

Programování pro matematiky

10. cvičení - Grafy

Peter Kovács

Doporučuje si promyslet řešení každého z úkolů, pro vaše vlastní ujasnění učiva. Navíc pokud některé z úvah sepíšete můžete získat body

Každý úkol obsahuje za názvem maximální počet bodů, které lze za úkol získat. Vaším úkolem je si vybrat úkoly, které chcete řešit. Klidně všechny. Úkoly, které jste si vybrali sepíšete do jednoho souboru a odvezdíte do recodexu. Za celý úkol můžete získat maximálně **3 body**. Po odvezdání ohodnotím každou odevzdanou úlohu. Body sečtu a přidělím vám $\min(\text{body}, 3)$. Úkoly řešte sami. Pokud spolupracujete v skupině dostanete své body podělené počtem lidí v skupině.

Za úkoly je možné udělit pouze celočíselné body. Pokud získáte neceločíselný výsledek, bude zaokrouhlen nadol.

Zrychlení DFU s polem (1bod):

Datová struktura pro Disjoint-Find-Union s polem se dá zrychlit tím, že bychom pokaždé přechíslovali tu menší z komponent. Dokažte, že pak je během života struktury každý vrchol přechíslován nejvýše $(\log n)$ -krát. Nezapomeňte, že je potřeba efektivně zjistit, která z komponent je menší, a vyjmenovat její vrcholy.

Řešení: Podívejme se na cestu jednoho vrcholu. Pokaždé, když se vrchol přechísluje se velikost jeho komponenty minimálně zdounásobí. Tudíž se může přechíslovat nejvíc $\log n$ -krát. Ještě zůstává rozmyslet, jak najít menší komponentu. Stačí pokud si budeme udržovat pole o délce $|V|$, kde na i -tém indexu bude velikost komponenty s číslem i . Union pak se pak podívá nejdříve na vrcholy aby určil čísla jejich komponent. Pak se podívá do pole velikostí a vybere menší. Do tohoto indexu pak vpíše součet velikostí obou komponent.

Nejkratší cesta v orientovaném acyklickém grafu (1bod):

Vymyslete, jak najít v lineárním čase (vzhledem k počtu hran + počtu vrcholů) délku nejkratší cesty mezi vrcholy u a v v orientovaném acyklickém grafu s ohodnocenými hranami.

Řešení: Nalezneme topologické uspořádání. Následně procházíme vrcholy v tomto pořadí. Začneme vrcholem u , kterému přiřadíme 0. Pokud je v v uspořádání před u prohlásím, že neexistuje cesta z u do v . Každému dalšímu vrcholu přiřadíme minimum z hodnot které spočteme jako ohodnocení vstupní hrany a vrcholu na jejím konci. Pokud ve vrcholu číslo není ignorujeme ho protože není dostupný z u . Pokud neexistovala žádná hrana vstupující do vrcholu na které začátku by byl již ohodnocený vrchol, tak tento vrchol neohodnotíme. Procházíme vrcholy až kým narazíme na v .

Nejdelší cesta v orientovaném acyklickém grafu (1bod):

Vymyslete, jak najít v lineárním čase (vzhledem k počtu hran + počtu vrcholů) délku **nejdelší** cesty mezi vrcholy u a v v orientovaném acyklickém grafu s ohodnocenými hranami. Pro zajímavost: toto je problém, který v obecných grafech zatím neumíme řešit v polynomiálním čase.

Řešení: Stejně jako předešlá akurát vybírám maximum.