随机过程与排队论

信息与软件工程学院

顾小丰

Email：guxf@uestc.edu.cn

2020年9月27日星期日

上一讲内容回顾

- **随机过程的基本概念**
  - 随机过程的定义
  - 随机过程的分布
  - 随机过程的数字特征

本讲主要内容

- **重要随机过程**
  - 独立过程
  - 独立增量过程
  - 正态过程
  - 维纳过程

五、重要随机过程

1.独立过程

给定随机过程$\{X(t),\ t\in T\}$，如果对任意正整数n及任意$t_1,t_2,\ldots,t_n\in T$，随机变量$X(t_1),X(t_2),\ldots,X(t_n)$相互独立，则称随机过程$\{X(t),\ t\in T\}$为独立过程。

特别，如果$X(n)$，$n=1, 2, 3, \ldots$是相互独立的随机变量，则称$\{X(n),\ n=1, 2, 3, \ldots\}$为独立随机序列。

独立过程的n维概率分布由一维概率分布确定：

$$F_n(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{k=1}^{n}F_1(t_k;x_k)$$

例1

如果X(n), n=1, 2, 3, …是相互独立的伯努利随机变量，它们的概率分布律为

X(n)	0	1
P	q	p

$0<p<1$

$P+q=1$

n=1, 2, 3, …

则称{X(n), n=1, 2, 3, …}为伯努利随机序列。

伯努利随机随机序列是一个独立随机序列。其

均值 $E[X(n)] = p$,

方差 $D[X(n)] = pq$,

相关函数 $R(m,n) = E[X(m)X(n)] = \begin{cases} p^2, & m \neq n \\ p, & m = n \end{cases}$

协方差函数

$$C(m,n) = R(m,n) - E[X(m)]E[X(n)] = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ pq, & m = n \end{cases}$$

例2 高斯白噪声

如果随机序列$\{X(n), n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$，其中$X(n)$，$n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$是两两不相关的随机变量，而且$E[X(n)]=0$，$D[X(n)]=\sigma^2$，$n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

$$R(m,n)=\begin{cases} 0, & m \neq n \\ \sigma^2, & m=n \end{cases}$$

则称$\{X(n), n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$为**离散白噪声（序列）**。

如果白噪声序列$X(n)$，$n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$都服从正态分布（高斯分布）则称$\{X(n), n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$为**高斯白噪声**。

高斯白噪声序列是独立随机序列。

例2 高斯白噪声

如果连续参数随机过程{X(t)，-∞<t<+∞}有如下性质：

$$E[X(t)]=0$$

$$R(s,t)=\sigma^2\delta(t-s)=\begin{cases}0, & s\neq t\\ \infty, & s=t\end{cases}$$

则称{X(t)，-∞ < t < +∞} 为连续参数白噪声。

如果白噪声过程{X(t)，-∞<t<+∞}，对每个t∈ (-∞, +∞)，X(t)是正态（高斯）随机变量，则称{X(t)，-∞ < t < +∞} 为高斯白噪声（过程）。

高斯白噪声过程是独立随机过程。

2.独立增量过程

设随机过程

$$\{X(t), t\in T\}，T=[0, +\infty),$$

如果对任意正整数$n\geq 2$，$t_1,t_2,\dots,t_n\in T$且$t_1<t_2<\dots<t_n$，随机过程的增量

$$X(t_2)-X(t_1), X(t_3)-X(t_2), \dots, X(t_n)-X(t_{n-1})$$

是相互独立的随机变量，则称$\{X(t), t\in T\}$为独立增量过程。

平稳独立增量过程

如果独立增量过程

$$\{X(t), t\in T\}，\ T=[0,+\infty),$$

对所有的s, t∈T及h>0, s+h, t+h∈T

$$X(t+h)-X(s+h)与X(t)-X(s)$$

有相同的概率分布，则称{X(t), t∈T}为平稳独立增量过程。

平稳独立增量过程{X(t), t∈T}的增量

$$X(t+\tau)-X(t)，\ t\in T, t+\tau\in T$$

的概率分布仅依赖于τ而与t无关，即仅与时间区间的长度有关，而与起点无关，具有平稳性，即增量具有平稳性。

例

设{X(n), n=1, 2, 3, …} 是独立随机序列，

$$Y(n)=\sum_{k=0}^{n} X(k), \qquad X(0)=0$$

则{Y(n), n=0, 1, 2, …}是独立增量过程。

若X(n), n=1, 2, 3, …是相互独立且同分布的随机变量，且

$$Y(n)=\sum_{k=0}^{n} X(k), \qquad X(0)=0$$

则{Y(n), n=0, 1, 2, …}是平稳独立增量过程。

例

设{X(n), n=1, 2, 3, …} 是相互独立同分布的伯努利随机变量序列

X(n)	0	1
P	q	p

$0<p<1$, $P+q=1$　n=1, 2, 3, …

$$Y(n)=\sum_{k=0}^{n}X(k),\qquad X(0)=0$$

则称{Y(n), n=0, 1, 2, …}为**二项计数过程(随机游动)**。

二项计数过程是一个独立增量过程。其

一维概率分布　$Y(n)\sim B(n,p)$,

均值函数　$E[Y(n)]=np$,

方差函数　$D[Y(n)]=npq$,

例

二维概率分布

$$P\{Y(n_1)=k_1, Y(n_2)=k_2\}$$

$$\overset{n_1<n_2}{=} P\{Y(n_1)-Y(0)=k_1-0, Y(n_2)-Y(n_1)=k_2-k_1\}$$

$$=C_{n_1}^{k_1}p^{k_1}q^{n_1-k_1}C_{n_2-n_1}^{k_2-k_1}p^{k_2-k_1}q^{(n_2-n_1)-(k_2-k_1)}$$

$$=C_{n_1}^{k_1}C_{n_2-n_1}^{k_2-k_1}p^{k_2}q^{n_2-k_2}$$

协方差函数

$$C_Y(m,n)=\mathrm{cov}(Y(m),Y(n)) \qquad (m<n)$$

$$=\mathrm{cov}(\sum_{j=1}^{m}X(j), \sum_{k=1}^{n}X(k))$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\mathrm{cov}(X(k),X(k))=mpq$$

一般 $\qquad C_Y(m,n)=pq\cdot\min(m,n)$

独立增量过程的性质

1. 如果$\{X(t),\ t\geq 0\}$是平稳独立增量过程，$X(0)=0$，则
   1) 均值函数　$m(t)=at$，a为常数；
   2) 方差函数　$D(t)=\sigma^2 t$，σ为正常数；
   3) 协方差函数$C(s,\ t)=\sigma^2\min(s,\ t)$。
2. 独立增量过程的有限维分布由一维分布和增量分布决定。

证明

1\. 1）设$m(t)=E[X(t)]$，则

$$m(t+s)=E[X(t+s)]$$

$$=E[X(t+s)-X(s)+X(s)-X(0)]$$

$$=E[X(t+s)-X(s)]+E[X(s)-X(0)]$$

$$=E[X(t)]+E[X(s)]$$

$$=m(t)+m(s)$$

由数学分析知识知：

$m(t)=at$，其中常数$a=m(1)$。

$f(x)$连续，若$f(x+y)=f(x)+f(y)$，则$f(x)=kx$。

证明(续1)

2） 设$D(t)=D[X(t)]$，则

$$D(t+s)=D[X(t+s)]$$

$$=D[X(t+s)-X(s)+X(s)-X(0)]$$

$$=D[X(t+s)-X(s)]+D[X(s)-X(0)]$$

$$=D[X(t)]+D[X(s)]=D(t)+D(s)$$

由数学分析知识：

$D(t)=\sigma^2 t$，其中$\sigma^2=D(1)$为正常数。

$f(x)$连续，若$f(x+y)=f(x)+f(y)$，则$f(x)=kx$。

证明(续

假设t > s，否则变形为

$E\{[X(s)-X(t)+X(t)]X(t)\}-m(s)m(t)$

3） $C(s, t)=E\{[X(t)$ … $X(s)-m(s)]\}$

$=E[X(t)X(s)]-m(s$ … $t)$

$\overset{t\geq s}{=}E\{[X(t)-X(s)+X(s)]X(s)\}-m(s)m(t)$

$=E[X(t)-X(s)]E[X(s)]+E[X^2(s)]-m(s)m(t)$

$=m(t-s)m(s)+D(s)+m^2(s)-m(s)m(t)$

$=a(t-s)as+\sigma^2 s+a^2s^2-a^2st$

$=\sigma^2 s$

一般地，$C(s, t)=\sigma^2\min(s, t)$。

证明(续3)

2. 任取$t_1<t_2<\ldots<t_n\in T$，令

$$Y_1=X(t_1),\ Y_2=X(t_2)-X(t_1),\ \ldots,\ Y_n=X(t_n)-X(t_{n-1})$$

由增量的独立性知，$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$为相互独立的随机变量，且

$$X(t_1)=Y_1,\ X(t_2)=Y_1+Y_2,\ \ldots,\ X(t_n)=Y_1+Y_2+\ldots+Y_n$$

记$\varphi(t_1, u_1)$为$X(t_1)$的特征函数；

$\varphi(t_k-t_{k-1}, u)$为$X(t_k)-X(t_{k-1})$的特征函数；

$\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n;u_1, u_2, \ldots, u_n)$为$X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)$的联合特征函数。

证明(续4)

由特征函数的定义及$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$的独立性，有

$$\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n; u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

$$= E\{e^{i[u_1 x(t_1)+u_2 x(t_2)+\cdots+u_n x(t_n)]}\}$$

$$= E\{e^{i[u_1 Y_1+u_2(Y_1+Y_2)+\cdots+u_n(Y_1+Y_2+\cdots+Y_n)]}\}$$

$$= E\{e^{i[(u_1+u_2+\cdots+u_n)Y_1+(u_2+\cdots+u_n)Y_2+\cdots+u_n Y_n]}\}$$

$$= E\{e^{i[(u_1+u_2+\cdots+u_n)Y_1]}\}E\{e^{i[(u_2+\cdots+u_n)Y_2]}\}\cdots E(e^{iu_n Y_n})$$

证明(续5)

$$= \varphi(t_1, u_1 + u_2 + \cdots + u_n).$$

$$\varphi(t_2 - t_1, u_2 + \cdots + u_n).\cdots.\varphi_n(t_n - t_{n-1}, u_n)$$

$$= \varphi_{X(t_1)}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)\cdot$$

$$\prod_{k=2}^{n} \varphi_{X(t_k)-X(t_{k-1})}(u_k + \cdots + u_n)$$

因此，只要由一维分布和增量分布就可以完全确定独立增量过程的有限维分布。

说明

- 特别地，对$a>-\infty$，$P\{X(a)=0\}=1$的情况下，因为$X(t_1)=X(t_1)-X(a)$，所以只要知道增量分布就可以完全确定独立增量过程的有限维分布。
- 对于平稳独立增量过程$\{X(t),\ t\in[a,\ b]\}$，若$a>-\infty$，$P\{X(a)=0\}=1$。因为增量$X(t_2)-X(t_1)$的分布与$X(t_2-t_1+a)-X(a)$与$X(t_2-t_1)$的分布相同，所以实际上只要知道$X(t)$的一维分布就可以推出它的有限维分布。

3.正态过程(高斯过程)

正态过程在电子技术中经常遇到，例如温度限制二极管的噪声、电子元器件的噪声等。

正态过程在随机过程中起着重要的作用。

一方面，很多重要随机过程都是正态过程，或者可以用正态过程来近似表示；

另一方面，正态过程具有很多良好的性质，对正态过程来说，许多问题的回答比其它过程较为容易。

正态过程的定义

给定随机过程$\{X(t), t\in T\}$，如果对任意正整数n及$t_1, t_2, \ldots, t_n\in T$，n维随机变量$(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$的联合概率分布为n维正态分布，则称随机过程$\{X(t), t\in T\}$为**正态过程**(或**高斯过程**)。

设$\{X(t), t\in T\}$为正态过程，则其有限维概率分布都是正态分布。

正态过程的一维概率分布

均值函数 $m(t)=E[X(t)]$

方差函数 $D(t)=D[X(t)]$

一维概率分布 $X(t)\sim N(m(t),D(t))$

一维概率密度函数

$$f(t,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi D(t)}}e^{-\frac{[x-m(t)]^2}{2D(t)}},t\in T,x\in R$$

一维特征函数

$$\varphi(t,u)=e^{-\frac{1}{2}D(t)u^2+im(t)u},t\in T,u\in R$$

正态过程的二维概率分布

均值函数向量 $\mu=\begin{pmatrix}m(s) & m(t)\end{pmatrix}^T$

二阶协方差矩阵 $C=\begin{pmatrix}D(s) & C(s,t)\\ C(s,t) & D(t)\end{pmatrix}$

二维概率分布 $(X(s),X(t))^T\sim N(\mu,C)$

二维概率密度函数

$$f(\vec{x})=f(s,t;x,y)=\frac{1}{2\pi|C|^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\mu)^T C^{-1}(\vec{x}-\mu)},\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

二维特征函数

$$\varphi(\vec{u})=\varphi(s,t;u,v)=e^{-\frac{1}{2}\vec{u}^T C\vec{u}+i\vec{u}^T\vec{u}},\quad \vec{u}\in\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$$

正态过程的n维概率分布

均值函数向量 $\mu = \left(m(t_1), m(t_2), \cdots, m(t_n)\right)^T$

n阶协方差矩阵

$$C = \begin{pmatrix} C(t_1,t_1) & C(t_1,t_2) & \cdots & C(t_1,t_n) \\ C(t_2,t_1) & C(t_2,t_2) & \cdots & C(t_2,t_n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ C(t_n,t_1) & C(t_n,t_2) & \cdots & C(t_n,t_n) \end{pmatrix}$$

n维概率分布 $(X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n))^T \sim N(\mu, C)$

正态过程的n维概率分布

n维概率密度函数 $f(\vec{x}) = f(t_1, t_2, \cdots, t_n; x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |C|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\mu)^T C^{-1} (\vec{x}-\mu)}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

n维特征函数 $\varphi(\vec{u}) = \varphi(t_1, t_2, \cdots, t_n; u_1, u_2, \cdots, u_n)$

$$= e^{-\frac{1}{2}\vec{u}^T C \vec{u} + i \vec{u}^T \vec{u}}, \quad \vec{u} \in \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

例

给定随机过程$\{X(t), t\in T\}$，

$$X(t)=X_0+Vt,\qquad 0\le t<+\infty$$

其中X_0和V是相互独立的标准正态$N(0, 1)$随机变量。证明$\{X(t), t\in T\}$为正态过程，并写出一、二、n维概率密度和特征函数。

解 设

$$X=\begin{pmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) \\ \vdots \\ X(t_n) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_0 \\ V \end{pmatrix}=K\xi,\ \text{其中}K=\begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{pmatrix},\xi=\begin{pmatrix} X_0 \\ V \end{pmatrix}$$

例(续1)

因 $$\xi=\begin{pmatrix}X_0\\V\end{pmatrix}\sim N\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$$

从而 $$X\sim N\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ K\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}K^T\right)$$

故$\{X(t), t\in T\}$为正态过程。

均值函数 $m(t)=E[X(t)]=0$；

协方差函数 $C(s, t)=1+st$；

方差函数 $D(t)=1+t^2$；

一维概率分布 $X(t)\sim N(0, 1+t^2)$；

例(续2)

一维概率密度函数

$$f(t,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(1+t^2)}}e^{-\frac{x^2}{2(1+t^2)}},t\geq 0,x\in R$$

一维特征函数

$$\varphi(t,u)=e^{-\frac{1}{2}(1+t^2)u^2},t\geq 0,u\in R$$

例(续3)

二维概率分布 $(X(s), X(t))^T \sim N(O, C)$

其中 均值 $O = (0, 0)^T$

协方差阵 $C = \begin{pmatrix} 1+s^2 & 1+st \\ 1+st & 1+t^2 \end{pmatrix}$

二维概率密度函数

$$f(s,t;x,y) = \frac{1}{2\pi|t-s|} e^{-\frac{1}{2(t-s)^2}[(1+t^2)x^2 - 2(1+st)xy + (1+s^2)y^2]}$$

二维特征函数

$$\varphi(s,t;u,v) = e^{-\frac{1}{2}[(1+s^2)u^2 + 1(1+st)uv + (1+t^2)v^2}$$

例(续4)

n维概率分布

$$X=\begin{pmatrix}X(t_1)\\X(t_2)\\\vdots\\X(t_n)\end{pmatrix}\sim N\left(O,\quad K\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}K^T\right),\quad K=\begin{pmatrix}1&t_1\\1&t_2\\\vdots&\vdots\\1&t_n\end{pmatrix}$$

$$C=K\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}K^T=\begin{pmatrix}1&t_1\\1&t_2\\\vdots&\vdots\\1&t_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\t_1&t_2&\cdots&t_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1+t_1^2&1+t_1t_2&\cdots&1+t_1t_n\\1+t_2t_1&1+t_2^2&\cdots&1+t_2t_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1+t_nt_1&1+t_nt_2&\cdots&1+t_n^2\end{pmatrix}$$

例(续5)

n维概率密度函数 $f(\vec{x}) = f(t_1, t_2, \cdots, t_n; x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |C|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\vec{x}^T C^{-1} \vec{x}}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

n维特征函数 $\varphi(\vec{u}) = \varphi(t_1, t_2, \cdots, t_n; u_1, u_2, \cdots, u_n)$

$$= e^{-\frac{1}{2}\vec{u}^T C \vec{u}}, \quad \vec{u} \in \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

4. 维纳过程(Brown运动)

英国植物学家Brown于1827年观察到悬浮于液体中的花粉微粒的运动是非常不规则的，后人把这种运动称为Brown运动。1918年，Wiener提出了Brown运动的精确数学公式，所以Brown运动又称为Wiener过程。

维纳过程的定义

如果随机过程$\{W(t), t\geq 0\}$满足下列条件：

(1) $W(0)=0$；

(2) $E[W(t)]=0$；

(3) 具有平稳独立增量；

(4) $t>0$，$W(t)\sim N(0, \sigma^2 t)$，$(\sigma>0)$

则称随机过程$\{W(t), t\geq 0\}$是参数为σ^2的维纳过程(或布朗运动)。

布朗运动是应用概率论中最有用的随机过程之一，已大量地在概率统计分析股票价格水平、通信理论、生物学、管理科学等领域得到广泛应用。

维纳过程的概率分布及数字特征

一维概率密度函数

$$f(t,x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}},\qquad t\geq 0, x\in R$$

一维特征函数

$$\varphi(t,u)=e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t u^2},\qquad t\geq 0, u\in R$$

增量分布 $W(t)-W(s)\sim N(0,\sigma^2|t-s|)$

协方差函数 $C(s,t)=\sigma^2\min(s,t)$

维纳过程的二维概率分布

均值函数向量 $O=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}^T$

二阶协方差矩阵 $C=\begin{pmatrix}\sigma^2 s & \sigma^2 s\\ \sigma^2 s & \sigma^2 t\end{pmatrix},\qquad t>s$

二维概率分布 $(W(s),W(t))^T\sim N(O,C),\qquad t>s$

二维概率密度函数

$$f(s,t;x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{s(t-s)}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2 s(t-s)}(tx^2-2sxy+sy^2)}$$

二维特征函数

$$\varphi(s,t;u,v)=e^{-\frac{\sigma^2}{2}(su^2+2suv+tv^2)},\qquad s<t$$

维纳过程的n维概率分布

均值函数向量 $O=(0,0,\cdots,0)^T$

n阶协方差矩阵

$$C=\begin{pmatrix} \sigma^2 t_1 & \sigma^2 t_1 & \cdots & \sigma^2 t_1 \\ \sigma^2 t_1 & \sigma^2 t_2 & \cdots & \sigma^2 t_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sigma^2 t_1 & \sigma^2 t_2 & \cdots & \sigma^2 t_n \end{pmatrix}$$

n维概率分布

$$0<t_1<t_2<\cdots<t_n$$

$$(W(t_1),W(t_2),\cdots,W(t_n))^T \sim N(O,C)$$

维纳过程的n维概率分布

n维概率密度函数 $f(\vec{x}) = f(t_1, t_2, \cdots, t_n; x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |C|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\vec{x}^T C^{-1} \vec{x}}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

n维特征函数 $\varphi(\vec{u}) = \varphi(t_1, t_2, \cdots, t_n; u_1, u_2, \cdots, u_n)$

$$= e^{-\frac{1}{2}\vec{u}^T C \vec{u}}, \quad \vec{u} \in \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

维纳过程的性质

1. 维纳过程是平稳独立增量过程。
2. 维纳过程是正态过程。
3. 维纳过程是马尔可夫过程。

证明 2. 设 $\{W(t), t\geq 0\}$是参数为σ^2的维纳过程，$0<t_1<t_2<\ldots<t_n$。

$$X_k = W(t_k) - W(t_{k-1}) \sim N(0, \sigma^2(t_k - t_{k-1})),$$

$$t_0 = 0,\quad k=1, 2, \ldots, n$$

相互独立。

$$W(t_k) = X_1 + X_2 + \ldots + X_k,\quad k=1, 2, \ldots, k$$

维纳过程的性质

从而

$$\begin{pmatrix} W(t_1) \\ W(t_2) \\ \vdots \\ W(t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = KX,$$

$$\text{其中}K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

维纳过程的性质

因此 $X \sim N(O, C_X)$

$$C_X = \begin{pmatrix} \sigma^2 t_1 & & & \\ & \sigma^2(t_2 - t_1) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma^2(t_n - t_{n-1}) \end{pmatrix}$$

故

$$\begin{pmatrix} W(t_1) \\ W(t_2) \\ \vdots \\ W(t_n) \end{pmatrix} \sim N(O, KC_X K^T)$$

维纳过程的性质

$$C_W = KC_XK^T = \begin{pmatrix} \sigma^2 t_1 & \sigma^2 t_1 & \cdots & \sigma^2 t_1 \\ \sigma^2 t_1 & \sigma^2 t_2 & \cdots & \sigma^2 t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma^2 t_1 & \sigma^2 t_2 & \cdots & \sigma^2 t_n \end{pmatrix}$$

得证$\{W(t), t\geq 0\}$是正态过程。

本讲主要内容

- **重要随机过程**
  - 独立过程
  - 独立增量过程
  - 正态过程
  - 维纳过程

下一讲内容预告

- 泊松过程
  - 泊松过程的两个定义及其等价性
  - 泊松过程的概率分布
  - 泊松过程的数字特征
  - 泊松过程的性质
  - 非齐次泊松过程
  - 复合泊松过程
- 更新计数过程

课堂练习（下课时交）

设随机过程$\{X(t), t\in T\}$和$\{Y(t), t\in T\}$相互独立，都是正态随机过程，设

$$Z(t)=X(t)+Y(t),\quad t\in R$$

证明 Z(t)是正态过程。