Современные методы вычислительной математики

Лектор — д.ф.-м.н., профессор Голушко Сергей Кузьмич

Лабораторная работа № 2. Методы решения бигармонических уравнений.

Рассмотрим краевую задачу Дирихле для бигармонического уравнения на отрезке $[0, l]$

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} = f(x), \tag{1}$$

$$w(0) = g_1(0), \tag{2}$$

$$w(l) = g_1(l), \tag{3}$$

$$w_x(0) = g_2(0), \tag{4}$$

$$w_x(l) = g_2(l), \tag{5}$$

где $w(x)$ — искомая функция, $g_1(x)$ и $g_2(x)$ — заданные функции.

Метод коллокации и наименьших квадратов (КНК). Отрезок $[0, l]$ разбивается на K одинаковых отрезков (ячеек). В каждой ячейке вводится локальная система координат $y = \dfrac{x - x_c}{h}$, где x_c — центр ячейки, $2h$ — ее длина, $y \in [-1, 1]$. Положим далее $v(y) = w(x(y))$. Задача (1)–(5) после замены в локальных переменных примет следующий вид

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h^4}\frac{\partial^4 v}{\partial y^4} = f(x(y)),\\
&v(-1) = g_1(0),\\
&v(1) = g_1(l),\\
&\frac{1}{h} v_y(-1) = g_2(0),\\
&\frac{1}{h} v_y(1) = g_2(l).
\end{aligned} \tag{6}$$

В каждой j-ой ячейке сетки приближенное решение v_{hj} задачи (6) ищем в виде линейной комбинации с неопределенными коэффициентами базисных элементов пространства полиномов некоторой степени относительно одной переменной. Здесь в качестве базисных элементов рассматриваются ортогональные полиномы Чебышева и мономы. В случае применения полиномов Чебышева представление приближенного решения имеет вид

$$v_{hj}(y) = \sum_{i=0}^{N} c_{i,j}\phi_i(y), \quad y \in [-1, 1],$$

где

$$\phi_i(y) = \cos(i \arccos(y)).$$

Можно также полиномы Чебышева определить через рекуррентные соотношения, которые были приведены в первом задании, т.е. $\phi_0(y) = 1,\ \phi_1(y) = y,\ \phi_{n+1}(y) = 2y\phi_n(y) - \phi_{n-1}(y)$.

Если в качестве базисных элементов взяты мономы, то приближенное решение имеет вид

$$v_{hj}(y) = \sum_{i=0}^{N} c_{i,j} y^i.$$

В методе КНК для определения неизвестных $N+1$ коэффициентов $c_{i,j}$ в каждой ячейке выписывается переопределенная "локальная" СЛАУ, состоящая из уравнений коллокации, условий согласования в точках, принадлежащих двум соседним ячейкам, и краевых условий в точках $x = 0, x = l$, если ячейка является граничной. Совокупность всех "локальных" СЛАУ — глобальная СЛАУ, определяющая глобальное решение задачи.

Уравнения коллокации в каждой j-ой ячейке, $j = 1, ..., K$, выписываются в $N+1$ точках коллокации и имеют вид

$$k_c \frac{1}{h^4} \frac{\partial^4 v_{hj}}{\partial y^4} = k_c f(x(y_c)), \tag{7}$$

где (y_c) — точки коллокации, $c = 1, ..., N+1$, k_c — положительный весовой множитель уравнения коллокации.

В каждой j-ой ячейке, $j = 1, ..., K$, в качестве условия согласования решения в общих точках (точки согласования) между соседними ячейками требуется непрерывность линейной комбинации с весами значений искомого решения и его производных

$$k_{m_0} v_{hj} + \frac{k_{m_1}}{h} \frac{\partial v_{hj}}{\partial n_j} = k_{m_0} \hat{v}_h + \frac{k_{m_1}}{h} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial n_j}, \tag{8}$$

$$\frac{k_{m_2}}{h^2} \frac{\partial^2 v_{hj}}{\partial {n_j}^2} + \frac{k_{m_3}}{h^3} \frac{\partial^3 v_{hj}}{\partial {n_j}^3} = \frac{k_{m_2}}{h^2} \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial {n_j}^2} + \frac{k_{m_3}}{h^3} \frac{\partial^3 \hat{v}_h}{\partial {n_j}^3}, \tag{9}$$

где $\overrightarrow{n_j}$ — внешняя единичная нормаль к границе j-ой ячейки, v_{hj} и $\hat{v}_h$ — пределы приближенного решения задачи при стремлении изнутри и извне к границе j-й ячейки соответственно, $k_{m_0}, k_{m_1}, k_{m_2}, k_{m_3}$ — положительные весовые множители условий согласования. Здесь $\dfrac{\partial v_{hj}}{\partial n_j} = n_{1j} \dfrac{\partial v_{hj}}{\partial y}$, где $(n_{1j}, 0)$ — вектор единичной внешней нормали $\overrightarrow{n_j}$ к границе j-ой ячейки.

Здесь надо учесть, что

$$\frac{\partial v_{hj}}{\partial n_j} = \pm \frac{\partial v_{hj}}{\partial y} \text{ в точке } y = \pm 1,$$
$$\frac{\partial^2 v_{hj}}{\partial {n_j}^2} = \frac{\partial^2 v_{hj}}{\partial y^2} \text{ в точке } y = \pm 1,$$
$$\frac{\partial^3 v_{hj}}{\partial {n_j}^3} = \pm \frac{\partial^3 v_{hj}}{\partial y^3} \text{ в точке } y = \pm 1.$$

В точках $x = 0,\ x = l$ выписываются граничные условия, т.е. в концах граничных ячеек

$$\begin{aligned}
&k_{b_0} v_{h1}(-1) = k_{b_0} g_1(0),\\
&k_{b_0} v_{hK}(1) = k_{b_0} g_1(l),\\
&k_{b_1} \frac{1}{h} \frac{\partial v_{h1}}{\partial y}\bigg|_{y=-1} = k_{b_1} g_2(0),\\
&k_{b_1} \frac{1}{h} \frac{\partial v_{hK}}{\partial y}\bigg|_{y=1} = k_{b_1} g_2(l),
\end{aligned} \tag{10}$$

k_{b_0}, k_{b_1} — положительные весовые множители краевых условий Дирихле.

Объединяя уравнения коллокации (7), условия согласования (8), (9) и краевые условия (10) (в случае граничных ячеек), относительно неизвестных коэффициентов $c_{i,j}$ в каждой j-ой ячейке получим переопределенную локальную СЛАУ вида

$$Ax = b, \tag{11}$$

где A — прямоугольная вещественная матрица, x, b векторы неизвестных и правых частей соответственно. В каждой ячейке выписывается $N+5$ уравнений относительно $N+1$ неизвестного коэффициента

- **внутренние ячейки ($j = 2, ..., K-1$):** $N+1$ уравнений коллокации, 4 уравнения согласования (по 2 на каждом крае);

- **левая граничная ячейка ($j = 1$):** $N+1$ уравнений коллокации, 2 уравнения согласования на правом крае, 2 краевых условия на левом крае;

- **правая граничная ячейка ($j = K$):** $N+1$ уравнений коллокации, 2 уравнения согласования на левой крае, 2 краевых условия на правом крае.

Для того чтобы определить, что понимается под решением этой системы, рассмотрим функционал

$$\Phi = (Ax - b, Ax - b). \tag{12}$$

Он представляет собой сумму квадратов невязок всех уравнений в ячейке на приближенном решении задачи.

Рассмотрим два разных способа нахождения приближенного решения.

Способ 1. Метод итераций по подобластям. Здесь для нахождения приближенного решения задачи используется метод итераций по подобластям, в котором каждая ячейка сетки является подобластью. Одна “глобальная итерация” состоит из последовательного решения локальных СЛАУ (11) во всех ячейках области (см. рис. 1). При этом в правой части уравнений (8) и (9) в качестве $\hat{v}_h$ берутся либо значения решения на текущей итерации, если они уже сосчитаны, либо их значения на предыдущей итерации. Решение системы (11) на каждой итерации находится из условия минимума функционала (12) по коэффициентам $c_{i,j}$. При построении решения в каждой ячейке делается QR-декомпозиция матрицы A.

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не выполнится условие

$$\max_{ij} |c_{i,j}^{n+1} - c_{i,j}^{n}| < \epsilon, \tag{13}$$

где $c_{i,j}^{n}$ — коэффициент полинома, аппроксимирующего решение в ячейке с номером j на n-й итерации, $j = 1, ..., N$, величина ϵ — наперед заданная малая константа, называемая псевдопогрешностью решения. Отметим, что в этом случае необходимо задать начальное приближение коэффициентов $c_{i,j}^{0}$.

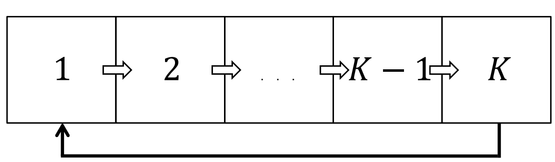

Рис. 1: Схема прохождения по подобластям в 1D.

Способ 2. Решение глобальной СЛАУ прямым методом. Система уравнений, полученная объединением уравнений во всех ячейках расчетной области называется глобальной СЛАУ (см. рис. 2). Эта система имеет вид

$$\widetilde{A}\widetilde{x} = \widetilde{b},$$

где $\widetilde{A}$ — прямоугольная блочно-трехдиагональная матрица размера $K(N+5)\times K(N+1)$, вектор неизвестных $\widetilde{x} = (c_{0,1}, c_{1,1}, ..., c_{N,1}, c_{0,2}, c_{1,2}, ..., c_{N,2}, ..., c_{0,K}, c_{1,K}, ..., c_{N,K})$ размера $K(N+1)$, $\widetilde{b}$ — вектор правой части размера $K(N+5)$. Пусть в каждой ячейке выписываются сначала уравнения коллокации, затем условия согласования (сначала выписанные в точке, принадлежащей j-ой и $j-1$-ой ячейкам, а затем в точке, принадлежащей j-ой и $j+1$-ой ячейкам), а затем краевые условия в случае граничной ячейки ($j = 1$, $j = K$). Рассмотрим структуру матрицы $\widetilde{A}$ с $(j-1)(N+5)+1$ по $j(N+5)$ строки, где $j = 1, ..., K$. В столбцах с номерами $(j-1)(N+1)+1$ по $j(N+1)$ должна быть выписана локальная матрица, которая соответствует ячейке j внутри вышеуказанных строк. Для составления глобальной матрицы $\widetilde{A}$ необходимо в условиях согласования правые части перенести влево с противоположным знаком и расположить значения, стоящие перед неизвестными коэффициенты $(j-1)$-ой $(c_{0,j-1}, c_{1,j-1}, ..., c_{N,j-1})$ и $(j+1)$-ой $(c_{0,j+1}, c_{1,j+1}, ..., c_{N,j+1})$ ячеек в соответствующих местах внутри этих же строк. Значения (с противоположным знаком) перед коэффициентами $(c_{0,j-1}, c_{1,j-1}, ..., c_{N,j-1})$ будут располагаться в строчках с номерами $(j-1)(N+5)+(N+1)+1$ по $(j-1)(N+5)+(N+1)+2$ и в столбцах с номерами $(j-2)(N+1)+1$ по $(j-1)(N+1)$, а значения (с противоположным знаком) перед коэффициентами $(c_{0,j+1}, c_{1,j+1}, ..., c_{N,j+1})$ будут располагаться в строчках с номерами $(j-1)(N+5)+(N+1)+3$ по $(j-1)(N+5)+(N+1)+4$ и в столбцах с номерами $j(N+1)+1$ по $(j+1)(N+1)$. Тогда в столбце правой части $\widetilde{b}$ с $(j-1)(N+5)+1$ по $(j-1)(N+5)+(N+1)$ номер будут стоят значения правых частей уравнений коллокации, выписанных в соответствующих точках коллокации. В столбце правой части $\widetilde{b}$ с $(j-1)(N+5)+(N+1)+1$ по $(j-1)(N+5)+(N+1)+4$ номер для $j = 2, ..., K-1$ и с $(j-1)(N+5)+(N+1)+1$ по $(j-1)(N+5)+(N+1)+2$ номер для $j = 1, j = K$ будут стоят нули, так как был совершен перенес правой части влево в условиях согласования. В столбце правой части $\widetilde{b}$ с $N+4$ по $N+5$ $(j = 1)$ и с $K(N+5)-1$ по $K(N+5)$ $(j = K)$ номер будут выписаны значения правых частей краевых условий.

Полученную переопределенную глобальную СЛАУ необходимо решить прямым методом отражений Хаусхолдера или вращениями Гивенса.

$$
\begin{pmatrix}
0. & 0. & 0. & 0. & 24. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\
0. & 0. & 0. & 0. & 24. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\
0. & 0. & 0. & 0. & 24. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\
0. & 0. & 0. & 0. & 24. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\
0. & 0. & 0. & 0. & 24. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\
1. & 2. & 3. & 4. & 5. & -1. & 0. & 1. & -2. & 3. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\
0. & 0. & 2. & 12. & 36. & 0. & 0. & -2. & 0. & 12. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\
1. & -1. & 1. & -1. & 1. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\
0. & 1. & -2. & 3. & -4. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\
0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 24. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\
0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 24. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\
0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 24. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\
0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 24. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\
0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 24. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\
-1. & 0. & 1. & 2. & 3. & 1. & -2. & 3. & -4. & 5. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\
0. & 0. & -2. & 0. & 12. & 0. & 0. & 2. & -12. & 36. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\
0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 1. & 2. & 3. & 4. & 5. & -1. & 0. & 1. & -2. & 3. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\
0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 2. & 12. & 36. & 0. & 0. & -2. & 0. & 12. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\
0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 24. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\
0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 24. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\
0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 24. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\
0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 24. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\
0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 24. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\
0. & 0. & 0. & 0. & 0. & -1. & 0. & 1. & 2. & 3. & 1. & -2. & 3. & -4. & 5. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\
0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & -2. & 0. & 12. & 0. & 0. & 2. & -12. & 36. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\
0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 1. & 2. & 3. & 4. & 5. & -1. & 0. & 1. & -2. & 3. \\
0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 2. & 12. & 36. & 0. & 0. & -2. & 0. & 12. \\
0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 24. \\
0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 24. \\
0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 24. \\
0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 24. \\
0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 24. \\
0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & -1. & 0. & 1. & 2. & 3. & 1. & -2. & 3. & -4. & 5. \\
0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & -2. & 0. & 12. & 0. & 0. & 2. & -12. & 36. \\
0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 1. & 1. & 1. & 1. & 1. \\
0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 1. & 2. & 3. & 4.
\end{pmatrix}
$$

Пример глобальной матрицы $\widetilde{A}$ на сетке $K = 4$ в случае применения мономов при $N = 4$.

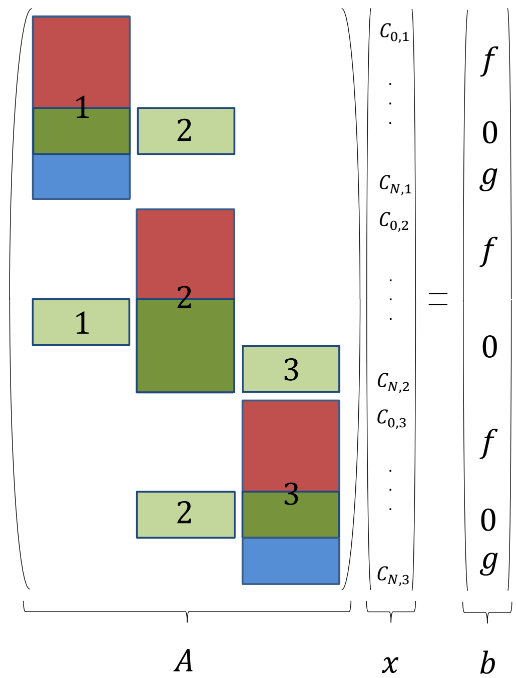

Рис. 2: Пример глобальной матрицы при $K = 3$. Здесь красным цветом обозначены блоки, в которых выписаны уравнения коллокации, темно- и светло-зеленым — соответственно уравнения согласования с коэффициентами в текущей и соседней ячейках, синим — краевые условия (g — вектор правой части краевых условий, которые задаются функциями g_1 и g_2). На незакрашенных частях матрицы стоят нули.

Задание. Каждому магистранту необходимо решить краевую задачу для бигармонического уравнения при следующих параметрах задачи: $l = 1, g_1(0) = g_1(l) = g_2(0) = g_2(l) = 0$, $k_c = h^4, k_{m_0} = 1, k_{m_1} = h, k_{m_2} = h^2, k_{m_3} = h^3, k_{b_0} = 1, k_{b_1} = h$. Тем, кому достанется вариант с методом итераций по подобластям для остановки итерационного процесса, необходимо взять $\epsilon = 10^{-12}$. В качестве начального приближения положить все коэффициенты $c^0_{i,j} = 0.4$ для первой итерации.

Тем, кому достанутся полиномы Чебышева, необходимо расположить точки коллокации в корнях полинома Чебышева $N+1$ степени, так как такой полином на отрезке $[-1, 1]$ имеет как раз $N+1$ корней, которые и необходимо взять в качестве точек коллокации (уже в локальной системе координат)! Обратите внимание, что в этом случае корни полиномов Чебышева сгущаются к концам отрезка, но не совпадают с ± 1 (см. рис. 3). Магистрантам, которые будут работать с мономами, необходимо равномерно внутри (не включая концы отрезка) расположить точки коллокации в каждой ячейке (см. рис. 4).

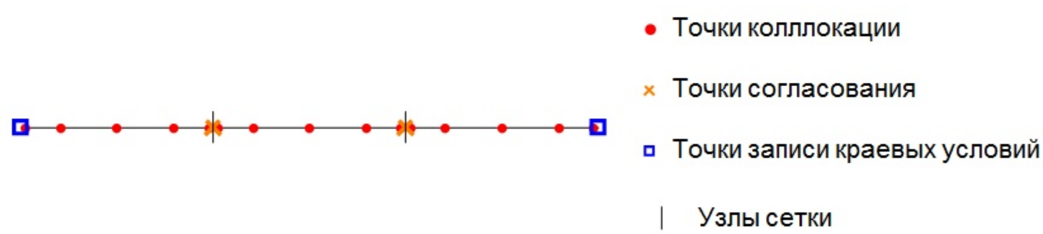

Рис. 3: Схема расположения точек коллокации, согласования и точек записи краевых условий в случае применения полиномов Чебышева при $N = 4$.

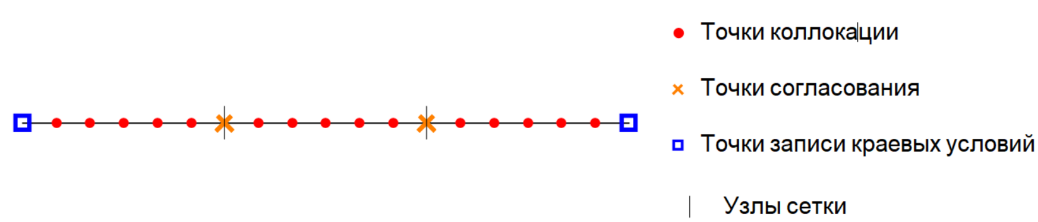

Рис. 4: Схема расположения точек коллокации, согласования и точек записи краевых условий в случае применения мономов при $N = 4$.

Провести расчеты на последовательности сеток $K = 5, 10, 20, 40, 80$. В качестве точного решения задачи рассмотреть $w_{ex}(x) = x^2(1-x)^2 e^x$. Привести следующие значения в табл. 2

- относительную погрешность приближенного решения в бесконечной норме

$$\|E_r\|_\infty = \frac{\max\limits_{j=1,\dots,K}(\max\limits_{m=1,\dots,Q_j}|w_{ex}(x_m) - v_{hj}(y(x_m))|)}{\max\limits_{j=1,\dots,K}(\max\limits_{m=1,\dots,Q_j}|w_{ex}(x_m)|)}, \tag{14}$$

  и абсолютную погрешность приближенного решения в бесконечной норме

$$\|E_a\|_\infty = \max_{j=1,\dots,K}(\max_{m=1,\dots,Q_j}|w_{ex}(x_m) - v_{hj}(y(x_m))|), \tag{15}$$

  где Q_j — количество равномерно распределенных контрольных точек (x_m), взятых в j-ой ячейке в глобальной системе координат для подсчета в них погрешности, w_{ex} — точное решение задачи, v_{hj} — приближенное решение в j-ой ячейке. Взять $Q_j = 100$ в каждой ячейке.

- Порядок сходимости погрешности численного решения, который определяется как $\log_2 \dfrac{E_{N/2}}{E_N}$, где E_N — значение погрешности на сетке размера N, $E_{N/2}$ — значение погрешности на сетке размера $N/2$.

Тем, кому достанется вариант с методом итераций по подобластям

- Количество итераций N_{iter}, которое понадобилось для остановки итерационного процесса.

- $\mu(A_b)$ — число обусловленности матрицы СЛАУ в граничной ячейке.

- $\mu(A_i)$ — число обусловленности матрицы СЛАУ во внутренней ячейке.

Тем, кому достанется вариант с решением глобальной СЛАУ прямым методом

- $\mu(\widetilde{A})$ — число обусловленности глобальной матрицы СЛАУ.

Также необходимо нарисовать график точного решения и приближенного решения в любом графическом редакторе для произвольного размера сетки на Ваше усмотрение. Кроме того, графика помогает локализовать ошибки в Вашей программе.

Прислать на почту **mmcm_laboratory_course@mail.ru** отчет проделанной работы в виде pdf- или doc-файла. К письму прикрепить текст программного кода, указать версию языка программирования. Задание сдается лично преподавателю.

Таблица 1: Пример таблицы с результатами численных экспериментов для задания № 2 в случае реализации метода итераций по подобластям

Размер сетки	$\|E_a\|_\infty$	Порядок сходимости	$\|E_r\|_\infty$	Порядок сходимости	N_{iter}	$\mu(A_b)$	$\mu(A_i)$
5							
10							
20							
40							
80							

Таблица 2: Пример таблицы с результатами численных экспериментов для задания № 2 в случае решения глобальной СЛАУ прямым методом

Размер сетки	$\|E_a\|_\infty$	Порядок сходимости	$\|E_r\|_\infty$	Порядок сходимости	$\mu(\widetilde{A})$
5					
10					
20					
40					
80					

Распределение вариантов происходит по следующему принципу. Магистрантам, которые в первом задании использовали полиномы Чебышева или Лежандра, в этом задании в качестве базисных элементов необходимо взять мономы. Те, кто использовали мономы, в этом задании в качестве базисных элементов берут полиномы Чебышева. Также необходимо реализовать другой алгоритм QR-разложения матрицы по сравнению с первым заданием. Если Ваша фамилия в списке группы стоит на нечетном месте, то необходимо реализовать метод итераций по подобластям, если на четном — решение глобальной СЛАУ прямым методом. Кроме того, если Ваша фамилия в списке группы стоит на нечетном месте, то необходимо взять $N = 4$ (степень полиномиального решения), если на четном, то $N = 5$.

Рекомендация. В рассматриваемой линейной задаче матрицы A локальных внутренних СЛАУ $(2, ..., K - 1)$ таких ячеек совпадают друг с другом и не зависят от номера итерации. От последней зависят только правые части уравнений, полученных из условий согласования. По этой причине целесообразно на первой итерации запомнить верхнетреугольную матрицу R и ортогональную матрицу Q, с помощью которой приведена к верхнетреугольному виду матрица A. Перед решением локальной СЛАУ на каждой итерации достаточно умножить на Q только ее правую часть и, имея уже запомненную матрицу R, с помощью обратного хода Гаусса найти приближенное решение задачи.