随机过程与排队论

信息与软件工程学院

顾小丰

Email：guxf@uestc.edu.cn

2020年9月27日星期日

上一讲内容回顾

- 随机变量及其分布
  - 随机变量、分布函数
  - 离散型随机变量及其分布律
  - 连续型随机变量及其概率密度
- 常见的随机变量及其分布
- n维随机变量
- 随机变量函数的分布

本讲主要内容

- 随机变量的数字特征
  - 数学期望
  - 方差
  - k阶矩
  - 协方差
- 条件数学期望
- 随机变量的特征函数

七、n维随机变量

推广：

如果$X_1, X_2, \ldots, X_n$是定义在同一概率空间(Ω, F, P)上的n个随机变量，则称$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$为n维随机变量，记为n维R.V.$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$。

- n维联合分布函数
- k维边缘分布函数
- 独立

八、随机变量函数的分布

设$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$为n维随机变量，若已知其联合分布，又设有k个$X_1, X_2, \ldots, X_n$的函数

$$\begin{cases} Y_1 = g_1(X_1, X_2, \cdots X_n) \\ Y_2 = g_2(X_1, X_2, \cdots X_n) \\ \cdots\cdots \\ Y_k = g_k(X_1, X_2, \cdots X_n) \end{cases}$$

其中$g_i(.)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$均为n元连续函数，讨论$(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k)$的联合分布

一般方法：**n重求和或n重积分。**

定理1

设连续型R.V.X的概率密度函数为f(x)，$x\in R$，$y=g(x)$是连续函数，则$Y=g(X)$是连续型R.V.，其分布函数为

$$F_Y(y)=P\{g(X)<y\}=\int_{g(x)<y} f(x)dx, y\in R$$

R.V.Y的概率密度为$f_Y(y)=F'_Y(y)$，$y\in R$。

定理1续

如果函数 $y = g(x)$ 处处可导，且$g'(x) > 0$（或$g'(x) < 0$），则R.V.$Y = g(X)$ 的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y))\left|h'(y)\right|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{□ □} \end{cases}$$

其中$\alpha = \min\{g(-\infty), g(+\infty)\}$，$\beta = \max\{g(-\infty), g(+\infty)\}$，$h(y)$是$g(x)$的反函数。

如果 $y = g(x)$ 不是单调函数，则可分为若干单调分支，其反函数为 $x_i = h_i(y)$，$i = 1, 2, \ldots, m$，由上可得R.V.$Y = g(X)$的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} f_X(h_i(y))\left|h_i'(y)\right|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{□ □} \end{cases}$$

定理2

设连续型R.V.(X, Y)的联合概率密度函数为f(x, y)，g(x, y)是连续函数，则 Z＝g(X, Y)是连续型一维R.V.，Z的分布函数为

$$F_Z(z) = P\{g(X,Y) < z\} = \iint\limits_{g(x,y)<z} f(x,y)dxdy$$

概率密度函数为

$$f_Z(z) = F_Z'(z)$$

定理3

设R.V.(X, Y)的联合概率密度函数为$f_{X,Y}(x, y)$，如果 $u = g_1(x, y)$和 $v = g_2(x, y)$是连续函数，且满足下列条件：

1) 存在唯一的反函数 $\begin{cases} x = h_1(u, v) \\ y = h_2(u, v) \end{cases}$

2) 有连续的一阶偏导数；

3) 变换行列式（雅可比行列式）$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$

则二维R.V.(U, V)的联合概率密度为

$$f_{U,V}(u, v)=f_{X,Y}[h_1(u, v), h_2(u, v)]\,|J|$$

例

已知离散型R.V.(X, Y)的联合概率分布如右表示所示，求

(1) $Z_1 = X + Y$；

(2) $Z_2 = \max(X, Y)$

的分布律。

X \ Y (P_{ij})	0	1
0	1/4	1/4
1	1/4	1/4

解： Z_1的分布律和Z_2的分布律如下：

$Z_1 = X+Y$	0	1	2
P	1/4	1/2	1/4

$Z_2 = \max(X, Y)$	0	1
P	1/4	3/4

例

设X～N(0, 1)，求$Y = X^2$的概率密度函数$f_Y(y)$。

解： 由$y=x^2$，有$x_1= -\sqrt{y}$，$x_2=\sqrt{y}$，$y>0$，故

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(-\sqrt{y})\left|\dfrac{-1}{2\sqrt{y}}\right|+f_X(\sqrt{y})\left|\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\right|, & y>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{1,}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

例

设r.v. X～N(0, 1)，Y～N(0, 1)且相互独立，

U＝X + Y，V＝X - Y，求：

1. r.v.(U, V)的联合概率密度$f_{U,V}(u, v)$；
2. r.v.U与V是否独立？

解：1. r.v.(X, Y)的联合概率密度为

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, \qquad (x,y)\in R_2$$

例(续)

由 $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$ 解得反函数

$$\begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{cases}$$

变换行列式 $J = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{2}$

从而r.v.(U, V)的联合概率密度为

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{u^2+v^2}{4}}, \qquad (u,v) \in R^2$$

例(续)

2. U, V的边缘概率密度为

$$f_U(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2}}e^{-\frac{u^2}{4}}, \qquad u\in R$$

$$f_V(v)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2}}e^{-\frac{v^2}{4}}, \qquad v\in R$$

由于 $f_{UV}(u, v)=f_U(u).f_V(v) \qquad (u, v)\in R^2$

故U＝X＋Y，V＝X－Y相互独立。

§1.3 随机变量的数字特征

一、数学期望

➢若离散型R.V.X的分布律为$p_k = P\{X=X_k\}$，k=1, 2, …,

当 $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|p_k < +\infty$ 时，称

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

为R.V.X的**数学期望**(**均值**)

➢若连续型R.V.X的概率密度函数为f(x), $x\in(-\infty, +\infty)$，当

$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx < +\infty$ 时，称

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

为R.V.X的**数学期望**(**均值**)

定理

设Y＝g(X)，g(x)是连续函数

1) 若X是离散型R.V.，分布律为$p_k＝P\{X=X_k\}$，

k=1, 2, …，当 $\sum_{k=1}^{\infty}|g(x_k)|p_k < +\infty$ 时，则有

$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$$

2) 若X是连续型R.V.，概率密度函数为f(x)，x∈

(-∞, +∞)，当 $\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|f(x)dx < +\infty$ 时，则有

$$E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

定理

设Z＝g(X, Y)，g(x, y)是连续函数

1) 当(X, Y)是离散型R.V.，联合分布律为$p_{ij}=P\{X=X_i, Y=Y_j\}$，

i, j=1, 2, …，若$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|g(x_i,y_j)|p_{ij} < +\infty$

则有 $$E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}$$

2) 若(X, Y)是连续型R.V.，概率密度函数为f(x, y)，$x\in(-\infty, +\infty)$，当$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x,y)|f(x,y)dxdy < +\infty$ 时，则有

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$$

二、方差

设X是随机变量，若$E[X-E(X)]^2$存在，称

$$D(X)=E[X-E(X)]^2$$

为R.V.X的**方差**(或记为Var(X))，称

$$\sigma_X=\sqrt{D(X)}$$

为R.V.X的**均方差**或**标准差**。

事实上有：

$$\begin{aligned}D(X)&=E[X-E(X)]^2\\&=E(X^2-2X\cdot E(X)+E^2(X))\\&=E(X^2)-E^2(X)\end{aligned}$$

常见随机变量的数学期望和方差

1. <0-1>分布：$E(X)=p$，$D(X)=pq$；
2. 二项分布$X\sim B(n, p)$：$E(X)=np$，$D(X)=npq$；
3. 泊松分布$X\sim \psi(\lambda)$：$E(X)=D(X)=\lambda$；
4. 均匀分布$X\sim U(a, b)$：

   $E(X)=(a+b)/2$，$D(X)=(b-a)^2/12$；
5. (负)指数分布：$E(X)=1/\lambda$，$D(X)=1/\lambda^2$；
6. 正态分布$X\sim N(\mu, \sigma^2)$：$E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$；
7. Γ-分布$X\sim \Gamma(\alpha, \beta)$：

   $E(X)=\alpha/\beta$，$D(X)=\alpha/\beta^2$；
8. χ^2-分布$X\sim \chi^2(n)$：$E(X)=n$，$D(X)=2n$；
9. 爱尔朗分布$X\sim E_k$：$E(X)=k/\lambda$，$D(X)=k/\lambda^2$。

例

1. 泊松分布X～ψ(λ)：

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k=\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=\lambda$$

$$D(X)=E(x^2)-E^2(x)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}-\lambda^2=e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{(k-1)!}-\lambda^2$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\frac{\lambda^k}{k!}-\lambda^2=\lambda e^{-\lambda}\left(\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\right)-\lambda^2$$

$$=\lambda e^{-\lambda}(\lambda e^{\lambda}+e^{\lambda})-\lambda^2=\lambda$$

泰勒展开式：$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

例

2. **(负)指数分布：E(X)＝1/λ，D(X)＝1/λ²；**

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}x\lambda e^{-\lambda x}dx=-\int_0^{+\infty}xde^{-\lambda x}$$

$$=-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^{+\infty}x^2\lambda e^{-\lambda x}dx=-\int_0^{+\infty}x^2de^{-\lambda x}$$

$$=-x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}2xe^{-\lambda x}dx=\frac{2}{\lambda^2}$$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$$

三、k阶矩

设R.V.X有$E(|X|^k)<+\infty$，$E[|X-E(X)|^k]<+\infty$，则

- 称$\gamma_k=E(X^k)$为X的k阶原点矩；
- 称$\alpha_k=E(|X|^k)$为X的k阶绝对矩；
- 称$\mu_k=E[X-E(X)]^k$为X的k阶中心矩；
- 称$\beta_k=E[|X-E(X)|^k]$为X的k阶绝对中心矩。

四、协方差

若E{[X-E(X)][Y-E(Y)]}，称

$$\mathrm{cov}(X, Y) = E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

$$= E(XY)-E(X)E(Y)$$

为随机变量X和Y的协方差，称

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

为随机变量X和Y的相关系数，称

$$\rho_{XY} = 0$$

为随机变量X和Y不相关。

协方差矩阵

设n维R.V.$(X_1, X_2, \ldots X_n)$，若

$$c_{ij}=\mathrm{cov}(X_i, X_j)=E\{[X_i-E(X_i)][X_j-E(X_j)]\}$$

$i, j=1, 2, \ldots, n$存在，则称

$$C=(c_{ij})_{n\times n}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

为n维随机变量$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的**协方差矩阵**。

协方差矩阵

协方差矩阵中元素满足：

1) $c_{ii}=D(X_i)$， $i=1, 2, \ldots, n$；

2) $c_{ij}=c_{ji}$， $i, j=1, 2, \ldots, n$。

故协方差矩阵是对称矩阵。

特别地，二维随机变量(X, Y)的协方差矩阵为：

$$C=\begin{pmatrix} D(X) & \operatorname{cov}(X,Y) \\ \operatorname{cov}(X,Y) & D(Y) \end{pmatrix}$$

五、随机变量数字特征的性质

1. $E(aX+b)=aE(X)+b$，$D(aX+b)=a^2D(X)$，a, b为任意常数；

2. 对任意常数a_k，k=1, 2, …, n，有

$$E(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k E(X_k)$$

$$D(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j \operatorname{cov}(X_i, X_j)$$

3. $|\rho_{XY}|\le 1$

4. 许瓦兹不等式成立： $E(XY) \le \sqrt{E(X^2)E(Y^2)}$

5. 协方差的性质：(1) $\operatorname{cov}(X, Y)=\operatorname{cov}(Y, X)$

(2) $\operatorname{cov}(X_1+X_2, Y)=\operatorname{cov}(X_1, Y)+\operatorname{cov}(X_2, Y)$

(3) $\operatorname{cov}(aX+bY, cX+dY)=acD(X)+bdD(Y)+(ad+bc)\operatorname{cov}(X, Y)$

随机变量数字特征的性质

6. 方差的计算公式

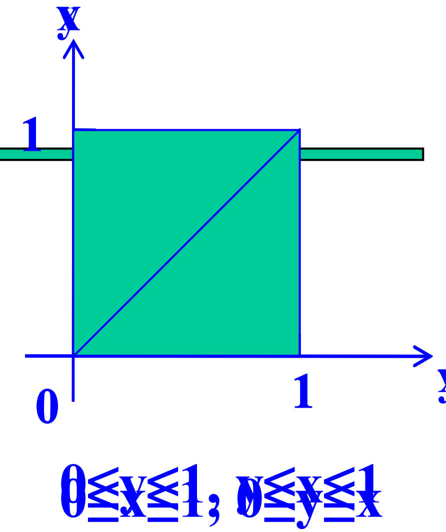
$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)\geq 0$$

特别地，当$D(X)=0$的充分必要条件是$P\{X=E(X)\}=1$。

7. $Cov(X, Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

特别地， $Cov(X, X)=D(X)$

例



设二维R.V.(X, Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & 0\le x\le 1, 0\le y\le x,\\ 0, & 其它。\end{cases}$$

求：(1). cov(X, Y)，ρ_{XY}和C；

(2). 讨论X与Y的独立性。

解：(1).

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^x 2dy=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1,\\ 0, & 其它。\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_y^1 2dx=\begin{cases}2(1-y), & 0\le y\le 1,\\ 0, & 其它。\end{cases}$$

例（续）

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\int_0^1 x\cdot 2xdx=\frac{2}{3}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_X(x)dx=\int_0^1 x^2\cdot 2xdx=\frac{1}{2}$$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{1}{2}-(\frac{2}{3})^2=\frac{1}{18}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy=\int_0^1 y2(1-y)dy=\frac{1}{3}$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f_Y(y)dx=\int_0^1 x^2\cdot 2(1-y)dy=\frac{1}{6}$$

$$D(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=\frac{1}{6}-(\frac{1}{3})^2=\frac{1}{18}$$

例（续）

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^1 xdx\int_0^x 2ydy=\frac{1}{4}$$

$$\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{36}$$

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{1}{2}$$

$$C=\begin{pmatrix} D(X) & \mathrm{cov}(X,Y) \\ \mathrm{cov}(X,Y) & D(Y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{18} & \frac{1}{36} \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{18} \end{pmatrix}$$

由于$f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$，故X与Y不独立。

§ 1.4 条件数学期望

设(X, Y)为离散型二维随机变量，其联合分布律为p_{ij}，i, j=1, 2, …，若

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|p_{i|j}<+\infty,\quad \sum_{j=1}^{\infty}|y_j|p_{j|i}<+\infty,$$

则称

$$E(X|Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_{i|j}$$

为已知$Y=y_j$的条件下，R.V.X的条件数学期望，称

$$E(Y|X=x_i)=\sum_{j=1}^{\infty}y_j p_{j|i}$$

为已知$X=x_i$的条件下，R.V.Y的条件数学期望。

条件数学期望

设(X, Y)为连续型二维随机变量，其联合概率密度为f(x, y)，若

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f_{X|Y}(x|y)dx<+\infty,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}|y|f_{Y|X}(y|x)dy<+\infty,$$

则称

$$E(X|Y=y)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{X|Y}(x|y)dx$$

为已知Y=y的条件下，R.V.X的条件数学期望，称

$$E(Y|X=x)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_{Y|X}(y|x)dy$$

为已知X=x的条件下，R.V.Y的条件数学期望。

定理

设g(x)为连续函数，

(1)若 $\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|f_{X|Y}(x|y)dx<+\infty$，

则 $E(g(X)|Y=y)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f_{X|Y}(x|y)dx$;

(2)若 $\int_{-\infty}^{+\infty}|g(y)|f_{Y|X}(y|x)dy<+\infty$，

则 $E(g(Y)|X=x)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(y)f_{Y|X}(y|x)dy$。

条件方差

称$D(X|Y=y)＝E[X-E(X|Y=y)]^2$为Y=y条件下，

随机变量X的条件方差。

条件数学期望的性质

设X, Y, Z为随机变量，g(.)和h(.)为连续函数，下列期望和条件期望均存在，则

1. $E(C|Y)=C$，C为常数；
2. $E(aX+bY|Z)=aE(X|Z)+bE(Y|Z)$，a, b为常数；
3. 如果X与Y独立，则$E(X|Y)=E(X)$；
4. $E(X)=E[E(X|Y)]$；
5. $E[g(X)]=E\{E[g(X)|Y]\}$；

全期望公式

6. $E[g(X)h(Y)|X]=g(X)E[h(Y)|X]$；

   $E[g(X)h(Y)|Y]=h(Y)E[g(X)|Y]$；
7. $E[g(X, Y)]=E\{E[g(X, Y)|Y]\}$；
8. $E[X-E(X|Y)]^2\leq E[X-E(Y)]^2$。

例

设在某一天内进入某商店的顾客数是数学期望为100的随机变量。又设这些顾客所花的钱为数学期望是50元的相互独立的随机变量。再设一个顾客花钱数和进入商店的总人数相互独立。试问在给定一天内，顾客在该店所花的钱的期望值是多少？

解：设N表示进入某商店的顾客人数，X_i表示第i个顾客所花的钱数，则N个顾客所花钱的总数为

$Y=\sum_{i=1}^{N} X_i$，现在要求E[Y]。

例(续)

由全期望公式：

$$E(Y)=E[E(Y|N)]$$

而

$$E(Y\mid N=n)=E(\sum_{i=1}^{n}X_i\mid N=n)=E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=nE(X)$$

因为X_i与N相互独立，且$E(X_i)=E(X)$，从而

$$E(Y|N)=NE(X)$$

$$E(Y)=E(NE(X))=E(N)E(X)$$

由假设，E(N)＝100，E(X)＝50，故E(Y)＝5000。由此得，顾客们花费在该商店的钱的数学期望值为5000元。

§ 1.4 特征函数

随机变量X的**特征函数**定义为

$$\varphi_X(u)=E(e^{iuX}),\quad i=\sqrt{-1}$$

当R.V.X为离散型随机变量时，

$$\varphi_X(u)=\sum_{k=1}^{\infty}e^{iuX_k}p_k$$

当R.V.X为连续型随机变量时，

$$\varphi_X(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{iux}f_X(x)dx$$

例1 二项分布 X～B(n, p)

$$p_k = P\{X=k\} = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad k=0,1,2,\cdots,n$$

特征函数:

$$\varphi_X(u) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{iuk} p_k = \sum_{k=0}^{n} e^{iuk} C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (pe^{iu})^k q^{n-k} = (q+pe^{iu})^n$$

例2 泊松分布 $X \sim \psi(\lambda)$

$$p_k = P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad \lambda > 0, k = 0,1,2,\cdots$$

特征函数：

$$\varphi_X(u) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{iuk} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{iuk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{iu})^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{iu}} = e^{\lambda(e^{iu} - 1)}$$

例3 (负)指数分布

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}\qquad \lambda>0$$

特征函数:

$$\varphi_X(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{iux}f(x)dx$$

$$=\int_{0}^{+\infty}e^{iux}\lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$=\lambda\int_{0}^{+\infty}e^{(iu-\lambda)x}dx$$

$$=\frac{\lambda}{\lambda-iu},\qquad \lambda>0$$

例4 k阶爱尔朗分布 $X \sim E_k$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

特征函数:

$$\varphi_X(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{iux}f(x)dx=\int_0^{+\infty}e^{iux}\frac{\lambda(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda x}dx$$

$$=\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\int_0^{+\infty}x^{k-1}e^{-(\lambda-iu)x}dx=\frac{\lambda^k}{(\lambda-iu)^k(k-1)!}\Gamma(k)$$

$$=\left(\frac{\lambda}{\lambda-iu}\right)^k$$

特征函数的性质

1. $\varphi_X(0)=1$；
2. $|\varphi_X(u)|\le\varphi_X(0)$；
3. $\overline{\varphi_X(u)}=\varphi_X(-u)$；
4. 设$Y=aX+b$，则$\varphi_Y(u)=e^{iub}\varphi_X(au)$；
5. $\varphi_X(u)$在$(-\infty, +\infty)$上一致连续；
6. $\varphi_X(u)$是非负定函数，即对任意的u_i, z_i，$i=1, 2, \ldots, n$，有

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi_X(u_j-u_k)z_j\overline{z_k}\ge 0。$$

7. 如果R.V.X的k阶原点矩存在，则X的特征函数$\varphi_X(u)$有n阶导数，且

$$E(X^k)=(-i)^k\varphi_X^{(k)}(0)$$

特征函数的性质

8. (逆转公式或反演公式)设随机变量X的分布函数为F(x)，x_1, x_2是F(x)任意连续点，有

$$F(x_2)-F(x_1)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{+T}\frac{e^{-iux_1}-e^{-iux_2}}{iu}\varphi_X(u)du$$

9. (唯一性定理)随机变量X的分布函数F(x)与特征函数$\varphi_X(u)$是一一对应且相互唯一确定的。其相互关系如下：

$$\begin{cases}\varphi_X(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{iux}f_X(x)dx\\ f_X(u)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iux}\varphi_X(u)du\end{cases}$$

二维随机变量的特征函数

二维随机变量(X, Y)的**特征函数**定义为

$$\varphi(u, v)=E[e^{i(uX+vY)}]。$$

当R.V.(X, Y)为离散型随机变量时，

$$\varphi(u,v)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}e^{i(uX_j+vy_k)}p_{jk}$$

当R.V.(X, Y)为连续型随机变量时，

$$\varphi(u,v)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(ux+vy)}f(x,y)dxdy$$

定理7：若R.V.X与Y相互独立，则

$$\varphi_{X+Y}(u)=\varphi_X(u)\varphi_Y(u)。$$

例

设X_1，X_2，…，X_n，…是相互独立、服从参数为λ的负指数分布，则

$$Y_k=X_1+X_2+\cdots+X_k,\quad k=1,\ 2,\ \cdots$$

服从参数为λ的k阶爱尔朗分布。

证明：

因为 X_i（i=1, 2, …）的特征函数为：

$$\varphi_{X_i}(u)=\frac{\lambda}{\lambda-iu}$$

由于$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$是相互独立，

故$Y_k=X_1+X_2+\ldots+X_k$的特征函数为：

$$\varphi_{Y_k}(u)=\varphi_{X_1+X_2+\cdots+X_k}(u)$$

$$=\varphi_{X_1}(u)\cdot\varphi_{X_2}(u)\cdot\cdots\cdot\varphi_{X_k}(u)=\left(\frac{\lambda}{\lambda-iu}\right)^k$$

这正好是参数为λ的k阶爱尔朗分布的特征函数，

故Y_k服从参数为λ的k阶爱尔朗分布。

本讲主要内容

- 随机变量的数字特征
  - 数学期望
  - 方差
  - k阶矩
  - 协方差
- 条件数学期望
- 随机变量的特征函数

下一讲内容预告

- 随机过程的基本概念
  - 随机过程的定义
  - 随机过程的分布
  - 随机过程的数字特征
- 几种重要的随机过程
  - 独立过程
  - 独立增量过程

习题一

P48～51

4.　　　11.

15.　　　16.　　　25.

4. 设有 2 个红球、4 个白球，先将它们分放到甲、乙两个盒子中去，各放 3 个. 设 X 为甲盒中的红球数. 然后再在甲、乙两盒各取一个进行交换. 设 Y 为此时甲盒中的红球数.

(1) 求 X 的分布律；

(2) 已知 X 的条件下求 Y 的分布律；

(3) 求 Y 的分布律.

11. 已知 X 和 Y 相互独立都服从参数 $\lambda=1$ 的指数分布. 设(1)$U=X+Y, V=X-Y$；(2)$U=X+Y, V=X/Y$，求随机变量(U,V)的联合概率密度 $f_{UV}(u,v)$，并讨论 U 与 V 的独立性.

习题一

15. 设随机变量 X 和 Y 有 $E(X)=1, E(Y)=3, D(X)=4, D(Y)=25, \rho_{XY}=0.6$，又设

$$\xi = 2X+Y, \quad \eta = 3X-Y$$

试求：$E(\xi), D(\xi); E(\eta), D(\eta); \mathrm{cov}(\xi,\eta)$ 和 $\rho_{\xi\eta}$.

16. 已知二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求：(1) $f_X(x), f_Y(y)$；

(2) 讨论 X 与 Y 的独立性和相关性；

(3) 求条件数学期望 $E(X|Y)$ 和 $E(Y|X)$.

25. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，$X\sim P(\lambda_1)$，$Y\sim P(\lambda_2)$.

(1) 利用特征函数证明：$X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$；

(2) 证明：$P\{X=k|X+Y=n\}=C_n^k\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}$，其中 $k\leqslant n$，且 k,n 为然数；

(3) 求 $E(X|X+Y=n)$.