Дальневосточный математический журнал. 2019. Т. 19. № 1. С. 1–10

УДК 517.958
MSC2010 35Q20 +35Q60

© Е. О. Коваленко[1,2], И. В. Прохоров[1,2]

Определение коэффициента донного рассеяния при многолучевом зондировании океана

Исследована обратная задача для нестационарного уравнения переноса излучения, заключающаяся в нахождении коэффициента донного рассеяния по данным многолучевого гидролокатора бокового обзора. В приближении однократного рассеяния предложен приближенный способ нахождения коэффициента донного рассеяния. Проведен численный анализ обратной задачи для разного числа ракурсов зондирования и при различной ширине приемных антенн. Продемонстрировано влияние объемного рассеяния на качество реконструкции морского дна.

Ключевые слова: *уравнение переноса излучения, донное рассеяние, обратная задача*

1. Введение

Обратные задачи для кинетических уравнений имеют многочисленные практические приложения. Это, прежде всего, дистанционное зондирование поверхности Земли, фотометрия и гидролокация морского дна, оптическая и рентгеновская томография [1–10]. В работе рассматривается обратная задача для нестационарного уравнения переноса излучения в области с неизвестной границей, на которой заданы условия диффузного отражения по закону Ламберта. Требуется найти границу при некотором условии переопределения решения начально-краевой задачи. Такие постановки задач возникают при мониторинге земной поверхности и морского дна с помощью авиационных радиолокационных станций и гидролокаторов бокового обзора. В работе рассматривается упрощенная двумерная модель локации ламбертовской кривой. Применение такой модели оправданно для узкой в горизонтальной плоскости диаграммы направленности приемной антенны и при небольшой скорости движения источника излучения — в сравнении со скоростью распространения сигнала в среде [9].

[1] Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7,
[2] Дальневосточный федеральный университет, 690050, г. Владивосток, ул. Суханова, 8
Электронная почта: kovalenko.eo@dvfu.ru (Е. О. Коваленко), prokhorov@iam.dvo.ru (И. В. Прохоров).

В трехмерном случае эта обратная задача рассматривалась в работах [9, 10]. Основное ограничение на поведение искомой поверхности в [9, 10] было связано с малостью отклонения отражающей поверхности от некоторого среднего уровня. При условиях, что диаграмма направленности приемной антенны является узкой в горизонтальной плоскости и учитывается только однократно рассеянное излучение, получена явная формула для решения обратной задачи. Проведен численный анализ влияния объемного рассеяния и ширины диаграммы направленности на качество реконструкции диффузно отражающей поверхности [9, 10].

Задачи определения диффузно отражающих поверхностей для стационарных моделей переноса излучения исследовались в работах [1, 11]. В частности, в [11] предложен метод восстановления ламбертовской оптической кривой по двум ее изображениям и показана его устойчивость по отношению к малым отклонениям от ламбертовости и ошибкам измерений. Методы исследования обратной задачи, используемые для стационарных и нестационарных моделей, несмотря на некоторые близкие аспекты, достаточно сильно отличаются друг от друга. В настоящей работе исследована обратная задача нестационарного уравнения переноса излучения и для определения формы ламбертовской кривой получено нелинейное дифференциальное уравнение, имеющее решение в квадратурах. На сравнительно простых тестовых примерах проведены численные эксперименты.

2. Постановка задачи

В работе рассматривается нестационарное уравнение переноса излучения следующего вида [7–9, 12–16]:

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{k}\cdot\nabla_r + \mu\right) I(\mathbf{r},\mathbf{k},t) = \frac{\sigma}{4\pi}\int\limits_{\Omega} I(\mathbf{r},\mathbf{k}',t)d\mathbf{k}' + J(\mathbf{r},\mathbf{k},t), \tag{1}$$

где $\mathbf{r}\in G\subset\mathbb{R}^3$, $t\in[0,T]$ и волновой вектор $\mathbf{k}$ принадлежит единичной окружности $\Omega=\{\mathbf{k}\in\mathbb{R}^3:|\mathbf{k}|=1\}$. Функция $I(\mathbf{r},\mathbf{k},t)$ интерпретируется как плотность потока энергии волны в момент времени t в точке $\mathbf{r}$, распространяющейся в направлении $\mathbf{k}$ со скоростью c. Величины μ и σ имеют смысл коэффициентов затухания и рассеяния, а функция J описывает источники звукового поля.

Неограниченная область G представляет собой верхнее полупространство, ограниченное горизонтальной плоскостью $\gamma=\{\mathbf{r}=(r_1,r_2,r_3)\in\mathbb{R}^3:r_3=-l\}$, $l>0$. Присоединим к уравнению (1) начальные и граничные условия

$$I^-(\mathbf{r},\mathbf{k},t)|_{t<0} = 0, \qquad (\mathbf{r},\mathbf{k})\in G\times\Omega, \tag{2}$$

$$I^-(\mathbf{y},\mathbf{k},t) = \frac{\sigma_d(\mathbf{r})}{\pi}\int\limits_{\Omega_+} |\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}'|I^+(\mathbf{y},\mathbf{k}',t)(\mathbf{y},\mathbf{k}',t)d\mathbf{k}, \qquad (\mathbf{y},\mathbf{k},t)\in\Gamma^-. \tag{3}$$

Здесь $I^{\pm}(\mathbf{y},\mathbf{k},t) = \lim\limits_{\varepsilon\to-0} I(\mathbf{y}\pm\varepsilon\mathbf{k},\mathbf{k},t\pm\varepsilon/c)$,

$$\Gamma^{\pm} = \{(\mathbf{y},\mathbf{k},t)\in\gamma\times\Omega_{\pm}\times(0,T)\}, \quad \Omega_{\pm} = \{\mathbf{k}\in\Omega:\mathrm{sgn}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}) = \pm 1\},$$

где $\mathbf{n}=(0,0,-1)$ — единичный вектор внешней нормали к границе области G. Условие (3) означает, что отражающие свойства дна определяются только диффузным отражением по закону Ламберта с коэффициентом отражения $\sigma_d(\mathbf{r})$.

Уравнение (1) с начальным и граничным условиями (2), (3) при заданных μ,σ, σ_d,J,c образуют начально-краевую задачу для нахождения неизвестной функции I на множестве $G\times\Omega\times(0,T)$

Будем предполагать, что функция J описывает точечный импульсный источник звука, перемещающийся с постоянной скоростью V в направлении оси r_2, следующего вида

$$J(\mathbf{r},\mathbf{k},t)=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{V}t)\sum_{j=1}^{m}\delta(t-t_j),\qquad \mathbf{V}=(0,V,0), \tag{4}$$

где δ — дельта-функция Дирака.

Дополним систему соотношений (1)–(3) следующими условиями

$$\int_{\Omega} S_i(\mathbf{k})I^+(\mathbf{V}t,\mathbf{k},t)d\mathbf{k}=P_i(\mathbf{V}t,t),\quad i=1,...,q, \tag{5}$$

где $S_i(\mathbf{k})$ отлична от нуля в некоторой области $\Omega_i\subset\Omega$.

Предметом исследования данной работы является следующая обратная задача: найти функцию $\sigma_d(\mathbf{r})$ из соотношений (1)–(4) при заданных μ,σ,J,c, P_i,S_i.

Такая математическая постановка задачи возникает, например, при акустическом зондировании морского дна гидролокатором бокового обзора, движущимся прямолинейно с постоянной скоростью V, озвучивая окружающее пространство импульсными сигналами. На носителе расположены антенны, измеряющие суммарную интенсивность $P_i(\mathbf{V}t,t)$ в секторе Ω_i в момент времени t. Если $q=2$ и множества $\Omega_1=\{\mathbf{k}\in\Omega:k_1<0\}$, $\Omega_2=\{\mathbf{k}\in\Omega:k_1>0\}$, то мы имеем дело с простейшим случаем гидролокатора бокового обзора — с одной приемной антенной по каждому борту ее носителя [ ].

3. Приближение однократного рассеяния

Решение начально-краевой задачи (**??**)–(3) эквивалентно решению следующего уравнения интегрального типа [8–13]:

$$\begin{aligned}I(\mathbf{r},\mathbf{k},t)&=I_0(\mathbf{r},\mathbf{k},t)+\\&+\frac{\sigma_d(\mathbf{y})}{\pi}\exp(-\mu d(\mathbf{r},-\mathbf{k},t))\int_{\Omega_+}|\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}'|I^+\left(\mathbf{y},\mathbf{k}',t-\frac{d(\mathbf{r},-\mathbf{k},t)}{c}\right)d\mathbf{k}'+\\&+\int_0^{d(\mathbf{r},-\mathbf{k},t)}\exp(-\mu\tau)\frac{\sigma}{4\pi}\int_{\Omega}I\left(\mathbf{r}-\tau\mathbf{k},\mathbf{k}',t-\frac{\tau}{c}\right)d\mathbf{k}'d\tau\end{aligned} \tag{6}$$

где

$$I_0(\mathbf{r},\mathbf{k},t)=\int_0^{d(\mathbf{r},-\mathbf{k},t)}\exp(-\mu\tau)J\left(\mathbf{r}-\tau\mathbf{k},\mathbf{k},t-\frac{\tau}{c}\right)d\tau,$$

$\mathbf{y}=\mathbf{r}-d(\mathbf{r},-\mathbf{k},t)\mathbf{k}$, $d(\mathbf{r},-\mathbf{k},t)=\min\{d(\mathbf{r},-\mathbf{k}),ct\}$, $d(\mathbf{r},-\mathbf{k})$ — расстояние от точки $\mathbf{r}\in G$ в направлении $-\mathbf{k}$ до границы области G. Если $\mathbf{y}\notin\partial G$, то второе слагаемое в уравнении (6) отсутствует.

Возьмем в качестве нулевого приближения для решения уравнения (6) функцию I_0 и построим процесс простых итераций. На первом шаге итерационного процесса для решения начально-краевой задачи (1)–(3) получим, так называемое, приближение однократного рассеяния

$$
\begin{aligned}
I(\mathbf{r},\mathbf{k},t) &= I_0(\mathbf{r},\mathbf{k},t)+\frac{\sigma_d(\mathbf{y})}{\pi}\exp(-\mu d(\mathbf{r},-\mathbf{k},t))\times\\
&\times\int\limits_{\Omega_+}|\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}'|\int\limits_0^{d(\mathbf{y},-\mathbf{k}',t)}\exp(-\mu\tau)J\left(\mathbf{y}-\tau\mathbf{k}',\mathbf{k}',t-\frac{d(\mathbf{r},-\mathbf{k},t)}{c}-\frac{\tau}{c}\right)d\tau d\mathbf{k}'+\\
&\int\limits_0^{d(\mathbf{r},-\mathbf{k},t)}\exp(-\mu\tau)\frac{\sigma}{4\pi}\int\limits_{\Omega}\int\limits_0^{d(\mathbf{r}-\tau\mathbf{k},-\mathbf{k}',t-\tau/c)}\exp(-\mu\tau')\times\\
&\times J\left(\mathbf{r}-\tau\mathbf{k}-\tau'\mathbf{k}',\mathbf{k}',t-\frac{\tau+\tau'}{c}\right)d\tau' d\mathbf{k}' d\tau. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

В последнем соотношении сделаем замены переменных: $\mathbf{x}=\mathbf{y}-\tau\mathbf{k}'$ — в первом интеграле, и $\mathbf{x}'=\mathbf{r}-\tau'\mathbf{k}'$ — во втором интеграле. Так как

$$
d\tau d\mathbf{k}'=\frac{d\mathbf{x}}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2},\quad d\tau' d\mathbf{k}'=\frac{d\mathbf{x}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}'|^2},
$$

то из (7) получаем

$$
\begin{aligned}
I(\mathbf{r},\mathbf{k},t) &= I_0(\mathbf{r},\mathbf{k},t)+\frac{\sigma_d(\mathbf{y})}{\pi}\exp(-\mu d(\mathbf{r},-\mathbf{k},t))\times\\
&\times\int\limits_{G(\mathbf{y})}\left|\mathbf{n}(\mathbf{y})\cdot\frac{\mathbf{y}-\mathbf{x}}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|}\right|\exp(-\mu|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)J\left(\mathbf{x},\frac{\mathbf{y}-\mathbf{x}}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|},t-\frac{d(\mathbf{r},-\mathbf{k})}{c}-\frac{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|}{c}\right)\frac{d\mathbf{x}}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2}\\
&+\int\limits_0^{d(\mathbf{r},-\mathbf{k},t)}\exp(-\mu\tau)\frac{\sigma}{4\pi}\int\limits_{G(\mathbf{r}-\tau\mathbf{k})}\exp(-\mu|\mathbf{r}-\mathbf{x}'|)\times\\
&\times J\left(\mathbf{x}'-\tau\mathbf{k},\frac{\mathbf{r}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}'|},t-\frac{\tau}{c}-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{x}'|}{c}\right)\frac{d\mathbf{x}'d\tau}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}'|^2}, \qquad (8)
\end{aligned}
$$

где $G(\mathbf{y})$ пересечение области G с шаром с центром в точке $\mathbf{y}$ и радиусом ct.

$$
\begin{aligned}
i_2 &= \sum_{j=1}^{m}\delta(t-t_j)\int\limits_0^{d(\mathbf{r},-\mathbf{k},t)}\exp(-\mu\tau)\frac{\sigma}{4\pi}\int\limits_{G(\mathbf{r}-\tau\mathbf{k})}\exp(-\mu|\mathbf{r}-\mathbf{x}'|)\times\\
&\times\delta(\mathbf{x}'-\mathbf{V}t)J\left(\mathbf{x}'-\tau\mathbf{k},\frac{\mathbf{r}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}'|},t-\frac{\tau}{c}-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{x}'|}{c}\right)\frac{d\mathbf{x}'d\tau}{|\mathbf{r}-\mathbf{x}'|^2}=\\
&= \qquad (9)
\end{aligned}
$$

4. Исследование обратной задачи

Принимая во внимание ограничение (5) для функции J и «звездность» области G относительно начала координат, перепишем соотношение (10) в точке $\mathbf{r}=\mathbf{o}$:

$$\begin{gathered}
I^+(\mathbf{o},\mathbf{k},t) = 2\exp\left(-\,\mu d(\mathbf{o},-\,\mathbf{k})\right)\int\limits_{G(\mathbf{y})} |\mathbf{n}(\mathbf{y})\cdot\frac{\mathbf{y}-\mathbf{x}}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|}|\exp(-\,\mu|\mathbf{y}-\mathbf{x}|)\times \\
\times\,\delta\left(\mathbf{x}\right)\delta\left(t-\frac{d(\mathbf{o},-\,\mathbf{k})}{c}-\frac{|\mathbf{y}-\mathbf{r}'|}{c}\right)\frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{y}-\mathbf{r}'|} = \\
= \frac{2}{|\mathbf{y}|}\exp\left(-\,\mu(d(\mathbf{o},-\,\mathbf{k})+|\mathbf{y}|\right)\left|\mathbf{n}(\mathbf{y})\cdot\frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}\right|\delta\left(t-\frac{d(\mathbf{o},-\,\mathbf{k})}{c}-\frac{|\mathbf{y}|}{c}\right) = \\
= \frac{2}{d(\mathbf{o},-\,\mathbf{k})}\exp\left(-\,2\mu d(\mathbf{o},-\,\mathbf{k})\right)|\mathbf{n}(-\,d(\mathbf{o},-\,\mathbf{k})\mathbf{k})\cdot\mathbf{k}|\,\delta\left(t-2\frac{d(\mathbf{o},-\,\mathbf{k})}{c}\right).
\end{gathered} \tag{10}$$

Подставим (11) в условие (4):

$$\begin{gathered}
P_\pm(t) = \int\limits_\Omega S_\pm(\mathbf{k})I^+(\mathbf{o},\mathbf{k},t)d\mathbf{k} = \int\limits_\Omega S_\pm(\mathbf{k})\frac{2}{d(\mathbf{o},-\,\mathbf{k})}\exp\left(-\,2\mu d(\mathbf{o},-\,\mathbf{k})\right)\times \\
\times\,|\mathbf{n}(-\,d(\mathbf{o},-\,\mathbf{k})\mathbf{k})\cdot\mathbf{k}|\times\delta\left(t-2\frac{d(\mathbf{o},-\,\mathbf{k})}{c}\right)d\mathbf{k}.
\end{gathered} \tag{11}$$

Пусть $\mathbf{k}=(k_1,k_2)=(-\sin\varphi,\cos\varphi)$, тогда, учитывая параметризацию кривой γ $(\rho(\varphi)= =d(\mathbf{o},-\mathbf{k}))$, из (12) получаем

$$\begin{gathered}
P_\pm(t) = \int\limits_{\underline{\varphi}}^{\overline{\varphi}} S_\pm(\varphi)I^+(\mathbf{o},\mathbf{k}(\varphi),t)d\varphi = \int\limits_{\underline{\varphi}}^{\overline{\varphi}} S_\pm(\varphi)\frac{2}{\rho(\varphi)}\exp\left(-\,2\mu\rho(\varphi)\right)\times \\
\times\,|\mathbf{n}(\varphi)\cdot\mathbf{k}(\varphi)|\times\delta\left(t-2\frac{\rho(\varphi)}{c}\right)d\varphi.
\end{gathered} \tag{12}$$

Учитывая, что

$$|\mathbf{n}(\varphi)\cdot\mathbf{k}(\varphi)| = \frac{\rho(\varphi)|\rho'(\varphi)|}{\sqrt{\rho'^2(\varphi)+\rho^2(\varphi)}},$$

из (13) получаем

$$P_\pm(t) = 2\int\limits_{\underline{\varphi}}^{\overline{\varphi}} S_\pm(\varphi)\exp\left(-\,2\mu\rho(\varphi)\right)\frac{|\rho'(\varphi)|}{\sqrt{\rho'^2(\varphi)+\rho^2(\varphi)}}\delta\left(t-2\frac{\rho(\varphi)}{c}\right)d\varphi. \tag{13}$$

Согласно предположениям пункта 2, функция $\rho(\varphi)$ монотонна и дифференцируема на интервалах $(\underline{\varphi},\pi)$ и $(\pi,\overline{\varphi})$. Следовательно, на интервале $(\underline{\varphi},\pi)$ она имеет обратную функцию φ_-, а на интервале $(\pi,\overline{\varphi})$ — обратную функцию φ_+. Если диаграмма направленности $S_+(\varphi)=1$ при $\varphi\in(\pi,\overline{\varphi})$, а $S_-(\varphi)=1$ при $\varphi\in(\underline{\varphi},\pi)$, то из (14) находим

$$P_\pm(t) = \frac{c\exp(-\,\mu ct)}{\sqrt{1/\varphi'^2_\pm(ct/2)+(ct/2)^2}}. \tag{14}$$

Возвращаясь к обозначению $\rho = ct/2$ $(t = 2\rho/c)$, из (15) получаем

$$\frac{P_{\pm}^{2}(2\rho/c)}{c^2\exp(-\,4\mu\rho) - \rho^2 P_{\pm}^{2}(2\rho/c)} = \varphi_{\pm}'^{2}(\rho). \qquad (15)$$

Так как $\rho(\pi) = l$, то $\varphi_{\pm}(l) = \pi$, и решение дифференциального уравнения (16) можно записать в виде

$$\varphi_{\pm}(\rho) = \pi \pm \int\limits_{l}^{\rho} \frac{P_{\pm}(2\tau/c)d\tau}{\sqrt{c^2\exp(-\,4\mu\tau) - \tau^2 P_{\pm}^{2}(2\tau/c)}}. \qquad (16)$$

Знаки $\pm$ в выражении (17) выбраны в соответствии с монотонным убыванием функции $\varphi_{-}(\rho)$ на интервале $(\underline{\varphi}, \pi)$ и монотонным возрастанием функции $\varphi_{+}(\rho)$ на интервале $(\pi, \overline{\varphi})$.

5. Численные эксперименты

В заключительном разделе на ряде тестовых примеров мы проведем анализ численного решения обратной задачи (**??**)–(5). Как было показано в разделе 4, решение обратной задачи сводится к вычислению интегралов (17). В приложениях, например, в задачах зондирования донной поверхности, мы имеем дело с дискретным множеством измеренных значений функций $P_{\pm}(\rho/c), \rho = \rho_i, i = 0, ..., n$. Учитывая это замечание, из соотношений (17) получаем рекуррентные приближенные формулы для определения $\varphi_{\pm}^{i}$ при заданных $P_{\pm}(\rho_i/c)$:

$$\varphi_{\pm}^{i+1} = \varphi_{\pm}^{i} \pm \int\limits_{\rho_i}^{\rho_{i+1}} \frac{P_{\pm}(2\tau/c)d\tau}{\sqrt{c^2\exp(-\,4\mu\tau) - \tau^2 P_{\pm}^{2}(2\tau/c)}} \approx$$
$$\approx \varphi_{\pm}^{i} \pm \frac{P_{\pm}(2\rho_i/c)(\rho_{i+1} - \rho_i)}{\sqrt{c^2\exp(-\,4\mu\rho_i) - \rho_i^2 P_{\pm}^{2}(2\rho_i/c)}}, \qquad i = 0, ..., n-1, \qquad (17)$$

где $\varphi_{\pm}^{0} = \pi$, $\rho_0 = l$ и для аппроксимации интеграла по элементарному отрезку использована формула прямоугольников. Также будем рассматривать аппроксимацию по формуле трапеций

$$\varphi_{\pm}^{i+1} = \varphi_{\pm}^{i} \pm \left(\frac{P_{\pm}(2\rho_i/c)(\rho_{i+1} - \rho_i)}{\sqrt{c^2\exp(-\,4\mu\rho_i) - \rho_i^2 P_{\pm}^{2}(2\rho_i/c)}} + \right.$$
$$\left. + \frac{P_{\pm}(2\rho_{i+1}/c)(\rho_{i+1} - \rho_i)}{\sqrt{c^2\exp(-\,4\mu\rho_{i+1}) - \rho_{i+1}^2 P_{\pm}^{2}(2\rho_{i+1}/c)}} \right) /2, \qquad i = 0, ..., n-1. \qquad (18)$$

При проведении вычислительных экспериментов предполагается, что расстояние между источником и донной поверхностью в направлении $\mathbf{k} = (0, -1)$ равно 30 метрам, то есть $\rho_0 = l = 30$. Скорость распространения звука полагается постоянной во всей области зондирования $c=1500$м/сек, коэффициент затухания и донного рассеяния имеют значения $\mu=0.018$м$^{-1}$, $\sigma_d=1$. Облучение поверхности осуществляется с дальностью зондирования $\rho_n=300$м с шагом дискретизации $\Delta\rho=\rho_{i+1}-\rho_i$, который варьируется на промежутке $[0.004, 0.4]$м.

В первом численном эксперименте γ представлет собой горизонтальную прямую (плоское дно) и задается в следующем виде:

$$\begin{cases} r_1 = & -\rho\sin\varphi, \\ r_2 = & -l. \end{cases} \tag{19}$$

Как видно из рис. 2a и рис. 2b, погрешность формул (18) не превосходит значений 47,5% и 15% при $\Delta\rho=0.4$ и $\Delta\rho=0.04$ соотвественно, а вычисления по формулам (19) приводят к ошибке, не превосходящей значений 3.6% и 1% соотвественно.

В следующем тесте кривая γ задается следующими параметрическим уравнениями:

$$\begin{cases} r_1 = & -\rho\sin\varphi, \\ r_2 = & -l^2/\rho. \end{cases} \tag{20}$$

На рис. 3 для различной частоты дискретизации представлено восстановление кривой γ, описываемой параметрическим уравнениями (21). Как и следовало ожидать, точность восстановления кривой возрастает с уменьшением шага дискретизации. Ориентируясь на приложения теоретических результатов к задачам гидролокации, отметим следующее. Разрешение по дистанции гидролокатора бокового обзора, работающего на частотах порядка 100-600кГц, составляет величины порядка 1-5см [17]. Поэтому для практики представляют интерес графики, приведенные на рис. 2b, 2c. Максимальная относительная ошибка реконструкции кривой γ по формулам (19) при $\Delta\rho=0.04$м не превосходит 17.5%, а при $\Delta\rho=0.01$м — не превосходит 8.7%. При повышении разрешающей способности необходимо повышать частоту зондирующего излучения. Повешение частоты излучения приводит к росту коэффициента ослабления звука и уменьшению дальности зондирования [17].

Представляет несомненный интерес исследование устойчивости решения обратной задачи при возмущении исходных данных. Предварительные исследования показали, что точность и даже сама возможность восстановления кривой γ определяется не только уровнем шума при возмущении функций $P_\pm$, но и величиной $\rho'(\varphi)$. Решение обратной задачи особенно чувствительно к ошибкам в исходных данных, если величина производной функции $\rho(\varphi)$ на части кривой стремится к нулю. В дальнейшем мы также намерены исследовать задачу нахождения диффузно отражающей кривой в рассеивающей среде ($\sigma\neq 0$). Детальный анализ таких и подобных задач будет предметом наших дальнейших публикаций.

ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Эксперимент 1

В данном эксперименте рассматривалось изменение качества изображения в зависимости от количества приемных антенн.

Эксперимент 2

В данном эксперименте рассматривалось изменение качества изображения в зависимости от количества приемных антенн.

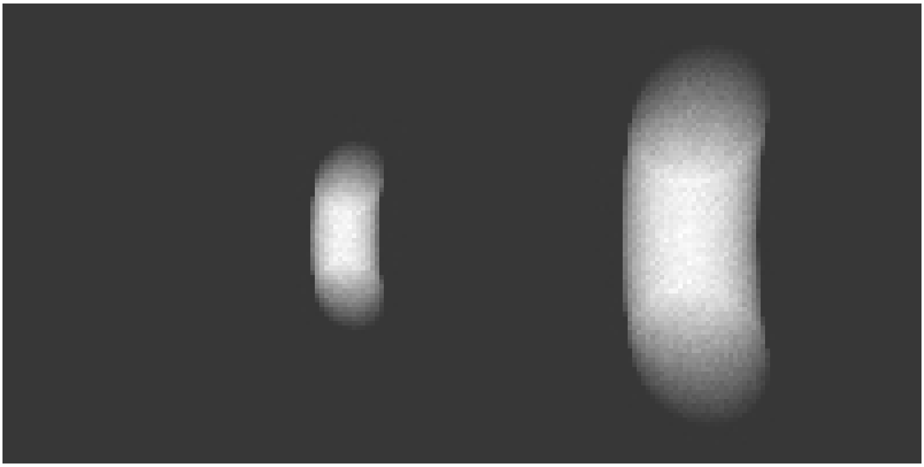

Рис. 1.

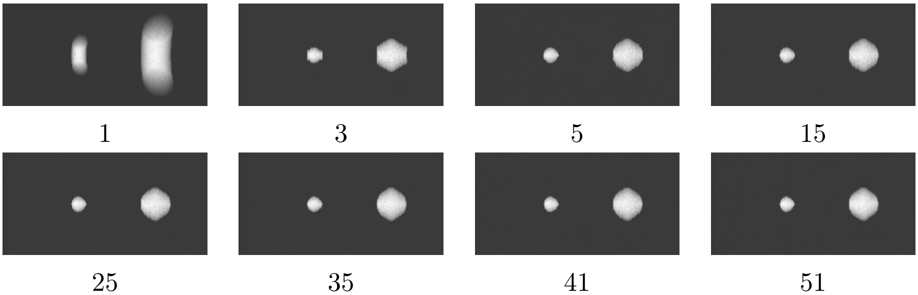

Рис. 2.

Список литературы

[1] В. Р. Кирейтов, *Обратные задачи фотометрии*, ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1983.

[2] Р. Д. Урик, *Основы гидроакустики*, Судостроение, Л., 1978.

[3] А. В. Богородский, Г. В. Яковлев, Е. А. Корепин, А. К. Должиков, *Гидроакустическая техника исследования и освоения океана*, Гидрометеоиздат, Л., 1984.

[4] Д. С. Аниконов, А. Е. Ковтанюк, И. В. Прохоров, *Использование уравнения переноса в томографии*, Логос, М., 2000.

[5] Yu. E. Anikonov, *Inverse Problems for Kinetic and Other Evolution Equations*, VSP, Utrecht, 2001.

[6] В. В. Тучин, *Оптика биологических тканей. Методы рассеяния света в медицинской диагностике*, Физматлит, М., 2013.

[7] И. В. Прохоров, В. В. Золотарев, И. Б. Агафонов, "Задача акустического зондирования во флуктуирующем океане", *Дальневосточный математический журнал*, **11**:1 (2011), 76–87.

[8] И. В. Прохоров, А. А. Сущенко, "Исследование задачи акустического зондирования морского дна методами теории переноса излучения", *Акустический журнал*, **61**:3 (2015), 400–408.

[9] И. В. Прохоров, А. А. Сущенко, В. А. Кан, "Об одной задаче определения рельефа дна флуктуирующего океана", *Сиб. журн. индустр. матем.*, **18**:2 (2015), 99–110.

[10] V. A. Kan, I. V. Prokhorov, A. A. Sushchenko, "Determining the bottom surface according

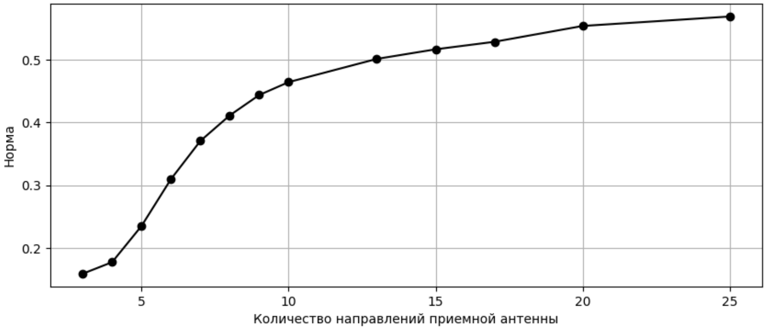

Рис. 3.

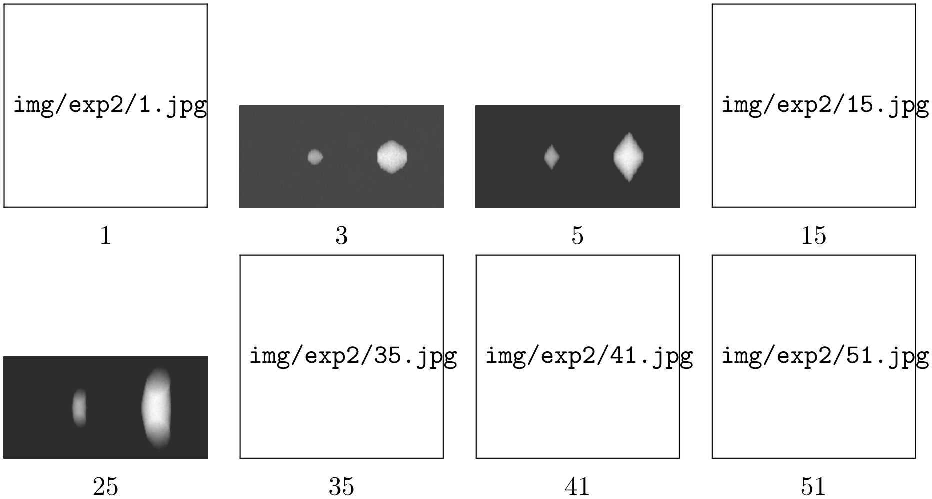

Рис. 4.

to data of side-scan sonars”, *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*, **10035** (2016), 1003518.

[11] В. А. Шарафутдинов, “О восстановлении ламбертовской оптической кривой по двум ее изображениям”, *Доклады АН*, **249**:3 (1979), 565–568.

[12] И. В. Прохоров, А. А. Сущенко, “О корректности задачи Коши для уравнения переноса излучения с френелевскими условиями сопряжения”, *Сибирский математический журнал*, **56**:4 (2015), 922–933.

[13] И. В. Прохоров, А. А. Сущенко, А. Ким, “Начально-краевая задача для уравнения переноса излучения с диффузными условиями сопряжения”, *Сибирский журнал индустриальной математики*, **20**:1 (2017), 75—85.

[14] И. В. Прохоров, А. А. Сущенко, “Задача Коши для уравнения переноса излучения в неограниченной среде”, *Дальневосточный математический журнал*, **18**:1 (2018), 101—111.

[15] A. A. Amosov, “Initial-Boundary Value Problem for the Non-Stationary Radiative Transfer Equation with Fresnel Reflection and Refraction Conditions”, *Journal of Mathematical Sciences*, **231**:3 (2018), 279–337.

[16] A. A. Amosov, “Initial-Boundary Value Problem for the Nonstationary Radiative Trans-

fer Equation with Diffuse Reflection and Refraction Conditions”, *Journal of Mathematical Sciences*, **235**:2 (2018), 117–137.

[17] В. Лекомцев, “Гидроакустические средства визуализации для необитаемых подводных аппаратов”, *Современные технологии автоматизации*, 2013, № 3, 78–82.

Поступила в редакцию
1 ноября 2018 г.

Kan V. A., Prokhorov I. V., Determination of a diffuse reflecting surface under pulsed irradiation. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2019. V. 19. No 1. P. 1–10.

ABSTRACT

An inverse problem of determining a diffusely reflecting surface under given functionals of the radiation flux density for a nonstationary radiation transfer equation is considered. Assuming the point pulsed source and the single scattering approximation, authors obtained the nonlinear differential equation. The solution has been obtained in a few quadratures to determine the profile of the Lambert surface. The computational experiments were carried out on test examples.

Key words: *radiation transfer equation, diffuse reflection, Lambert’s cosine law, inverse problem.*