Современные методы вычислительной математики

Лектор — д.ф.-м.н., профессор Голушко Сергей Кузьмич

Лабораторная работа № 3. Метод конечных элементов.

1. Рассмотрим краевую задачу Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) второго порядка на отрезке $[0, L]$

$$\frac{d}{dx}\left(C(x)\frac{du(x)}{dx}\right) = f(x), \tag{1}$$

$$u(0) = 0, \qquad u(L) = 0. \tag{2}$$

где $u(x)$ — искомая функция, $f(x)$ — заданная функция.

Слабая постановка задачи. Обозначим $H_0^1([0, L])$ — пространство функций из $H^1([0, L])$ с нулевым следом на границе. Умножим уравнение (1) на функцию $v \in H_0^1([0, L])$ и проинтегрируем полученное равенство на отрезке $[0, L]$:

$$\int_0^L \frac{d}{dx}\left(C(x)\frac{du}{dx}\right) v\, dx = \int_0^L f v\, dx.$$

Применяя к левой части интегрирование по частям и учитывая тот факт, что $v(0) = v(L) = 0$, получим следующее равенство

$$\int_0^L C(x)\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\, dx = -\int_0^L f v\, dx. \tag{3}$$

Функция $u \in H_0^1([0, L])$ называется слабым решением задачи (1)–(2), если она удовлетворяет уравнению (3) для любой функции $v \in H_0^1([0, L])$. Можно показать, что, если коэффициент $C(x) \in C^1[0, L]$, $f \in C[0, L]$ и функция $u \in C^2[0, L]$ является слабым решением задачи, то она будет также решением задачи (1)–(2) в классическом смысле.

2. Рассмотрим смешанную краевую задачу Дирихле и Неймана для ОДУ второго порядка, когда $u(0) = 0$, $\dfrac{du}{dx}(L) = C_1$. В этом случае после интегрирования по частям получим следующее равенство

$$\int_0^L C(x)\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\, dx = -\int_0^L f v\, dx + C_1 v(L). \tag{4}$$

Здесь для задания слабой постановки необходимо выбрать в качестве пространства функций — подпространство $\widetilde{H}^1$ пространства $H^1([0, L])$, удовлетворяющих условию Дирихле только на левом краю.

Метод конечных элементов (МКЭ). Метод конечных элементов имеет множество трактовок. В рамках этого задания МКЭ рассматривается как конечно-элементная реализация метода Бубнова-Галеркина.

Здесь сформулируем несколько общих этапов решения задачи с помощью МКЭ. Перед тем как решать задачу, необходимо получить ее слабую постановку. Определить тип краевых условий.

1 *Дискретизация области.* Область решения задачи разбивается на подобласти простой формы, называемые конечными элементами.

2 *Выбор подходящей аппроксимирующей функции на элементе.* В большинстве случаев в качестве аппроксимирующей функции выбираются полиномы.

3 *Вывод локальной матрицы жесткости и вектора нагрузок на элементе.* Для каждого элемента выводится локальная система алгебраических уравнений (СЛАУ) $\{P\} = [K]\{u_h\}$, которая связывает вектор правой части $\{P\}$ и вектор неизвестных значений искомой функции $\{u_h\}$ в узлах элемента посредством матрицы жесткости $[K]$.

4 *Сборка локальных матриц жесткости и векторов нагрузок всех элементов в глобальную матрицу жесткости и глобальный вектор нагрузок.*

5 *Учет главных краевых условий типа Дирихле в итоговой СЛАУ.*

6 *Решение полученной системы линейных алгебраических уравнений.*

7 *Вычисление необходимых характеристик по найденным значениям в узлах элементов.*

На примере задачи (1) рассмотрим конечно-элементную реализацию метода Бубнова-Галеркина. В начале разобьем отрезок $[0, L]$ на N равных отрезков – конечных элементов. Рассмотрим минимальный случай, когда решение на каждом элементе u_e задается линейной функцией (линейные 1d элементы).

$$u_e^h = a_0 + a_1 x, \tag{5}$$

где a_0, a_1 – неизвестные коэффициенты. Таким образом, перед неизвестными коэффициентами здесь стоят две базисные функции (мономы) на каждом элементе. При работе с МКЭ удобно переформулировать аппроксимацию так, чтобы неизвестными выступали не произвольные константы, а значения неизвестной функции в узлах элемента. Для этого введем координаты левой x_i и правой x_{i+1} границы i-го элемента. Здесь и далее будем опускать верхний индекс h при работе с численной аппроксимацией решения.

$$u_i = a_0 + a_1 x_i, \quad u_{i+1} = a_0 + a_1 x_{i+1}. \tag{6}$$

Получаем систему из двух уравнений на две неизвестных. Выражаем коэффициенты a_0, a_1

$$a_0 = \frac{u_i x_{i+1} - u_{i+1} x_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad a_1 = \frac{u_i - u_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}. \tag{7}$$

Подставляем полученные выражения для коэффициентов в исходную формулу (5)

$$\begin{gathered} u_e = \frac{u_i x_{i+1} - u_{i+1} x_i}{x_{i+1} - x_i} + \frac{u_i - u_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} x = N_i(x) u_i + N_{i+1}(x) u_{i+1}, \\ N_i(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}, \quad M_i(x) = \frac{x_i - x}{x_i - x_{i+1}}. \end{gathered} \tag{8}$$

Отметим тот факт, что $N_i(x_i) = 1$ и $N_i(x_{i+1}) = 0$, в свою очередь $M_i(x_i) = 0$ и $M_i(x_{i+1}) = 1$.

В матричном виде, полученные соотношения на элементе выглядят следующим образом

$$u_e = \begin{pmatrix} N_i & M_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{pmatrix}.$$

Для $(i-1)$-ого элемента имеем

$$u_e = \frac{u_{i-1} x_i - u_i x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + \frac{u_{i-1} - u_i}{x_{i-1} - x_i} x = N_{i-1}(x) u_{i-1} + M_{i-1}(x) u_i.$$

Таким образом, перед значением приближенного решения u_i в узле x_i стоит функция

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, N-1,$$

$$\psi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{x_1 - x_0}, & x \in [x_0, x_1], \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

$$\psi_N(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{N-1}}{x_N - x_{N-1}}, \quad x \in [x_{N-1}, x_N], \\ 0, \quad \text{иначе}, \end{cases}$$

где $\psi_i, i = 0, \ldots, N$ называются функциями формы. Приближенное решение задачи имеет вид

$$u_h(x) = \sum_{i=0}^{N} \psi_i(x) u_i. \tag{9}$$

В случае задачи Дирихле с нулевыми граничными условиями полагаем $\psi_0 \equiv 0, \psi_N \equiv 0$, в случае смешанной задачи с нулевыми условиями Дирихле — $\psi_0 \equiv 0$.

Коротко про метод Бубнова-Галеркина.

Метод Бубнова-Галеркина. В методе Бубнова-Галеркина решение строится в классе ортогональных функций, что приводит к СЛАУ для искомых коэффициентов разложения.

Подставим приближенное решение уравнения на элементе в дифференциальную постановку задачи (1)

$$\frac{d}{dx}\left(C(x)\frac{du_h}{dx}\right) - f(x) = R(x) \neq 0,$$

где $R(x)$ – функция невязки, тождественно не равная нулю, так как u_h — приближенное решение задачи. Введем базис $\{v_s\}$ пространства, в котором мы ищем решение. Потребуем, чтобы функция невязки $R(x)$ была ортогональна каждой из базисных функций v_s, в смысле интегрального скалярного произведения

$$\int_0^L R(x) v_s(x)\, dx = 0. \tag{10}$$

Расписывая полученные уравнения, получим

$$\sum_{k=0}^{N-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{d}{dx}(C(x)\frac{du_h}{dx})v_s - \int\limits_0^L f(x) v_s(x)\, dx = 0. \tag{11}$$

Система для метода Бубнова-Галеркина может быть получена сразу. Для этого в качестве тестовых функций v в слабой постановке задачи (3) или (4) нужно взять функции формы ψ_s. Подставляя вид приближенного решения (9) в (11), с учетом финитности ψ_i имеем

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} u_0 \frac{d}{dx}(C(x)\frac{d\psi_0}{dx})\psi_s\, dx + \sum_{k=1}^{N-1}\left(\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} u_k \frac{d}{dx}(C(x)\frac{d\psi_k(x)}{dx})\psi_s(x)\, dx + \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} u_k \frac{d}{dx}(C(x)\frac{d\psi_k(x)}{dx})\psi_s(x)\, dx\right) +$$

$$+\int\limits_{x_{N-1}}^{x_N} u_N \frac{d}{dx}(C(x)\frac{d\psi_N}{dx})\psi_s\,dx - \int\limits_{x_{s-1}}^{x_{s+1}} f(x)\psi_s(x)\,dx = 0.$$

Отметим, что в краевой задаче Дирихле с нулевыми условиями на границе индекс s пробегает значения $1,\ldots,N-1$, в краевой задаче Дирихле-Неймана (на левой границе $u=0$) — значения $1,\ldots,N$.

В силу того, что функции $\psi_s(x)$ непрерывно дифференцируемы на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, можно воспользоваться формулой интегрирования по частям

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} u_0 C(x)\frac{d\psi_0}{dx}\frac{d\psi_s}{dx}\,dx + \int\limits_{x_{N-1}}^{x_N} u_N C(x)\frac{d\psi_N}{dx}\frac{d\psi_s}{dx}\,dx +$$

$$+\sum_{k=1}^{N-1}\Bigg(\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} u_k C(x)\frac{d\psi_k(x)}{dx}\frac{d\psi_s(x)}{dx}\,dx + \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} u_k C(x)\frac{d\psi_k(x)}{dx}\frac{d\psi_s(x)}{dx}\,dx\Bigg) =$$

$$= -\int\limits_{x_{s-1}}^{x_{s+1}} f(x)\psi_s(x)\,dx, + u_0 C(0)\frac{d\psi_0(0)}{dx}\psi_s(0) + u_N C(L)\frac{d\psi_0(L)}{dx}\psi_s(L)$$

при этом граничные значения вида $u_i C(x)\frac{d\psi_i(x)}{dx}\psi_s(x)\Big|_{x_k}^{x^{k+1}}, i = 1,\ldots,N-1$ равны нулю в виду финитности ψ_i. Заметим, что по этой же причине большинство слагаемых в левой части равенства равны нулю. Ненулевыми будут только слагаемые при индексах $s-1, s, s+1$. Значения $u_0 C(0)\frac{d\psi_0(0)}{dx}\psi_s(0)$ и $u_N C(L)\frac{d\psi_0(L)}{dx}\psi_s(L)$ известны в силу граничных условий.

Таким образом, на неизвестные значения функции u_i имеем глобальную СЛАУ, что эквивалентно $[K]\{u\} = \{P\}$, где $[K]$ называется матрицей жесткости, а $\{P\}$ — вектором нагрузок.

Для сборки матрицы жесткости воспользуемся локальными матрицами на элементе. Выведем систему в матричном виде. Положим, что $C(x) = EI$ — константа во всей области. Для начала необходимо вычислить производные от N_i, M_i

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} N_i \\ M_i \end{pmatrix} = \frac{1}{x_{i+1}-x_i}\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} x_{i+1}-x \\ x-x_i \end{pmatrix} = \frac{1}{L_e}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где L_e – длина элемента. Матрица жесткости на элементе выглядит следующим образом

$$\begin{gathered}\left[K^{(e)}\right]\{u^{(e)}\} = EI\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} N_i \\ M_i \end{pmatrix} \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} N_i & M_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{pmatrix} dx = \\ = EI\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{L_e^2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{pmatrix} dx = \frac{EI}{L_e}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{pmatrix}.\end{gathered} \tag{12}$$

Интегрирование ведется с учетом того, что производные от линейных функций постоянны.

Для подсчета правой части в общем случае необходимо вычислять интеграл численно. Однако если функция изгибающего момента хорошо аппроксимируется линейной функцией на элементе, можно воспользоваться следующей аппроксимацией

$$M_e(x) = \begin{pmatrix} N_i & M_i \end{pmatrix}_e \begin{pmatrix} f_i \\ f_{i+1} \end{pmatrix}.$$

Тогда правая часть может быть вычислена следующим образом

$$\{P^{(e)}\} = -\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{pmatrix} N_i \\ M_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N_i & M_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_i \\ f_{i+1} \end{pmatrix} dx = -\frac{L_e}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_i \\ f_{i+1} \end{pmatrix} \tag{13}$$

Таким образом, на данном этапе реализовано три первых шага. Имеется дискретизация области решения в виде равномерного разбиения отрезка. Функции формы элемента были выбраны на основе линейной аппроксимации решения на элементе. На каждом элементе найдена своя локальная матрица жесткости и вектор нагрузок.

Рассмотрим процесс сборки в случае, когда область разбита на два элемента. Положим, что $C(x) = EI$ — константа во всей области. Неизвестными тогда выступают три значения в узлах u_1, u_2, u_3, соотвественно размер матрицы жесткости будет 3×3. Первый элемент образован узлами 1 и 2. Второй элемент образован узлами 2 и 3. Тогда глобальная матрица жесткости будет являться суммой всех локальных матриц, предварительно увеличенных до размера глобальной матрицы. Например, для матрицы жесткости первого элемента, ненулевыми будут только вхождения на пересечении первой и второй строки с первым и вторым столбцом. Для второго элемента, ненулевыми будут вхождения на пересечении второй и третьей строки и второго третьего столбца.

$$[K] = \frac{EI}{L_e}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{EI}{L_e}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{EI}{L_e}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вектор нагрузок вычисляется аналогичным образом

$$\begin{aligned}\{P\} = -\frac{L_e}{6}\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\\ f_3\end{pmatrix} - \frac{L_e}{6}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\\ f_3\end{pmatrix} = \\ = -\frac{L_e}{6}\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\\ f_3\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{14}$$

После того как глобальная система собрана, необходимо учесть краевые условия (2). В глобальной матрице, строки и столбцы, соответствующие узлам на которых вводятся ограничения, зануляются, а на диагонали ставится значение единица. Соответствующему узлу в правой части ставится значение ноль.

$$\frac{EI}{L_e}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix} = -\frac{L_e}{6}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\\ f_3\end{pmatrix}. \tag{15}$$

Итоговая СЛАУ получена. Подробнее о том, как собирается матрица жесткости и учитываются краевые условия написано в [1, 2].

Список литературы

[1] *Крылов О. В.* Метод конечных элементов и его применение в инженерных расчетах //М.: Радио и связь. — 2002.

[2] *Eslami M. R.* Finite elements methods in mechanics. — Switzerland : Springer International Publishing, 2014.

[3] *O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, J.Z. Zhu* The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. 7th edition. — Butterworth-Heinemann. 2013. — 756 p.

Варианты заданий.

1. Задача о растяжении стержня постоянного сечения, где $C(x) = EA$, $f(x) = \rho g A$. Здесь $L = 5$ м — длина балки, $g = 9.81$ м/с^2 — ускорение свободного падения, $P =$

30000 Н — сила, $E = 30$ ГПа — модуль упругости, $\rho = 2150$ кг/м^3 — плотность, $A = 0.0341$ м^2 — постоянная площадь поперечного сечения. Краевые условия: $u(0) = 0, \dfrac{du}{dx}(L) = -P/(EA)$.

2. Задача о растяжении стержня переменного сечения, где $C(x) = EA(x)$, $f(x) = \rho g A$. Здесь $L = 5$ м — длина балки, $g = 9.81$ м/с^2 — ускорение свободного падения, $P = 30000$ Н — сила, $E = 30$ ГПа — модуль упругости, $\rho = 2150$ кг/м^3 — плотность, $A(x) = bh(x)\ ^2$ — переменная площадь поперечного сечения, $b = 0.1$ м — ширина балки, $h(x) = 0.1 + x/(10L)$ — высота балки. Краевые условия: $u(0) = 0, \dfrac{du}{dx}(L) = -P/(EA(L))$.

3. Задача о трехточечном изгибе балки (сила прикладывается в центре балки), где $C(x) = 1,\ f(x) = \kappa(x) = \dfrac{12M(x)}{Ebh^3}$. Здесь $\kappa(x)$ — кривизна, $M(x)$ — изгибающий момент, b — ширина, h — высота, E — модуль Юнга. Здесь

$$M(x) = \begin{cases} Px/2 & \text{при } x \in [0, L/2), \\ P(L-x)/2 & \text{при } x \in [L/2, L]. \end{cases} \tag{16}$$

Параметры: $L = 2$ м — длина балки, $P = 6000$ Н — сила, $E = 200$ ГПа, $b = 0.1$ м, $h = 0.1$. Краевые условия: $u(0) = 0, u(L) = 0$. Для вывода точного решения здесь необходимо проинтегрировать уравнение на отрезках $[0, L/2]$, $[L/2, L]$, а в центре балки потребовать непрерывность решения и его первой производной.

4. Задача о четырехточечном изгибе балки (сила прикладывается в точках $x = a$ и $x = L - a$ центре балки), где $C(x) = 1,\ f(x) = \kappa(x) = \dfrac{12M(x)}{Ebh^3}$. Здесь $\kappa(x)$ — кривизна, $M(x)$ — изгибающий момент, b — ширина, h — высота, E — модуль Юнга. Здесь

$$M(x) = \begin{cases} Px & \text{при } x \in [0, a), \\ Pa & \text{при } x \in [a, L-a), \\ P(L-x) & \text{при } x \in [L-a, L]. \end{cases} \tag{17}$$

Параметры: $L = 2$ м — длина балки, $a = 0.6$, $P = 6000$ Н — сила, $E = 200$ ГПа, $b = 0.1$ м, $h = 0.1$. Краевые условия: $u(0) = 0, u(L) = 0$. Для вывода точного решения здесь необходимо проинтегрировать уравнение на отрезках $[0, a]$, $[a, L-a]$,$[L-a, L]$, а в точках $x = a$, $x = L - a$ потребовать непрерывность решения и его первой производной.

5. Задача об изгибе балки распределенной нагрузкой, где $C(x) = 1,\ f(x) = \kappa(x) = \dfrac{12M(x)}{Ebh^3}$. Здесь $\kappa(x)$ — кривизна, $M(x)$ — изгибающий момент, b — ширина, h —

высота, E — модуль Юнга. Здесь $M(x) = \dfrac{1}{2}x\int\limits_0^L q(s)ds - \int\limits_0^x q(s)(x-s)ds$, где $q(x)$ — распределенная нагрузка. Параметры: $L = 2$ м — длина балки, $a = 0.6$, $q(x) = \sin\dfrac{\pi x}{L}$ Па — нагрузка, $E = 200$ ГПа, $b = 0.1$ м, $h = 0.1$. Краевые условия: $u(0) = 0, u(L) = 0$.

Варианты заданий распределяются в зависимости от номера ФИО в общем списке группы следующим образом: магистранты под номерами 1, 6, 11, 16, ... делают **вариант 1**; под номерами 2, 7, 12, 17, ... — **вариант 2**, под номерами 3, 8, 13, 18, ... — **вариант 3**, под номерами 4, 9, 14, 19, ... — **вариант 4**, под номерами 5, 10, 15, 20, ... — **вариант 5**. Магистранты, которые дополнительно присоединились к группе 20151 делают **вариант 1**, 20152 — **вариант 2**, 20153 — **вариант 3**, 20181 — **вариант 4**. Если вы себя не обнаружили в списке групп, то свяжитесь с преподавателем для получения варианта.

В отчете необходимо предоставить точное решение задачи, вид матрицы жесткости для $N = 5$, таблицу и несколько графиков, на которых изображены точное и приближенное решения. В табл. привести следующие значения

- относительную погрешность приближенного решения в бесконечной норме
$$\|E_r\|_\infty = \frac{\max\limits_{m=1,\ldots,Q} |u_{ex}(x_m) - u_h(x_m)|}{\max\limits_{m=1,\ldots,Q} |u_{ex}(x_m)|}, \tag{18}$$
где Q — количество равномерно распределенных на отрезке $[0, L]$ точек x_m, u_{ex} — точное решение задачи, u_h — приближенное решение. Взять $Q = 1000$.

- Относительную погрешность приближенного решения в L_2 норме
$$\|E_r\|_{L_2} = \sqrt{\frac{\int\limits_0^L (u_{ex}(x) - u_h(x))^2\,dx}{\int\limits_0^L u_{ex}^2(x)\,dx}}. \tag{19}$$

- Порядок сходимости погрешности численного решения, который определяется как $\log_2\dfrac{E_{N/2}}{E_N}$, где E_N — значение погрешности на сетке размера N, $E_{N/2}$ — значение погрешности на сетке размера $N/2$.

- $\mu([K])$ — число обусловленности матрицы жесткости.

При выполнении задания могут быть полезны следующие ссылки:
https://www.youtube.com/watch?v=XutDv1E0AK4,
https://www.youtube.com/watch?v=nGN9uqP67Ak&feature=emb_title.

Таблица 1: Пример таблицы с результатами численных экспериментов

Размер сетки	$\|E_r\|_\infty$	Порядок сходимости	$\|E_r\|_{L_2}$	$\mu([K])$
5				
10				
20				
40				
80				
160				
320				
640				
1280				

Список групп

Группа 20151

1. **Атаманова Александра Сергеевна.**
2. **Воробьева Мария Яковлевна.**
3. **Глотова Яна Сергеевна.**
4. **Деминова Мария Вячеславовна.**
5. **Донгак Вячеслав Даспыл-оолович.**
6. **Ефремов Роман Тимофеевич .**
7. **Загарина Елизавета Андреевна.**
8. **Кекеев Семен Юрьевич.**
9. **Клюева Ольга Владлимировна.**
10. **Койнов Виталий Викторович.**
11. **Колайи Уалид**
12. **Коноплева Виктория Сергеевна.**
13. **Лактюшин Вадим Олегович.**
14. **Мамаев Ильдар Рафаэльевич.**
15. **Матевосян Хачатур Арамаисович.**
16. **Мелиди Георгий Евстафьевич.**
17. **Микоян Мкртич Петросович.**
18. **Мухортов Александр Васильевич.**

19. Назаренко Степан Андреевич.
20. Николова Юлия Андреевна.
21. Носенко Дарья Игоревна.
22. Ратушный Алексей Владленович.
23. Скорик Дмитрий Александрович.
24. Тивари Ришабх.
25. Тюменина Валерия Васильевна.
26. Федотова Яна Валерьевна.
27. Чебодаев Михаил Андреевич.
28. Черкашин Андрей Андреевич.
29. Шашкина Екатерина Павловна.

Группа 20152

1. Агарин Кирилл Игоревич.
2. Александров Евгений Александрович.
3. Батурин Евгений Сергеевич.
4. Беркутова Надежда Алексеевна.
5. Букаев Михаил Сергеевич.
6. Василенко Никита Константинович.
7. Дубовицкий Денис Андреевич.
8. Заварзин Евгений Андреевич.
9. Зикиров Бобур Зубайдулло угли.
10. Канаева Евгения Михайловна.
11. Ковалева Елена Сергеевна.
12. Кривцов Денис Дмитриевичч.
13. Лазовский Кирилл Алексеевич.
14. Макаров Илья Олегович.
15. Мардонов Шахриер Зиёдулло углы.
16. Московкина Алина Андреевна.
17. Одинаев Рашид Рахимович.
18. Протопопов Денис Евгеньевич.

19. Рыбаков Максим Александрович.

20. Рязанцев Глеб Михайлович.

21. Сампилов Алексей Альбертович.

22. Серикова Дарья Витальевна.

23. Сон Ен Гун.

24. Турганбаев Азизбек Женис улы.

25. Ли Цзэкай.

26. Чжан Сюэ.

27. Гао Ди.

Группа 20153

1. Асмикеева Екатерина Геннадьевна.

2. Беляева Евгения Игоревна.

3. Еловиков Виктор Сергеевич.

4. Есипенко Сергей Дмитриевич.

5. Ковылов Геннадий Александрович.

6. Кычкин Сергей Витальевич.

7. Левчугов Иван Сергеевич.

8. Леоненко Артем Русланович.

9. Макаренко Михаил Евгеньевич.

10. Минин Александр Романович.

11. Мухортова Дарья Сергеевна.

12. Нурланов Амир Абайевич.

13. Олещенко Владислав Юрьевич.

14. Пиджакова Екатерина Игоревна.

15. Рыжков Георгий Андреевич.

16. Саламатин Алексей Константинович.

17. Синельникова Нина Сергеевна .

18. Сутормин Иван Александрович.

19. Сычев Алексей Дмитриевич.

20. Трофимова Валерия Вадимовна.

21. Хворова Татьяна Александровна.
22. Черкасов Кирилл Андреевич.
23. Черкашин Виталий Юрьевич.
24. Чернов Иван Александрович.
25. Черных Оксана Ильинична.
26. Шумаев Александр Алексеевич.
27. Эккарт Арина.

Группа 20181

1. Андросов Артем Станиславович.
2. Антонов Георгий Владимирович.
3. Белослудцев Валентин Владиславович.
4. Ботиров Баходир Адамбой угли.
5. Волков Семен Максимович.
6. Герасимов Вадим Валерьевич.
7. Ефентьев Александр Геннадьевич.
8. Кенжаев Бунед Хайтбой угли.
9. Краснова Ирина Андреевна.
10. Кубяк Анна Евгеньевна.
11. Кузнецова Анастасия Юрьевна.
12. Кучимов Фарход Асатиллоевич.
13. Лапковская Анита Александровна.
14. Прохошин Никита Максимович.
15. Свиридова Арина Владимировна.
16. Смирнов Владимир Алексеевич.
17. Тимошенко Сергей Алексеевич.
18. Тихвинский Денис Вячеславович.
19. Усова Анастасия Владимировна.
20. Якушева Анна Олеговна.
21. Чжу Исинь.
22. Гуань Сюэлинь.

Дополнительно

1. **Денисов Вячеслав Сергеевич (номер группы ?).**
2. **Голенко Петр Михайлович (номер группы 19181, ходит с 20181?).**
3. **Антоневич Яна Валерьевна (номер группы 20151?).**
4. **Шевяков Александр Сергеевич (номер группы 20152?).**