

Reconstruction of the Seabottom Reflection Coefficient

Evgeny O. Kovalenko, Igor V. Prokhorov, Andrey A. Sushchenko

Institute for Applied Mathematics, FEB RAS, Vladivostok, Russia,

Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia;

e-mail: kovalenko.eo@dvfu.ru, sushchenko.aa@dvfu.ru

The kinetic model, describing sound propagation in the ocean with diffuse reflection by Lambert's cosine law on the bottom surface, is considered. Based on it the inverse problem of bottom scattering reconstruction is formulated. Обратная задача сведена к нахождению решения интегрального уравнения первого рода. Предложен итерационный алгоритм для нахождения решения обратной задачи и проведены численные эксперименты по восстановлению коэффициента донного рассеяния при различной ширине диаграммы направленности.

1 INTRODUCTION

Since the beginning of the 20th century, research on the mapping of the seabed is relevant. All methods base on sending and receiving signal. The basis of the developed methods for identification of the scattering coefficient of the seabottom is principle of radiation and detection of signal. В настоящее время особенно актуальна задача зондирования морского дна на основе данных, полученных гидролокатором бокового обзора. В работах [1] построены кинетические модели для процесса ГБО-зондирования морского в приближении однократного рассеяния и узкой диаграммы направленности. Проведен анализ влияния объемного рассеяния и ширины диаграммы направленности приемной антенны на качество восстановления гидролокационного изображения.

Увеличение ширины диаграммы направленности и длительности импульса источника приводит к размытию гидролокационных изображений морского дна, полученных непосредственно с гидролокатора бокового обзора. Проблема фокусировки размытых ГБО-изображений сведена к решению интегрального уравнения первого рода. Для решения интегрального уравнения предложен итерационный метод Зейделя. Проведены численные эксперименты при различной ширине диаграммы направленности приемной антенны ГБО.

2 FORMULATION OF THE PROBLEM

Propagation of acoustic waves on the tens order kHz frequencies in the fluctuating ocean is described by radiation transfer equation[2],[3]:

A long formula:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \mathbf{k} \cdot \nabla I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) + \mu I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = J(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t), \quad (1)$$

here $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, t \in [0, T]$ and wave vector \mathbf{k} belongs to the unit sphere $\Omega := \{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{k}| = 1\}$. The function $I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)$ denotes the wave energy of flux density at time t at the point \mathbf{r} which propagates in the direction \mathbf{k} with velocity c . μ and σ denote the attenuation and the scattering coefficients, respectively, and the function J describes the sources of wave field.

Sonar signal is propagated in the medium $G := \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : r_3 > -l\}$, which is top half-space bounded by the surface $\partial G = \gamma := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 : y_3 = -l\}$, interpreted as the bottom of the ocean. и пусть $\mathbf{n}(\mathbf{y})$ — внешняя нормаль к границе области G .

Further, authors consider the case of an isotropic pointwise source which moves with constant velocity V along r_2 axis and emits a pulse parcels in times $t_i, \overline{1, m}$ with intensity J_i , respectively:

$$J(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) \sum_{i=0}^m J_i \frac{\chi_{[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}]}(t - t_i)}{\Delta}. \quad (2)$$

Here, δ denotes Dirac delta function, $\chi_{[a,b]}$ is characteristic function of interval $[a, b]$.

Assume, sources in medium are missing before initial time

$$I|_{t=0} = 0. \quad (3)$$

Let, $\Omega^\pm := \{\mathbf{k} \in \Omega : \pm k_3 < 0\}$ then the reflective properties of ∂G are determined by diffuse reflection by the Lambert's cosine law:

$$I(\mathbf{y}, \mathbf{k}) = \frac{\sigma_d}{\pi} \int_{\Omega^+} |\mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{k}'| I(\mathbf{y}, \mathbf{k}') d\mathbf{k}', \quad (4)$$

where $\mathbf{y} \in \partial G, \mathbf{k} \in \Omega^-$.

Let, $\Gamma := \{(\mathbf{V}t, \mathbf{k}, t) : \mathbf{k} \in \Omega, t \in (0, T)\}$ then measuring of the receiving signal on Γ is a sum of the signal, caused by the reflection from the bottom surface, and a signal scattered by the inhomogeneities of the medium G :

$$I^\pm(t) = \int_{\Omega} S^\pm(\mathbf{k}) I|_{\Gamma}(\mathbf{V}t, \mathbf{k}, t) d\mathbf{k}. \quad (5)$$

Here, $S^+(\mathbf{k})$ and $S^-(\mathbf{k})$ denote the directivity pattern of the receiving antenna on the starboard and portside, respectively. Further, authors consider the case of a narrow directivity pattern of the receiving antenna, focused on orthogonal plane to vehicle path:

$$S^\pm(\mathbf{k}) = \chi_{[0, \mp 1]}(k_1) \exp(-k_2^2/\varepsilon^2), \quad (6)$$

where, ε - angle of the width of directivity pattern.

3 DETERMINATION OF THE BOTTOM SCATTERING COEFFICIENT

Authors consider the case when the receiving antenna detects signals from one sensing interval only. Hence, the solution of the problem for the reflected signal from the bottom as

$$I(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{G(y)} S^\pm \left(\frac{\mathbf{V}t - \mathbf{y}}{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|} \right) \sigma_d(y_1, y_2) \times \frac{l^2 \exp(-\mu(|\mathbf{V}t - \mathbf{y}| + |\mathbf{y} - \mathbf{x}|))}{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|^3 |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \times \left(\mathbf{x} - V \left(t - \frac{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}| + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{c} \right) \right) \times \left(\sum_{i=0}^m J_i \sigma \left(t - t_i - \frac{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}| + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{c} \right) \right) \times dx dy_1 dy_2, \quad (7)$$

here, $\mathbf{x} \in \Gamma$ is a signal emission point. Further, authors use a substitutions corresponding to arguments of the Dirac delta functions in (7):

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - V \left(t - \frac{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}| + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{c} \right), \quad (8)$$

$$y'_1 = t - t_i - \frac{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}| + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{c}, \quad (9)$$

$$k_2 = \frac{\mathbf{V}t - \mathbf{y}}{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|}. \quad (10)$$

Hence, the Jacobian is equal to

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} & \frac{\partial x'_1}{\partial x_3} & \frac{\partial x'_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x'_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x'_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} & \frac{\partial x'_2}{\partial x_3} & \frac{\partial x'_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x'_2}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x'_3}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_3}{\partial x_2} & \frac{\partial x'_3}{\partial x_3} & \frac{\partial x'_3}{\partial y_1} & \frac{\partial x'_3}{\partial y_2} \\ \frac{\partial y'_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y'_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y'_1}{\partial x_3} & \frac{\partial y'_1}{\partial y_1} & \frac{\partial y'_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial y'_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y'_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y'_2}{\partial x_3} & \frac{\partial y'_2}{\partial y_1} & \frac{\partial y'_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} & \frac{\partial x'_2}{\partial x_3} & \frac{\partial x'_2}{\partial y_1} \\ \frac{\partial x'_3}{\partial x_2} & \frac{\partial x'_3}{\partial x_3} & \frac{\partial x'_3}{\partial y_1} \\ \frac{\partial y'_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y'_1}{\partial x_3} & \frac{\partial y'_1}{\partial y_1} \\ \frac{\partial y'_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y'_2}{\partial x_3} & \frac{\partial y'_2}{\partial y_1} \end{vmatrix} = \left| \frac{y_1(|\mathbf{y} - \mathbf{x}| + |\mathbf{V}t - \mathbf{y}|)}{c|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|^2 |\mathbf{y} - \mathbf{x}|} \right|,$$

here, $|\mathbf{V}t - \mathbf{y}| = \left| \frac{c(t - t_i)}{2} (1 + \frac{V^2}{c^2}) \right|$, $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \left| \frac{c(t - t_i)}{2} (1 - \frac{V^2}{c^2}) \right|$, $y_1 = \sqrt{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|^2 - l^2}$.

Таким образом, из (7) находим

$$I^\pm(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sigma_d(y_1, y_2) S^\pm(\mathbf{k}) \times \frac{cl^2 J_i \exp(-\mu c(t - t_i)) dk_2}{|\mathbf{V}t_i - \mathbf{y}|^2 |\mathbf{y} - \mathbf{V}t| y_1(t - t_i) |k_2 \mathbf{V} - c|}. \quad (11)$$

4 THE INVERSE PROBLEM

The inverse problem is determining the function σ_d from equation (7)

4.1 Narrow DP Approximation

For solving it author assume a narrow directivity pattern approximation:

$$S^\pm(\mathbf{k}) = \chi_{0, \mp 1}(k_1) \delta(k_2) \quad (12)$$

Thus, the solution of (7) is

$$\sigma_d(y_1, y_2) = \frac{2\pi}{J_i cl^2} l_i^4 y_1 \exp(2\mu l_i) I^\pm(t). \quad (13)$$

Here, a slant range $l_i = c(t - t_i)/2$, and $y_1 = \sqrt{l_i^2 - l^2}$, $y_2 = Vt_i$.

4.2 Discrete Method

С математической точки зрения уравнение (7) относится к интегральному уравнению I рода относительно функции σ_d . Для его решения введём метод дискретизации. То есть определим области, в которых σ_d константа. Так как σ_d задана на множестве Γ , введём разбиение по осям y_1, y_2 :

$$\{(y_1^p, y_2^q) \in \gamma : y_1^p = ph, y_2^q = qh\}, \\ p \in \overline{1, H}, q \in \overline{1, M}, \quad (14)$$

где h - шаг сетки. Таким образом, в области, ограниченной точками (y_1^p, y_2^q) , (y_1^{p+1}, y_2^q) , (y_1^p, y_2^{q+1}) , (y_1^{p+1}, y_2^{q+1}) σ_d считается постоянной, и уравнение (7) сводится к:

$$I(t_{ij}) = \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^M a_{ijpq} \sigma_d^{pq}, \quad (15)$$

where,

$$t_{ij} = t_i + j\tau, \tau = \frac{\Delta t}{M}, a_{ijpq} = \\ = \int_{-1}^1 \frac{cl^2 J_i \exp(-\mu c(t - t_i)) dk_2}{|\mathbf{V}t_i - \mathbf{y}|^2 |\mathbf{y} - \mathbf{V}t| y_1(t - t_i) |k_2 \mathbf{V} - c|}, \\ \sigma_d^{pq} = \sigma_d(\mathbf{y}^{pq}), \mathbf{y}^{pq} = (y_1^p, y_2^q).$$

Уравнение (15) представляет собой s-диагональную СЛАУ. Параметр s зависит от ширины диаграммы направленности приёмной и передающей антенн и длительности испускания сигнала. For solving SLE (15) authors use Seidel's method.

5 NUMERICAL EXPERIMENTS

В эксперименте рассматривались случаи фокусировки при разной ширине диаграммы направленности приёмной антенны. В качестве нулевой итерации в методе Зейделя было взято решение, полученное по формуле (13), изображённое на рисунках (2 - 7) над буквой а). В данном эксперименте рассмотрены случаи при диаграмме направленности равной 1, 2, 4, 8, 14, 40 градусов. Для оценки ЧЕГОТОТАМ было введено ЧТОТОТАМ(отклонение).

Параметры, применяемые для построения изображения морского дна на основе реальных данных, получаемых с гидролокатора бокового

обзора, представлены в таблице 1. Для решения задачи численного интегрирования применялся метод Монте-Карло.

Таблица 1: Значения параметров для эксперимента

$\mu, \text{м}^{-1}$	$\Delta t, \text{с}$	$c, \text{м/с}$	J	$l, \text{м}$	$y_1, \text{м}$	$y_2, \text{м}$
0.018	0.4	1500	1	12	[0, 40]	[0, 40]

Поверхность дна описывается функцией

$$\sigma_d = ??? \quad (16)$$

и изображена на рисунке 1.



Рис. 1: Точное решение

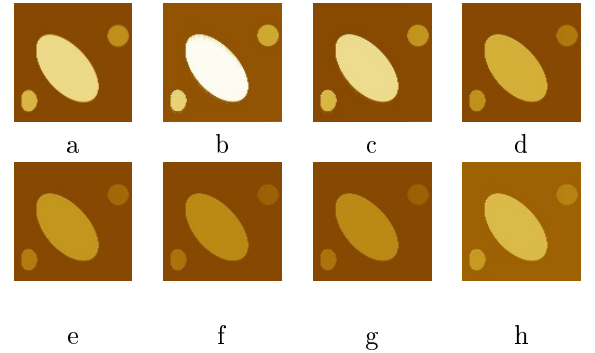


Рис. 2: 1°

Таблица 2: Нормы для 1° ×

	$ \Delta\sigma _2$	$ \Delta\sigma _\infty$		$ \Delta\sigma _2$	$ \Delta\sigma _\infty$
a	0.0426	0.0749	e	0.0426	0.0749
b	0.0426	0.0749	f	0.0426	0.0749
c	0.0426	0.0749	g	0.0426	0.0749
d	0.0426	0.0749	h	0.0426	0.0749

5.1 Subsection

Body of subsection.

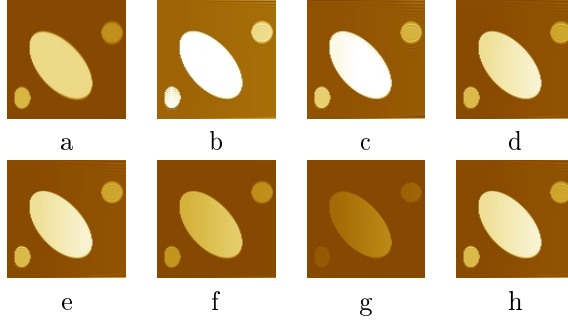


Рис. 3: 2°

Таблица 3: Нормы для 2° ×					
	$ \Delta\sigma _2$	$ \Delta\sigma _\infty$		$ \Delta\sigma _2$	$ \Delta\sigma _\infty$
a	0.0426	0.0749	e	0.0426	0.0749
b	0.0426	0.0749	f	0.0426	0.0749
c	0.0426	0.0749	g	0.0426	0.0749
d	0.0426	0.0749	h	0.0426	0.0749

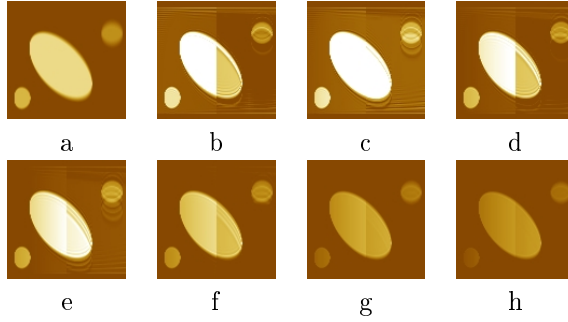


Рис. 4: 4°

Таблица 4: Нормы для 4°					
	$ \Delta\sigma _2$	$ \Delta\sigma _\infty$		$ \Delta\sigma _2$	$ \Delta\sigma _\infty$
a	0.3333	0.1035	e	0.1653	0.0198
b	0.236	0.0627	f	0.1636	0.0266
c	0.2	0.0247	g	0.1819	0.0406
d	0.1634	0.0234	h	0.1983	0.0526

Таблица 5: Нормы для 8°					
	$ \Delta\sigma _2$	$ \Delta\sigma _\infty$		$ \Delta\sigma _2$	$ \Delta\sigma _\infty$
a	0.1959	0.0521	e	0.2	0.0299
b	0.2766	0.0424	f	0.1933	0.0324
c	0.2239	0.0319	g	0.1755	0.0399
d	0.1984	0.0291	h	0.1817	0.0477

Numbered formula should be written as

$$a + b = 2. \quad (17)$$

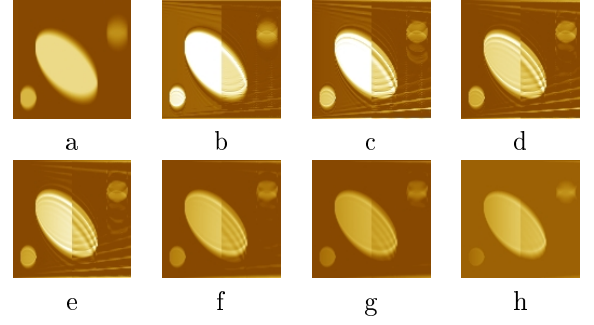


Рис. 5: 8°

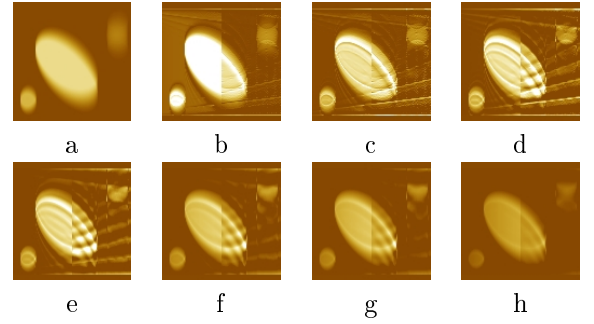


Рис. 6: 14°

Таблица 6: Нормы для 14°					
	$ \Delta\sigma _2$	$ \Delta\sigma _\infty$		$ \Delta\sigma _2$	$ \Delta\sigma _\infty$
a	0.1926	0.0536	e	0.2225	0.0382
b	0.3106	0.0524	f	0.2	0.0355
c	0.3066	0.0428	g	0.2	0.0369
d	0.2505	0.0440	h	0.2	0.0423

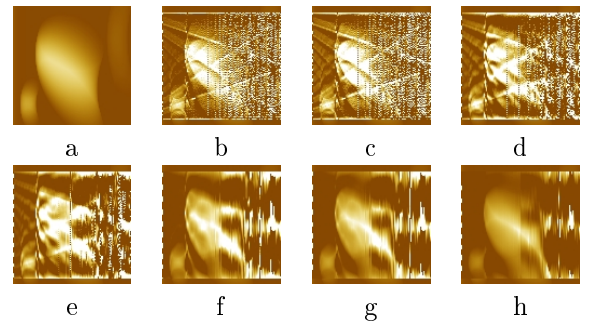


Рис. 7: 40°

The reference to such an equation should be as (17).

A few formulae:

$$a + b = 2, \quad (18)$$

$$c + d = 3. \quad (19)$$

Таблица 7: Нормы для 40°

	$ \Delta\sigma _2$	$ \Delta\sigma _\infty$		$ \Delta\sigma _2$	$ \Delta\sigma _\infty$
a	0.0886	0.4	e	0.1332	0.4
b	0.1438	0.4	f	0.1263	0.4
c	0.1444	0.4	g	0.1204	0.4
d	0.1384	0.4	h	0.1165	0.4

Aligned formulae:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 f(x)dx, \\ &\quad + a + b + c, \end{aligned} \tag{20}$$

$$B = 3. \tag{21}$$

A long formula:

$$\begin{aligned} D &= a + b + c + e + \sum_{n=1}^\infty t_n \\ &\quad + f + \int_0^1 g(x)dx + q + h + y^2 \\ &\quad \quad \quad - r - s - \sin(w). \end{aligned} \tag{22}$$

Citations are written as [?].

ACKNOWLEDGEMENTS

Put acknowledgements in the last section, please do not use footnotes for that.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Surname, I. I., Surname, I. I., 1998, Title of the reference, *Journal*, Vol. **2**, pp. 15–25.

[2] Surname, I. I., 2010, *Title of Book*, Publisher, City.