Домашнее задание 3. Оценки

Ковалев Д., СКБ171

Примечание Дадим определение выборочного среднего и выборочной дисперсии один раз здесь, а также проверим эти оценки на несмещенность, потому что рассуждения и определения верны для любого распределения и не нуждаются в дублировании. При рассмотрении конкретных реализаций выборок позднее будем проверять только состоятельность.

Выборочное среднее и выборочная дисперсия

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка независимых одинаково распределенных по закону ξ случайных величин, тогда $\hat{\alpha}_1 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ называется выборочным средним, а $\hat{\mu_2} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \hat{\alpha}_1)^2$ — выборочной дисперсией.

Проверим данные оценки на несмещенность.

Посчитаем $\mathbb{E}\hat{\alpha}_1$:

$\mathbb{E}\hat{\alpha}_1 = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbb{E}X_i = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbb{E}X_1 = \frac{1}{n}\cdot n \cdot \mathbb{E}X_1 = \mathbb{E}X_1 = \mathbb{E}\xi$

Итак, $\mathbb{E}\hat{\alpha}_1 = \mathbb{E}\xi$, т.е. **выборочное среднее является несмещенной оценкой для мат. ожидания** ξ

Посчитаем $\mathbb{E}\hat{\mu}_2$. Построим выборку $Y_1, \ldots, Y_n$, где $Y_i = X_i - \mathbb{E}\xi$, $i = \overline{1, n}$. Имеем:

$\mathbb{E}Y_i = \mathbb{E}\left[X_i - \mathbb{E}\xi\right] = \mathbb{E}X_i - \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\xi\right] = \mathbb{E}\xi - \mathbb{E}\xi = 0$

$\mathbb{D}Y_i = \mathbb{D}\left[X_i - \mathbb{E}\xi\right] = \mathbb{D}X_i = \mathbb{D}X_1 = \mathbb{D}\xi$, т.к. $\mathbb{E}\xi$ — константа

С другой стороны, по определению $\mathbb{D}Y_i = \mathbb{E}\left[Y_i^2\right] - \left[\mathbb{E}Y_i\right]^2 = \mathbb{E}\left[Y_i^2\right]$.

Введем обозначения $\overline{X} = \hat{\alpha}_1$, $\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$. Имеем:

$Y_i - \overline{Y} = X_i - \mathbb{E}\xi - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i - \mathbb{E}\xi\right) = X_i - \mathbb{E}\xi - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{} nX_i + \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbb{E}\xi = X_i - \overline{X}$

$\hat{\mu_2} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2 = \frac{1}{n}\left[\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i^2 - 2\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i\overline{Y} + \sum\limits_{i=1}^{n}\overline{Y}^2\right] = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i^2 - 2\overline{Y}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i +$
$+ \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{Y}^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i^2 - \overline{Y}^2$

$\mathbb{E}\hat{\mu_2} = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i^2 - \overline{Y}^2\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{D}Y_i\right] - \mathbb{E}\left[\overline{Y}^2\right] = \mathbb{D}\xi - \mathbb{E}\left[\overline{Y}^2\right]$

X_i, X_j являются независимыми случайными величинами при $i \neq j$ (по условию), значит, и смещенные на константу Y_i, Y_j будут являться независимыми. Тогда $\mathbb{E}\left[Y_iY_j\right] = \mathbb{E}Y_i \cdot \mathbb{E}Y_j = 0 \cdot 0 = 0$. Имеем:

$\mathbb{E}\left[\overline{Y}^2\right] = \frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left[\left(\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i\right)^2\right] = \{\mathbb{E}\left[Y_iY_j\right] = 0, i \neq j\} = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\mathbb{E}\left(Y_i^2\right)\right] = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbb{D}Y_i = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbb{D}\xi =$
$= \frac{1}{n}\mathbb{D}\xi$

Подставляем полученные результаты:

$\mathbb{E}\hat{\mu_2} = \mathbb{D}\xi - \mathbb{E}\left[\overline{Y}^2\right] = \mathbb{D}\xi - \frac{1}{n}\mathbb{D}\xi = \frac{n-1}{n}\mathbb{D}\xi$

Итак, $\mathbb{E}\hat{\mu}_2 = \dfrac{n-1}{n}\mathbb{D}\xi$, т.е. **выборочная дисперсия является смещенной оценкой для дисперсии** ξ

[1]:
```
import os
import numpy as np
import pandas as pd
import tqdm
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy import special, stats, optimize
from scipy.stats import pearsonr, mstats
from bisect import bisect_left, bisect_right
import functools
%matplotlib inline
```

[2]:
```
plt.rcParams.update({'font.size': 16})
sample_count = [5, 10, 100, 10**3, 10**5]
```

[3]:
```
def build_edf(emperical_data, return_y=False):
    length = len(emperical_data)
    if length == 0:
        raise ValueError("Emperical data must have length 1 or more")
    y_values = []
    prev = None
    counter, total = 0, 0
    for entry in emperical_data:
        if prev is None:
            prev = entry
        if entry == prev:
            counter += 1
        else:
            y_values += counter * [total / length]
            prev = entry
            counter = 1
        total += 1
    y_values += counter * [total / length]

    if return_y:
        return y_values

    def edf(x, emperical_data=emperical_data, y_values=y_values):
        if x < emperical_data[0]:
            return 0.0
        return y_values[bisect_right(emperical_data, x) - 1]

    return edf
```

Функция для генерации выборок

[4]:
```
def generate_samples(function, **kwargs):
    ret = {}
    for size in sample_count:
        ret[size] = [function(size=size, **kwargs) for i in range(5)]
    return ret
```

Распределение Ципфа (дискретное)

[5]:
```
# функция вероятности
def zipf_pmf(x, s, N): return (1 / x**s) / np.sum(1 / np.arange(1,
↪N+1)**s)
# функция распределения
def zipf_cdf(x, s, N):
    if isinstance(x, int) or isinstance(x, float):
        return np.sum(zipf_pmf(np.arange(1, np.floor(x)+1), s, N))
    ret = np.zeros(x.shape)
    for i in range(x.shape[0]):
        ret[i] = np.sum(zipf_pmf(np.arange(1, np.floor(x[i])+1), s,
↪N))
    return ret
```

[6]:
```
def zipf_random(s, N, size=1):
    uni_random = stats.uniform.rvs(size=size, )
    ticks = [0]
    ret = []
    for elem in uni_random:
        if elem <= ticks[-1]:
            ret.append(bisect_left(ticks, elem))
        else:
            cur = len(ticks)
            while ticks[-1] < elem:
                ticks.append(ticks[-1] + zipf_pmf(cur, s, N))
                cur += 1
            ret.append(cur - 1)
    return ret
```

Выберем для моделирования параметры $s = 1.5$ и $N = 10$

[7]:
```
zipf_s = 1.5
zipf_N = 15
zipf_samples = generate_samples(zipf_random, s=zipf_s, N=zipf_N)
```

3.1 Нахождение выборочного среднего и выборочной дисперсии

Выборочное среднее

[8]:
```
zipf_sample_mean = dict([(cnt, [np.mean(samples) for samples in
↪samples_list]) for cnt, samples_list in zipf_samples.items()])
for cnt, sample_mean in zipf_sample_mean.items():
    print("{:50}".format("Выборочное среднее для выборок объемом {}:
↪".format(cnt)), end="")
    print(*["{:6.3f}".format(value) for value in sample_mean])
```

```
Выб. ср-е для выборок объемом 5:       4.200  2.000  2.400  2.400  2.200
Выб. ср-е для выборок объемом 10:      1.800  2.700  2.800  3.900  3.400
Выб. ср-е для выборок объемом 100:     2.750  3.310  3.340  2.700  2.960
Выб. ср-е для выборок объемом 1000:    3.044  2.894  3.028  2.975  3.011
Выб. ср-е для выборок объемом 100000: 3.042  3.050  3.037  3.041  3.050
```

Истинное значение Из домашней работы 1:

$$\mathbb{E}\xi = \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} k^{1-s}}{\sum\limits_{n=1}^{N} n^{-s}} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{15} k^{-0.5}}{\sum\limits_{n=1}^{15} n^{-1.5}}$$

[9]:
```
def zipf_expected(s, N):
    return np.sum(np.arange(1, N+1)**(1-s)) / np.sum(np.arange(1,
↪N+1) ** (-s))
zipf_theoretical_expected = zipf_expected(zipf_s, zipf_N)
zipf_theoretical_expected
```

[9]:
```
3.0478379162273366
```

Итак, $\mathbb{E}\xi \approx 3.048$. Согласно результатам вычислений, с увеличением объема выборки выборочное среднее приближается к истинному значению мат. ожидания, значит, данная оценка является состоятельной

Выборочная дисперсия

[10]:
```
zipf_sample_variance = dict([(cnt, [np.var(samples) for samples in
↪samples_list]) for cnt, samples_list in zipf_samples.items()])
for cnt, samples_variance in zipf_sample_variance.items():
    print("{:50}".format("Выборочная дисперсия для выборок объемом {}:
↪ ".format(cnt)), end="")
    print(*["{:6.3f}".format(value) for value in samples_variance])
```

```
Выб. д-я для выборок объемом 5:       20.160  0.800  7.840  5.440  3.760
Выб. д-я для выборок объемом 10:       1.960  5.610 10.760 10.490 12.240
Выб. д-я для выборок объемом 100:      9.807 11.314 11.984  5.750  7.418
Выб. д-я для выборок объемом 1000:     9.838  8.753  9.531  9.958  9.507
Выб. д-я для выборок объемом 100000:   9.915  9.945  9.891  9.882  9.917
```

Истинное значение Из домашней работы 1:

$$\mathbb{D}\xi = \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} k^{2-s}}{\sum\limits_{n=1}^{N} n^{-s}} - \left[\frac{\sum\limits_{k=1}^{N} k^{1-s}}{\sum\limits_{n=1}^{N} n^{-s}}\right]^2 = \frac{\sum\limits_{k=1}^{15} k^{0.5}}{\sum\limits_{n=1}^{15} n^{-1.5}} - \left[\frac{\sum\limits_{k=1}^{15} k^{-0.5}}{\sum\limits_{n=1}^{15} n^{-1.5}}\right]^2$$

[11]:
```
def zipf_variance(s, N):
    return np.sum(np.arange(1, N + 1) ** (2 - s)) / np.sum(np.
↪arange(1, N + 1) ** (-s)) - zipf_theoretical_expected ** 2
zipf_theoretical_variance = zipf_variance(zipf_s, zipf_N)
zipf_theoretical_variance
```

[11]:
```
9.941063756209688
```

Итак, $\mathbb{D}\xi \approx 9.941$. Согласно результатам вычислений, с увеличением объема выборки выборочная дисперсия приближается к истинному значению дисперсии, значит, данная оценка является состоятельной

3.2 Нахождение параметров распределений событий

Зафиксируем параметр N и будем оценивать параметр s. Параметр N, как правило, известен, поэтому поиск оценки для него ценности не представляет

Метод моментов Обозначим выборочное среднее за $\overline{X}$, тогда:

$$\mathbb{E}\xi = \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} k^{1-s}}{\sum\limits_{n=1}^{N} n^{-s}} = \overline{X}.$$

Решить полученное уравнение относительно s аналитически не представляется возможным (так, в статье на эту тему нет информации о подобных способах [1]), поэтому придется решать аналитически. С увеличением s мат. ожидание убывает, поэтому можно использовать бинарный поиск.

[12]:
```
for cnt, sample_mean in zipf_sample_mean.items():
    print("{:50}".format("Оценка параметра s для выборок объемом {}:
↪".format(cnt)), end="")
    print(*["{:6.3f}".format(optimize.bisect(lambda s:
↪zipf_expected(s, zipf_N) - value, 0, 5)) for value in sample_mean])
```

```
Оц. п. s для выборок объемом 5:      1.097  2.074  1.810  1.810  1.932
Оц. п. s для выборок объемом 10:     2.248  1.654  1.607  1.191  1.363
Оц. п. s для выборок объемом 100:    1.630  1.397  1.386  1.654  1.537
Оц. п. s для выборок объемом 1000:   1.502  1.565  1.508  1.530  1.515
Оц. п. s для выборок объемом 100000: 1.503  1.499  1.505  1.503  1.499
```

С увеличением объема выборки оценка параметра s, полученная методом моментов, приближается к истинному значению параметра 1.5, значит, данная оценка является состоятельной. Проверить другие свойства (несмещенность, эффективность, оптимальность) не представляется возможным, т.к. нет аналитического решения.

Метод максимального правдоподобия Пусть выборка имеет объем M, тогда:

$$L_s(X) = \prod_{i=1}^{M} \frac{X_i^{-s}}{\sum\limits_{k=1}^{N} k^{-s}}$$

Логарифм не меняет характер монотонности:

$$\ln L_s(X) = \sum_{i=1}^{M} \ln \frac{X_i^{-s}}{\sum\limits_{k=1}^{N} k^{-s}} = \sum_{i=1}^{M} \left[-s \ln x_i - \ln \sum_{k=1}^{N} k^{-s} \right]$$

Равенство производной нулю есть необходимое условие максимума:

$$(\ln L_s(X))' = \sum_{i=1}^{M} \left[\frac{\sum\limits_{k=1}^{N} k^{-s} \ln k}{\sum\limits_{k=1}^{N} k^{-s}} - \ln x_i \right] = 0$$

Из-за невозможности преобразования сумм найти оценку аналитически нельзя.

[13]:
```python
# вклад выборки
def zipf_score(s, N, sample):
    ticks = np.arange(1, N+1)
    powered = ticks**(-s)
    return np.sum(np.sum(powered * np.log(ticks)) / np.sum(powered) -
 ↪np.log(sample))
```

[14]:
```python
for cnt, sample_list in zipf_samples.items():
    print("{:50}".format("Оценка параметра s для выборок объемом {}:
 ↪".format(cnt)), end="")
    print(*["{:6.3f}".format(optimize.bisect(lambda s: zipf_score(s,
 ↪zipf_N, sample), 0, 5)) for sample in sample_list])
```

```
Оц. п. s для выборок объемом 5:      1.193  1.732  2.056  1.823  1.882
Оц. п. s для выборок объемом 10:     2.172  1.590  1.703  1.136  1.347
Оц. п. s для выборок объемом 100:    1.670  1.408  1.456  1.536  1.472
Оц. п. s для выборок объемом 1000:   1.498  1.559  1.494  1.547  1.503
Оц. п. s для выборок объемом 100000: 1.503  1.500  1.504  1.502  1.498
```

С увеличением объема выборки оценка параметра s, полученная методом максимального правдоподобия, приближается к истинному значению параметра 1.5, значит, данная оценка является состоятельной. Проверить другие свойства (несмещенность, эффективность, оптимальность) не представляется возможным, т.к. нет аналитического решения.

3.3 Работа с данными

В домашней работе 1 в качестве интерпретации была выбрана частота слов с тем или иным рангом в романе "Война и мир" (на английском языке).

[15]:
```python
with open('warandpeace.txt', 'r') as book:
    data = book.read()
words = data.lower().split()
word_counts = dict()
for word in words:
```

```
    if word in word_counts:
        word_counts[word] += 1
    else:
        word_counts[word] = 1
word_counts = np.array(list(word_counts.values()))
# freqs[i] - количество слов с рангом (i + 1)
freqs = np.array([0] * max(word_counts))
for word_count in word_counts:
    freqs[word_count - 1] += 1
freqs = freqs / np.sum(freqs)
```

Значение выборочного среднего:

[16]:
```
word_counts_mean = np.mean(word_counts)
word_counts_mean
```

[16]: 12.964005394768844

Значение выборочной дисперсии:

[17]:
```
word_counts_var = np.var(word_counts)
word_counts_var
```

[17]: 65884.45889585848

Оценка параметра s, найденная методом моментов:

[18]:
```
zipf_s_moments = optimize.bisect(lambda s: zipf_expected(s,
 ↪len(freqs)) - word_counts_mean, 0, 5)
zipf_s_moments
```

[18]: 1.866980067560462

Оценка параметра s, найденная методом максимального правдоподобия:

[19]:
```
zipf_s_likelihood = optimize.bisect(lambda s: zipf_score(s,
 ↪len(freqs), word_counts), 0, 5)
zipf_s_likelihood
```

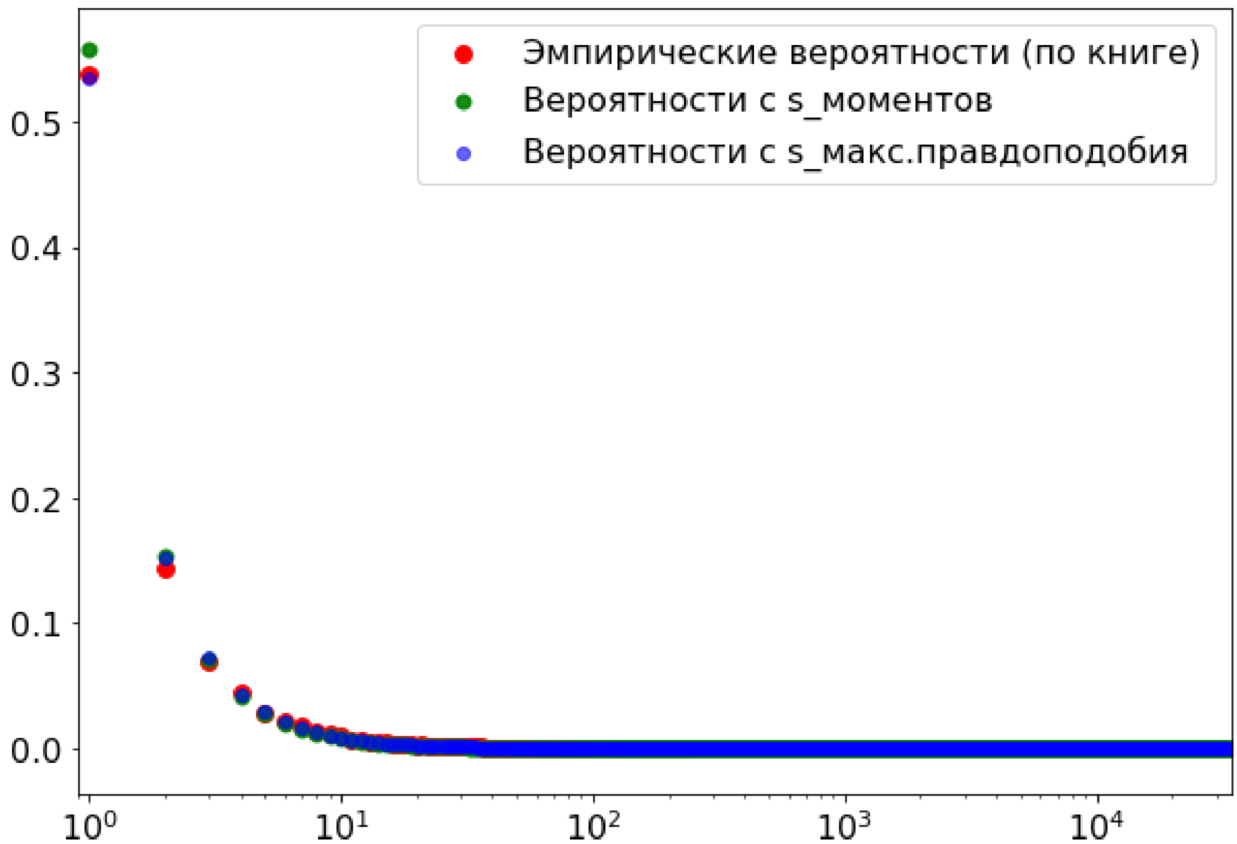
[19]: 1.8088726311555092

Сравним на графике эмпирические (полученные по данным из книги) и теоретические (построенные с параметром s равным оценкам, найденным двумя методами) вероятности.

[20]:
```
def zipf_plot(end=None, log_ax=True):
    _, ax = plt.subplots(figsize=(10, 7))
    if log_ax:
        ax.set_xscale("log")
    y_freqs = (freqs if end is None else freqs[:end])
    ax.set_xlim(0.9, len(y_freqs) + 0.1)
    x_values = np.arange(1, len(y_freqs) + 1)
    plt.scatter(x_values, y_freqs, linewidth=3, color='r', alpha=1,
 ↪label="Эмпирические вероятности (по книге)")
```

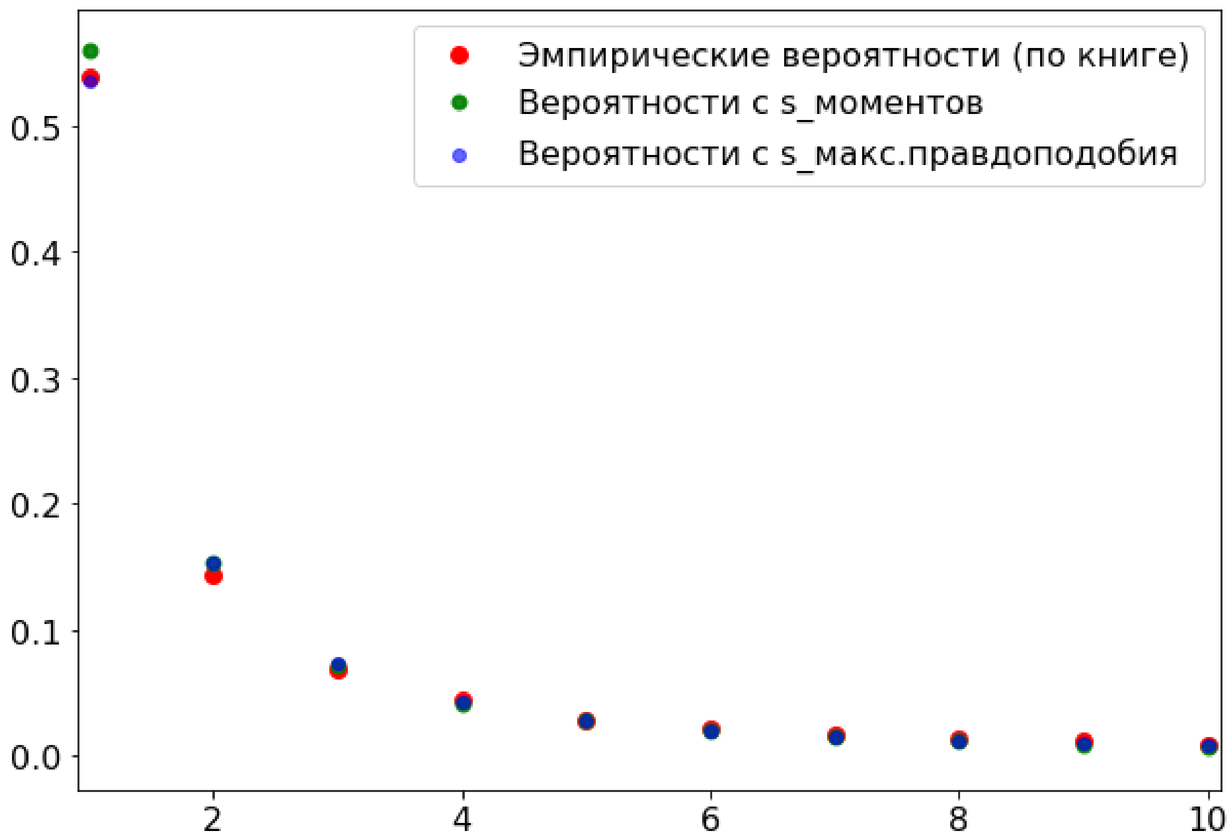
```
    plt.scatter(x_values, zipf_pmf(x_values, zipf_s_moments,
↪len(freqs)), linewidth=2, color='g', alpha=0.9, label="Вероятности с
↪s_моментов")
    plt.scatter(x_values, zipf_pmf(x_values, zipf_s_likelihood,
↪len(freqs)), linewidth=1, color='b', alpha=0.6, label="Вероятности с
↪s_макс.правдоподобия")
    plt.legend()
    plt.show()
```

[21]:
```
zipf_plot()
```



Для наглядности представим на отдельном графике вероятности для первых десяти точек

[22]:
```
zipf_plot(end=10, log_ax=False)
```



Видно, что теоретические значения вероятностей, посчитанные с использованием оценок, полученных обоими методами, близки к эмпирическим.

Бета-распределение (абсолютно непрерывное)

[23]:
```
# плотность вероятности
def beta_pdf(x, alpha, beta): return stats.beta.pdf(x, alpha, beta)
# функция распределения
def beta_cdf(x, alpha, beta): return special.betainc(alpha, beta, x)
```

[24]:
```
def beta_random(a, b, size=1):
    ret = []
    l = a
    k = a + b - 1
    for _ in range(size):
        uni_set = stats.uniform.rvs(size=k)
        uni_set.sort()
        ret.append(uni_set[l-1])
    return np.array(ret)
```

Выберем для моделирования параметры $a = 5$ и $b = 2$

[25]:
```
beta_a = 5
beta_b = 2
beta_samples = generate_samples(beta_random, a=beta_a, b=beta_b)
```

3.1 Нахождение выборочного среднего и выборочной дисперсии

Выборочное среднее

[26]:
```
beta_sample_mean = dict([(cnt, [np.mean(samples) for samples in
 ↪samples_list]) for cnt, samples_list in beta_samples.items()])
for cnt, sample_mean in beta_sample_mean.items():
    print("{:50}".format("Выборочное среднее для выборок объемом {}:
 ↪".format(cnt)), end="")
    print(*["{:6.3f}".format(value) for value in sample_mean])
```

```
Выб. ср-е для выборок объемом 5:      0.708  0.722  0.781  0.615  0.704
Выб. ср-е для выборок объемом 10:     0.730  0.722  0.691  0.711  0.764
Выб. ср-е для выборок объемом 100:    0.714  0.718  0.702  0.697  0.707
Выб. ср-е для выборок объемом 1000:   0.716  0.717  0.708  0.720  0.714
Выб. ср-е для выборок объемом 100000: 0.714  0.714  0.714  0.714  0.714
```

Истинное значение Из домашней работы 1:
$$\mathbb{E}\xi = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

[27]:
```
def beta_expected(a, b): return a / (a + b)
beta_theoretical_expected = beta_expected(beta_a, beta_b)
beta_theoretical_expected
```

[27]:
```
0.7142857142857143
```

Итак, $\mathbb{E}\xi \approx 0.714$. Согласно результатам вычислений, с увеличением объема выборки выборочное среднее приближается к истинному значению мат. ожидания, значит, данная оценка является состоятельной

Выборочная дисперсия

[28]:
```
beta_sample_variance = dict([(cnt, [np.var(samples) for samples in
 ↪samples_list]) for cnt, samples_list in beta_samples.items()])
for cnt, samples_variance in beta_sample_variance.items():
    print("{:50}".format("Выборочная дисперсия для выборок объемом {}:
 ↪ ".format(cnt)), end="")
    print(*["{:7.4f}".format(value) for value in samples_variance])
```

```
Выб. д-я для выборок объемом 5:      0.0219 0.0569 0.0057 0.0582 0.0203
Выб. д-я для выборок объемом 10:     0.0311 0.0183 0.0113 0.0112 0.0235
Выб. д-я для выборок объемом 100:    0.0240 0.0225 0.0274 0.0254 0.0232
Выб. д-я для выборок объемом 1000:   0.0255 0.0241 0.0268 0.0244 0.0271
Выб. д-я для выборок объемом 100000: 0.0255 0.0256 0.0256 0.0257 0.0255
```

Истинное значение Из домашней работы 1:
$\mathbb{D}\xi = \dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$

[29]:
```
def beta_variance(a, b): return (a * b) / ((a + b)**2 * (a + b + 1))
beta_theoretical_variance = beta_variance(beta_a, beta_b)
beta_theoretical_variance
```

[29]: 0.025510204081632654

Итак, $\mathbb{D}\xi \approx 0.0255$. Согласно результатам вычислений, с увеличением объема выборки выборочная дисперсия приближается к истинному значению дисперсии, значит, данная оценка является состоятельной

3.2 Нахождение параметров распределений событий

Метод моментов Зафиксируем параметр α и будем оценивать параметр β. Обозначим выборочное среднее за $\overline{X}$, тогда:
$\mathbb{E}\xi = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} = \overline{X}$.
$\hat{\beta} = \dfrac{\alpha\left(1-\overline{X}\right)}{\overline{X}}$

[30]:
```
for cnt, sample_mean in beta_sample_mean.items():
    print("{:50}".format("Оценка параметра beta для выборок объемом
↪{}: ".format(cnt)), end="")
    print(*["{:6.3f}".format(beta_a * (1 - value) / value) for value
↪in sample_mean])
```

```
Оц. п. b для выборок объемом 5:      2.066  1.929  1.401  3.136  2.102
Оц. п. b для выборок объемом 10:     1.849  1.927  2.241  2.036  1.544
Оц. п. b для выборок объемом 100:    2.003  1.964  2.127  2.169  2.077
Оц. п. b для выборок объемом 1000:   1.986  1.971  2.059  1.943  2.000
Оц. п. b для выборок объемом 100000: 2.003  2.004  2.002  1.999  2.004
```

С увеличением объема выборки оценка параметра β, полученная методом моментов, приближается к истинному значению параметра 2, значит, данная оценка является состоятельной.
Проверим несмещенность этой оценки:

$$\mathbb{E}\hat{\beta} = \alpha\mathbb{E}\left[\frac{1-\overline{X}}{\overline{X}}\right] = \alpha\mathbb{E}\left[\frac{1-\frac{1}{n}\eta}{\frac{1}{n}\eta}\right]$$

Здесь η - случайная величина, распределенная как сумма n случайных величин, имеющих бета-распределение (n - объем выборки). Согласно [2], найти это распределение можно только численно, поэтому аналитически проверить несмещенность не получится. Аналогично, не представляется возможным проверка эффективности и оптимальности.
Фиксация одного из параметров не помогла проверить свойства оценки, поэтому найдем методом моментов оценки обоих параметров (в бета-распределении обычно неизвестны оба). Пусть $\overline{V}$ - выборочная дисперсия, тогда:

$$\begin{cases} \overline{X} = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} \\ \overline{V} = \dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \dfrac{\alpha\left(1-\overline{X}\right)}{\overline{X}} \\ \overline{V} = \dfrac{\alpha^2\left(1-\overline{X}\right)}{\overline{X}\left(\alpha+\dfrac{\alpha\left(1-\overline{X}\right)}{\overline{X}}\right)^2\left(\alpha+\dfrac{\alpha\left(1-\overline{X}\right)}{\overline{X}}+1\right)} \end{cases}$$

Рассмотримотдельно второе уравнение:

$$\alpha^2\left(1-\overline{X}\right) = \overline{V}\cdot\frac{\alpha^2\overline{X}^2+2\alpha^2\overline{X}\left(1-\overline{X}\right)+\alpha^2\left(1-\overline{X}\right)^2}{\overline{X}^2}\cdot\frac{\alpha\overline{X}+\alpha\left(1-\overline{X}\right)+\overline{X}}{\overline{X}}$$

$$\alpha^2\left(1-\overline{X}\right) = \overline{V}\cdot\frac{\alpha^2}{\overline{X}^2}\left(\alpha+\overline{X}\right)$$

$$\hat{\alpha} = \overline{X}\left[\frac{\overline{X}\left(1-\overline{X}\right)}{\overline{V}}-1\right]$$

Подставляя в первое уравнение, получаем:

$$\hat{\beta} = \left(1-\overline{X}\right)\left[\frac{\overline{X}\left(1-\overline{X}\right)}{\overline{V}}-1\right]$$

[31]:
```
for cnt, sample_mean in beta_sample_mean.items():
    def alpha_est(mean, var): return mean * (mean * (1 - mean) / var -
 1)
    def beta_est(mean, var): return (1 - mean) * (mean * (1 - mean) /
↪var - 1)
    print("{:55}".format("Оценка параметра alpha для выборок объемом
↪{}: ".format(cnt)), end="")
    print(*["{:6.3f}".format(alpha_est(mean_value, var_value)) for
↪mean_value, var_value in zip(sample_mean,
↪beta_sample_variance[cnt])])
    print("{:55}".format("Оценка параметра beta для выборок объемом
↪{}: ".format(cnt)), end="")
    print(*["{:6.3f}".format(beta_est(mean_value, var_value)) for
↪mean_value, var_value in zip(sample_mean,
↪beta_sample_variance[cnt])])
```

```
Оц. п. a для выборок объемом 5:      5.964  1.825 22.755  1.888  6.527
Оц. п. b для выборок объемом 5:      2.464  0.704  6.374  1.184  2.744
Оц. п. a для выборок объемом 10:     3.890  7.192 12.325 12.311  5.088
Оц. п. b для выборок объемом 10:     1.439  2.771  5.524  5.014  1.571
Оц. п. a для выборок объемом 100:    5.363  5.755  4.658  5.107  5.610
Оц. п. b для выборок объемом 100:    2.148  2.261  1.981  2.216  2.330
Оц. п. a для выборок объемом 1000:   5.006  5.329  4.742  5.230  4.665
Оц. п. b для выборок объемом 1000:   1.988  2.101  1.953  2.032  1.867
Оц. п. a для выборок объемом 100000: 5.005  4.977  4.980  4.959  5.000
Оц. п. b для выборок объемом 100000: 2.005  1.995  1.994  1.983  2.004
```

С увеличением объема выборки оценки параметров α и β, полученные методом моментов, приближаются к истинному значению параметров 5 и 2, значит, данные оценки являются состоятельными.

Метод максимального правдоподобия Искать оценки будем для обоих параметров, т.к. принятие одного параметра за известный не упростит решение: вместо системы нерешаемых аналитически уравнений будет получено одно нерешаемое аналитически уравнение (об этом см. [3]). Пусть выборка имеет объем n, тогда:

$$L_{\alpha,\beta}(X) = \prod_{i=1}^{n} \frac{X_i^{\alpha-1}(1-X_i)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)} = B^{-n}(\alpha,\beta)\prod_{i=1}^{n} X_i^{\alpha-1}(1-X_i)^{\beta-1}$$

Логарифм не меняет характер монотонности:

$$\ln L_{\alpha,\beta}(X) = -n\ln B(\alpha,\beta) + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\ln X_i + (\beta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln(1-X_i)$$

$$\ln L_{\alpha,\beta}(X) = -n\left(\ln\Gamma(\alpha)+\ln\Gamma(\beta)-\ln\Gamma(\alpha+\beta)\right) + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\ln X_i + (\beta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln(1-X_i)$$

Равенство частных производных нулю есть необходимое условие максимума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L_{\alpha,\beta}(X)}{\partial\alpha} = -n\left(\dfrac{\ln\partial\Gamma(\alpha)}{\partial\alpha} - \dfrac{\partial\ln\Gamma(\alpha+\beta)}{\partial\alpha}\right) + \sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i \\ \dfrac{\partial \ln L_{\alpha,\beta}(X)}{\partial\beta} = -n\left(\dfrac{\ln\partial\Gamma(\beta)}{\partial\beta} - \dfrac{\partial\ln\Gamma(\alpha+\beta)}{\partial\beta}\right) + \sum\limits_{i=1}^{n}\ln(1-X_i) \end{cases}$$

В источниках $\dfrac{\partial\ln\Gamma(x)}{\partial x}$ обозначают $\psi(x)$ и называют digamma-function. Применим это обозначение к нашей записи системы:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L_{\alpha,\beta}(X)}{\partial\alpha} = -n\left(\psi(\alpha)-\psi(\alpha+\beta)\right) + \sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i \\ \dfrac{\partial \ln L_{\alpha,\beta}(X)}{\partial\beta} = -n\left(\psi(\beta)-\psi(\alpha+\beta)\right) + \sum\limits_{i=1}^{n}\ln(1-X_i) \end{cases}$$

Полученную систему решаем численно

[32]:
```
# вклад выборки
def beta_score(params, sample):
    a, b = params[0], params[1]
    n = len(sample)
    first = n * (special.psi(a+b)-special.psi(a)) + np.sum(np.
↪log(sample))
    second = n * (special.psi(a+b)-special.psi(b)) + np.sum(np.log(1 -
sample))
    return (first, second)

# явно посчитанные частные производные 1 и 2 порядка
# (для более хорошей работы метода Ньютона)
def beta_score_fprime(params, n):
    a, b = params[0], params[1]
    first = n * (special.polygamma(1, a+b)-special.polygamma(1, a))
    second = n * (special.polygamma(1, a+b)-special.polygamma(1, b))
    return (first, second)

def beta_score_fprime2(params, n):
    a, b = params[0], params[1]
    first = n * (special.polygamma(2, a+b)-special.polygamma(2, a))
    second = n * (special.polygamma(2, a+b)-special.polygamma(2, b))
    return (first, second)
```

[33]:
```
# в качестве начальных приближений берем 4 и 1
for cnt, sample_list in beta_samples.items():
    estimators = [optimize.newton(lambda params: beta_score(params,
↪sample), (4.3, 2.7), fprime=lambda params:
↪beta_score_fprime(params, len(sample)),
                                  fprime2=lambda params:
↪beta_score_fprime2(params, len(sample)), maxiter=1000) for sample
↪in sample_list]
    print("{:55}".format("Оценка параметра alpha для выборок объемом
↪{}: ".format(cnt)), end="")
    print(*["{:6.3f}".format(estimator[0]) for estimator in
↪estimators])
    print("{:55}".format("Оценка параметра beta для выборок объемом
↪{}: ".format(cnt)), end="")
    print(*["{:6.3f}".format(estimator[1]) for estimator in
↪estimators])
```

```
Оц. п. a для выборок объемом 5:      6.532  2.621 22.759  2.155  6.399
Оц. п. b для выборок объемом 5:      2.698  1.101  6.373  1.304  2.657
Оц. п. a для выборок объемом 10:     4.832  8.244 12.995 13.298  6.128
Оц. п. b для выборок объемом 10:     1.863  3.234  5.837  5.439  1.950
Оц. п. a для выборок объемом 100:    5.450  5.475  4.428  5.162  5.439
Оц. п. b для выборок объемом 100:    2.175  2.132  1.861  2.261  2.245
Оц. п. a для выборок объемом 1000:   5.048  5.461  4.737  5.032  4.774
Оц. п. b для выборок объемом 1000:   2.007  2.160  1.951  1.947  1.914
Оц. п. a для выборок объемом 100000: 5.001  4.983  4.975  4.964  5.005
Оц. п. b для выборок объемом 100000: 2.004  1.997  1.991  1.985  2.006
```

С увеличением объема выборки оценки параметров α и β, полученные методом максимального правдоподобия, приближаются к истинному значению параметров 5 и 2, значит, данные оценки являются состоятельными. Проверить другие свойства (несмещенность, эффективность, оптимальность) не представляется возможным, т.к. нет аналитического решения.

3.3 Работа с данными

В домашней работе 1 в качестве интерпретации было выбрано распределение эксцентриситетов орбит астероидов и малых тел, изучаемых Lowell Observatory. Загружаем данные:

[34]:
```
ECCENTRICITY_INFO_CVS_PATH = 'eccentricity.csv'
```

[35]:
```
def load_info(source_file, eccentricity_info=None):
    def append_to(where, values):
        where.loc[len(where)] = values
    with open(source_file, 'r') as f:
        for line in tqdm.tqdm_notebook(f):
            name = line[7:26].strip()
            if eccentricity_info is not None:
                eccentricity = line[159:169].strip()
                if eccentricity != '':
```

```
                        append_to(eccentricity_info, [name,
 ↪float(eccentricity)])
```

[36]:
```
need_eccentricity = not os.path.isfile(ECCENTRICITY_INFO_CVS_PATH)
eccentricity_info = None
if need_eccentricity:
    eccentricity_info = pd.DataFrame(columns=['Name', 'Eccentricity'])
    load_info(source_file='astorb.dat', diameter_info=diameter_info,
 ↪eccentricity_info=eccentricity_info)
    with open(ECCENTRICITY_INFO_CVS_PATH, 'w') as out:
        eccentricity_info.to_csv(out, index=False)
```

[37]:
```
e_info = pd.read_csv(ECCENTRICITY_INFO_CVS_PATH)
e_values = np.sort(e_info["Eccentricity"])
```

[38]:
```
e_values.shape
```

[38]:
```
(796787,)
```

Значение выборочного среднего:

[39]:
```
e_mean = np.mean(e_values)
e_mean
```

[39]:
```
0.15663200943171132
```

Значение выборочной дисперсии:

[40]:
```
e_var = np.var(e_values)
e_var
```

[40]:
```
0.008966689196894131
```

Оценки параметров α и β, найденные методом моментов:

[41]:
```
beta_a_moments = e_mean * (e_mean * (1 - e_mean) / e_var - 1)
beta_b_moments = (1 - e_mean) * (e_mean * (1 - e_mean) / e_var - 1)
print("alpha: {}".format(beta_a_moments))
print("beta: {}".format(beta_b_moments))
```

```
alpha: 2.150890978287494
beta: 11.58123814456107
```

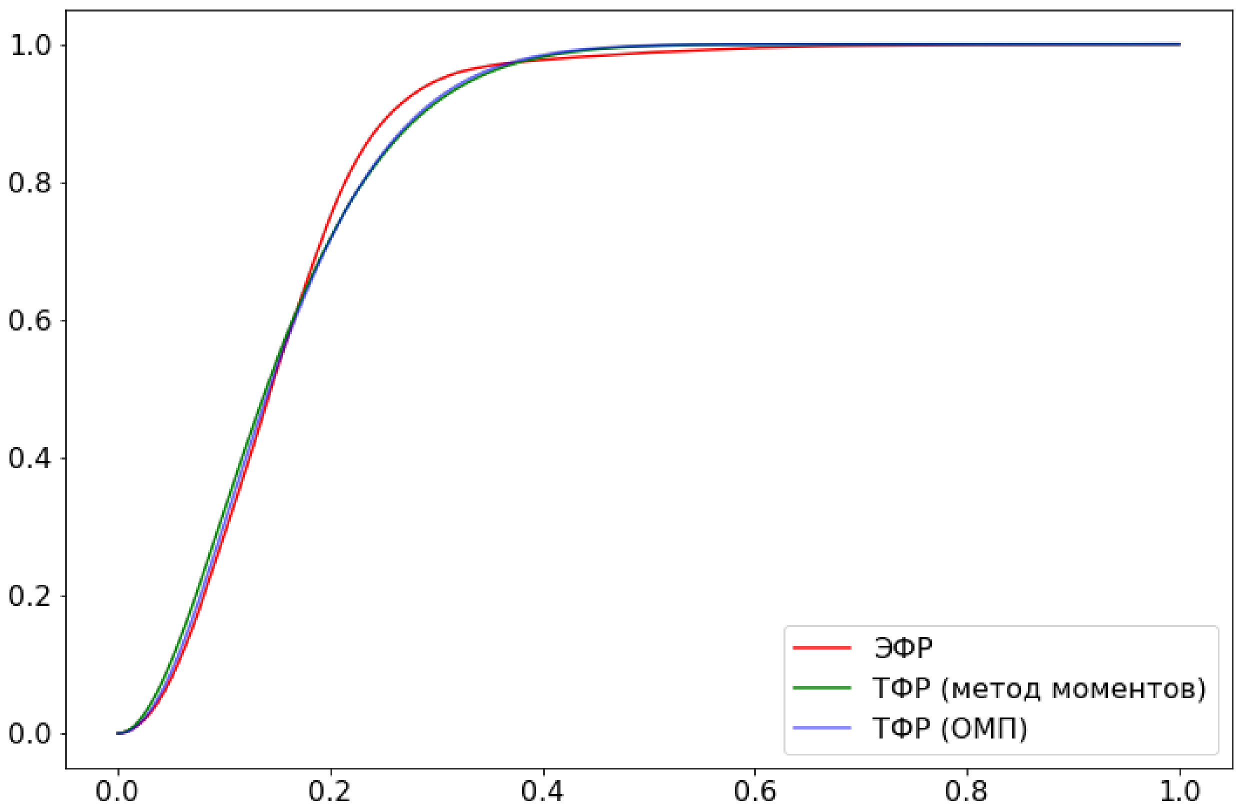
Оценки параметров α и β, найденные методом максимального правдоподобия:

[42]:
```
beta_likelihood = optimize.newton(lambda params: beta_score(params,
 ↪e_values), (2, 11), fprime=lambda params:
 ↪beta_score_fprime(params, len(e_values)),
                                  fprime2=lambda params:
 ↪beta_score_fprime2(params, len(e_values)), maxiter=1000)
print("alpha: {}".format(beta_likelihood[0]))
print("beta: {}".format(beta_likelihood[1]))
```

```
alpha: 2.3592788500498507
beta: 12.555165724785503
```

Сравним на графике ЭФР и две ТФР (построенные с использованием оценок максимального правдоподобия и оценок, полученных методом моментов)

[43]:
```
x_values = np.linspace(0, 1, 1000)
beta_edf = build_edf(e_values)
plt.figure(figsize=(12, 8))
plt.plot(x_values, [beta_edf(point) for point in x_values], color='r',
 ↪label="ЭФР")
plt.plot(x_values, beta_cdf(x_values, beta_a_moments,
 ↪beta_b_moments), color='g', label="ТФР (метод моментов)")
plt.plot(x_values, beta_cdf(x_values, beta_likelihood[0],
 ↪beta_likelihood[1]), color='b', alpha=0.6, label="ТФР (ОМП)")
plt.legend()
plt.show()
```



Видно, что графики ТФР, построенные с использованием оценок, полученных обоими методами, близки к графику ЭФР.

Источники

[1] Rui Li. A New Parameter Estimation Method for a Zipf-like Distribution for Geospatial Data Access. URL: https://www.researchgate.net/publication/264191587_A_New_Parameter_Estimation_Method_for_a_Zipf-like_Distribution_for_Geospatial_Data_Access

[2] Олейникова С.А. — Аппроксимация закона распределения суммы случайных величин, распределенных по закону бета // Кибернетика и программирование. – 2015. – № 6. – С. 35 - 54. DOI: 10.7256/2306-4196.2015.6.17225 URL:
https://nbpublish.com/library_read_article.php?id=17225
[3] Claire Elayne Bangerter Owen. Parameter Estimation for the Beta Distribution. URL: https://scholarsarchive.byu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=2613&context=etd