Современные методы вычислительной математики и механики

Лектор — д.ф.-м.н., профессор Голушко Сергей Кузьмич

Лабораторная работа № 1. Методы решения переопределенных систем линейных алгебраических уравнений.

Требуется решить переопределенную систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) $Ay = b$, где A — прямоугольная вещественная матрица размера $M \times (N+1)$, y, b — векторы неизвестных и правых частей соответственно. В качестве традиционного приложения[1] переопределенных СЛАУ здесь рассматривается задача аппроксимации экспериментальных данных.

Имеется дискретный набор испытаний $\{x_i, \phi(x_i)\}$, $i = 1,..,M$. Предлагается аппроксимировать экспериментальные данные функцией

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N} c_j P_j(x),$$

где c_j — неизвестные коэффициенты, $P_j(x)$ — базисный элемент пространства полиномов некоторой степени, где $N + 1 < M$. Таким образом, рассматриваемая задача сводится к решению переопределенной СЛАУ $Ay = b$. Здесь компонентами матрицы A являются значения $P_j(x)$ $(j = 0,..,N)$ в конкретной точке x_i $(i = 1,..,M)$. Компонентами вектора y являются неизвестные коэффициенты c_j, где $j = 0,..,N$. Компонентами вектора b являются $\phi(x_i)$, где $i = 1,..,M$. Для ее решения необходимо реализовать метод нормальных уравнений (НУ) и QR-разложение матрицы A. Привести в табл. 1

- величину относительного среднеквадратичного отклонения функции $f(x)$ от исходных данных $\phi(x_i)$

$$\mathrm{SME} = \|f - \phi\|_2 = \frac{1}{\max\limits_{i=1,\dots,M} \phi(x_i)} \sqrt{\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} |f(x_i) - \phi(x_i)|^2};$$

[1] К решению переопределенных СЛАУ в частности сводится решение линейной задачи наименьших квадратов (НК). Метод НК используется в статистическом моделировании при наличии шума, геодезическом моделировании[1], регрессионном анализе, для построения численных методов коллокации и наименьших квадратов, LSFEM (least-squares finite element method) и др.

- число обусловленности прямоугольной матрицы A в спектральной норме $\mu(A) = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}$, где σ_{max} и σ_{min} — максимальное и минимальное сингулярные числа матрицы A соответственно. Например, это можно сделать с помощью системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica следующим образом

```
A = Import[
"C:\\admin\\Documents\\matrix_data.txt", "Table"];
First[N@SingularValueList[A], Tolerance -> 0]/
Last[N@SingularValueList[A], Tolerance -> 0]
```

- число обусловленности квадратной матрицы A^TA.

Пример сохранения элементов матрицы в txt-файле:

```
1.01  −2
3.1  4
5  −0.07
```

В случае применения полиномов Чебышева первого рода $f(x)$ имеет вид:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N} c_j T_j(x)$$

где $T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x,\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$.

В случае применения полиномов Лежандра $f(x)$ имеет вид:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N} c_j P_j(x)$$

где $P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x,\ P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x)$.

Если в качестве базисных элементов взяты мономы, то $f(x)$ имеет вид:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N} c_j x^j.$$

Нормальные уравнения. В этом случае решение СЛАУ сводится к решению

$$A^TAy = A^Tb.$$

Поскольку матрица A^TA нормальной СЛАУ симметрична и, если она имеет полный ранг, положительно определена, то целесообразно применять к ней такие эффективные методы как метод Холесского, сопряжённых градиентов и др. [2].

Таблица 1: Пример таблицы с результатами численных экспериментов для задания № 1

N	$\mu(A^TA)$	SME(НУ)	$\mu(A)$	SME(QR)
1				
2				
3				
...				
10				

Про **QR-разложение** прямоугольной матрицы можно прочитать, например, в книге [1], начиная с 129 страницы. После того, как Вы приведете матрицу к верхнетреугольному виду, для получения решения достаточно применить обратный ход как и в методе Гаусса.

Также необходимо нарисовать график найденной функции $f(x)$ и изобразить на нем дискретный набор экспериментальных данных $\{x_i, \phi(x_i)\}$ для нескольких значений N по своему усмотрению в любом графическом редакторе.

Вычислительную программу необходимо написать для произвольного N.

Прислать отчет проделанной работы в виде pdf- или doc-файла на **mmcm_laboratory_course@mail.ru**. К письму прикрепить текст программного кода, указать версию языка программирования. Защита задания происходит в устной форме преподавателю.

Правило. Следующее задание будет выдано только после того, как будет сдано первое задание. Прием заданий осуществляется только во время семинарских занятий. Приоритет на сдачу заданий имеют те магистранты, которые посещают семинарские занятия. Рекомендованное время выполнения первого задания — 2 недели.

Группа 20151

Нечетная неделя

1. Атаманова Александра Сергеевна. $P_j(x)$ — мономы, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 1.

2. Воробьева Мария Яковлевна. $P_j(x)$ — мономы, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 1.

3. Глотова Яна Сергеевна. $P_j(x)$ — полиномы Чебышева, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 2.

4. Деминова Мария Вячеславовна. $P_j(x)$ — полиномы Лежандра, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 2.

5. Донгак Вячеслав Даспыл-оолович. $P_j(x)$ — мономы, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 2.

6. Ефремов Роман Тимофеевич . $P_j(x)$ — мономы, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 2.

7. Загарина Елизавета Андреевна. $P_j(x)$ — полиномы Чебышева, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 3.

8. Кекеев Семен Юрьевич. $P_j(x)$ — полиномы Лежандра, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 3.

9. Клюева Ольга Владлимировна. $P_j(x)$ — мономы, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 3.

10. Койнов Виталий Викторович. $P_j(x)$ — мономы, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 3.

11. Колайи Уалид $P_j(x)$ — мономы, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 2.

12. Коноплева Виктория Сергеевна. $P_j(x)$ — полиномы Лежандра, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 1.

13. Лактюшин Вадим Олегович. $P_j(x)$ — полиномы Лежандра, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 1.

14. Мамаев Ильдар Рафаэльевич. $P_j(x)$ — мономы, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 3.

15. Матевосян Хачатур Арамаисович. $P_j(x)$ мономы, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 3.

———————————————————————————————————————

Четная неделя

16. Мелиди Георгий Евстафьевич. $P_j(x)$ — полиномы Чебышева, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 2.

17. Микоян Мкртич Петросовичь. $P_j(x)$ — полиномы Чебышева, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 1.

18. Мухортов Александр Васильевич. $P_j(x)$ — полиномы Лежандра, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 1.

19. Назаренко Степан Андреевич. $P_j(x)$ — полиномы Лежандра, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 2.

20. Николова Юлия Андреевна. $P_j(x)$ — полиномы Чебышева, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 2.

21. Носенко Дарья Игоревна. $P_j(x)$ — полиномы Лежандра, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 1.

22. Ратушный Алексей Владленович. $P_j(x)$ — полиномы Лежандра, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 2.

23. Скорик Дмитрий Александрович. $P_j(x)$ — мономы, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 1.

24. Тивари Ришабх. $P_j(x)$ — полиномы Чебышева, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 2.

25. Тюменина Валерия Васильевна. $P_j(x)$ — полиномы Лежандра, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 3.

26. Федотова Яна Валерьевна. $P_j(x)$ — полиномы Чебышева, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 1.

27. Чебодаев Михаил Андреевич. $P_j(x)$ — полиномы Чебышева, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 1.

28. Черкашин Андрей Андреевич. $P_j(x)$ — полиномы Лежандра, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 3.

29. Шашкина Екатерина Павловна. $P_j(x)$ — полиномы Чебышева, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 3.

Группа 20152

Нечетная неделя

1. Агарин Кирилл Игоревич. $P_j(x)$ — полиномы Чебышева, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 1.

2. Александров Евгений Александрович. $P_j(x)$ — мономы, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 1.

3. Батурин Евгений Сергеевич. $P_j(x)$ — полиномы Лежандра, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 1.

4. Беркутова Надежда Алексеевна. $P_j(x)$ — полиномы Лежандра, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 1.

5. Букаев Михаил Сергеевич. $P_j(x)$ — мономы, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 3.

6. Василенко Никита Константинович. $P_j(x)$ — мономы, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 1.

7. Дубовицкий Денис Андреевич. $P_j(x)$ — полиномы Лежандра, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 3.

8. Заварзин Евгений Андреевич. $P_j(x)$ — полиномы Чебышева, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 1.

9. Зикиров Бобур Зубайдулло угли. $P_j(x)$ — полиномы Лежандра, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 1.

10. Канаева Евгения Михайловна. $P_j(x)$ — полиномы Чебышева, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 2.

11. Ковалева Елена Сергеевна. $P_j(x)$ — полиномы Чебышева, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 3.

12. Кривцов Денис Дмитриевичч. $P_j(x)$ — полиномы Чебышева, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 3.

———————————————————————————————

Четная неделя

13. Лазовский Кирилл Алексеевич. $P_j(x)$ — полиномы Лежандра, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 2.

14. Макаров Илья Олегович. $P_j(x)$ — мономы, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 3.

15. Мардонов Шахриер Зиёдулло углы. $P_j(x)$ — мономы, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 1.

16. Московкина Алина Андреевна. $P_j(x)$ — полиномы Чебышева, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 3.

17. Одинаев Рашид Рахимович. $P_j(x)$ — мономы, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 3.

18. Протопопов Денис Евгеньевич. $P_j(x)$ — полиномы Лежандра, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 3.

19. Рыбаков Максим Александрович. $P_j(x)$ — полиномы Чебышева, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 2.

20. Рязанцев Глеб Михайлович. $P_j(x)$ — мономы, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 3.

21. Сампилов Алексей Альбертович. $P_j(x)$ — полиномы Лежандра, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 1.

22. Серикова Дарья Витальевна. $P_j(x)$ — мономы, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 3.

23. Сон Ен Гун. $P_j(x)$ — полиномы Чебышева, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 2.

24. Турганбаев Азизбек Женис улы. $P_j(x)$ — полиномы Чебышева, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 3.

Группа 20153

Нечетная неделя

1. Асмикеева Екатерина Геннадьевна. $P_j(x)$ — полиномы Лежандра, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 1.

2. Беляева Евгения Игоревна. $P_j(x)$ — полиномы Чебышева, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 1.

3. Еловиков Виктор Сергеевич. $P_j(x)$ — полиномы Чебышева, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 2.

4. Есипенко Сергей Дмитриевич. $P_j(x)$ — полиномы Лежандра, етод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 2.

5. Ковылов Геннадий Александрович. $P_j(x)$ — полиномы Лежандра, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 3.

6. Кычкин Сергей Витальевич. $P_j(x)$ — полиномы Лежандра, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 3.

7. Левчугов Иван Сергеевич. $P_j(x)$ — полиномы Чебышева, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 1.

8. Леоненко Артем Русланович. $P_j(x)$ — полиномы Лежандра, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 2.

9. Макаренко Михаил Евгеньевич. $P_j(x)$ — мономы, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 2.

10. Минин Александр Романович. $P_j(x)$ — полиномы Чебышева, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 2.

11. Мухортова Дарья Сергеевна. $P_j(x)$ — мономы, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 2.

12. Нурланов Амир Абайевич. $P_j(x)$ — полиномы Чебышева, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 1.

13. Олещенко Владислав Юрьевич. $P_j(x)$ — полиномы Чебышева, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 1.

14. Пиджакова Екатерина Игоревна. $P_j(x)$ — полиномы Лежандра, етод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 3.

———————————————————————————————————————

Четная неделя

15. Рыжков Георгий Андреевич. $P_j(x)$ — мономы, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 2.

16. Саламатин Алексей Константинович. $P_j(x)$ — мономы, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 3.

17. Синельникова Нина Сергеевна . $P_j(x)$ — полиномы Лежандра, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 1.

18. Сутормин Иван Александрович. $P_j(x)$ — полиномы Чебышева, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 1.

19. Сычев Алексей Дмитриевич. $P_j(x)$ — полиномы Лежандра, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 1.

20. Трофимова Валерия Вадимовна. $P_j(x)$ — полиномы Лежандра, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 2.

21. Хворова Татьяна Александровна. $P_j(x)$ — мономы, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 1.

22. Черкасов Кирилл Андреевич. $P_j(x)$ — полиномы Чебышева, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 2.

23. Черкашин Виталий Юрьевич. $P_j(x)$ — мономы, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 2.

24. Чернов Иван Александрович. $P_j(x)$ — полиномы Лежандра, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 2.

25. Черных Оксана Ильинична. $P_j(x)$ — полиномы Лежандра, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 3.

26. Шумаев Александр Алексеевич. $P_j(x)$ — полиномы Лежандра, етод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 2.

27. Эккарт Арина. $P_j(x)$ — полиномы Чебышева, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 3.

Группа 20181

Нечетная неделя

1. Андросов Артем Станиславович. $P_j(x)$ — мономы, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 2.

2. Антонов Георгий Владимирович. $P_j(x)$ — полиномы Чебышева, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 1.

3. Белослудцев Валентин Владиславович. $P_j(x)$ — полиномы Чебышева, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 2.

4. Ботиров Баходир Адамбой угли. $P_j(x)$ — мономы, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 2.

5. Волков Семен Максимович. $P_j(x)$ — полиномы Лежандра, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 2.

6. Герасимов Вадим Валерьевич. $P_j(x)$ — мономы, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 1.

7. Ефентьев Александр Геннадьевич. $P_j(x)$ — мономы, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 1.

8. Кенжаев Бунед Хайтбой угли. $P_j(x)$ — мономы, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 2.

9. Краснова Ирина Андреевна. $P_j(x)$ — мономы, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 1.

10. Кубяк Анна Евгеньевна. $P_j(x)$ — полиномы Чебышева, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 3.

Четная неделя

11. Кузнецова Анастасия Юрьевна. $P_j(x)$ — полиномы Чебышева, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 3.

12. Кучимов Фарход Асатиллоевич. $P_j(x)$ — мономы, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 1.

13. Лапковская Анита Александровна. $P_j(x)$ — полиномы Лежандра, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 1.

14. Прохошин Никита Максимович. $P_j(x)$ — полиномы Чебышева, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 2.

15. Свиридова Арина Владимировна. $P_j(x)$ — мономы, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 1.

16. Смирнов Владимир Алексеевич. $P_j(x)$ — полиномы Чебышева, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 3.

17. Тимошенко Сергей Алексеевич. $P_j(x)$ — полиномы Чебышева, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 1.

18. Тихвинский Денис Вячеславович. $P_j(x)$ — полиномы Чебышева, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 1.

19. Усова Анастасия Владимировна. $P_j(x)$ — мономы, метод отражений Хаусхолдера, экспериментальные данные № 2.

20. Якушева Анна Олеговна. $P_j(x)$ — полиномы Лежандра, метод вращений Гивенса с выбором главного элемента, экспериментальные данные № 3.

Список литературы

[1] Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. М.: Мир, 2001. 435 с.

[2] Шарый С.П. Курс вычислительных методов. Новосибирск: НГУ, 2020. 640 с. Электронный учебник, доступный на сайте http://www.ict.nsc.ru/matmod/files/textbooks/SharyNuMeth.pdf