Programování pro matematiky
13. cvičení - Rozděluj a panuj

Peter Kovács

Doporučuje si promyslet řešení každého z úkolů, pro vaše vlastní ujasnění učiva. Navíc pokud některé z úvah sepíšete můžete získat body

Každý úkol obsahuje za názvem maximální počet bodů, které lze za úkol získat. Vaším úkolem je si vybrat úkoly, které chcete řešiť. Klidně všechny. Úkoly, které jste si vybrali sepište do jednoho souboru a odvzdejte do recodexu. Za celý úkol můžete získat maximálne **3 body**. Po odvezdání ohodnotím každou odevzdanou úlohu. Body sečtu a přidelím vám $min(body, 3)$. Úkoly řešte sami. Pokud spolupracujete v skupině dostanete své body podělené počtem lidí v skupině.

Za úkoly je možné udělit pouze celočíselné body. Pokud získáte neceločíselný výsledek, bude zaokrouhlen nadol.

Pseudomedián (1bod):

Kolik prvků by jsme byli schopní v 1 iteraci QuickSelectu zahodit, pokud by jsme medián vytvářeli s mediánu sedmic?

Řešení: Zahodíme 4/7 z každej sedmice a zahodíme polovicu sedmíc. Dokopy teda $4/7 \cdot 1/2 = 4/14 = 2/7$

Rekurentní vyjádření (1bod):

Odhadnite asymptotickou složitost algoritmu. Pokud víme, že $T(1) = 1$ pro čas zpracování platí rekurence:

$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n \log n)$$

Řešení: Môžeme si vypísať prvých pár členov.

$$T(1) = 1$$

$$T(2) = 2 + 2\log_2 2$$

$$T(4) = 4 + 4\log_2 2 + 4\log_2 4$$

Môžeme si teda všimnúť, že $T(n) = T(2^i) = 2^i(1 + \log_2 2 + \log_2 4 + \cdots + \log_2 2^i) = 2^i(1 + 2 + 3 + \cdots + i) = n(1 + 2 + \cdots + \log_2 n) = n(\log_2 n)\frac{(1+\log_2 n)}{2} \in \Theta(n \log_2^2 n)$

Rekurentní vyjádření 2 (1bod):

Odhadnite asymptotickou složitost algoritmu. Pokud víme, že $T(2) = 1$ pro čas zpracování platí rekurence:

$$T(n) = \sqrt{n}T(\sqrt{n}) + \Theta(n)$$

Řešení: $T(n) = n^{1/2}T(n^{1/2}) + \Theta(n) = n^{1/2}(n^{1/4}T(n^{1/4}) + \Theta(n^{1/2})) = n^{3/4}(n^{1/8}T(n^{1/8}) + \Theta(n^{1/4})) = \cdots = n^{1-(1/2^k)}T(n^{1/2^k}) + k\Theta(n)$ Nájdime také k, aby $T(n^{1/2^k})$ bolo konštanta, například teda T(2). Chceme teda $n^{1/2^k} = 2$, upravíme na $n = 2^{2^k}$. Dostávame $k = \log_2 \log_2 n$. Dostaneme teda $T(n) = n \log_2 \log_2 n$