Comenius University, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics

Dynamika tuhých telies

Peter Kovács, Ján Vodila

December 30, 2015

Zadanie

Dynamika tuhých telies, definícia problému, rovnice pohybu (4 ODE), rýchlosť, zrýchlenie, uhlová rýchlosť a uhlové zrýchlenie, matica hybnosti (matica inercie).

Kvôli prehľadnosti venujeme každej časti samostatnú sekciu. Sekcie budú vyzerať nasledovne:

1. definícia problému
2. rýchlosť
3. uhľová rýchlosť
4. zrýchlenie
5. uhlové zrýchlenie
6. matica hybnosti (matica inercie).
7. rovnice pohybu (4 ODE)

1 Definícia problému

Tuhé teleso je definované ako teleso, u ktorého nedochádza k deformácii, t.j. ľubovolné dva body majú rovnakú vzdialenosť pri pôsobení akýchkoľvek síl. Teleso môže vykonávať dva druhy pohybu:

- translačný - po osiach x, y, z
- rotačný pohyb

Počas simulácie máme k dispozícii pozíciu reprezentovanú vektorom $x(t) = (x, y, z)$ a orientáciu, ktorá môže byť reprezentovaná rotačnou maticou $R(t) = (R_{i,j}(t)) \in \mathbb{R}^{3\times3}$ alebo jednotkovým kvaterniónom $q(t) = (x, y, z, w)$.
Dôležitý pojem, ktorý musíme zaviesť, je ťažisko telesa. Ak teleso reprezentujeme ako množinu častíc, tak hmotnosť telesa bude $M = \sum_i m_i$, kde m_i je hmotnosť i-tej častice. Ak $r_i(t)$ je pozícia i-tej častice telesa, tak ťažisko telesa bude $x = \frac{\sum_i m_i \times r_i(t)}{M}$
Ďaľej si zadefinujeme ako sa pozícia a rotácia mení s časom t, a teda ako vyzerajú výrazy pre $x'(t)$ a $R'(t)$.

2 Rýchlosť

Nech teda $x(t)$ je pozícia ťažiska, potom $x'(t)$ je rýchlosť pohybu ťažiska. Rýchlosť $v(t)$ teda zadefinujeme takto:

$$v(t) = x'(t).$$

3 Uhlová rýchlosť

Okrem toho, že teleso sa môže pohybovať v priestore, môže tiež rotovať okolo nejakej osi. Tento pohyb môžeme opísať vektorom $\omega(t)$. Smer vektoru $\omega(t)$ nám hovorí o tom, okolo ktorých osí teleso rotuje a jeho veľkosť nám hovorí o tom, ako rýchlo rotuje. Vektor $\omega(t)$ budeme nazývat uhlová rýchlosť a zadefinujeme ho nasledovne:

$$R'(t) = \omega(t)^{\times} R(t)$$

kde $\omega(t)^{\times} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z(t) & \omega_y(t) \\ \omega_z(t) & 0 & -\omega_x(t) \\ -\omega_y(t) & \omega_x(t) & 0 \end{pmatrix}$ a v prípade kvaterniónov bude vyzerat nasledovne:

$$q' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} w & -z & y \\ z & w & -x \\ -y & x & w \\ -x & -y & -z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\mathbb{Q}\omega$$

4 Zrýchlenie

Silou pôsobiacou na teleso $F(t) = \sum F_i(t)$, kde $F_i(t)$ je súčet všetkých síl (vietor, gravitácia a ďalšie) pôsobiacich na i-tu časticu.

Zrýchlenie telesa zadefinujeme ako $P(t) = M \times v(t)$.

5 Uhlové zrýchlenie

Krútivým momentom telesa $\tau(t) = \sum \tau_i(t) = \sum (r_i(t) - x(t)) \times F_i(t)$, kde $r_i(t)$ je poloha i-tej častice, $x(t)$ je poloha ťažiska a $F_i(t)$ je sila pôsobiaca na i-tu časticu.

Uhlové zrýchlenie telesa zadefinujeme ako $L(t) = I(t) \times \omega(t)$, kde $I(t)$ je matica hybnosti.

6 Matica hybnosti

Matica hybnosti $I(t)$ je škálovací faktor medzi uhlovým zrýchlením $L(t)$ a uhlovou rýchlosťou $\omega(t)$. Ak r_i je vzdialenosť i-tej častice od ťažiska a m_i je hmotnosť i-tej častice, potom $I(t)$ zadefinujeme nasledovne:

$$I(t) = \sum \begin{pmatrix} m_i(r_{iy}^2 + r_{iz}^2) & -m_i r_{ix} r_{iy} & -m_i r_{ix} r_{iz} \\ -m_i r_{iy} r_{ix} & m_i(r_{ix}^2 + r_{iz}^2) & -m_i r_{iy} r_{iz} \\ -m_i r_{iz} r_{ix} & -m_i r_{iz} r_{iy} & m_i(r_{ix}^2 + r_{iy}^2) \end{pmatrix}$$

7 Rovnice pohybu (4ODE)

Keďže sme zadefinovali všetko potrebné, teraz môžeme popísať rovnice pohybu pevného telesa. V prípade, že požívame rotačnú maticu, budú vyzerať nasledovne:

$$\frac{d}{dx}\mathbb{X}(t) = \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} x(t) \\ R(t) \\ P(t) \\ L(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t) \\ \omega(t)^{\times} R(t) \\ F(t) \\ \tau(t) \end{pmatrix}$$

V prípade kvaternionov takto:

$$\frac{d}{dx}\mathbb{X}(t) = \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} x(t) \\ q(t) \\ P(t) \\ L(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t) \\ \frac{1}{2}\mathbb{Q}(t)\omega(t) \\ F(t) \\ \tau(t) \end{pmatrix}$$

Zdroje:

1. prof. RNDr. Roman Ďurikovič, PhD
2. David Baraff - Pixar Animation Studios