条件概率$P(B|A)=P(AB)/P(A)$

$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$

全概率公式$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$

贝叶斯公式

$$P(B_j|A)=\frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)}$$

方差 $D(X)=E[X-E(X)]^2=E(X^2)-E^2(X)$

1.<0－1>分布(两点分布) **$X\sim B(0,1)$**

$E(X)=p\quad D(X)=pq$

2.二项分布 **$X\sim B(n,p)$**

$p_k=P\{x=k\}=C_n^k p^k q^{n-k}$

$E(X)=np\quad D(X)=npq$

X,Y 相互独立, $X\sim B_1(n_1,p)$, $Y\sim B_2(n_2,p)$,则 $X+Y\sim B(n_1+n_2,p)$

3.泊松分布 **$X\sim P(\lambda)$** $E(X)=D(X)=\lambda$

$p_k=P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

泊松分布具有可加性

4.均匀分布 **$X\sim U(a,b)$**

$E(X)=\frac{a+b}{2}\quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$

5.指数分布$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

$E(X)=1/\lambda\quad D(X)=1/\lambda^2$

6.正态分布 **$X\sim N(\mu,\sigma^2)$**

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$E(X)=\mu\; D(X)=\sigma^2$

标准正态分布 **$X\sim N(0,1)$**

如果$Y=g(x)$处处可导，

$f_Y(y)=f_X[h(y)]|h'(y)|$

协方差$cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

$=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$

相关系数$\rho_{XY}=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}$

协方差矩阵$C=(c_{ij})_{n\times n}$

二维随机变量协方差矩阵

$C=\begin{pmatrix}D(X) & cov(X,Y)\\ cov(X,Y) & D(Y)\end{pmatrix}$

$E(aX+b)=aE(X)+b\quad D(aX+b)=a^2D(X)$

$cov(X_1+X_2,Y)=cov(X_1,Y)+cov(X_2,Y)$

$cov(aX+bY,cX+dY)$

$=acD(X)+bdD(Y)+(ad+bc)cov(X,Y)$

特征函数的定义$\varphi_X(u)=E[e^{iuX}]$

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iux}\varphi_X(u)\,dx$$

一维分布函数$F(t,x)=P\{X(t)<x\}$

$F(t,x)=\int_{-\infty}^{x}f(t,x)dx$

二维分布函数

$F(s,t;x,y)=P\{X(s)<x,X(t)<y\}$

$F(s,t;x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(s,t;u,v)\,dudv$

随机过程的数字特征：均值函数、方差函数、协方差函数、相关函数

均值函数$m(t)=E[X(t)]=\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i(t)$

或$=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(t,x)dx$

方差函数$D(t)=D[X(t)]$

$=E[X(t)-m(t)]^2=E[X^2(t)]-m^2(t)$

协方差函数$C(s,t)=cov(X(s),X(t))$

$=E[X(s)X(t)]-m(s)m(t)$

$=R(s,t)-m(s)m(t)$

相关函数$R(s,t)=E[X(s)X(t)]$

相关系数$\rho(s,t)=\frac{cov(X(s),X(t))}{\sqrt{D(s)}\cdot\sqrt{D(t)}}$

反应两个随机过程之间相关程度：

互协方差函数、互相关函数

互协方差函数

$C_{XY}(s,t)=R_{XY}(s,t)-m_X(s)m_Y(t)$

互相关函数

$R_{XY}(s,t)=E[X(s)X(t)]$

两个随机过程互不相关

$E[X(s)Y(t)]=E[X(s)]E[Y(t)]$

如果$\{X(t),t\ge 0\}$是平稳独立增量过程，则均值函数 $m(t)=at$ (a 是常数)

方差函数 $D(t)=\sigma^2 t$ (σ为正常数)

协方差函数 $C(s,t)=\sigma^2\min(s,t)$

若$X(n),n=1,2,3,\cdots$是相互独立且同分布的随机变量，且$Y(n)=\sum_{k=0}^{n}X(k)$，则$\{Y(n),n=1,2,3,\cdots\}$是平稳独立增量过程；泊松过程是平稳独立增量过程、生灭过程

对任意$t>0$, $N(t)\sim P(\lambda t)$，

$$P\{N(t)=k\}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$$

$P\{N(t)-N(s)=k\}=P\{N(t-s)=k\}$

$=\frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!}e^{-\lambda(t-s)}$

$$P\{N(t)<k\}=\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t}$$

均值函数 $m(t)=E[N(t)]=\lambda t$

方差函数 $D(t)=D[N(t)]=\lambda t$

一维特征函数

$$\varphi(u)=E\left[e^{iuN(t)}\right]=e^{\lambda t(e^{iu}-1)}$$

二维概率分布 (0<s<t)

$$P\{N(s)=j,N(t)=k\}$$

$=\frac{\lambda^k s^j(t-s)^{k-j}}{j!(k-j)!}e^{-\lambda t}$

协方差函数$C(s,t)=\lambda\min(s,t)$

相关函数$R(s,t)=\lambda\min(s,t)+\lambda^2 st$

时间间隔$T_n,n=1,2,\cdots$相互独立同分布，都服从参数为λ的指数分布$E(T_n)=\frac{1}{\lambda}$

若$\{N(t),t\ge 0\}$是非齐次泊松过程,$\lambda(t)$是它的强度,若$\lambda(t)$是连续函数,则在时间间距$[t_0,t_0+t]$内事件 A 出现 k 次的概率为$P\{[N(t_0+t)-N(t_0)]=k\}$

$=\frac{[m(t_0+t)-m(t_0)]^k}{k!}e^{-[m(t_0+t)-m(t_0)]}$

$k=0,1,2,\cdots$,且$m(t)=\int_0^t\lambda(s)ds$

$\lambda(t)=\lambda$时,为齐次泊松过程

离散参数马氏链

k 步转移概率

$p_{ij}(m,k)=P\{X(m+k)=j|X(m)=i\}$

k 步转移矩阵(转移矩阵$P(m,1)$)

$P(m,k)=\left(p_{ij}(m,k)\right)(i,j\in E)$

n 步转移矩阵$P(n)=P^n$

转移概率$p_{ij}(m,k)$与m无关，则

$p_{ij}(m,k)=p_{ij}(k)$

$p_{ij}(m,1)=p_{ij}(1)=p_{ij}$

称为齐次马氏链。

初始分布 $p_i=P\{X(0)=i\}\quad\tilde{P}_0=(p_i,i\in E)$

绝对分布(在 n 时刻处于状态 i 的概率)

$p_i(n)=P\{X(n)=i\}\quad\tilde{P}_n=(p_i(n),i\in E)$

绝对分布由初始分布和转移概率确定

$\tilde{P}_n=\tilde{P}_0P^n$

齐次马氏链的**有限维分布**由初始分布和转移概率决定，且满足

$P\{X(n_1)=i_1,X(n_2)=i_2\ldots X(n_k)=i_k\}$

$=\sum_{i\in E}p_ip_{ii_1}(n_1)p_{i_1i_2}(n_2-n_1)\ldots p_{i_{k-1}i_k}(n_k-n_{k-1})$

马氏链具有遍历性:$\lim_{n\to\infty}p_{ij}(n)=\pi_j>0$

$\Pi=\{\pi_j,j\in E\}$齐次马氏链的**极限分布**

遍历性：若存在正整数n_0，对任意$i,j\in E$，有$p_{ij}(n_0)>0$，则此链是遍历的

遍历的齐次马氏链的绝对分布与转移概率有相同的极限；遍历的齐次马氏链的极限分布是平稳分布

平稳性：绝对分布始终等于初始分布

对于具有遍历性和平稳性的齐次马氏链有

$\begin{cases}\pi_j=\sum_{i\in E}\pi_ip_{ij}\;(\Pi=\Pi P)\\ \pi_j>0,\sum_{j\in E}\pi_j=1\end{cases}$ 由此求平稳分布

T_{ij}表示 i 出发经 n 步首次到达 j 的时刻

$f_{ij}(n)$表示首次到达概率；f_{ij}表示迟早到达概率；T_{ii}表示首次返回时刻；$f_{ii}(n)$表示首次返回概率；f_{ii}表示迟早返回概率

$\mu_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{ij}(n)$首次到达平均时间

$\mu_i=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{ii}(n)$首次到达平均返回时间

$\mu_i<+\infty$则状态 i 是正常返，否则为零常返

$f_{ij}>0\Leftrightarrow i\to j$

若$f_{ii}=1$则 i 为常返状态，否则为非常返

利用转移概率$p_{ij}(n)$来判别状态性质：

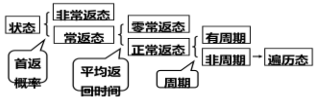
1.非常返$\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}p_{ii}(n)<+\infty$

2.零常返$\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}p_{ii}(n)=+\infty$，且$\lim_{n\to\infty}p_{ii}(n)=0$

3.正常返$\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}p_{ii}(n)=+\infty$，且$\lim_{n\to\infty}p_{ii}(n)\ne 0$

状态 i 的周期$d=G\cdot C\cdot D\{n:p_{ii}(n)>0\}$

三个层次区分状态类型



遍历态：非周期正常返状态

连续参数马氏链

转移概率函数

$$p_{ij}(s,t)=P\{X(t+s)=j|X(s)=i\}$$

转移概率与起点 s 无关$p_{ij}(s,t)=p_{ij}(t)$

则为连续参数齐次马氏链

初始分布绝对分布与离散参数马氏链类似，n 改成 t，若转移概率的极限存在

$\lim_{t\to+\infty}p_{ij}(n)=\pi_j>0$ 则具有遍历性

$\lim_{t\to 0^+}\frac{1-p_{ii}(t)}{t}=q_{ii}\triangleq q_i$

$\lim_{t\to 0^+}\frac{p_{ij}(t)}{t}=q_{ij}\,,i\ne j$

状态转移速度矩阵

$$Q=\begin{pmatrix}-q_{00} & q_{01} & q_{02} & \cdots & q_{0s}\\ q_{10} & -q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1s}\\ q_{20} & q_{21} & -q_{22} & \cdots & q_{2s}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ q_{s0} & q_{s1} & q_{s2} & \cdots & -q_{ss}\end{pmatrix}$$

后退$P'(t)=QP(t)$ 前进$P'(t)=P(t)Q$

平稳分布$\Pi Q=0$

生灭过程

状态转移速度矩阵

$$Q=\begin{pmatrix}-\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & \cdots & 0\\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & \cdots & 0\\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\mu_N\end{pmatrix}$$

后退方程$P'(t)=QP(t),P(+0)=I$

前进方程$P'(t)=P(t)Q,P(+0)=I$

平稳分布$\Pi Q=O$

$$\begin{cases}\pi_0=\left(1+\sum_{j=1}^{N}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}\right)^{-1}\\ \pi_k=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}\pi_0\,,k=1,2,\cdots,N\end{cases}$$

M/M/1 损失制

$$\boldsymbol{Q=\begin{matrix}-\lambda & \lambda\\ \mu & -\mu\end{matrix}}$$

$$\boldsymbol{\pi_0=\frac{\mu}{\mu+\lambda},\pi_1=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}}$$

M/M/n 损失制

$$\boldsymbol{\pi_0=\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right]^{-1}}$$

$$\pi_k=\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\pi_0$$

M/M/1 顾客有限源 m(排队容量无限)

平稳分布

$$\begin{cases}\boldsymbol{\pi_0=\left[\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{(m-k)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right]^{-1}}\\ \boldsymbol{\pi_m=m!\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m\pi_0}\\ \boldsymbol{\pi_k=\frac{m!}{(m-k)!}\left(\frac{\lambda}{u}\right)^k\pi_0,\quad 0<k<m}\end{cases}$$

逗留平均数

$$L_s=m-\frac{\mu}{\lambda}(1-\pi_0)$$

平均来到率

$$\lambda_e=\mu(1-\pi_0)$$

平均等待数

$$\boldsymbol{L_q=L_s-(1-\pi_0)}$$

逗留平均时间

$$\boldsymbol{W_s=\frac{L_s}{\lambda_e}=\frac{L_s}{\lambda(m-L_s)}}$$

平均等待时间

$$\boldsymbol{W_q=\frac{L_q}{\lambda_e}=\frac{L_q}{\lambda(m-L_s)}}$$

顾客正常运行数

$$K=m-L_s$$

顾客利用率

$$\boldsymbol{\tau=\frac{m-L_s}{m}}$$

M/M/n 顾客有限源 m(排队容量无限)

$$\pi_{k=}\begin{cases}\frac{m!}{k!\,(m-k)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\pi_0\;,\;0\le k\le n\\ \frac{1}{n!\,n^{k-n}}\frac{m!}{(m-k)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\pi_0\;,n<k<m\\ \frac{1}{n!}\frac{m}{n^{m-n}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m\pi_0\;,\;k=m\end{cases}$$

系统空闲概率

π_0

$$=\left[\sum_{k=0}^{n-1}C_m^k\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k+\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{n!}\frac{1}{n^{k-n}}\frac{m!}{(m-k)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right]^{-1}$$

等待平均数

$$L_q=\sum_{k=m}^{m}(k-n)\pi_k$$

逗留平均数

$$L_s=\sum_{k=1}^{m}k\pi_k$$

顾客——正常运行数

$$K=m-L_s$$

设备利用率

$$\tau=\frac{m-L_s}{m}$$

有效来到率

$$\lambda_e=\lambda(m-L_s)$$

逗留平均时间

$$W_s=\frac{L_s}{\lambda_e}$$

M/M/1 有限等待空间系统

平稳分布

$$\pi_k=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\pi_0\,,k=1,2,\ldots N+1$$

系统空闲概率

$$\pi_0=\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+2}},\rho=\frac{\lambda}{\mu},\pi_{损}=\pi_{N+1}=\rho^{N+1}\pi_0$$

逗留平均数

$$L_s=\sum_{k=0}^{N}k\pi_k=\frac{\rho}{1-\rho}-\frac{(N+2)\rho^{N+2}}{1-\rho^{N+2}}$$

等待平均数

$$L_q=L_s-(1-\pi_0)=L_s+\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+2}}-1$$

逗留平均时间

$$W_s=\frac{L_s}{\lambda(1-\rho^{N+!}\pi_0)}$$

平均时间

$$W_q=W_s-\frac{1}{\mu}=\frac{L_q}{\lambda(1-\rho^{N+!}\pi_0)}$$

M/M/n 有限等待空间系统

平稳分布

$$\begin{cases}\pi_k=\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\pi_0,k=1,2\ldots,n\\ \pi_{n+k}=\frac{1}{n!\,n^k}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+k}\pi_0,k=1,2\ldots N\end{cases}$$

系统空闲概率

$$\boldsymbol{\pi_0}=\left\{1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\cdots+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^n\left[\frac{\rho}{n}-\left(\frac{\rho}{n}\right)^{N+1}\right]}{n!\left(1-\frac{p}{n}\right)}\right\}^{-1}$$

等待平均数

$$L_q=\frac{\rho^{N+1}\left[1-(N+1)\left(\frac{\rho}{n}\right)^N+N\left(\frac{\rho}{n}\right)^{N+1}\right]}{n.n!\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2}$$

逗留平均数

$$L_s=L_q+\rho\left(1-\frac{\rho^{N+n}}{n^Nn!}\pi_0\right)$$

等待平均时间

$$W_q=\frac{\rho^N\left[1-(N+1)\left(\frac{\rho}{n}\right)^N+N\left(\frac{\rho}{n}\right)^N\right]}{n^{\mu}n!\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2}$$

逗留平均时间

$$W_s=W_q+\frac{1}{\mu}\left(1-\frac{\rho^{N+n}}{n^N.n!}\pi_0\right)$$

无限源的简单排队系统 M/M/1/∞

在统计平衡的条件下(ρ<1)：

平均队长 $\bar{N}=\frac{\rho}{1-\rho}$

等待队长的分布

$$P\{N_q=j\}=\begin{cases}1-\rho^2, & j=0\\(1-\rho)\rho^{j+1}, & j\ge 1\end{cases}$$

平均等待队长 $\bar{N}_q=\frac{\rho^2}{1-\rho}$

队长的方差 $D(N)=\frac{\rho}{(1-\rho)^2}$

等待队长的方差 $D(N_q)=\frac{\rho^2(1+\rho)-\rho^4}{(1-\rho)^2}$

在等待条件下的等待队长分布

$$P\{N_q=j|N_q\ge 1\}=(1-\rho)\rho^{j-1}$$

在等待条件下的平均等待队长

$$E(N_q|N_q\ge 1)=\frac{1}{1-\rho}$$

p_0=1−ρ 是系统空闲的概率,ρ 是系统繁忙的概率,ρ 越大,系统越繁忙

等待时间分布函数

$$W_q(t)=P\{W_q\le t\}=1-\rho e^{-\mu(1-\rho)t}$$

平均等待时间$\bar{W}_q=E(W_q)=\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$

等待时间的方差$D(W_q)=\frac{\lambda(2\mu-\lambda)}{\mu^2(\mu-\lambda)^2}$

逗留时间$W(t)=1-e^{-(\mu-\lambda)t}$

平均逗留时间 $\bar{W}=\frac{1}{\mu-\lambda}$

逗留时间的方差 $D(W)=\frac{1}{(\mu-\lambda)^2}$

Little 公式：$\bar{N}=\lambda_e\bar{W}$，$\bar{N}_q=\lambda_e\bar{W}_q$

其中λ_e表示单位时间内实际进入系统的平均顾客数。

平均忙期长度 $\bar{b}=\frac{1}{\mu-\lambda}\ (\rho<1)$

一个忙期中所服务的平均顾客数

$$\mu\cdot\bar{b}=\frac{1}{1-\rho}\ (\rho<1)$$

具有可变输入率的 M/M/1/∞

顾客到达看到队长为 k 时，进入系统的概率为a_k，排队越长进入的可能性越小

平均队长 $\bar{N}=\rho$

平均等待队长 $\bar{N}_q=\rho+e^{-\rho}-1$

等待时间分布函数

$$W_q(t)=1-\frac{e^{-\mu t}}{e^{\rho}-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^{k+1}}{(k+1)!}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(\mu t)^j}{j!}$$

平均等待时间$\bar{W}_q=\frac{\rho e^{\rho}}{\mu(e^{\rho}-1)}-\frac{1}{\mu}$

逗留时间的分布函数

$$W(t)=1-\frac{e^{-\mu t}}{e^{\rho}-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\rho^{j+1}}{(j+1)!}\sum_{k=0}^{j}\frac{(\mu t)^k}{k!}$$

平均逗留时间 $\bar{W}=\frac{\rho e^{\rho}}{\mu(e^{\rho}-1)}$

Little 公式成立：

$$\bar{N}=\lambda_e\bar{W},\quad \bar{N}_q=\lambda_e\bar{W}_q$$

具有可变服务率的 M/M/1/∞

$\rho_1=\frac{\lambda}{\mu_1}$, $\rho_2=\frac{\lambda}{\mu_2}$

当$\rho_2\ge 1$时$p_j=0, j=0,1,2,\cdots$

当$\rho_2<1$时

$$p_0=\left(\frac{1-\rho_1{}^m}{1-\rho_1}+\frac{\rho_2\rho_1{}^{m-1}}{1-\rho_2}\right)^{-1}$$

$$p_j=\begin{cases}\rho_1{}^j p_0 & j=1,2,\cdots,m-1\\\rho_1{}^{m-1}\rho_2{}^{j-m+1}p_0 & j=m,m+1,\cdots\end{cases}$$

平均队长为

$$\bar{N}=p_0\left\{\frac{\rho_1[1+(m-1)\rho_1{}^m-m\rho_1{}^{m-1}]}{(1-\rho_1)^2}+\frac{\rho_2\rho_1{}^{m-1}[m-(m-1)\rho_2]}{(1-\rho_2)^2}\right\}$$

平均等待队长为$\bar{N}_q=\bar{N}-(1-\rho_0)$

平均逗留时间$\bar{W}=\frac{1}{\lambda}\bar{N}$

平均等待时间

$$\bar{W}_q=\frac{\bar{N}}{\lambda}=\frac{N}{\lambda}-\frac{1-p_0}{\lambda}=\bar{W}-\frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{\infty}p_j$$

平均服务时间

$$\frac{1-p_0}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{\infty}p_j=\frac{p_0}{\lambda}\left(\frac{1-\rho_1^m}{1-\rho_1}+\frac{\rho_1^{m-1}\rho_2}{1-\rho_2}\right)$$

M/M/∞排队系统

$p_j(t)=P\{N(t)=j\}, p_j=\lim_{t\to\infty}p_j(t)$

平均队长$\bar{N}=\rho$，平均等待队长$\bar{N}_q=0$

平均等待时间$\bar{W}_q=0$

逗留时间＝服务时间

M/M/c/∞排队系统

$$\rho_c=\frac{\lambda}{c\mu}$$

$$p_0=\left[\sum_{j=0}^{c-1}\frac{\rho^j}{j!}+\frac{c\rho^c}{c!\,(c-\rho)}\right]^{-1}$$

$$p_j=\begin{cases}\frac{\rho^j}{j!}p_0 & 1\le j\le c-1\\\frac{\rho^j}{c^{j-c}\cdot c!}p_0 & j\ge c\end{cases}$$

顾客到达时需要等待的概率为

$p=\frac{1}{1-\rho_c}p_c\quad p_c=\frac{\rho^c}{c!}p_0$

等待队长 N_q 有分布

$$P\{N_q=0\}=\sum_{j=0}^{c}p_j\quad P\{N_q=k\}=p_{c+k}$$

$$\bar{N}_q=\frac{\rho_c}{(1-\rho_c)^2}p_c$$

正在被服务的顾客数

$P\{N_c=k\}=p_k\quad 0\le k\le c-1$

$$P\{N_c=c\}=\frac{1}{1-\rho_c}p_c$$

$\bar{N}_c=\rho$

平均队长$\bar{N}=\bar{N}_q+\bar{N}_c$

等待时间分布函数

$$W_q(t)=P\{W_q\le t\}=1-\frac{p_c}{1-\rho_c}e^{-\mu(c-\rho)t}$$

$$\bar{W}_q=\frac{\rho_c}{\lambda(1-\rho_c)^2}p_c$$

逗留时间

平均逗留时间

$$\bar{W}=\frac{\rho_c}{\lambda(1-\rho_c)^2}p_c+\frac{1}{\mu}$$

Little 公式成立

M/M/c/K 混合制排队系统

$$p_0=\left(\sum_{j=0}^{c-1}\frac{\rho^j}{j!}+\sum_{j=c}^{k}\frac{\rho^j}{c!c^{j-c}}\right)^{-1}$$

$$p_j=\begin{cases}\frac{\rho^j}{j!}p_0 & 1\le j\le c-1\\\frac{\rho^j}{c^{j-c}\cdot c!}p_0 & j\ge c\end{cases}$$

损失的概率$p=p_k=\frac{\rho^k}{c!c^{k-c}}p_0$

单位时间平均损失的顾客数$\bar{\lambda}_e=\lambda p_k$

单位时间内平均进入系统的顾客数

$\lambda_e=\lambda(1-p_k)$

平均等待队长

$$\bar{N}_q=\frac{c^c}{2c!}(K-c)(K-c+1)p_0\ (\rho_c=1)$$

$$\bar{N}_q=\frac{\rho^c\rho_c p_0}{(1-\rho_c)^2c!}\cdot[1-\rho_c^{K-c+1}-\rho_c^{K-c}(1-\rho_c)(K-c+1)]$$

N_c 表示平衡时正在被服务的顾客数

$P\{N_c=j\}=p_j, j=0,1,2,\cdots,c-1$

$P\{N_c=c\}=\sum_{j=c}^{k}p_j$

正在被服务的平均顾客数

$\bar{N}_c=\rho(1-p_k)$

平均队长$\bar{N}=\bar{N}_q+\bar{N}_c$

$$W_q(t)=\begin{cases}\sum_{j=0}^{c-1}q_j & (t=0)\\\sum_{j=0}^{c-1}q_j+\sum_{j=c}^{k-1}q_j\cdot\int_{0^+}^{t}\frac{c\mu(c\mu x)^{j-c}}{(j-c)!}e^{-c\mu x}dx\end{cases}$$

平均等待时间$\bar{W}_q=\sum_{j=c}^{k-1}\frac{j-c+1}{c\mu}q_j$

平均逗留时间$\bar{W}=\bar{W}_q+\frac{1}{\mu}$

$$q_j=\frac{p_j}{1-p_k}$$

M/M/1/K

$$p_j=\begin{cases}\frac{(1-\rho)\rho^j}{1-\rho^{k+1}} & \rho\ne 1\\\frac{1}{k+1} & \rho=1\end{cases}\quad 1\le j\le k$$

$$\bar{N}=\begin{cases}\frac{\rho}{1-\rho}-\frac{(k+1)\rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}} & \rho\ne 1\\\frac{k}{2} & \rho=1\end{cases}$$

$$\bar{N}_q=\begin{cases}\frac{\rho^2}{1-\rho}-\frac{(k+\rho)\rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}} & \rho\ne 1\\\frac{k(k-1)}{2(k+1)} & \rho=1\end{cases}$$

$$W_q(t)=\begin{cases}q_0 & t=0\\1-\sum_{j=1}^{k-1}q_j\cdot\left[\sum_{i=0}^{j}\frac{(\mu t)^i}{i!}e^{-\mu t}\right] & t>0\end{cases}$$

$$W(t)=q_0\sum_{j=0}^{k-1}\rho^j\left[1-e^{-\mu t}\sum_{i=0}^{j}\frac{(\mu t)^i}{i!}\right]$$

M/M/c/c

爱尔朗公式$p_j=\frac{\rho^j}{j!}/\sum_{i=0}^{c}\frac{\rho^i}{i!}$

顾客损失的概率$p_c=\frac{\rho^c}{c!}/\sum_{i=0}^{c}\frac{\rho^i}{i!}$

由于不允许排队$\bar{N}_q=0;\bar{W}_q=0$

$\bar{N}=\bar{N}_c=\rho(1-\rho_c)$；$\bar{W}=\frac{1}{\mu}$

有限源的简单排队系统

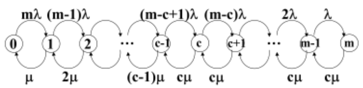
顾客总体是有限的；输入过程是简单流

服务时间服从指数分布

典型例子：机器维修模型

M/M/c/m/m 系统 (机器故障修理)

（M/M/c 顾客为有限源）



$$p_0=\left(\sum_{i=0}^{c-1}C_m^i\rho^i+\sum_{i=c}^{m}C_m^i\frac{i!}{c!c^{i-c}}\rho^i\right)^{-1}$$

$$p_j=\begin{cases}C_m^j\rho^j p_0 & 1\le j\le c-1\\C_m^j\frac{j!}{c!\,c^{j-c}}\rho^j p_0 & j\ge c\end{cases}$$

平均发生故障的机器数$\bar{N}=$

$$\sum_{j=0}^{c-1}\frac{m!\rho^j}{(j-1)!(m-j)!}p_0+\frac{m!}{c!}\sum_{j=c}^{m}\frac{j\rho^j}{(m-j)!c^{j-c}}p_0$$

平均等待修复的机器数

$$=\sum_{j=c}^{m}(j-c)p_j$$

平均忙的维修工人数

$$\bar{N}_c=\sum_{j=1}^{c-1}jp_j+c\sum_{j=c}^{m}p_j$$

故障机器的等待修理时间分布函数

$W_q(t)=\quad (t\ge 0)$

$$1-\sum_{j=c}^{m}p_je^{-c\mu t}\left\{1+c\mu t+\cdots+\frac{(c\mu t)^{j-c}}{(j-c)!}\right\}$$

等待修理的平均时间

$$\bar{W}_q=\sum_{j=c}^{m-1}\frac{j-c+1}{c\mu}p_j=\frac{\bar{N}_q}{\lambda(m-\bar{N})}$$

统计平衡下：

单位时间内发生故障的平均机器数

$\lambda_e=\lambda(m-\bar{N})$

单位时间内平均修复的机器数

$\lambda_\mu=\mu\cdot\bar{N}_c$

单位时间内平均修复的机器数等于发生故障的平均数，即$\lambda_e=\lambda_\mu$

M/M/c/m/m 损失制系统

当 c 个维修工人都忙于维修故障的机器时，发生故障的机器不是等待维修，而是立刻送到其它地方去修理，或者停产大修；

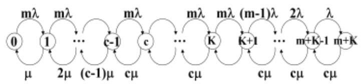
$$p_j=C_m^j\rho^jp_0=\frac{C_m^j\rho^j}{\sum_{k=0}^{c}C_m^k\rho^k}\quad j=0,1,2,\cdots,c$$

平均发生故障的机器数$\bar{N}=\frac{m\rho}{1+\rho}$

有备用品的 M/M/c/m+K/m 系统

m 台机器正常工作，另有 K 台机器备用处于正常运转的机器不足 m 台时，只好缺额生产

c≤K 时的状态转移速度图



$$p_0=\left[\sum_{i=0}^{c-1}\frac{m^i}{i!}\rho^i+\frac{1}{c!}\sum_{i=c}^{K-1}\frac{m^i}{c^{i-c}}\rho^i+\frac{m^K\cdot m!}{c!}\sum_{i=K}^{K+m}\frac{1}{c^{i-c}(m-i+K)!}\rho^i\right]^{-1}$$

$$p_j=\begin{cases}\frac{m^j}{j!}\rho^jp_0 & j=1,2,\cdots,c-1\\\frac{m^j}{c^{j-c}\cdot c!}\rho^jp_0 & j=c,c+1,\cdots,K-1\\\frac{m^K\cdot m!}{c^{j-c}(m-j+K)!\cdot c!}\rho^jp_0 & j=K,K+1,\cdots,m+K\end{cases}$$

c＞K 时的状态转移速度图

$$p_0=\left[\sum_{i=0}^{K-1}\frac{m^i}{i!}\rho^i+\sum_{i=K}^{c-1}\frac{m^K\cdot m!}{i!(m-i+K)!}\rho^i+\frac{m^K\cdot m!}{c!}\sum_{i=c}^{K+m}\frac{1}{c^{i-c}(m-i+K)!}\rho^i\right]^{-1}$$

$$p_j=\begin{cases}\frac{m^j}{j!}\rho^jp_0 & j=1,2,\cdots,K-1\\\frac{m^K\cdot m!}{j!(m-j+K)!}\rho^jp_0 & j=K,K+1,\cdots,c-1\\\frac{m^K\cdot m!}{c^{j-c}(m-j+K)!\cdot c!}\rho^jp_0, & j=c,c+1,\cdots,m+K\end{cases}$$