随机过程与排队论

信息与软件工程学院

顾小丰

Email：guxf@uestc.edu.cn

2020年9月27日星期日

序 言

随机过程：研究随机现象演变的概率统计规律的一门学科。

排队论：又称为随机服务系统理论，是研究拥挤现象的一门学科，它通过研究各种服务系统在排队等待中的概率特性，来解决系统的最优设计和最优控制。

是近代数学的重要组成部分，特点：

1. 应用非常广泛，实际工程背景强
2. 数学基础要求较高
3. 建立随机分析的思维较难

教学内容

1. 概率论的基本知识（复习）
2. 随机过程的基本概念
   1）随机过程的定义及分类
   2）随机过程的分布及数字特征
3. 独立过程与独立增量过程
4. 泊松过程
5. 更新过程

教学内容

6. 马尔可夫过程

1) 马尔可夫过程的概念
2) 离散参数马氏链
3) 齐次马氏链状态的分类
4) 连续参数马氏链
5) 生灭过程

教学内容

7. 排队系统概述，M/M/1/∞排队
8. M/M/∞排队系统与M/M/c/∞排队系统
9. M/M/c/K混合制排队系统
10. M/M/c/m/m系统及损失制系统
11. 有备用品的M/M/c/m+K/m系统
12. 嵌入马尔柯夫链，队长
13. 等待时间与逗留时间和忙期
14. 输出过程

教学目标

- 立足于基本理论的介绍
- 力图帮助同学掌握随机分析的基本思想和基本方法
- 尽量阐述清楚基本概念及简单的工程背景
- 训练数学表述能力

教学方式和考核方式

- 教学方式： 课堂讲授
- 考核方法： 笔试
- 成绩构成：

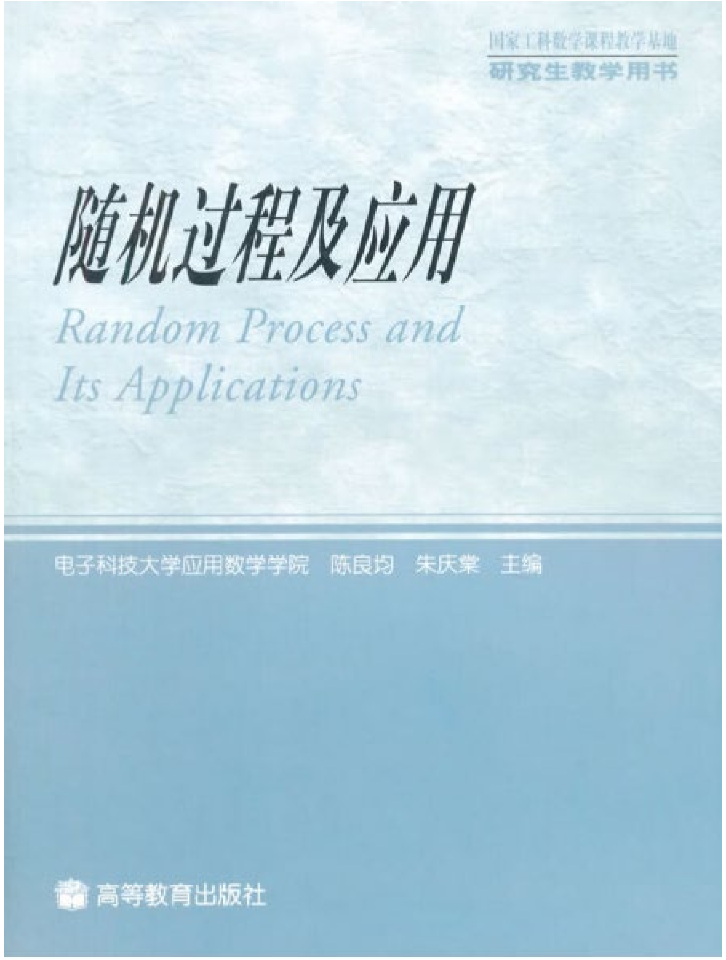
平时成绩*20%＋期末成绩*80%

加油

教材及参考资料

1. 随机过程及应用，朱庆棠 陈良均，高等教育出版社，2003。
2. 排队论——基础与分析技术，唐应辉 唐小我，科学出版社，2006。
3. 排队论——基础与应用，唐应辉 唐小我，电子科技大学出版社，2000。
4. 随机过程，刘次华，华中科技大学出版社，2003。
5. 排队论基础，孙荣恒 李建平，科学出版社，2002。
6. 现代通信中的排队论，陈鑫林，电子工业出版社，2000。
7. 排队论及其在计算机通信中的应用，盛友招，北京邮电大学出版社，2000。

教材


国家工科数学课程教学基地
研究生教学用书
随机过程及应用
Random Process and
Its Applications
电子科技大学应用数学学院 陈良均 朱庆棠 主编
高等教育出版社


排队论
唐应辉 唐小我 著
——基础与分析技术
科学出版社
www.sciencep.com

电子教材下载

- 电子科技大学
- 图书馆
- 超星中文电子图书
- 访问地址：http://222.197.165.70:8080/
- 汇雅电子书服务平台4.0.2
- 输入书名检索

（随机过程及应用、排队论：基础与应用）

注意： 需要安装超星阅读器

课程QQ群： **782580917**　　**验证：** **学号-姓名**

第一章 概率论

概率的数学理论是本课程的主要基础，不清楚的同学请找一本这方面的书自学，下面仅介绍本课程所必需的概率论的基本定义和结果。

§1.1 概率空间(Ω,F,P)

一、随机试验

如果一个试验E满足下列条件：

1. 在相同的条件下可以重复进行；
2. 每次试验的结果不止一个，并且能事先明确知道试验的所有结果；
3. 一次试验结束之前，不能确定哪一个结果会出现

则称此试验为**随机试验**。

二、样本空间、随机事件体

随机试验E的每一个最简单的试验结果，称为**样本点**，记为ω。全体样本点构成的集合，称为**样本空间**，记为Ω。

样本空间Ω的子集组成的集类F，如果满足：

1. $\Omega \in F$；
2. 若$A \in F$，则$\overline{A} \in F$；
3. 若$A_i \in F$ (i=1, 2, …,)，则$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$；

那么称F为**随机事件体**(域)或**σ一代数**。

随机事件体F的任意元素A称为**随机事件**；
仅含一个样本点的事件称为**基本事件**；
样本空间Ω和F的**二元体(Ω, F)**称为**可测空间**。

几个记号

Ω	样本空间，必然事件
Φ	不可能事件
ω	基本事件
A	事件
$\overline{A}$	A的对立事件(逆事件)
$A\subset B$	A发生，B必发生
$A=B$	事件A与B相等
$A\cup B$	事件A与B至少有一个发生
AB	事件A与B同时发生
$A-B$	事件A发生而事件B不发生
$AB=\Phi$	事件A与B互不相容(互斥)

三、概率与概率空间

设(Ω, F)是可测空间，如果定义随机事件体F上的实值集函数P(A)，A∈F满足：

1) $0 \le P(A) \le 1$，A∈F；　　(非负性)

2) $P(\Omega)=1$；　　(规范性)

3) $A_i \in F$ (i=1, 2, …,)，$A_iA_j = \Phi$ ($i \neq j$)，则等式

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$ 成立。　　(完全可加性)

则称P为(Ω, F)上的概率测度，简称概率。对任意A∈F，P(A)称为随机事件A的概率。

样本空间Ω、随机事件体F和概率P组成的三元体(Ω, F, P)称为概率空间。

例

掷一枚均匀的骰子，观察出现点数的随机试验E。

- $\omega_i = i$，$i = 1, 2, \ldots, 6$，含有6个样本点；
- 样本空间$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$；
- 随机事件体F由Ω的全体子集(共$2^6 = 64$个)构成；
- F上的概率定义为$P(A) = \dfrac{k}{6}$，k为随机事件A包含的样本点数；
- (Ω, F, P)为概率空间。

古典概率空间

1) 样本空间由有限个样本点组成， $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$；

2) 每个基本事件$A_i=\{\omega_i\}$，$i=1, 2, \ldots, n$出现的可能性相等；

3) 随机事件体F由Ω的全体子集(共2^n个)组成；

4) 随机事件体F上的古典概率P定义为

$$P(A)=\frac{k}{n},$$

n为样本点总数，k为A包含的样本点数。

(Ω, F, P)是一个古典概率空间。

例

给定一个随机试验E，样本空间Ω＝{0，1，2，…}。随机事件体F由Ω的全体子集组成。

对任意$A\in F$，定义概率P如下：

$$P(A)=\sum_{k\in A}\frac{\lambda^{k}}{k!}e^{-\lambda} \qquad (\lambda>0)$$

$$P(\Phi)=0$$

则(Ω, F, P)是一个概率空间。

概率的性质

1. $P(\Phi)=0$;　　$P(\Omega)=1$;

2. (有限可加性) 若$A_i \in F$ $(i=1, 2, \ldots, n)$，且 $A_iA_j=\Phi$ $(i \neq j)$，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

3. (加法公式)

$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,　　$A, B \in F$

一般地，若$A_i \in F(i=1, 2, \ldots, n)$，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n} P(A_iA_j)+\sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_iA_jA_k)$$

$$+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$ 多除少补原理

概率的性质

4. $P(A)=1-P(\overline{A})$;

5. 若$A\subset B$,则$P(B-A)=P(B)-P(A)$,

$$P(A)\leq P(B);$$

6. (连续性)

1) 若$A_1\supset A_2\supset A_3\supset\ldots$, 且$\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=A$, 则

$$\lim_{n\to\infty}P(A_n)=P(A);$$

2) 若$A_1\subset A_2\subset A_3\subset\ldots$, 且$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=A$, 则

$$\lim_{n\to\infty}P(A_n)=P(A)。$$

四、条件概率

设概率空间(Ω, F, P)，$A\in F$，$B\in F$，且$P(A)>0$，在事件A已经发生的条件下，事件B发生的条件概率定义为：

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

给定概率空间(Ω, F, P)，$A\in F$，且$P(A)>0$，对任意$B\in F$有$P(B|A)$对应，则条件概率$P(B|A)$是(Ω, F)上的概率，记$P(B|A)=P_A$，则(Ω, F, P_A)也是一个概率空间，称为条件概率空间。

五、乘法公式

设概率空间(Ω, F, P)，如果$A, B\in F$，且$P(AB)>0$，则下述乘法公式成立：

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$$

推广：设概率空间(Ω, F, P)，如果$A_i\in F$，$i=1, 2, \ldots, n$且$P(A_1A_2\ldots A_n)>0$，则下述推广的乘法公式成立：

$$P(A_1A_2\ldots A_n)$$

$$=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\ldots P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1})$$

六、事件的独立性

如果事件$A,B\in F$，满足

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

则称**事件A与B相互独立**。

推广： 如果事件$A_1, A_2, \ldots, A_n\in F$，且对任意$s\ (2\le s\le n)$和任意的$1\le i_1< i_2<\ldots< i_s< n$，有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_s})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\ldots P(A_{i_s}),$$

则称**事件事件$A_1,A_2,\ldots,A_n$相互独立**。

六、随机事件独立性的性质

1) A与B相互独立$\Leftrightarrow$A与$\bar{B}$相互独立

$\Leftrightarrow\bar{A}$与B相互独立

$\Leftrightarrow\bar{A}$与$\bar{B}$相互独立

2) A与B相 … P(A)>0)

(P(B)>0)

(0<P(A)<1)

$$P(A\bar{B})=P(A(\Omega-B))$$
$$=P(A-AB)$$
$$=P(A)-P(AB)$$
$$=P(A)-P(A)P(B)$$
$$=P(A)(1-P(B))$$
$$=P(A)P(\bar{B})$$

3) 设A_1,A … 意m个

(1≤m≤ … 所得的n个

事件仍 …

4) 设$A_1,A_2,\cdots,A_n$相互独立，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-\prod_{i=1}^{n}P(\overline{A_i})$$

七、全概率公式与贝叶斯公式

$$P(B_j|A)=\frac{P(AB_j)}{P(A)}=\frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)}$$

1. 全概率公式： $P(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$

2.

$$P(A)=P(A\Omega)=P(A\bigcup_{i=1}^{n}B_i)$$

$$=P(\bigcup_{i=1}^{n}AB_i)=\sum_{i=1}^{n}P(AB_i)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$$

下一讲内容预告

- 随机变量及其分布程
  - 随机变量、分布函数
  - 离散型随机变量及其分布律
  - 连续型随机变量及其概率密度
- 常见的随机变量及其分布
- n维随机变量
- 随机变量函数的分布