



# 随机过程与排队论

信息与软件工程学院

顾小丰

Email: [guxf@uestc.edu.cn](mailto:guxf@uestc.edu.cn)

2020年9月27日 星期日

# 上一讲主要内容

## 泊松过程

- 泊松过程是平稳独立增量过程
- 点间间距序列  $T_n$  相互独立，都服从参数为  $\lambda$  的指数分布。

$$P\{N(t)-N(s) = k\} = \frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

### 泊松过程

- $P\{N(h)=1\} = \lambda h + o(h);$

- 均值函数  $P\{N(h) \geq 2\} = o(h)$

- 方差函数  $D(t) = D[N(t)] = \lambda t$

- 一维特征函数  $\varphi(u) = E[e^{iuN(t)}] = e^{\lambda t(e^{iu} - 1)}$

- 协方差函数  $C(s, t) = \lambda \min(s, t)$

- 相关函数  $R(s, t) = \lambda \min(s, t) + \lambda^2 st$

$$m(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$$

## 维纳过程

二维概率分布  $P\{N(s)=j, N(t)=k\}$

$$= \frac{\lambda^k s^j (t-s)^{k-j}}{j!(k-j)!} e^{-\lambda t}, \quad 0 < s < t$$

13. 设  $\{N(t), t \geq 0\}$  是泊松过程， $\lambda=2$ ，分别求：

①  $E(N(2)N(3))$

②  $P\{N(2)=1, N(3)=2\}$

③  $P\{N(3)=2 \mid N(2)=1\}$

一维概率分布  $N(t) \sim \psi(\lambda t)$

$$P\{N(t)=k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

①  $E(N(2)N(3)) = R(2, 3) = \lambda m_2(3) + \lambda^2 * 2 * 3 = 28$

②  $P\{N(2)=1, N(3)=2\} = \frac{2^2 2^1 (3-2)^{2-1}}{1!(2-1)!} e^{-2 \times 3} = 8e^{-6}$

③  $P\{N(3)=2 \mid N(2)=1\}$

$$= P\{N(3) - N(2) = 1 \mid N(2) - N(0) = 1\}$$

$$= P\{N(3) - N(2) = 1\} = P\{N(1) = 1\} = 2e^{-2}$$

# 本讲主要内容

## ➤ 泊松过程

- 复合泊松过程

## ➤ 更新计数过程

## ➤ 马尔可夫过程

- 马尔可夫过程的概念
- 马尔可夫过程的分类
- 离散参数马氏链
- $k$ 步转移概率、 $k$ 步转移矩阵
- 齐次马尔可夫链

# 复合泊松过程

设  $\{N(t), t \geq 0\}$  是参数为  $\lambda$  的泊松过程， $\{Y_n, n=1, 2, \dots\}$  是相互独立同分布的随机变量序列，且  $\{N(t), t \geq 0\}$  与  $\{Y_n, n=1, 2, \dots\}$  相互独立，令

$$X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n, \quad t \geq 0$$

称  $\{X(t), t \geq 0\}$  为复合泊松过程。

某计算机相继两次出现故障的间隔时间为相互独立服从相同指数分布的随机变量。每出现一次故障需要支付费用来维修。设发生在不同时间的故障所花的维修费用是相互独立、同分布的，且维修费和故障时间相互独立，设 $Y_n$ 表示第 $n$ 次的维修费， $N(t)$ 表示 $[0,t)$ 内的故障次数，令

$$X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n, \quad t \geq 0$$

表示 $[0,t)$ 内的总费用，则 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是一个复合泊松过程。

# 复合泊松过程的数字特征

设  $\{X(t), t \geq 0\}$  为复合泊松过程,  $X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n$ 。其中  $\{N(t), t \geq 0\}$  是参数为  $\lambda$  的泊松过程,  $Y_n, n=1, 2, \dots$ , 相互独立、与  $Y$  同分布的,  $Y$  的特征函数为  $\varphi_Y(u)$ , 则复合泊松过程有:

(1) 特征函数为  $\varphi_X(t, u) = e^{\lambda t [\varphi_Y(u) - 1]}$

(2) 均值函数  $m_X(t) = E[X(t)] = E[N(t)]E\{Y\} = \lambda t E[Y]$

(3) 方差函数

$$\begin{aligned} D_X(t) &= D[X(t)] = E[X^2(t)] - E^2[X(t)] \\ &= \lambda t E[Y^2] = E[N(t)]E[Y^2] \end{aligned}$$



# 更新计数过程

设  $\{N(t), t \geq 0\}$  是计数过程，如果它的时间间距  $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$  是相互独立同分布的随机变量，则称  $\{N(t), t \geq 0\}$  为**更新计数过程**，称时间间距为**更新间距**。

## 例 电话台呼唤流

设有一个不断受到呼唤的电话台，电话呼唤到达的时间为  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ ，时间间距  $T_1 = \tau_1, T_2 = \tau_2 - \tau_1, T_n = \tau_n - \tau_{n-1}$  是相互独立同分布的随机变量。令  $N(t)$  表示在时间  $[0, t)$  内收到的呼唤数，则  $\{N(t), t \geq 0\}$  是更新过程。



# 更新过程的概率分布

设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是更新过程，其到达的时间为 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ 。时间间距 $T_1 = \tau_1, T_2 = \tau_2 - \tau_1, T_n = \tau_n - \tau_{n-1}$ 相互独立都与随机变量 $T$ 同分布。设 $T$ 的分布函数为 $F_T(t)$ ，故 $T_k$ 的分布函数为 $F_{T_k}(t) = F_T(t), k=1, 2, \dots$

令更新计数过程的分布函数为 $F_{N(t)}(k) = P\{N(t) < k\}$ ，则

- 1) 由时间间距 $T$ 的特征函数 $\varphi_T(u)$ ，计算到达时间 $\tau_k = \sum_{i=1}^k T_i$ 的特征函数： $\varphi_{\tau_k}(u) = [\varphi_T(u)]^k$
- 2) 由 $\tau_k$ 的特征函数 $\varphi_{\tau_k}(u)$ 确定 $\tau_k$ 的概率密度 $f_{\tau_k}(t)$ 和分布函数 $F_{\tau_k}(t)$ ；
- 3) 由 $F_{\tau_k}(t)$ 确定更新计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 的分布函数。

由于事件 $\{\tau_k < t\}$ 与事件 $\{N(t) \geq k\}$ 等价，从而

$$P\{\tau_k < t\} = P\{N(t) \geq k\} = 1 - P\{N(t) < k\}$$

即  
故

$$F_{\tau_k}(t) = 1 - F_{N(t)}(k)$$

$$F_{N(t)}(k) = 1 - F_{\tau_k}(t)$$

# 更新过程的均值函数

设  $\{N(t), t \geq 0\}$  是更新过程, 则

$$\begin{aligned}
 m(t) &= E[N(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P\{N(t) = k\} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} k [F_{\tau_k}(t) - F_{\tau_{k+1}}(t)] \\
 &= 0 \cdot [F_{\tau_0}(t) - F_{\tau_1}(t)] + 1 \cdot [F_{\tau_1}(t) - F_{\tau_2}(t)] + 2 \cdot [F_{\tau_2}(t) - F_{\tau_3}(t)] + \cdots \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} F_{\tau_k}(t)
 \end{aligned}$$

# 第三章 马尔可夫过程

- ❖ 当过程在 $t=t_0$ 时刻所处的状态已知的情况下，过程在时刻 $t(t>t_0)$ 所处的状态与过程在 $t=t_0$ 时刻之前的状态无关。这种已知“现在”的条件下，“将来”与“过去”无关的性质，就是直观意义下的马尔可夫性或称为无后效性。具有无后效性的过程称为马尔可夫过程。
- ❖ 马尔可夫过程是理论和实际应用都十分重要的一类随机过程。在工程系统中的噪声和信号分析、通信网络和输送现象的模拟、统计物理学、生物学、数字计算方法、经济管理和市场预测等领域中都有十分重要的作用和广泛应用。

## § 3.1 马尔可夫过程的概念

给定随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ ，如果对于参数中任意 $n$ 个时刻 $t_i, i=1, 2, \dots, n$ ， $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ 有

$$\begin{aligned} &P\{X(t_n) < x_n | X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \dots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}\} \\ &= P\{X(t_n) < x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

则称随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 为**马尔可夫过程**，简称**马氏过程**。

具有(3.1)式性质称为具有**马尔可夫性**、**无后效性**或**无记忆性**。

由条件分布函数的定义，(3.1)等价于

$$F(x_n; t_n | x_1, x_2, \dots, x_{n-1}; t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) = F(x_n; t_n | x_{n-1}; t_{n-1}).$$

如果概率密度函数存在，它等价于

$$f(x_n; t_n | x_1, x_2, \dots, x_{n-1}; t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) = f(x_n; t_n | x_{n-1}; t_{n-1}).$$

随机过程具有马尔可夫性质是说：**当给定 $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_{n-1})$ 时， $X(t_n)$ 的条件分布只依赖于 $X(t_{n-1})$ 的已知值，而与在 $t_{n-1}$ 以前 $X(t)$ 的取值无关。**

# 转移概率

给定马氏过程 $\{X(t), t \in T\}$ ，条件概率

$$p(s, t; x, y) = P\{X(s+t) = y | X(s) = x\}$$

称为马氏过程的**转移概率**。

若转移概率与 $s$ 无关，则此过程称为**齐次(时)马氏过程**。

马氏过程 $\{X(t), t \in T\}$ 中， $X(t)$ 的取值 $x$ 称为**状态**， $X(t) = x$ 表示过程在时刻 $t$ 处于状态 $x$ ，过程所取状态的全体

$$E = \{x: X(t) = x, t \in T\}$$

称为**状态空间**。

# 马尔可夫过程的分类

		参数集T	
		离散	连续
状态空间E	离散	离散参数马氏链	连续参数马氏链
	连续	离散参数马氏序列	连续参数马氏过程

# 例1 一维随机游动

在直线上非负整数点作随机游动的质点，当时刻 $n$ 时处于位置 $i$  ( $i \geq 0$ )，时刻 $n+1$ 时处于 $i+1$ 的概率为 $p_i$ ，处于 $i-1$ 的概率为 $q_i$ ，不动的概率为 $r_i$  ( $p_i + q_i + r_i = 1$ )，若以 $X(n)$ 表示时刻 $n$ 质点的位置，那么 $\{X(n), n=0,1,2,\dots\}$ 离散参数马氏链。

这是因为，当 $X(n)=i$ 时， $X(n+1), X(n+2), \dots$ 等以后的行为只与 $X(n)=i$ 有关，而与质点在 $n$ 以前如何到达 $i$ 是无关的。它的状态空间 $E=\{0,1,2,\dots\}$ 。



## 例2

独立过程 $\{X(t), t \in T\}$ 是马尔可夫过程。

**证明** 设 $\{X(t), t \in T\}$ 是独立过程，对于 $t_1 < t_2 < \dots < t_n \in T$ ， $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ 相互独立，因此

$$\begin{aligned} & P\{X(t_n) < x_n | X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \dots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}\} \\ &= P\{X(t_n) < x_n\} \\ &= P\{X(t_n) < x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}\} \end{aligned}$$

马氏性成立，故独立过程 $\{X(t), t \in T\}$ 是马尔可夫过程。

# 贝努里随机序列

**特例 贝努里随机序列**，即 $X(n)$ ， $n=0,1,2,\dots$ 是相互独立同分布的贝努里随机变量，

$X(n)$	0	1
$P$	$q$	$p$

$$0 < p < 1, p + q = 1$$

$$n = 1, 2, \dots$$

$\{X(n), n=0,1,2,\dots\}$ 是离散参数马氏链。

## 例3

独立增量过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ ,  $(X(0)=0)$ 是马尔可夫过程。

**证明** 设 $\{X(t), t \in T\}$ 是独立增量过程,  $X(0)=0$ , 对任意  
 $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , 有

$$\begin{aligned} & P\{X(t_n) < x_n | X(t_1)=x_1, X(t_2)=x_2, \dots, X(t_{n-1})=x_{n-1}\} \\ &= P\{X(t_n)-X(t_{n-1}) < x_n-x_{n-1} | X(t_1)-X(t_0)=x_1, \\ & \quad X(t_2)-X(t_1)=x_2-x_1, \dots, X(t_{n-1})-X(t_{n-2})=x_{n-1}-x_{n-2}\} \\ &= P\{X(t_n)-X(t_{n-1}) < x_n-x_{n-1}\} \\ &= P\{X(t_n) < x_n | X(t_{n-1})=x_{n-1}\} \end{aligned}$$

马氏性成立, 故独立增量过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是马尔可夫过程。

# 二项计数过程

设  $\{X(n), n=1, 2, \dots\}$  是贝努里随机序列,  $X(0) = 0$ ,  $X(n), n=1, 2, \dots$  是相互独立同分布的贝努里随机变量, 设

$$Y(n) = \sum_{k=1}^n X(k), \quad n = 1, 2, \dots, \quad Y(0) = 0$$

称  $\{Y(n), n=0, 1, 2, \dots\}$  为二项计数过程(广义随机游动), 它是平稳独立增量过程, 因而是离散参数马氏链。

## 例4

泊松过程 $\{N(t), t \geq 0\}$  是马尔可夫过程。

**证明** 因为泊松过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是平稳独立增量过程，因而是马尔可夫过程。

## § 3.2 离散参数马氏链

状态空间 $E$ 和参数集 $T$ 都是离散的马尔可夫过程称为**离散参数马氏链**，简称**马氏链**。即

设 $\{X(n), n=0,1,2,\dots\}$ 为随机序列，状态空间 $E=\{0,1,2,\dots\}$ 。如果对于任意非负整数 $k$ 、 $n_1 < n_2 < \dots < n_j < m$ 及 $i_{n_1}, i_{n_2}, \dots, i_{n_j}, i_m, i_{m+k} \in E$ 马尔可夫性

$$P\{X(m+k)=i_{m+k} | X(n_1)=i_{n_1},$$

$$X(n_2)=i_{n_2}, \dots, X(n_j)=i_{n_j}, X(m)=i_m\}$$

$$= P\{X(m+k)=i_{m+k} | X(m)=i_m\}$$

成立，则称 $\{X(n), n=0,1,2,\dots\}$ 为**离散参数马尔可夫链**，简称**马氏链**。

# k步转移概率

设  $\{X(n), n=0,1,2,\dots\}$  为马氏链， $E=\{0,1,2,\dots\}$ ，称条件概率

$$p_{ij}(m,k) = P\{X(m+k)=j | X(m)=i\}$$

为马氏链  $\{X(n), n=0,1,\dots\}$  在  $m$  时刻的  $k$  步转移概率。

$k$  步转移概率的直观意义是：质点在时刻  $m$  时处于状态  $i$ ，再经过  $k$  步 ( $k$  个单位时间) 处于状态  $j$  的条件概率。

特别地， $k=1$  时，

$$p_{ij}(m,1) = P\{X(m+1)=j | X(m)=i\}$$

称为一步转移概率，简称转移概率。



# k步转移矩阵

称矩阵  $P(m, k) = (p_{ij}(m, k))_{i, j \in E}$

$$= \begin{pmatrix} p_{00}(m, k) & p_{01}(m, k) & \cdots & p_{0n}(m, k) & \cdots \\ p_{10}(m, k) & p_{11}(m, k) & \cdots & p_{1n}(m, k) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ p_{n0}(m, k) & p_{n1}(m, k) & \cdots & p_{nn}(m, k) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix}$$

为马氏链  $\{X(n), n=0, 1, \dots\}$  在  $m$  时刻的  $k$  步转移矩阵。

一步转移矩阵  $P(m, 1)$  简称转移矩阵。

由转移概率的定义，显然有：

$$p_{ij}(m, k) \geq 0 \quad \sum_{j \in E} p_{ij}(m, k) = 1$$

# 齐次马尔可夫链

若马氏链 $\{X(n), n=0, 1, 2, \dots\}$ 的转移概率 $p_{ij}(m, k)$ 与 $m$ 无关, 即

$$p_{ij}(m, k) = P\{X(m+k)=j | X(m)=i\} = p_{ij}(k);$$

$$p_{ij}(m, 1) = P\{X(m+1)=j | X(m)=i\} = p_{ij}(1) = p_{ij};$$

则称 $\{X(n), n=0, 1, 2, \dots\}$ 为**齐次马尔可夫链**, 简称**齐次马氏链**。

齐次马氏链的 $k$ 步转移矩阵记为:

$$P(m, k) = P(k) = (p_{ij}(k))_{i, j \in E}$$

一步转移矩阵, 简称**转移矩阵**, 记为:

$$P(m, 1) = P(1) = P = (p_{ij})_{i, j \in E}$$

齐次马氏链的转移概率具有如下性质:

$$\begin{aligned} 0 \leq p_{ij}(k) \leq 1, \\ \sum_{j \in E} p_{ij}(k) = 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 \leq p_{ij} \leq 1, \\ \sum_{j \in E} p_{ij} = 1. \end{aligned}$$

# 例1 贝努里序列

如上节例2所述，贝努里序列是一个齐次马氏链，其转移矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix}$$

一般地，独立同分布的离散随机变量序列  $\{X(n), n=0,1,2,\dots\}$  都是齐次马氏链。

## 例2 随机游动

一质点在数轴上的整数点上作随机游动的，以 $X(n)$ 表示时刻 $n$ 质点的位置。质点在某一时刻 $m$ 时处于状态 $i$ ，即 $X(m)=i$ ，则下一步以概率 $q$ 左移到状态 $i-1$ ，即 $p_{i,i-1}(m,1)=q$ ；而以概率 $p$ 右移到状态 $i+1$ ，即 $p_{i,i+1}(m,1)=p$ 。因而质点将来所处的状态 $X(m+1), X(m+2), \dots, X(m+k)$ 等仅与现在所处的状态 $X(m)=i$ 有关，而与过去所处的状态无关。因此，随机游动 $\{X(n), n=0, 1, 2, \dots\}$ 是齐次马氏链。

随机游动的统计特征由它在边界的特点决定，下面给出几种特殊的情形。

# 1.自由(无限制)随机游动

状态空间 $E = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ 两端无限制。转移概率：

$$p_{i,i-1} = q, \quad p_{i,i+1} = p, \quad \text{其余 } p_{i,j} = 0, \quad j \neq i-1, i+1$$

$$\text{转移矩阵: } P = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & q & 0 & p & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & q & 0 & p & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & q & 0 & p & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

## 2.两个吸收壁随机游动

状态空间  $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 。转移概率

$$p_{11} = p_{55} = 1; \quad p_{1j} = 0, \quad j \neq 1; \quad p_{5j} = 0, \quad j \neq 5;$$

$$p_{i,i-1} = q, \quad p_{i,i+1} = p, \quad i = 2, 3, 4;$$

$$p_{ij} = 0, \quad j \neq i-1, i+1.$$

质点运动到1,5时，永远留在那里，称状态1,5为**吸收壁(状态)**。

转移矩阵:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### 3. 带有两个反射壁的随机游动

状态空间  $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 。转移概率：

$$p_{11} = 0, \quad p_{12} = 1, \quad p_{1j} = 0, \quad j = 3, 4, 5;$$

$$p_{55} = 0, \quad p_{54} = 1, \quad p_{5j} = 0, \quad j = 1, 2, 3;$$

$$p_{i,i-1} = q, \quad p_{i,i+1} = p, \quad i = 2, 3, 4;$$

$$p_{ij} = 0, \quad j \neq i-1, i+1, \quad i = 2, 3, 4。$$

状态1和5永远不能停留，称为**反射壁**。

转移矩阵：

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



## 4. 带有两个弹性壁的随机游动

状态空间  $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 。转移概率：

$$p_{11} = q, \quad p_{12} = p, \quad p_{1j} = 0, \quad j = 3, 4, 5;$$

$$p_{55} = p, \quad p_{54} = q, \quad p_{5j} = 0, \quad j = 1, 2, 3;$$

$$p_{i,i-1} = q, \quad p_{i,i+1} = p, \quad i = 2, 3, 4;$$

$$p_{ij} = 0, \quad j \neq i-1, i+1, \quad i = 2, 3, 4。$$

状态1和5称为**弹性壁**。

转移矩阵：

$$P = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & q & p \end{pmatrix}$$

# 本讲主要内容

## ➤ 泊松过程

- 复合泊松过程

## ➤ 更新计数过程

## ➤ 马尔可夫过程

- 马尔可夫过程的概念
- 马尔可夫过程的分类
- 离散参数马氏链
- $k$ 步转移概率、 $k$ 步转移矩阵
- 齐次马尔可夫链

# 下一讲内容预告

## ➤ 马尔可夫过程

- 齐次马氏链的性质
- 初始分布、绝对分布、  
极限分布
- 遍历性
- 平稳性

# 习题四

P152

4.

4. 设  $\{X(n), n=0, 1, 2, \dots\}$  是马氏链，证明

$$\begin{aligned} &P\{X(1)=x_1|X(2)=x_2, X(3)=x_3, \dots, X(n)=x_n\} \\ &= P\{X(1)=x_1|X(2)=x_2\} \end{aligned}$$

即马氏链的逆序也构成马氏链。