸两次，分别用X和Y表示第一次、第二次摸到的红球数。试分a)、b)两种情形，求(X, Y)的联合分布率、联合分布函数、边缘分布律、条件分布律，并讨论X与Y是否独立。

解： a)不放回摸球。

(X, Y)的联合分布律、边缘分布律

X \ Y (P_{ij})	0	1	$p_{i.}$
0	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}$	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}$	$\frac{3}{5}$
1	$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$
$p_{.j}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

因$p_{ij} \neq p_{i.} \times p_{.j}$，

X与Y不相互独立

例(续)

(X, Y)的联合分布函数，

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x\le 0\text{或}y\le 0\\ \dfrac{3}{10}, & 0<x\le 1,0<y\le 1\\ \dfrac{6}{10}, & (0<x\le 1,y>1)\text{或}(x>1,0<y\le 1)\\ 1, & x>1,y>1\end{cases}$$

条件分布律

Y \ $P_{j\|i}$ \ X	0	1
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Y \ $P_{i\|j}$ \ X	0	1
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

例(续)

b)有放回摸球。

(X, Y)的联合分布率、

边缘分布率

$X \backslash Y$ (P_{ij})	0	1	$p_{i.}$
0	$\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$
1	$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$
$p_{.j}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

因$p_{ij}=p_{i.}\times p_{.j}(i, j = 0, 1)$,

X与Y相互独立

条件分布律即边缘分布律

(X, Y)的联合分布函数

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x\le 0\text{或}y\le 0\\ \frac{9}{25}, & 0<x\le 1, 0<y\le 1\\ \frac{6}{10}, & (0<x\le 1, y>1)\text{或}(x>1, 0<y\le 1)\\ 1, & x>1, y>1\end{cases}$$

连续型二维随机变量

若存在非负可积函数f(x, y)，使得二维R.V.(X, Y)的联合分布函数满足：

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv \qquad \begin{pmatrix} -\infty < x < +\infty \\ -\infty < y < +\infty \end{pmatrix}$$

则称(X, Y)为**连续型二维随机变量**，并称f(x, y)为连续型二维随机变量的**联合概率密度函数**，简称**联合概率密度**。

联合概率密度的性质

1） $f(x, y) \geq 0$；

2） $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy = 1;$

如果一个函数f(x, y)具有性质1)、2)，则它一定是某个二维R.V.(X, Y)的概率密度。

3） 在f(x, y)的连续点(x, y)处，有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y);$$

4） $P\{(X,Y) \in D\} = \iint_D f(x,y)\,dxdy$。

边缘分布函数

设二维R.V.(X, Y)的联合分布函数为F(x, y)，

$$F_X(x)=F(x, +\infty), \quad -\infty < x < +\infty$$

称为R.V.X的**边缘分布函数**。

$$F_Y(y)=F(+\infty, y), \quad -\infty < y < +\infty$$

称为R.V.Y的**边缘分布函数**。

设二维R.V.(X, Y)的联合概率密度为f(x, y)，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy, \quad -\infty < x < +\infty$$

称为R.V.X的**边缘概率密度函数**。

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx, \quad -\infty < y < +\infty$$

称为R.V.Y的**边缘概率密度函数**。

条件概率密度与条件分布函数

$f_{Y|X}(y|x) = f(x, y)/f_X(x)$， $-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$

称为已知X=x的条件下，R.V.Y的**条件概率密度**。

$f_{X|Y}(x|y) = f(x, y)/f_Y(y)$， $-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$

称为已知Y=y的条件下，R.V.X的**条件概率密度**。

$$F_{Y|X}(y \mid x) = \int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(y \mid x)dy = \int_{-\infty}^{y} f(x,y)dy \Big/ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

称为已知X=x的条件下，R.V.Y的**条件分布函数**。

$$F_{X|Y}(x \mid y) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x \mid y)dx = \int_{-\infty}^{x} f(x,y)dx \Big/ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

称为已知Y=y的条件下，R.V.X的**条件分布函数**。

相互独立

如果二维R.V.(X, Y)对任意的x, y有

$$P\{X<x, Y<y\}=P\{X<x\}P\{Y<y\}$$

$$-\infty < x < +\infty,\quad -\infty < y < +\infty$$

等价地有

$$F(x, y)=F_X(x)F_Y(y)$$

$$-\infty < x < +\infty,\quad -\infty < y < +\infty$$

则称R.V.X与Y**相互独立**。

显然，对连续型二维R.V.(X, Y)，X与Y独立的充分必要条件是对连续点有

$$f(x, y)=f_X(x)f_Y(y)$$

$$-\infty < x < +\infty,\quad -\infty < y < +\infty$$

例

已知R.V.(X, Y)服从二维指数分布，其联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\alpha\beta e^{-(\alpha x+\beta y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & 其它。\end{cases}$$

其中， α、β是大于零的常数，求：联合分布函数、边缘分布函数、边缘概率密度、条件概率密度，并讨论X与Y的独立性。

解： R.V.(X, Y)的联合分布函数为

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv$$

$$=\begin{cases}(1-e^{-\alpha x})(1-e^{-\beta y}), & x>0,y>0,\\ 0, & 其它。\end{cases}$$

例（续）

边缘分布函数为

$$F_X(x)=F(X,+\infty)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & 其它。\end{cases}$$

$$F_Y(y)=F(+\infty,Y)=\begin{cases}1-e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & 其它。\end{cases}$$

边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy==\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & 其它。\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx==\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & 其它。\end{cases}$$

例（续）

由于

$$f(x, y)=f_X(x)f_Y(y),\quad (x, y)\in R^2,$$

所以，X与Y相互独立。

条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x\,|\,y)=f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & \text{其它。}\end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & \text{其它。}\end{cases}$$

七、n维随机变量

推广：

如果$X_1, X_2, \ldots, X_n$是定义在同一概率空间(Ω, F, P)上的n个随机变量，则称$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$为**n维随机变量**，记为**n维R.V.$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$**。

- **n维联合分布函数**
- **k维边缘分布函数**
- **独立**

八、随机变量函数的分布

设$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$为n维随机变量，若已知其联合分布，又设有k个$X_1, X_2, \ldots, X_n$的函数

$$\begin{cases} Y_1 = g_1(X_1, X_2, \cdots X_n) \\ Y_2 = g_2(X_1, X_2, \cdots X_n) \\ \cdots\cdots \\ Y_k = g_k(X_1, X_2, \cdots X_n) \end{cases}$$

其中$g_i(.)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$均为n元连续函数，讨论$(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k)$的联合分布

一般方法：n重求和或n重积分。

定理1

设连续型R.V.X的概率密度函数为f(x)，$x\in R$，$y=g(x)$是连续函数，则$Y=g(X)$是连续型R.V.，其分布函数为

$$F_Y(y)=P\{g(X)<y\}=\int_{g(x)<y} f(x)dx, y\in R$$

R.V.Y的概率密度为$f_Y(y)=F'_Y(y)$，$y\in R$。

定理1续

如果函数 $y = g(x)$ 处处可导，且$g'(x) > 0$（或 $g'(x) < 0$），则R.V.$Y = g(X)$的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y))\left|h'(y)\right|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{□ □} \end{cases}$$

其中$\alpha = \min\{g(-\infty), g(+\infty)\}$，$\beta = \max\{g(-\infty), g(+\infty)\}$，$h(y)$是$g(x)$的反函数。

如果 $y = g(x)$ 不是单调函数，则可分为若干单调分支，其反函数为$x_i = h_i(y)$，$i = 1, 2, \ldots, m$，由上可得R.V.$Y = g(X)$的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} f_X(h_i(y))\left|h_i'(y)\right|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{□ □} \end{cases}$$

定理2

设连续型R.V.(X, Y)的联合概率密度函数为f(x, y)， g(x, y)是连续函数，则Z＝g(X, Y)是连续型一维R.V.，Z的分布函数为

$$F_Z(z) = P\{g(X,Y) < z\} = \iint\limits_{g(x,y)<z} f(x,y)dxdy$$

概率密度函数为

$$f_Z(z) = F_Z'(z)$$

定理3

设R.V.(X, Y)的联合概率密度函数为$f_{X,Y}(x, y)$，如果$u= g_1(x, y)$和 $v= g_2(x, y)$是连续函数，且满足下列条件：

1) 存在唯一的反函数 $\begin{cases} x = h_1(u,v) \\ y = h_2(u,v) \end{cases}$

2) 有连续的一阶偏导数；

3) 变换行列式（雅可比行列式）$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$

则二维R.V.(U, V)的联合概率密度为

$$f_{U,V}(u, v)=f_{X,Y}[h_1(u, v), h_2(u, v)]\ |J|。$$

例

已知离散型R.V.(X, Y)的联合概率分布如右表所示，求

(1) $Z_1 = X + Y$；

(2) $Z_2 = \max(X, Y)$

的分布律。

X \ Y (P_{ij})	0	1
0	1/4	1/4
1	1/4	1/4

解： Z_1的分布律和Z_2的分布律如下：

$Z_1 = X+Y$	0	1	2
P	1/4	1/2	1/4

$Z_2 = \max(X, Y)$	0	1
P	1/4	3/4

例

设$X\sim N(0,1)$，求$Y=X^2$的概率密度函数$f_Y(y)$。

解：由$y=x^2$，有$x_1=-\sqrt{y}$，$x_2=\sqrt{y}$，$y>0$，故

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(-\sqrt{y})\left|\dfrac{-1}{2\sqrt{y}}\right|+f_X(\sqrt{y})\left|\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\right|, & y>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{1,}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

例

设r.v. X～N(0, 1)，Y～N(0, 1)且相互独立，

U＝X＋Y，V＝X－Y，求：

1. r.v.(U, V)的联合概率密度$f_{U,V}(u, v)$；
2. r.v.U与V是否独立？

解：1. r.v.(X, Y)的联合概率密度为

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},\qquad (x,y)\in R_2$$

例(续)

由 $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$ 解得反函数

$$\begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{cases} \qquad 变换行列式 J = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

从而r.v.(U, V)的联合概率密度为

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{u^2+v^2}{4}}, \qquad (u,v) \in R^2$$

例(续)

2. U, V的边缘概率密度为

$$f_U(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2}}e^{-\frac{u^2}{4}},\qquad u\in R$$

$$f_V(v)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2}}e^{-\frac{v^2}{4}},\qquad v\in R$$

由于 $f_{UV}(u, v)=f_U(u).f_V(v)\qquad (u, v)\in R^2$

故U＝X＋Y，V＝X - Y相互独立。

本讲主要内容

- 概率空间
- 随机变量及其分布程
  - 随机变量、分布函数
  - 离散型随机变量及其分布律
  - 连续型随机变量及其概率密度
- 常见的随机变量及其分布
- n维随机变量
- 随机变量函数的分布

下一讲内容预告

- 随机变量的数字特征
  - 数学期望
  - 方差
  - k阶矩
  - 协方差
- 条件数学期望
- 随机变量的特征函数

习题一

P48～49

4.

11.

4. 设有 2 个红球、4 个白球，先将它们分放到甲、乙两个盒子中去，各放 3 个. 设 X 为甲盒中的红球数. 然后再在甲、乙两盒各取一个进行交换. 设 Y 为此时甲盒中的红球数.

(1) 求 X 的分布律；

(2) 已知 X 的条件下求 Y 的分布律；

(3) 求 Y 的分布律.

11. 已知 X 和 Y 相互独立都服从参数 $\lambda=1$ 的指数分布. 设(1)$U=X+Y, V=X-Y$；(2)$U=X+Y, V=X/Y$，求随机变量(U,V)的联合概率密度 $f_{UV}(u,v)$，并讨论 U 与 V 的独立性.