

ВМК МГУ

Отчет о выполнении задания по курсу  
«Суперкомпьютерное моделирование и технологии»

Исполнитель:  
студент факультета ВМК МГУ  
кафедры АСВК группы 620  
А.А. Ковальчук

Москва, 2016

## Содержание отчета

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ	3
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ	3
ОПИСАНИЕ ГИБРИДНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ MPI/OPENMP	3
РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ	4
РИСУНКИ И ГРАФИКИ	5
ПРИЛОЖЕНИЕ К ОТЧЕТУ	9

## Математическая постановка задачи

*Вариант 10, набор 3, равномерная сетка, максимум-норма.*

Задача Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольной области:

В прямоугольной области  $\Pi = [-2, 2] \times [-2, 2]$  требуется найти дважды гладкую функцию  $u = u(x, y)$ , удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$-\Delta u = (x^2 + y^2) \sin(xy), \quad -2 < x < 2, -2 < y < 2$$

и дополнительному условию

$$u(x, y) = 1 + \sin(x, y)$$

во всех граничных точках  $(x, y)$  прямоугольника.

Оператор Лапласа  $\Delta$  определен равенством:  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ .

## Численные методы решения

Для аппроксимации дифференциальной задачи используется равномерная прямоугольная сетка с максимум-нормой.

Приближенное решение задачи разностной схемы вычисляется методом сопряженных градиентов. Для остановки итерационного процесса используется  $\varepsilon = 10^{-4}$  в качестве оценки разности итераций.

При распараллеливании программы используется двумерное разбиение области на подобласти прямоугольной формы, в каждой из которых отношение  $\theta$  количества узлов по ширине и длине удовлетворяет неравенствам  $0.5 \leq \theta \leq 2$ .

## Описание гибридной реализации MPI/OpenMP

Для решения задачи с использованием технологии MPI рассматриваемая область разбивается на подобласти (число подобластей равно числу процессов). Для этого используется вызов функции *MPI\_Cart\_create*, которая возвращает новый коммуникатор. Далее, каждый процесс, используя функции *MPI\_Cart\_coords* и *MPI\_Cart\_shift* может получить свое положение в сетке процессов и ранки соседних процессов, а также рассчитать тот диапазон точек матрицы, которые ему необходимо рассчитать.

В процессе работы алгоритма процессам необходимо знать значения из областей, рассчитываемых другими процессами. Для этого процессы обмениваются граничными областями с использованием функции *MPI\_Sendrecv*. Для пересылки строк создается тип данных *MPI\_Type\_contiguous*. Для пересылки столбцов используется тип данных *MPI\_Type\_vector*.

Для подсчета скалярного произведения необходимо вычислять сумму по всей области. Данный шаг состоит из того, что каждый процесс рассчитывает локальную сумму в своей области, а затем используется операция *MPI\_Allreduce* с функцией агрегации *MPI\_SUM* для того, чтобы все процессы получили общую сумму. Аналогичные операции производятся и при расчете величины невязки, однако там используется функция агрегации *MPI\_MAX* (максимум-норма).

С помощью технологии openmp производилось распараллеливание циклов с помощью директив:

`#pragma omp parallel for private(i,j)`

В случае, когда вычисляется сумма используется директива вида:

`#pragma omp parallel for private(i,j) reduction(+:tmp_l)`

При вычислении максимума предполагалось использование директивы

`#pragma omp parallel for private(i,j) reduction(max:tmp_l)` однако данная команда судя по всему поддерживается только более новым стандартом OpenMP, из-за чего на данном шаге она использовалась.

## Результаты расчетов

Ускорение рассчитывается по формуле  $S = \frac{\text{Время решения на } N_p \text{ процессоров}}{\text{Время решения на 1 процессоре}}$ .

**Таблица с результатами расчетов на ПВС IBM Blue Gene/P для MPI программы**

Число процессоров $N_p$	Число точек сетки $N^2$	Время решения Т (секунды)	Ускорение S
1	1000 x 1000	203.556217	-
128	1000 x 1000	3.506901	58.044472
256	1000 x 1000	2.687150	75.751713
512	1000 x 1000	3.188511	63.840525
1	2000 x 2000	1592.240185	-
128	2000 x 2000	18.866071	84.397020
256	2000 x 2000	10.768313	147.863475
512	2000 x 2000	10.263271	155.139641

Погрешность приближенного решения:

- на сетке 1000 x 1000  $\psi = 0.000086799045$
- на сетке 2000 x 2000  $\psi = 0.000099594785$

**Таблица с результатами расчетов на ПВС IBM Blue Gene/P для гибридной программы MPI/OpenMP**

Число процессоров $N_p$	Число точек сетки $N^2$	Время решения Т (секунды)	Ускорение S
1	1000 x 1000	69.479082	-
128	1000 x 1000	2.799476	24.818602
256	1000 x 1000	2.529895	27.463227
512	1000 x 1000	3.389418	20.498823
1	2000 x 2000	544.006508	-
128	2000 x 2000	11.397144	47.731827

256	2000 x 2000	7.348107	74.033558
512	2000 x 2000	8.849079	61.476059

Погрешность приближенного решения:

- на сетке 1000 x 1000  $\psi = 0.000086799045$
- на сетке 2000 x 2000  $\psi = 0.000099594785$

**Таблица с результатами расчетов на ПВС «Ломоносов» для MPI программы**

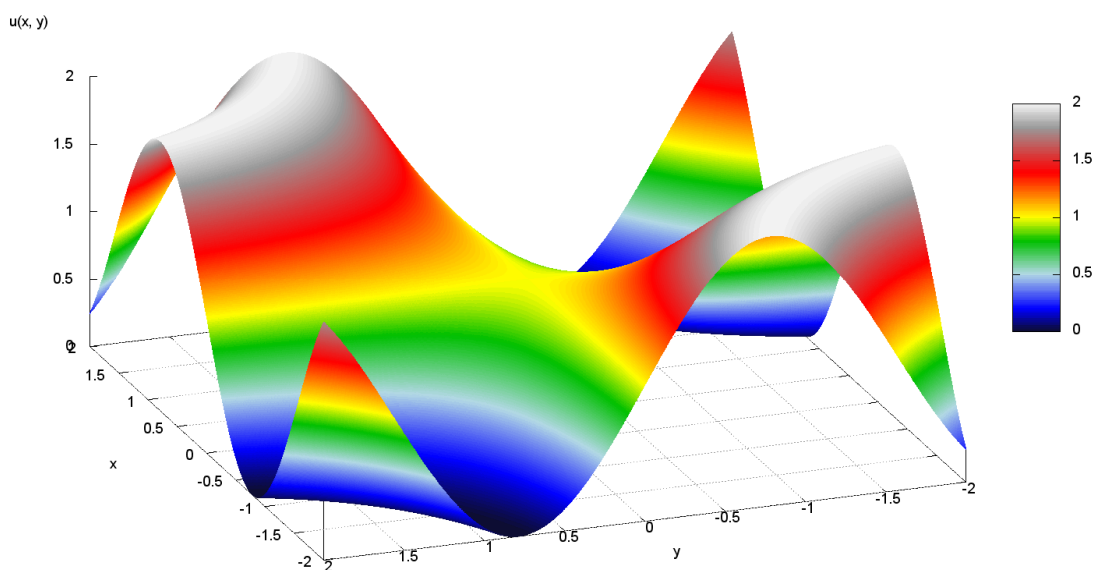
Число процессоров $N_p$	Число точек сетки $N^2$	Время решения T (секунды)	Ускорение S
1	1000 x 1000	203.347533	-
8	1000 x 1000	27.286417	7.452335
16	1000 x 1000	13.033605	15.601787
32	1000 x 1000	6.624935	30.694268
128	1000 x 1000	2.065537	98.447780
1	2000 x 2000	1594.672925	-
8	2000 x 2000	213.617632	7.465080
16	2000 x 2000	107.695442	14.807246
32	2000 x 2000	54.451720	29.285997
128	2000 x 2000	13.621445	117.07076

Погрешность приближенного решения:

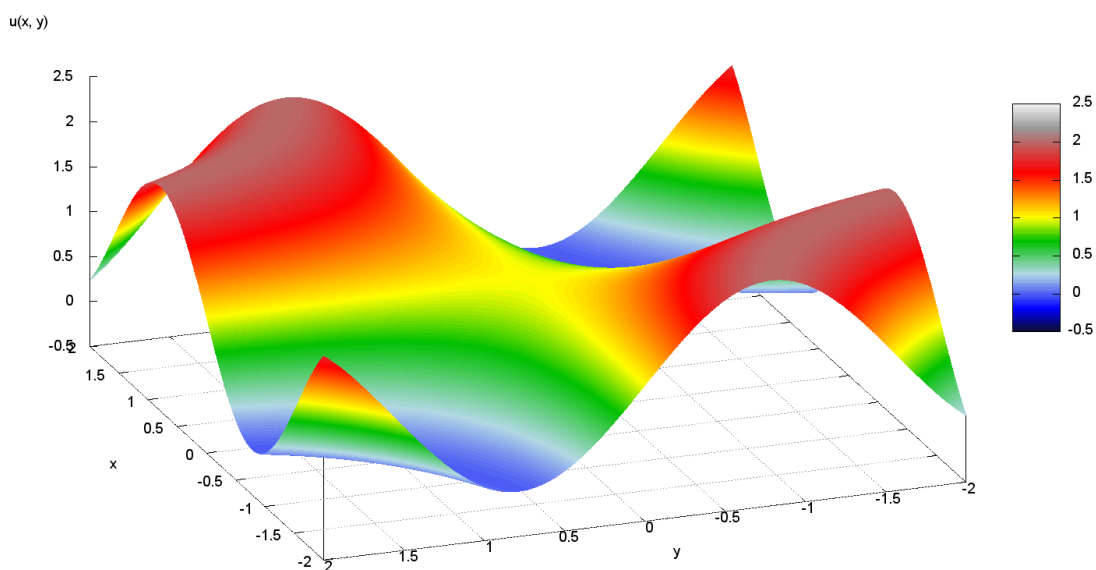
- на сетке 1000 x 1000  $\psi = 0.000086799045$
- на сетке 2000 x 2000  $\psi = 0.000099594785$

Рисунки и графики

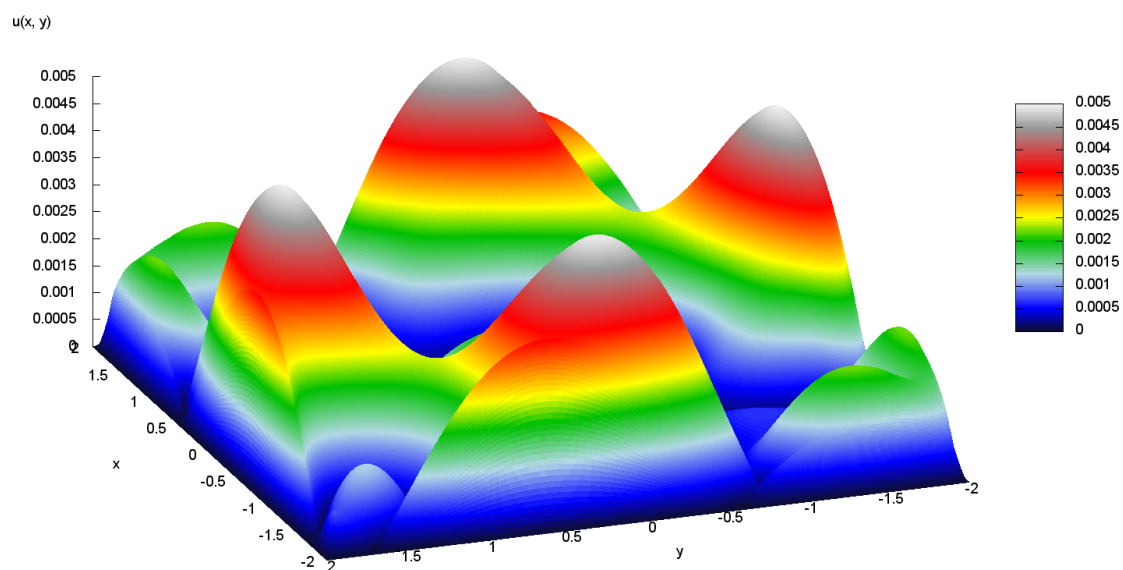
Рисунок точного решения



**Рисунок приближенного решения на сетке 2000x2000 узлов**

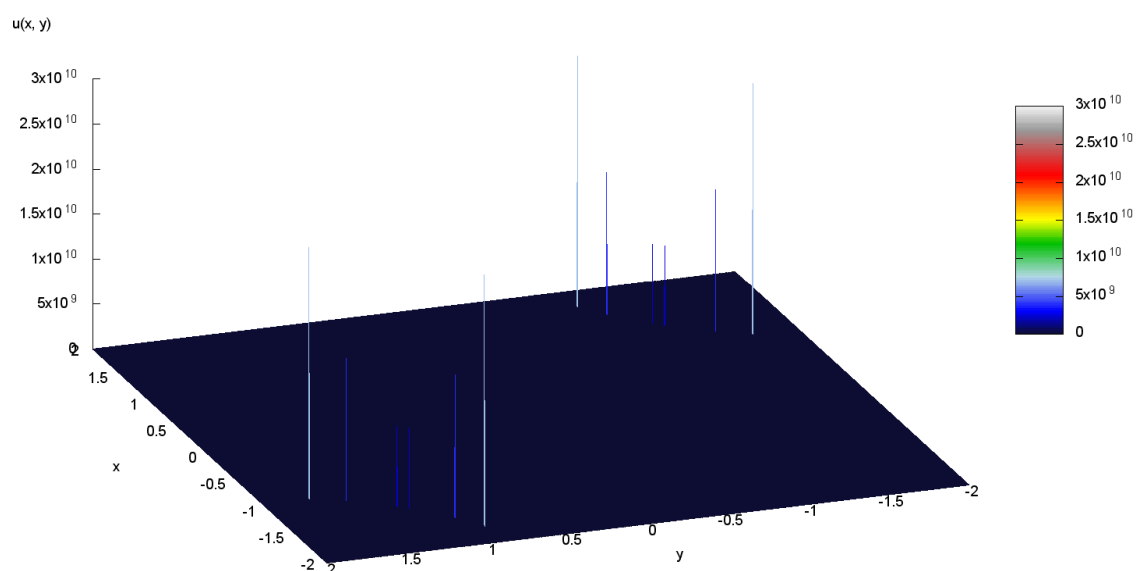


**График абсолютной погрешности в каждой точке сетки 2000x2000 (графики на Blue Gene/P для MPI-программы, на Blue Gene/P для гибридной программы MPI/OpenMP и ПВС «Ломоносов» для MPI программы аналогичны)**



$Max\_value = 0.0049536301472701272$  ,  $Min\_value = 5.3321347337487175e - 11$  .

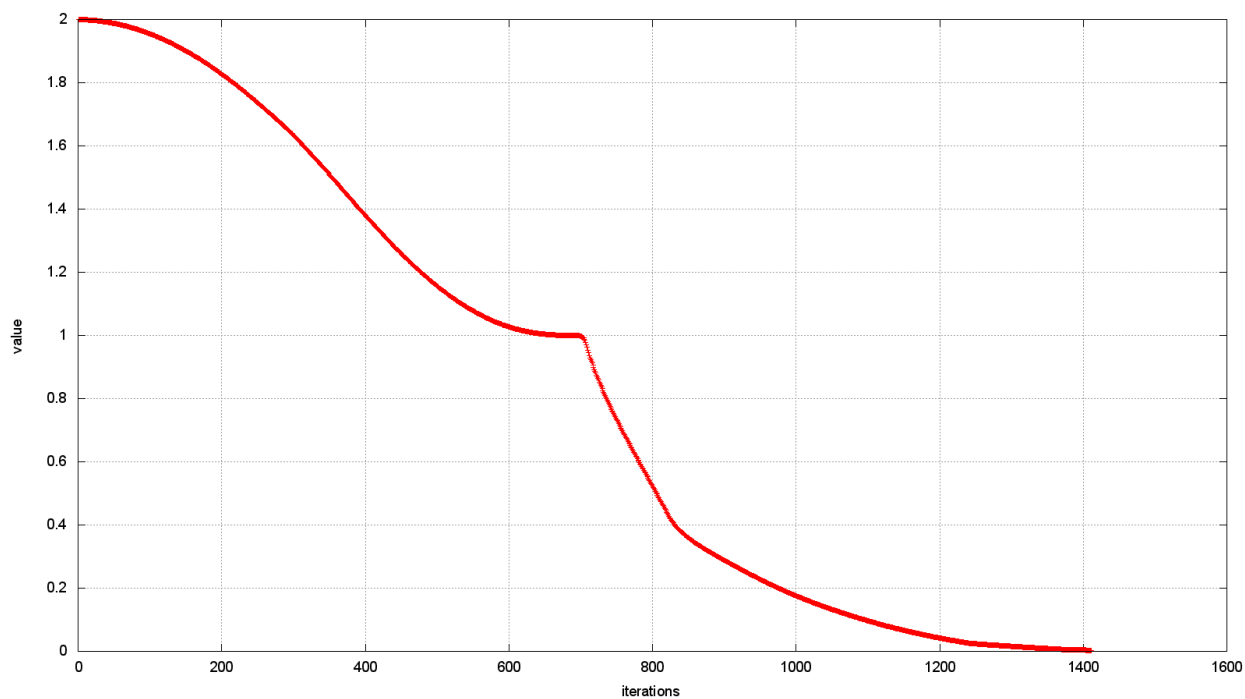
Графики относительной погрешности в каждой точке сетки 2000x2000, за вычетом граничных областей, если функция там принимает значение 0 (графики на Blue Gene/P для MPI-программы, на Blue Gene/P для гибридной программы MPI/OpenMP и ПВС «Ломоносов» для MPI программы аналогичны)



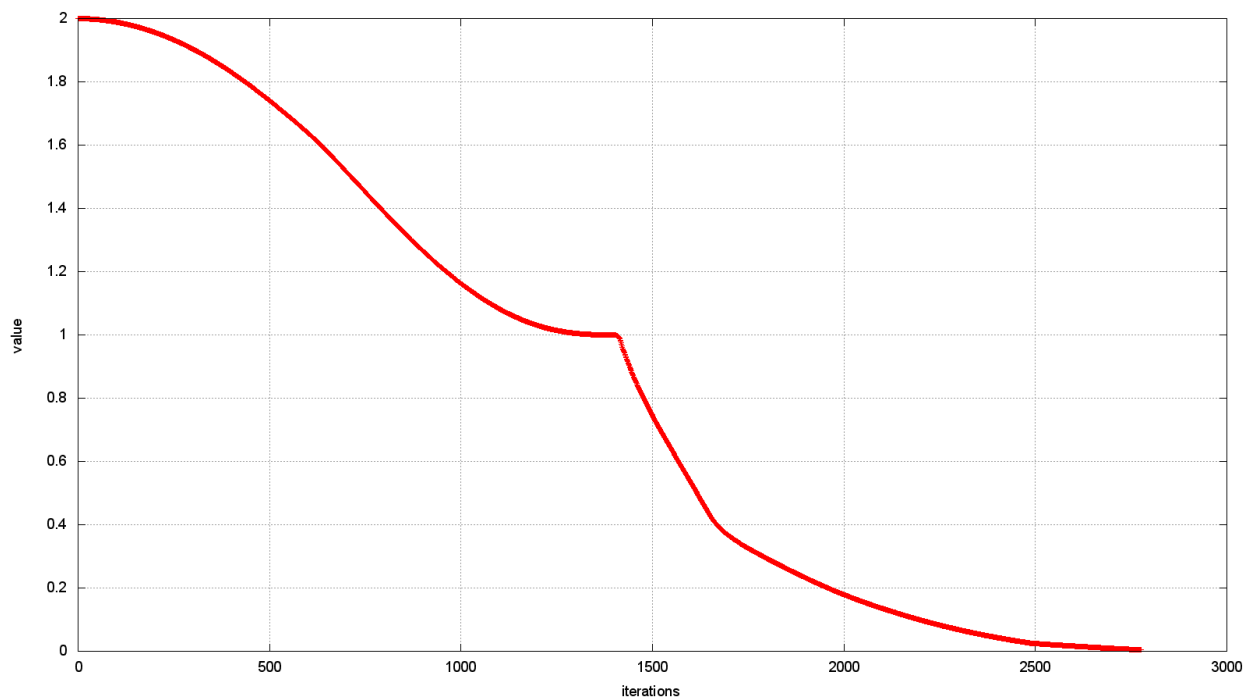
$Max\_value = 27936492110.12513$  ,  $Min\_value = 2.6660673669454375e - 11$  .

Графические изображения скорости сходимости (графики на Blue Gene/P для MPI-программы, на Blue Gene/P для гибридной программы MPI/OpenMP и ПВС «Ломоносов» для MPI программы аналогичны)

**1) Сетка 1000x1000**

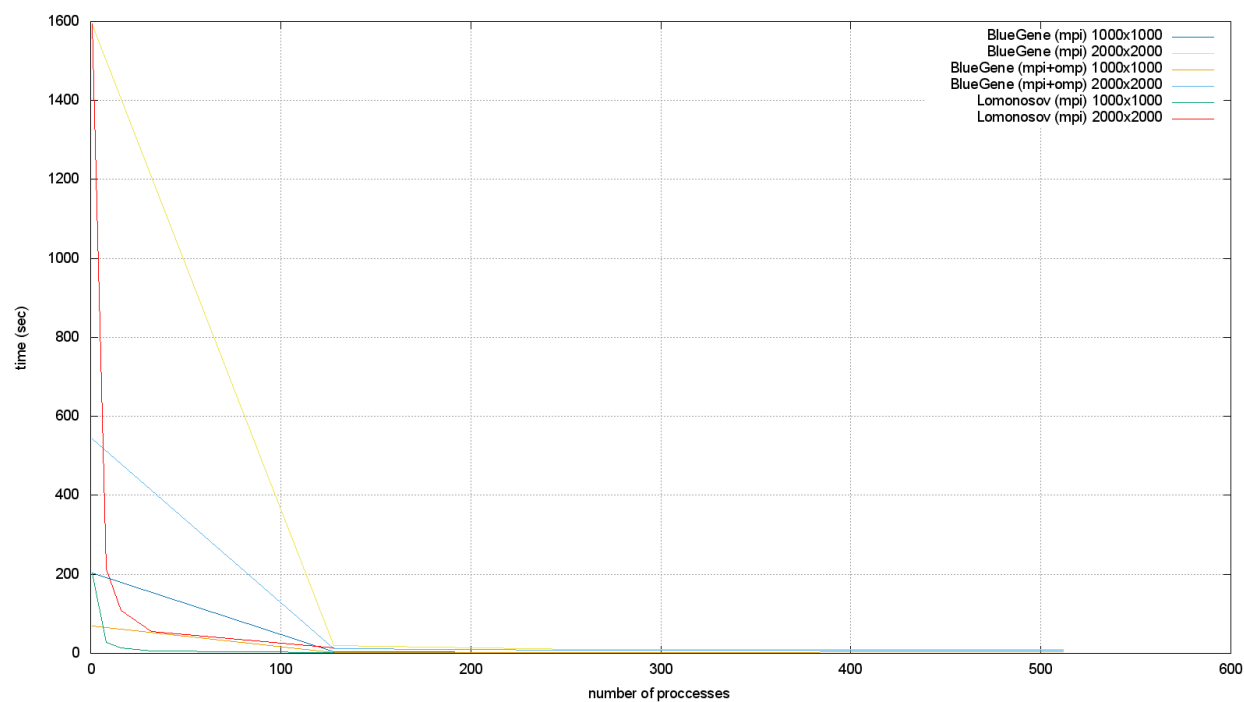


**2) Сетка 2000x2000**



Результаты тестирования на суперкомпьютерах (зависимость времени выполнения от количества процессов)





## Приложение к отчету

К отчету прилагается архив с исходными кодами: MPI – версия и гибридная версия MPI/OpenMP.