

# Reconstruction of the Seabottom Reflection Coefficient

Evgeny O. Kovalenko, Igor V. Prokhorov, Andrey A. Sushchenko

Institute for Applied Mathematics, FEB RAS, Vladivostok, Russia,  
Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia;  
e-mail: kovalenko.eo@dvfu.ru, sushchenko.aa@dvfu.ru

The kinetic model, describing sound propagation in the ocean with diffuse reflection by Lambert's cosine law on the bottom surface, is considered. Based on it the inverse problem of bottom scattering reconstruction is formulated.

Inverse problem is reduced to finding of solution of integral equation of the first kind. Iteration algorithm for finding of solution inverse problem is proposed and numerical experiments by recovering of coefficient of bottom scattering at different width of directivity pattern are carried out.

Обратная задача сведена к нахождению решения интегрального уравнения первого рода. Предложен итерационный алгоритм для нахождения решения обратной задачи и проведены численные эксперименты по восстановлению коэффициента донного рассеяния при различной ширине диаграммы направленности.

## 1 INTRODUCTION

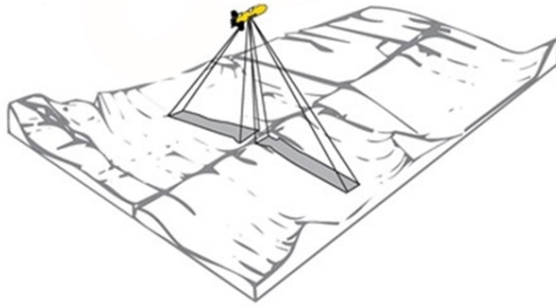


Рис. 1: АНПА с ГБО на борту

Since the beginning of the 20th century, research on the mapping of the seabed is relevant. All methods base on sending and receiving signal. The basis of the developed methods for identification of the scattering coefficient of the seabottom is principle of radiation and detection of signal. В настоящее время особенно актуальна задача зондирования морского дна на основе данных, полученных гидролокатором бокового обзора. В работах [1] построены кинетические модели для процесса ГБО-зондирования морского в приближении однократного рассеяния и узкой диа-

граммы направленности. Проведен анализ влияния объемного рассеяния и ширины диаграммы направленности приемной антенны на качество восстановления гидролокационного изображения.

Увеличение ширины диаграммы направленности и длительности импульса источника приводит к размытию гидролокационных изображений морского дна, полученных непосредственно с гидролокатора бокового обзора. Проблема фокусировки размытых ГБО-изображений сведена к решению интегрального уравнения первого рода. Для решения интегрального уравнения предложен итерационный метод Зейделя. Проведены численные эксперименты при различной ширине диаграммы направленности приемной антенны ГБО.

## 2 FORMULATION OF THE PROBLEM

Propagation of acoustic waves on the tens order kHz frequencies in the fluctuating ocean is described by radiation transfer equation[2],[3]:

A long formula:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \mathbf{k} \cdot \nabla I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) + \mu I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = J(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t), \quad (1)$$

here  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, t \in [0, T]$  and wave vector  $\mathbf{k}$  belongs to the unit sphere  $\Omega := \{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{k}| = 1\}$ . The function  $I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)$  denotes the wave energy of flux density at time  $t$  at the point  $\mathbf{r}$  which propagates in the direction  $\mathbf{k}$  with velocity  $c$ .  $\mu$  and  $\sigma$  denote the attenuation and the scattering coefficients, respectively, and the function  $J$  describes the sources of wave field.

Sonar signal is propagated in the medium  $G := \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : r_3 > -l\}$ , which is top half-space bounded by the surface  $\partial G = \gamma := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 : y_3 = -l\}$ , interpreted as the bottom of the ocean. и пусть  $\mathbf{n}(\mathbf{y})$  — внешняя нормаль к границе области  $G$ .

Further, authors consider the case of an isotropic pointwise source which moves with constant

velocity  $V$  along  $r_2$  axis and emits a pulse parcels in times  $t_i$ ,  $\overline{1, m}$  with intensity  $J_i$ , respectively:

$$J(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) \sum_{i=0}^m J_i \frac{\chi_{[-\frac{\Delta}{2}; \frac{\Delta}{2}]}(t - t_i)}{\Delta}. \quad (2)$$

Here,  $\delta$  denotes Dirac delta function,  $\chi_{[a, b]}$  is characteristic function of interval  $[a, b]$ .

Assume, sources in medium are missing before initial time

$$I|_{t=0} = 0. \quad (3)$$

Let,  $\Omega^\pm := \{\mathbf{k} \in \Omega : \pm k_3 < 0\}$  then the reflective properties of  $\partial G$  are determined by diffuse reflection by the Lambert's cosine law:

$$I(\mathbf{y}, \mathbf{k}) = \frac{\sigma_d}{\pi} \int_{\Omega^+} |\mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{k}'| I(\mathbf{y}, \mathbf{k}') d\mathbf{k}', \quad (4)$$

where  $\mathbf{y} \in \partial G$ ,  $\mathbf{k} \in \Omega^-$ .

Let,  $\Gamma := \{(\mathbf{V}t, \mathbf{k}, t) : \mathbf{k} \in \Omega, t \in (0, T)\}$  then measuring of the receiving signal on  $\Gamma$  is a sum of the signal, caused by the reflection from the bottom surface, and a signal scattered by the inhomogeneities of the medium  $G$ :

$$I^\pm(t) = \int_{\Omega} S^\pm(\mathbf{k}) I|_{\Gamma}(\mathbf{V}t, \mathbf{k}, t) d\mathbf{k}. \quad (5)$$

Here,  $S^+(\mathbf{k})$  and  $S^-(\mathbf{k})$  denote the directivity pattern of the receiving antenna on the starboard and portside, respectively. Further, authors consider the case of a narrow directivity pattern of the receiving antenna, focused on orthogonal plane to vehicle path:

$$S^\pm(\mathbf{k}) = \chi_{[0, \mp 1]}(k_1) \exp(-k_2^2/\varepsilon^2), \quad (6)$$

where,  $\varepsilon$  - angle of the width of directivity pattern.

### 3 DETERMINATION OF THE BOTTOM SCATTERING COEFFICIENT

Authors consider the case when the receiving antenna detects signals from one sensing interval only. The authors present a solution (1) - (5) as:

$$I^\pm(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sigma_d(y_1, y_2) S^\pm(\mathbf{k}) \times \frac{cl^2 J_i \exp(-\mu c(t - t_i)) dk_2}{|\mathbf{V}t_i - \mathbf{y}|^2 |\mathbf{y} - \mathbf{V}t| y_1(t - t_i) |k_2 \mathbf{V} - c|}, \quad (7)$$

$$\text{here, } |\mathbf{V}t - \mathbf{y}| = \left| \frac{c(t - t_i)}{2} \left(1 + \frac{V^2}{c^2}\right) \right|, \quad |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \left| \frac{c(t - t_i)}{2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \right|, \quad y_1 = \sqrt{|\mathbf{V}t - \mathbf{y}|^2 - l^2}.$$

### 4 THE INVERSE PROBLEM

The inverse problem is determining the function  $\sigma_d$  from equation (7)

#### 4.1 Narrow DP Approximation

For solving it author assume a narrow directivity pattern approximation:

$$S^\pm(\mathbf{k}) = \chi_{0, \mp 1}(k_1) \delta(k_2) \quad (8)$$

Thus, the solution of (7) is

$$\sigma_d(y_1, y_2) = \frac{2\pi}{J_i cl^2} l_i^4 y_1 \exp(2\mu l_i) I^\pm(t). \quad (9)$$

Here, a slant range  $l_i = c(t - t_i)/2$ , and  $y_1 = \sqrt{l_i^2 - l^2}$ ,  $y_2 = Vt_i$ .

#### 4.2 Discrete Method

From a mathematical point of view, the equation (7) is integral equation of I kind relatively of function  $\sigma_d$ . The authors introduce the sampling method for it solving. In other words authors define the areas in which  $\sigma_d$  is constant. Inasmuch as  $\sigma_d$  is defined on the set  $\Gamma$  authors introduce a decomposition by axis  $y_1, y_2$ .

С математической точки зрения уравнение (7) относится к интегральному уравнению I рода относительно функции  $\sigma_d$ . Для его решения введём метод дискретизации. То есть определим области, в которых  $\sigma_d$  константа. Так как  $\sigma_d$  задана на множестве  $\Gamma$ , введём разбиение по осям  $y_1, y_2$ :

$$\{(y_1^p, y_2^q) \in \gamma : y_1^p = ph, y_2^q = qh\}, \quad p \in \overline{1, H}, q \in \overline{1, M}, \quad (10)$$

where,  $h$  is the grid spacing. In this way, the area limited of points  $(y_1^p, y_2^q)$ ,  $(y_1^{p+1}, y_2^q)$ ,  $(y_1^p, y_2^{q+1})$ ,  $(y_1^{p+1}, y_2^{q+1})$   $\sigma_d$  is constant and the equation (7) reduces to:

где  $h$  - шаг сетки. Таким образом, в области, ограниченной точками  $(y_1^p, y_2^q)$ ,  $(y_1^{p+1}, y_2^q)$ ,  $(y_1^p, y_2^{q+1})$ ,  $(y_1^{p+1}, y_2^{q+1})$   $\sigma_d$  считается постоянной, и уравнение (7) сводится к:

$$I(t_{ij}) = \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^M a_{ijpq} \sigma_d^{pq}, \quad (11)$$

where,

$$t_{ij} = t_i + j\tau, \tau = \frac{\Delta t}{M}, a_{ijpq} = \frac{\int_{-1}^1 \frac{cl^2 J_i \exp(-\mu c(t - t_i)) dk_2}{|\mathbf{V}t_i - \mathbf{y}|^2 |\mathbf{y} - \mathbf{V}t| y_1 (t - t_i) |k_2 \mathbf{V} - c|}},$$

$$\sigma_d^{pq} = \sigma_d(\mathbf{y}^{pq}), \mathbf{y}^{pq} = (y_1^p, y_2^q).$$

Уравнение (11) представляет собой  $s$ -диагональную СЛАУ. Параметр  $s$  зависит от ширины диаграммы направленности приёмной и передающей антенн и длительности испускания сигнала. For solving SLE (11) authors use Seidel's method.

## 5 NUMERICAL EXPERIMENTS

В эксперименте рассматривались случаи фокусировки при разной ширине диаграммы направленности приемной антенны. В качестве нулевой итерации в методе Зейделя было взято решение, полученное по формуле (9), изображенное на рисунках (3 - 8) над буквой а). В данном эксперименте рассмотрены случаи при диаграмме направленности равной 1, 2, 4, 8, 14, 40 градусов. Для оценки ЧЕГОТОТАМ было введено ЧТОТОТАМ(отклонение).

Параметры, применяемые для построения изображения морского дна на основе реальных данных, получаемых с гидролокатора бокового обзора, представлены в таблице 1. Для решения задачи численного интегрирования применялся метод Монте-Карло.

Таблица 1: Значения параметров для эксперимента

$\mu, \text{м}^{-1}$	$\Delta t, \text{с}$	$c, \text{м/с}$	$J$	$l, \text{м}$	$y_1, \text{м}$	$y_2, \text{м}$
0.018	0.4	1500	1	12	[0,40]	[0, 40]

Поверхность дна описывается функцией

$$\sigma_d = ??? \quad (12)$$

и изображена на рисунке 2.

### 5.1 Subsection

Body of subsection.

Numbered formula should be written as

$$a + b = 2. \quad (13)$$



Рис. 2: Точное решение

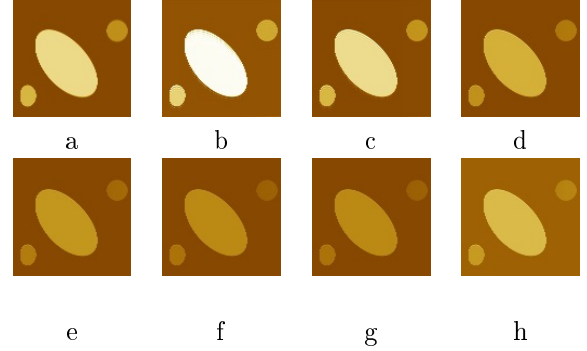


Рис. 3: 1°

Таблица 2: Нормы для 1° ×

	$\ \Delta\sigma\ _2$	$\ \Delta\sigma\ _\infty$		$\ \Delta\sigma\ _2$	$\ \Delta\sigma\ _\infty$
a	0.0426	0.0749	e	0.0426	0.0749
b	0.0426	0.0749	f	0.0426	0.0749
c	0.0426	0.0749	g	0.0426	0.0749
d	0.0426	0.0749	h	0.0426	0.0749

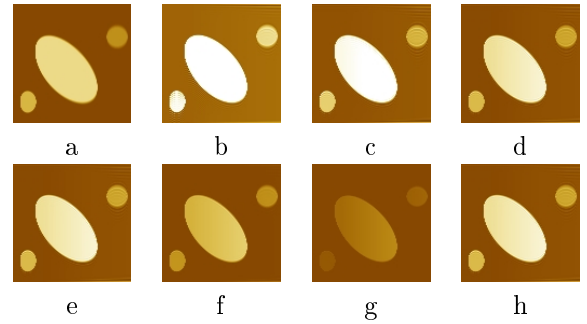


Рис. 4: 2°

Таблица 3: Нормы для 2° ×

	$\ \Delta\sigma\ _2$	$\ \Delta\sigma\ _\infty$		$\ \Delta\sigma\ _2$	$\ \Delta\sigma\ _\infty$
a	0.0426	0.0749	e	0.0426	0.0749
b	0.0426	0.0749	f	0.0426	0.0749
c	0.0426	0.0749	g	0.0426	0.0749
d	0.0426	0.0749	h	0.0426	0.0749

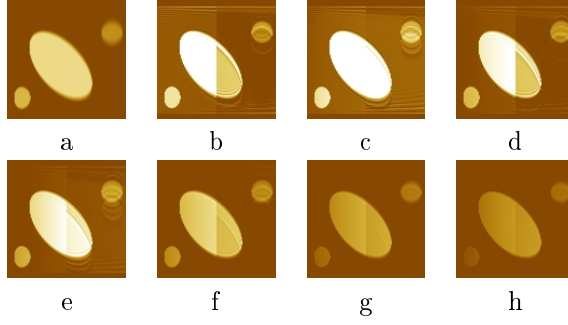


Рис. 5: 4°

Таблица 4: Нормы для 4°

	$  \Delta\sigma  _2$	$  \Delta\sigma  _\infty$		$  \Delta\sigma  _2$	$  \Delta\sigma  _\infty$
a	0.3333	0.1035	e	0.1653	0.0198
b	0.236	0.0627	f	0.1636	0.0266
c	0.2	0.0247	g	0.1819	0.0406
d	0.1634	0.0234	h	0.1983	0.0526

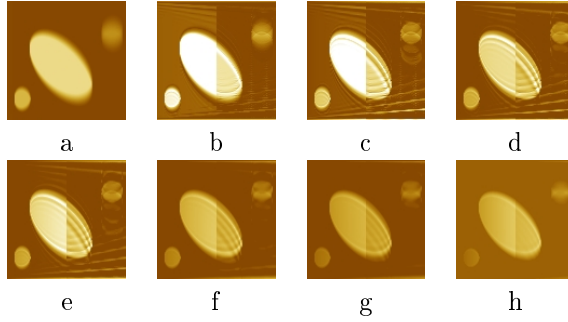


Рис. 6: 8°

Таблица 5: Нормы для 8°

	$  \Delta\sigma  _2$	$  \Delta\sigma  _\infty$		$  \Delta\sigma  _2$	$  \Delta\sigma  _\infty$
a	0.1959	0.0521	e	0.2	0.0299
b	0.2766	0.0424	f	0.1933	0.0324
c	0.2239	0.0319	g	0.1755	0.0399
d	0.1984	0.0291	h	0.1817	0.0477

Таблица 6: Нормы для 14°

	$  \Delta\sigma  _2$	$  \Delta\sigma  _\infty$		$  \Delta\sigma  _2$	$  \Delta\sigma  _\infty$
a	0.1926	0.0536	e	0.2225	0.0382
b	0.3106	0.0524	f	0.2	0.0355
c	0.3066	0.0428	g	0.2	0.0369
d	0.2505	0.0440	h	0.2	0.0423

The reference to such an equation should be as (13).

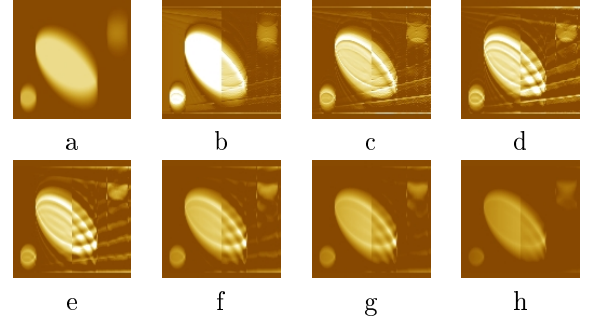


Рис. 7: 14°

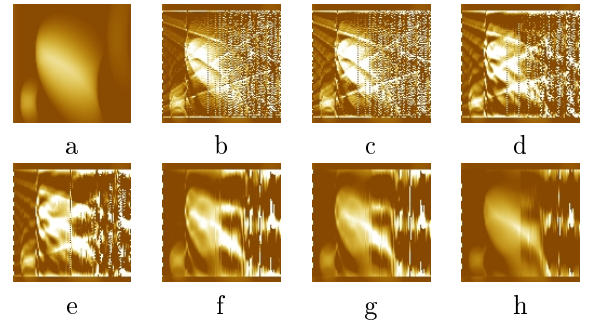


Рис. 8: 40°

Таблица 7: Нормы для 40°

	$  \Delta\sigma  _2$	$  \Delta\sigma  _\infty$		$  \Delta\sigma  _2$	$  \Delta\sigma  _\infty$
a	0.0886	0.4	e	0.1332	0.4
b	0.1438	0.4	f	0.1263	0.4
c	0.1444	0.4	g	0.1204	0.4
d	0.1384	0.4	h	0.1165	0.4

A few formulae:

$$a + b = 2, \quad (14)$$

$$c + d = 3. \quad (15)$$

Aligned formulae:

$$A = \int_0^1 f(x)dx, \quad (16)$$

$$B = 3. \quad (17)$$

A long formula:

$$D = a + b + c + e + \sum_{n=1}^{\infty} t_n + f + \int_0^1 g(x)dx + q + h + y^2 - r - s - \sin(w). \quad (18)$$

Citations are written as [?].

#### ACKNOWLEDGEMENTS

Put acknowledgements in the last section, please do not use footnotes for that.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Surname, I. I., Surname, I. I., 1998, Title of the reference, *Journal*, Vol. **2**, pp. 15–25.
- [2] Surname, I. I., 2010, *Title of Book*, Publisher, City.