Домашнее задание 1. Вероятностные распределения

Ковалев Д., СКБ171

[1]:
```
import numpy as np
import pandas as pd
import tqdm
import matplotlib.pyplot as plt
import os
from scipy import special, stats
from scipy.stats import pearsonr
from bisect import bisect_left
import functools
%matplotlib inline
```

[2]:
```
plt.rcParams.update({'font.size': 16})
```

Распределение Ципфа (дискретное)

1.1 Выбор распределения

Параметры:

- $s \geq 0$ — вещественное число
- $N \in \mathbb{N}$

Распределение задано на $\mathbb{N}$, $\mathbb{P}\{\xi = k\} = \dfrac{k^{-s}}{\sum\limits_{n=1}^{N} n^{-s}}$

1.2 Описание основных характеристик распределения

Посчитаем **математическое ожидание** случайной величины ξ, имеющей распределение Ципфа:

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{k=1}^{N}\left[k \cdot \frac{k^{-s}}{\sum\limits_{n=1}^{N} n^{-s}}\right] = \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} k^{1-s}}{\sum\limits_{n=1}^{N} n^{-s}};$$

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\xi = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$$

Посчитаем **дисперсию** ξ:

$$\mathbb{E}\left(\xi^2\right) = \sum_{k=1}^{N}\left[k^2 \cdot \frac{k^{-s}}{\sum\limits_{n=1}^{N} n^{-s}}\right] = \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} k^{2-s}}{\sum\limits_{n=1}^{N} n^{-s}}$$

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\left(\xi^2\right) - (\mathbb{E}\xi)^2 = \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} k^{2-s}}{\sum\limits_{n=1}^{N} n^{-s}} - \left[\frac{\sum\limits_{k=1}^{N} k^{1-s}}{\sum\limits_{n=1}^{N} n^{-s}}\right]^2$$

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{D}\xi = \frac{\zeta(s-2)}{\zeta(s)} - \frac{\zeta^2(s-1)}{\zeta^2(s)} = \zeta^{-2}(s)\left(\zeta(s-2)\zeta(s) - \zeta^2(s-1)\right)$$

Посчитаем **производящую функцию** ξ:

$$\varphi(z) = \mathbb{E}\left(z^{\xi}\right) = \sum_{k=1}^{N}\left[\frac{k^{-s}}{\sum\limits_{n=1}^{N} n^{-s}} z^k\right] = \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} k^{-s} z^k}{\sum\limits_{n=1}^{N} n^{-s}}$$

Посчитаем **характеристическую функцию** ξ:

$$\phi(z) = \mathbb{E}\left(e^{iz\xi}\right) = \sum_{k=1}^{N}\left[\frac{k^{-s}}{\sum\limits_{n=1}^{N} n^{-s}} e^{izk}\right] = \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} k^{-s} e^{izk}}{\sum\limits_{n=1}^{N} n^{-s}}$$

[3]:
```
# функция вероятности
def zipf_pmf(x, s, N): return (1 / x**s) / sum([1 / n**s for n in
↪range(1, N+1)])
# функция распределения
def zipf_cdf(x, s, N):
    ret = np.zeros(x.shape)
    for i in range(x.shape[0]):
        ret[i] += np.sum(zipf_pmf(np.arange(1, np.floor(x[i])+1), s,
↪N))
    return ret
```

Гистограмма вероятностей

[4]:
```
x = np.arange(1, 11)
plt.figure(figsize=(25, 6))
for param, pos in zip([1, 2, 3, 4], [141, 142, 143, 144]):
    plt.subplot(pos)
```

```
    plt.xticks(range(1, 11))
    plt.bar(x, zipf_pmf(x, s=param, N=10), label="s = {}".
↪format(param))
    plt.legend()
```

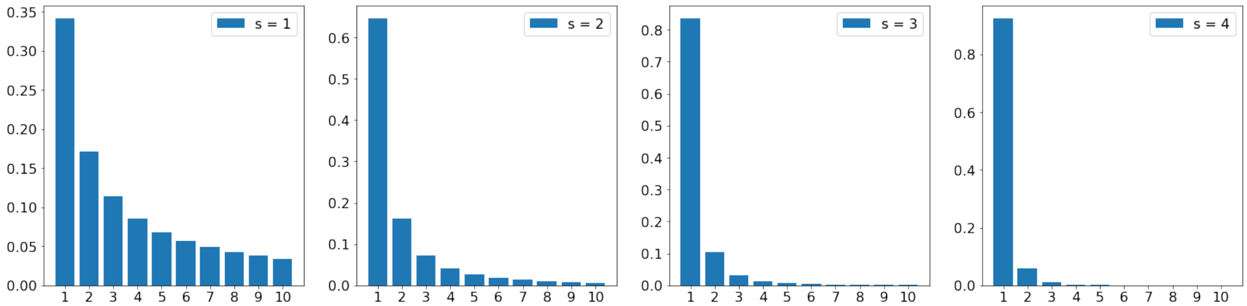
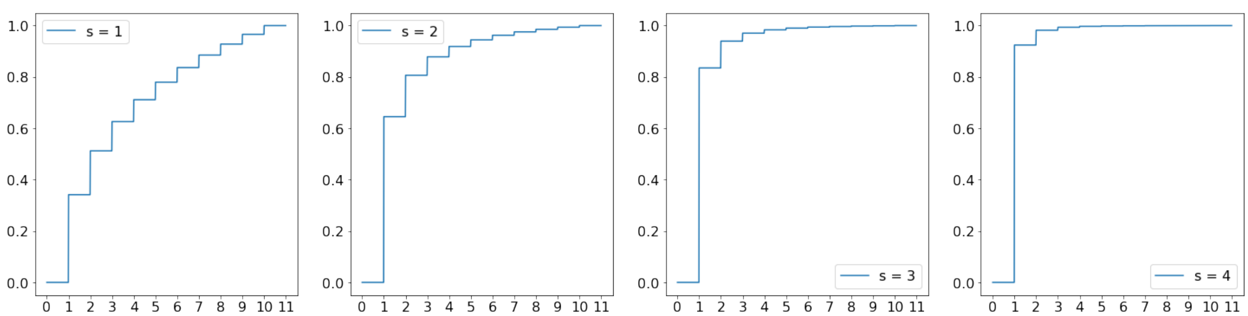


График функции распределения

[5]:
```
x = np.arange(0, 11, 0.01)
plt.figure(figsize=(25, 6))
for param, pos in zip([1, 2, 3, 4], [141, 142, 143, 144]):
    plt.subplot(pos)
    plt.xticks(range(0, 12))
    plt.plot(x, zipf_cdf(x, s=param, N=10), label="s = {}".
↪format(param))
    plt.legend()
```



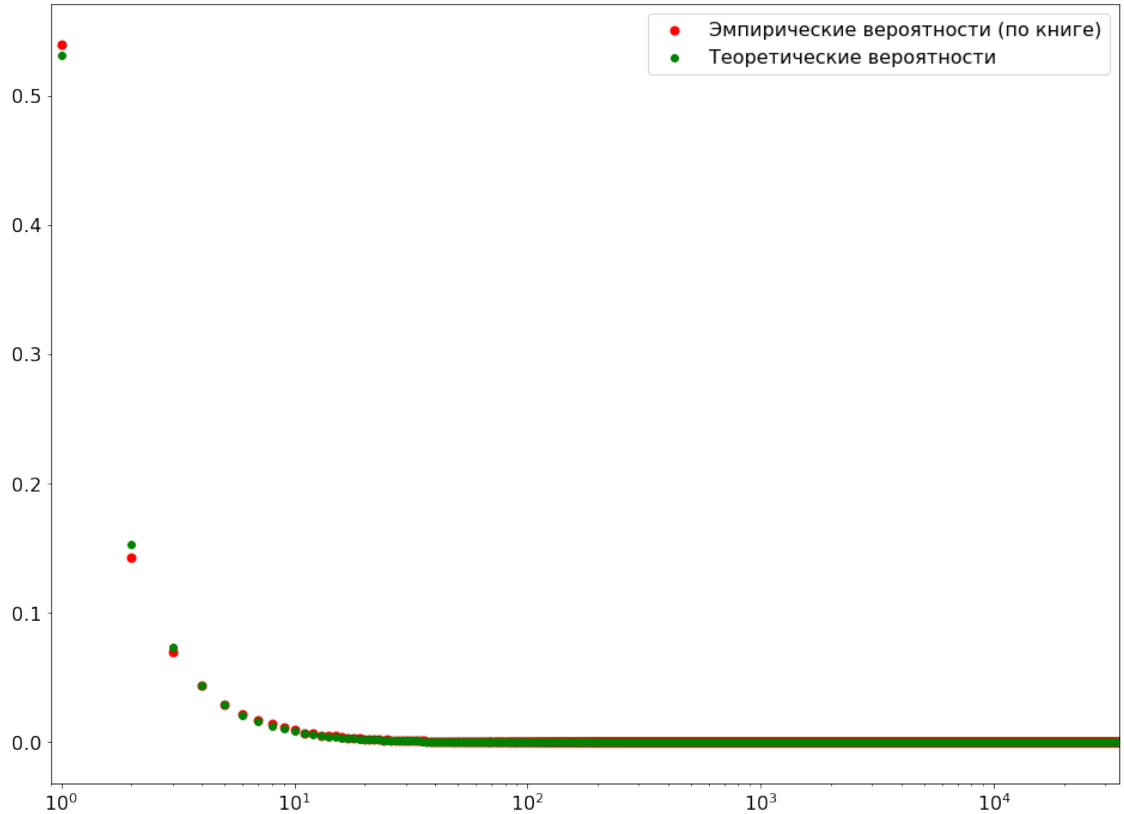
1.3 Поиск примеров событий, которые могут быть описаны выбранными случайными величинами

Пусть задан текст на естественном языке. Посчитаем количество уникальных слов в нем, и для каждого слова определим, сколько раз оно встречается в тексте. Таким образом, получится, что какие-то слова встречаются 1 раз, какие-то 2 раза и т.д., пусть максимальное количество вхождений слова равно N. Количество вхождений слова в текст будем называть рангом этого слова. Утверждается, что распределение Ципфа с параметром N и некоторым s описывает вероятность того, случайно выбранное из текста слово имеет ранг k.

На примере текста книги "Война и мир" Л. Н. Толстого покажем, что распределение Ципфа действительно можно интерпретировать таким образом. Текст возьмем на английском языке, т.к. в нем у одного слова может быть не так много форм, как в русском языке.

[6]:
```
with open('warandpeace.txt', 'r') as book:
    data = book.read()
words = data.lower().split()
word_counts = dict()
for word in words:
    if word in word_counts:
        word_counts[word] += 1
    else:
        word_counts[word] = 1
word_counts = np.array(list(word_counts.values()))
# freqs[i] - количество слов с рангом (i + 1)
freqs = np.array([0] * max(word_counts))
for word_count in word_counts:
    freqs[word_count - 1] += 1
freqs = freqs / np.sum(freqs)
```

[7]:
```
_, ax = plt.subplots(figsize=(16, 12))
ax.set_xscale("log")
ax.set_xlim(0.9, len(freqs))
x_values = np.arange(1, len(freqs) + 1)
plt.scatter(x_values, freqs, linewidth=2, color='r',
 ↪label="Эмпирические вероятности (по книге)")
plt.scatter(x_values, zipf_pmf(x_values, 1.8, len(word_counts)),
 ↪color='g', label="Теоретические вероятности")
plt.legend()
plt.show()
```



1.4 Описание способа моделирования выбранных случайных величин

Дискретные случайные величины легко моделируются с использованием равномерно распределенной на $[0, 1]$ случайной величины. Рассмотрим конкретнее на примере распределения Ципфа.

Пусть необходимо смоделировать случайную величину ξ, распределение которой имеет вид распределения Ципфа с параметрами s и N. ξ принимает значения $1, 2, \ldots, N$. Обозначим $d_i = \sum\limits_{k=1}^{i} \mathbb{P}\left(\xi = k\right), d_0 = 0$. Пусть генератор случайных чисел выдал некоторое число $l \in [0, 1)$. Тогда в качестве значения ξ возьмем такое i, что $d_{i-1} \leq l < d_i$. Такой способ моделирования случайной величины корректен, т.к. длины отрезков $[d_{i-1}, d_i]$ равны $\mathbb{P}\left(\xi = i\right)$ (по построению)

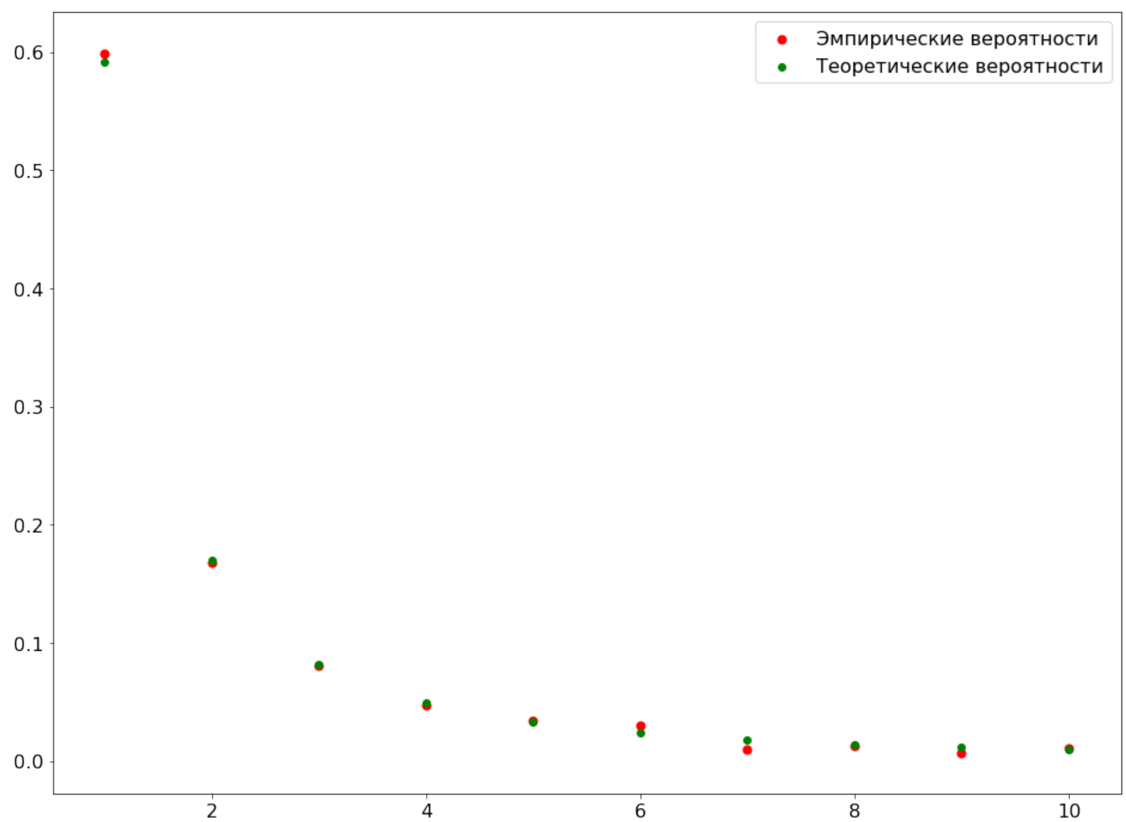
Код, реализующий данный алгоритм генерации и строящий графики с теоретическими и эмпирическими вероятностями (для визуального сравнения), приведен ниже.

[8]:
```
def zipf_random(s, N, size=1):
    uni_random = stats.uniform.rvs(size=size)
    ticks = [0]
    ret = []
    for elem in uni_random:
        if elem <= ticks[-1]:
            ret.append(bisect_left(ticks, elem))
```

```
        else:
            cur = len(ticks)
            while ticks[-1] < elem:
                ticks.append(ticks[-1] + zipf_pmf(cur, s, N))
                cur += 1
            ret.append(cur - 1)
    return ret
```

[9]:
```
def draw_generated_zipf(s, N, size):
    zipf_generated = zipf_random(s, N, size)
    freqs = np.array([0] * N)
    for elem in zipf_generated:
        freqs[elem - 1] += 1
    freqs = freqs / sum(freqs)
    x_values = np.arange(1, N+1)
    plt.figure(figsize=(16, 12))
    plt.scatter(x_values, freqs, linewidth=2, color='r',
 ↪label="Эмпирические вероятности")
    plt.scatter(x_values, zipf_pmf(x_values, s, N), color='g',
 ↪label="Теоретические вероятности")
    plt.legend()
    plt.show()
```

[10]:
```
draw_generated_zipf(s=1.8, N=10, size=1000)
```



Бета-распределение (абсолютно непрерывное)

1.1 Выбор распределения

Параметры: $\alpha, \beta > 0$

Распределение задано на отрезке $[0, 1]$

Плотность распределения $f(x) = \dfrac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}$

Функция распределения $F(x) = \dfrac{\int\limits_0^x t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\ dt}{B(\alpha,\beta)}$

1.2 Описание основных характеристик распределения

Посчитаем **математическое ожидание** случайной величины ξ, имеющей бета-распределение:

$$\mathbb{E}\xi = \int\limits_0^1 x \cdot f(x)\ dx = \frac{\int\limits_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}\ dx}{B(\alpha,\beta)} = \frac{B(\alpha+1,\beta)}{B(\alpha,\beta)} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

Посчитаем **дисперсию** ξ:

$$\mathbb{E}\left(\xi^2\right) = \int\limits_0^1 x^2 \cdot f(x)\ dx = \frac{\int\limits_0^1 x^{\alpha+1}(1-x)^{\beta-1}\ dx}{B(\alpha,\beta)} = \frac{B(\alpha+2,\beta)}{B(\alpha,\beta)} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot \frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+1} =$$
$$= \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}$$

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\left(\xi^2\right) - (\mathbb{E}\xi)^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} - \left[\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right]^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+\beta) - \alpha^2(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} =$$
$$= \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

Посчитаем **характеристическую функцию** ξ:

$$\phi(z) = \mathbb{E}\left(e^{iz\xi}\right) = \int\limits_0^1 \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)} e^{izx}\ dx = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} e^{izx}\ dx$$

График плотности распределения

[11]:
```
# плотность вероятности
def beta_pdf(x, alpha, beta): return stats.beta.pdf(x, alpha, beta)
# функция распределения
def beta_cdf(x, alpha, beta): return special.betainc(alpha, beta, x)
```

[12]:
```
x = np.arange(0, 1, 0.001)
params = [
    {"alpha": 0.7, "beta": 0.7},
    {"alpha": 5, "beta": 1},
    {"alpha": 1, "beta": 3},
    {"alpha": 2, "beta": 5}
]
```

[13]:
```
plt.figure(figsize=(16, 12))
for param in params:
    plt.plot(x, beta_pdf(x, param["alpha"], param["beta"]), label="a
↪= {}, b = {}".format(param["alpha"], param["beta"]))
    plt.legend()
```

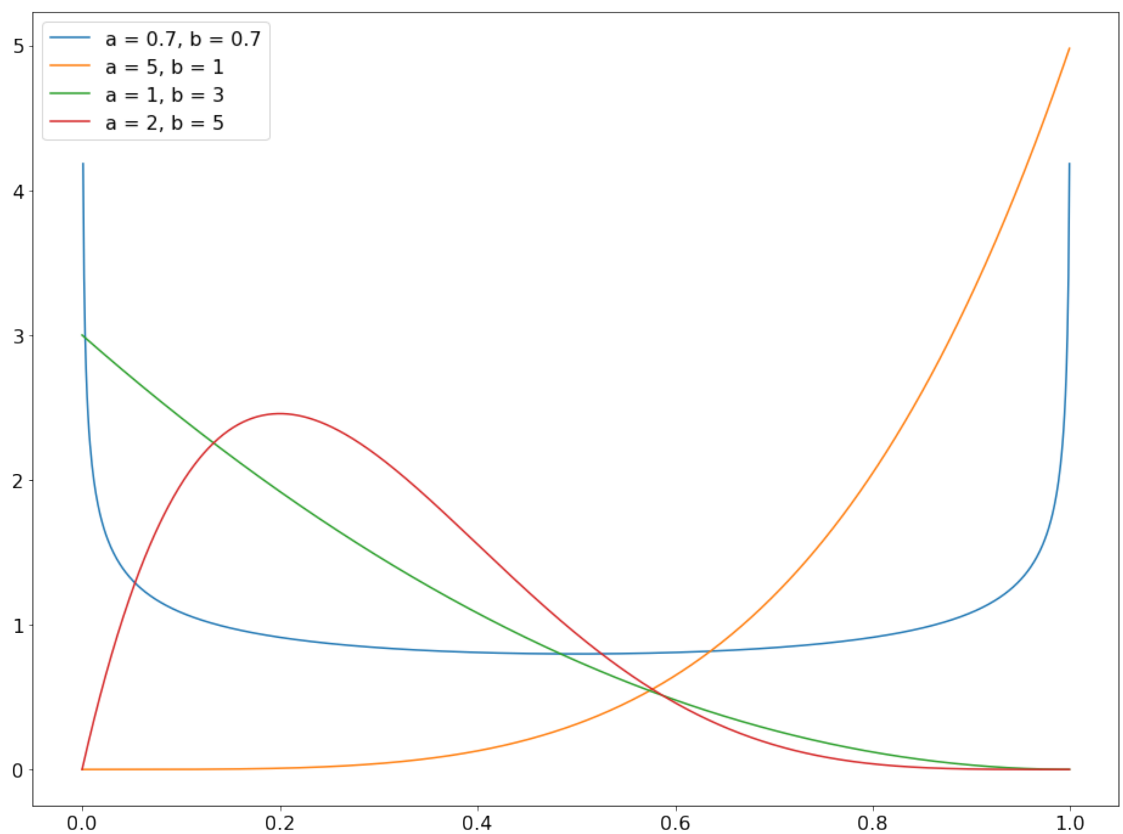
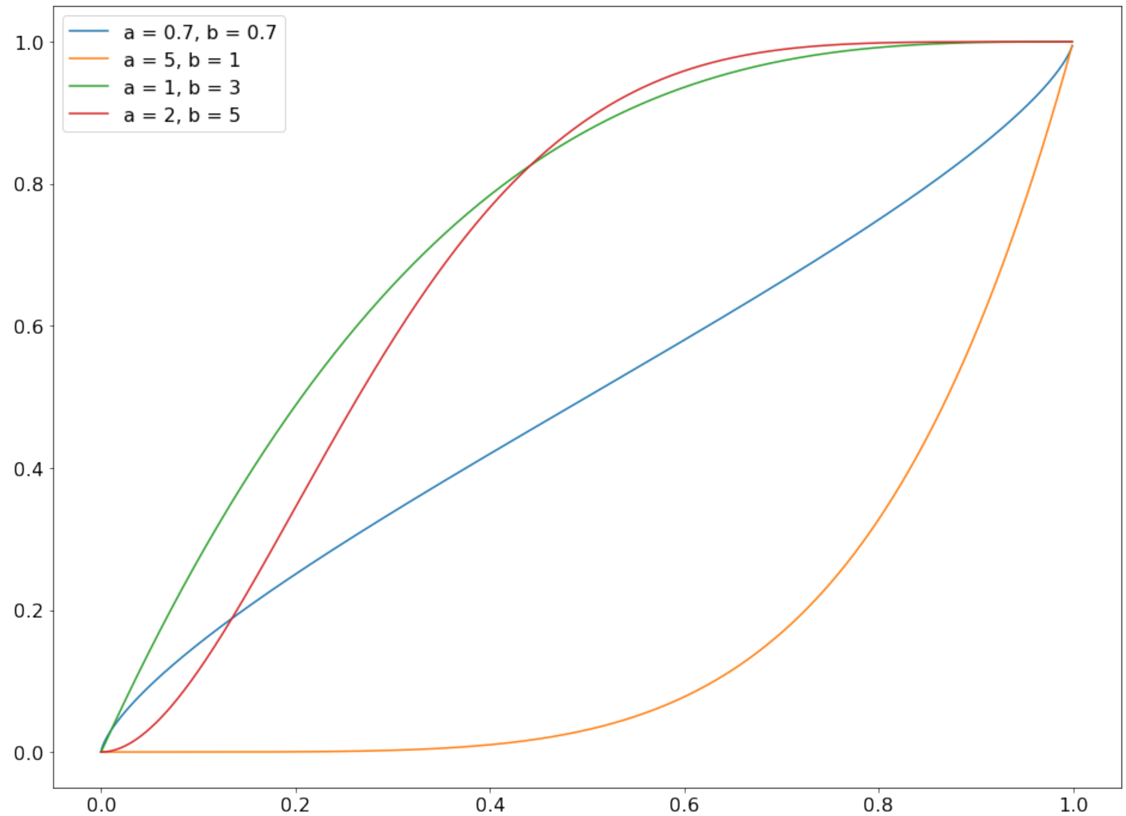


График функции распределения

[14]:
```
plt.figure(figsize=(16, 12))
for param in params:
    plt.plot(x, beta_cdf(x, param["alpha"], param["beta"]), label="a
↪= {}, b = {}".format(param["alpha"], param["beta"]))
    plt.legend()
```



1.3 Поиск примеров событий, которые могут быть описаны выбранными случайными величинами

Типичная интерпретация Типичной интерпретацией бета-распределения с натуральными параметрами α и β является распределение α-й порядковой статистики в наборе из $\alpha + \beta - 1$ независимых равномерно распределенных на $[0, 1]$ случайных величин. О том, почему это так, написано в пункте "1.4 Описание способа моделирования выбранных случайных величин".

Нетипичная интерпретация При анализе данных об астероидах и других малых телах, которые предоставлены Lowell Observatory [1], оказалось, что эксцентриситет орбиты этих тел имеет распределение, близкое к бета-распределению. Код, извлекающий нужные данные и строящий графики эмпирической и теоретической функций распределения, приведен ниже. Вместе с данными по эксцентриситету орбит выбраны и данные по диаметру тел, но из-за их малого объема они не представляют такого большого интереса.

[15]:
```
DIAMETER_INFO_CVS_PATH = 'diameter.csv'
ECCENTRICITY_INFO_CVS_PATH = 'eccentricity.csv'
```

[16]:
```
def load_info(source_file, diameter_info=None,
 ↪eccentricity_info=None):
    def append_to(where, values):
        where.loc[len(where)] = values
    with open(source_file, 'r') as f:
        for line in tqdm.tqdm_notebook(f):
            name = line[7:26].strip()
            if diameter_info is not None:
                diameter = line[59:65].strip()
                if diameter != '':
                    append_to(diameter_info, [name, float(diameter)])
            if eccentricity_info is not None:
                eccentricity = line[159:169].strip()
                if eccentricity != '':
                    append_to(eccentricity_info, [name,
 ↪float(eccentricity)])
```

[17]:
```
need_diameter = not os.path.isfile(DIAMETER_INFO_CVS_PATH)
need_eccentricity = not os.path.isfile(ECCENTRICITY_INFO_CVS_PATH)
diameter_info, eccentricity_info = (None, None)
if need_diameter:
    diameter_info = pd.DataFrame(columns=['Name', 'Diameter'])
if need_eccentricity:
    eccentricity_info = pd.DataFrame(columns=['Name', 'Eccentricity'])
```

[18]:
```
if need_diameter or need_eccentricity:
    load_info(source_file='astorb.dat', diameter_info=diameter_info,
 ↪eccentricity_info=eccentricity_info)
if need_diameter:
    with open(DIAMETER_INFO_CVS_PATH, 'w') as out:
        diameter_info.to_csv(out, index=False)
if need_eccentricity:
    with open(ECCENTRICITY_INFO_CVS_PATH, 'w') as out:
        eccentricity_info.to_csv(out, index=False)
```

[19]:
```
d_info = pd.read_csv(DIAMETER_INFO_CVS_PATH)
d_values = np.sort(d_info["Diameter"])
e_info = pd.read_csv(ECCENTRICITY_INFO_CVS_PATH)
e_values = np.sort(e_info["Eccentricity"])
```

[20]:
```
d_values.shape
```

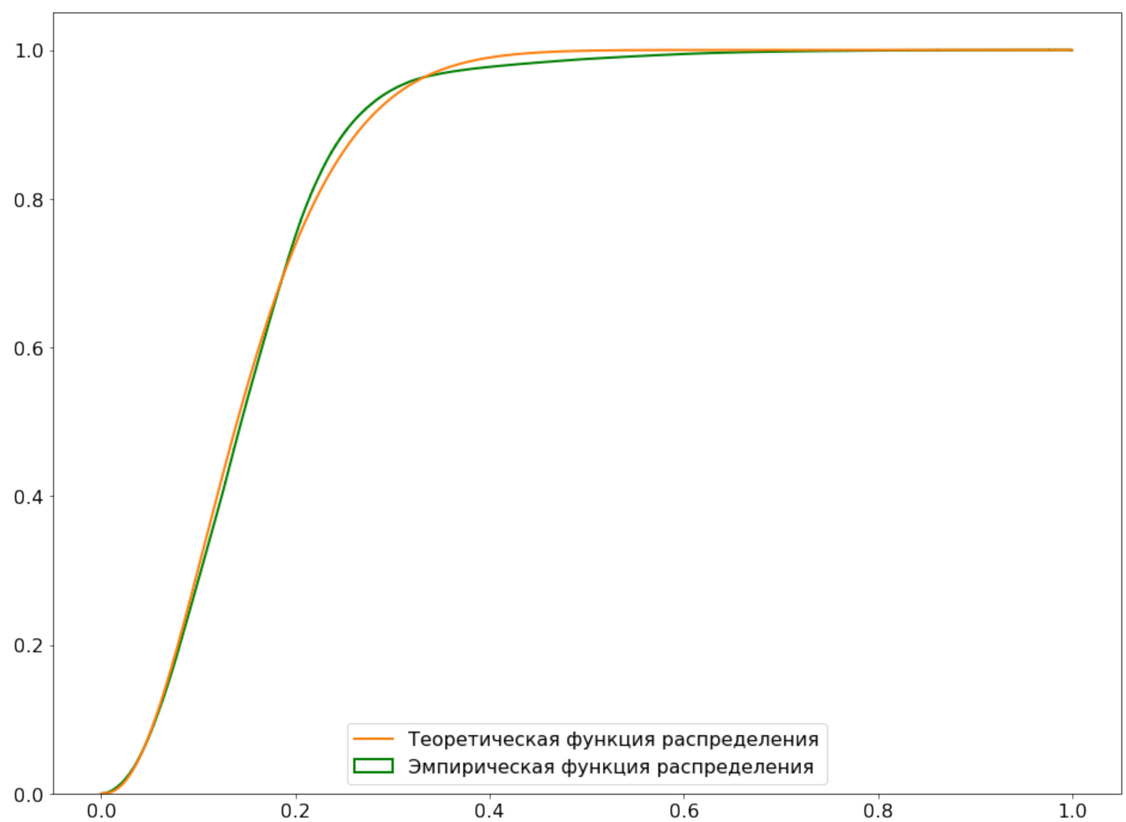
[20]:
```
(2140,)
```

[21]:
```
e_values.shape
```

[21]: (796787,)

[22]:
```
# вывод графика эмпирической ф-ии распределения
def draw_edf(empirical_data, minimum, maximum, label='Эмпирическая
↪функция распределения', color='green'):
    plt.hist(empirical_data, len(empirical_data), density=True,
↪histtype='step', color=color, cumulative=True, label=label,
↪linewidth=2)
    plt.hist([empirical_data[-1], maximum], weights=[1, 1],
↪histtype='step', label=None, edgecolor='white', linewidth=2)
    plt.plot([minimum, empirical_data[0]], [0, 0], color=color)
    plt.plot([empirical_data[-1], maximum], [1, 1], color=color)
```

[23]:
```
plt.figure(figsize=(16, 12))
draw_edf(e_values, minimum=0, maximum=1)
x_ticks = np.linspace(0, 1, max(1000, len(e_values)))
plt.plot(x_ticks, beta_cdf(x_ticks, alpha=2.6, beta=14.3),
↪linewidth=2, label='Теоретическая функция распределения')
plt.legend()
plt.show()
```



1.4 Описание способа моделирования выбранных случайных величин

Рассмотрим частный случай, когда оба параметра α и β являются натуральными числами. В этом случае обозначим $l = \alpha,\ k = \alpha + \beta - 1,\ 1 \leq l \leq k$ и сгенерируем k чисел, равномерно и независимо распределенных на $[0, 1]$. Утверждается, что при таких операциях l-я порядковая статистика генерируемого набора чисел будет иметь бета-распределение.

Покажем это, получив функцию распределения l-й порядковой статистики, равной функции распределения случайной величины, имеющей бета-распределение. Итак, пусть есть $k = \alpha + \beta - 1$ независимых равномерно распределенных случайных величин, пусть вариационный ряд выборки $\left(x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(k)}\right)$. Рассмотрим $\Phi(z) = \mathbb{P}\left(x_{(l)} < z\right)$. Событие $x_{(l)} < z$ означает, что как минимум l из k случайных величин оказались меньше z, про остальные ничего не известно.

Очевидно, что $\mathbb{P}\left(x_{(i)} < z\right) = z$, $\mathbb{P}\left(x_{(i)} \geq z\right) = 1 - z$. Отсюда имеем:

$$\Phi(z) = \mathbb{P}\left(x_{(l)} < z\right) = \sum_{i=l}^{k} C_k^i z^i (1 - z)^{k-i}$$

Интегрированием по частям можно показать, что

$$\int_0^z \frac{t^{l-1}(1-t)^{k-l}}{B(l, k+1-l)}\,dt = \sum_{i=l}^{k} C_k^i z^i (1 - z)^{k-i}, \text{ но}$$

$$\int_0^z \frac{t^{l-1}(1-t)^{k-l}}{B(l, k+1-l)}\,dt = \int_0^z \frac{t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}\,dt = F(z),$$

где $F(z)$ - функция распределения случайной величины, имеющей бета-распределение с параметрами α и β.

Итак, $F(z) = \mathbb{P}\left(x_{(\alpha)} < z\right)$, т.е. бета-распределение с натуральными параметрами α и β есть распределение α-й порядковой статистики в наборе из $\alpha + \beta - 1$ независимых равномерно распределенных на $[0, 1]$ случайных величин.

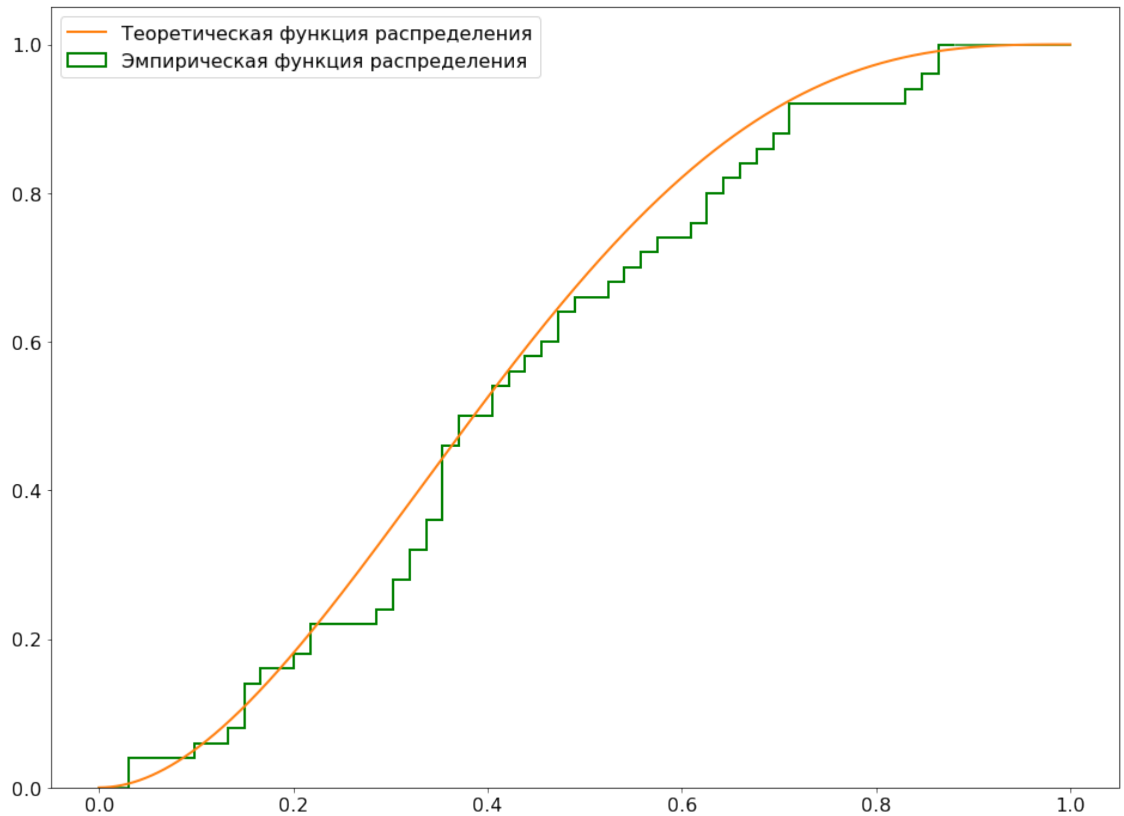
Реализуем генерацию выборок из бета-распределения программно и изобразим теоретическую и эмпирическую функции произведения на графике

[24]:
```
def beta_random(a, b, size=1):
    ret = []
    l = a
    k = a + b - 1
    for _ in range(size):
        uni_set = stats.uniform.rvs(size=k)
        uni_set.sort()
        ret.append(uni_set[l-1])
    return ret
```

[25]:
```
def draw_generated_beta(a, b, size):
    beta_generated = beta_random(a, b, size)
    beta_generated.sort()
    plt.figure(figsize=(16, 12))
    draw_edf(beta_generated, minimum=0, maximum=1)
    x_ticks = np.linspace(0, 1, max(1000, len(beta_generated)))
```

```
    plt.plot(x_ticks, beta_cdf(x_ticks, alpha=a, beta=b),
↪linewidth=2, label='Теоретическая функция распределения')
    plt.legend()
    plt.show()
```

[26]:
```
draw_generated_beta(2, 3, 50)
```



Источники

[1] Lowell Observatory. URL: https://asteroid.lowell.edu/main/astorb

[2] Ch. Walk. Hand-book on statistical distributions for experimentalists