

PROIECT

Kovács Attila-Levente

Grupa 30123

25 Mai 2021

—

Teoria Sistemelor I

—

Îndrumător:

as. drd. ing. Șușcă Mircea

Cuprins

1.	Procesul (sistemul) ales.....	3
2.	Variabilele de stare a sistemului	4
3.	Model matematic de tip funcție de transfer	7
4.	Singularitățile sistemului.....	10
5.	Forme canonice de control	13
6.	Funcția de transfer în formă minimală.....	16
7.	Stabilitatea sistemului	18
8.	Răspunsurile sistemului.....	25
9.	Performanțele sistemului.....	30
10.	Sistemul cu structură de reglare în buclă închisă.....	36
11.	Structura de reglare II în buclă închisă.....	45
12.	Bibliografie	46

1. Procesul (sistemul) ales

1.1. Schema procesului

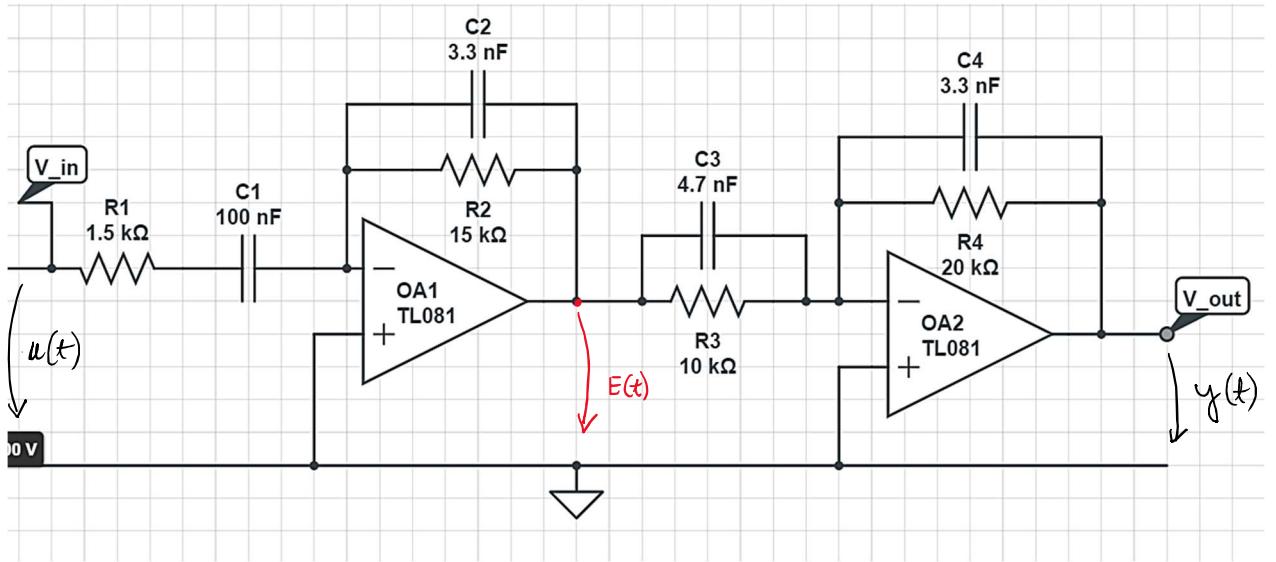


Figure 1: Proces de ordin 4 LTI

1.2. Prezentarea procesului

Am ales un proces de ordinul patru, liniar și invariant în timp.

Sistemul are în componență:

- două amplificatoare operaționale, legate în mod inversor (feedback la borna “-“) : OA1 și OA2;
- patru condensatoare: C₁, C₂, C₃ și C₄
- patru rezistențe: R₁, R₂, R₃, și R₄

Prima parte a sistemului, împreună cu amplificatorul operațional OA1 reprezintă un filtru activ de tip trece-bandă. Ieșirea filtrului, semnalizat cu E(t) este legat la un circuit de tip regulator (Lead / Lag compensator), cu componentele OA2, R₃, C₃, R₄ și C₄.

Semnalele de intrare și ieșire sunt u(t) – intrarea sistemului și y(t) – ieșirea sistemului, notate și pe figură.

Valorile numerice, mărimile fizice ale componentelor sunt:

$$R_1 = 1.5 \text{ k}\Omega; R_2 = 15\text{k}\Omega; R_3 = 10\text{k}\Omega; R_4 = 20\text{k}\Omega; \\ C_1 = 100\text{nF}; C_2 = 3.3\text{nF}; C_3 = 4.7 \text{ nF}; C_4 = 3.3\text{nF}.$$

Mărimile rezistențelor sunt exprimate în kiloOhmi, iar mărimile condensatoarelor sunt exprimate în nanoFarazi.

2. Variabilele de stare a sistemului

2.1. Precondiții

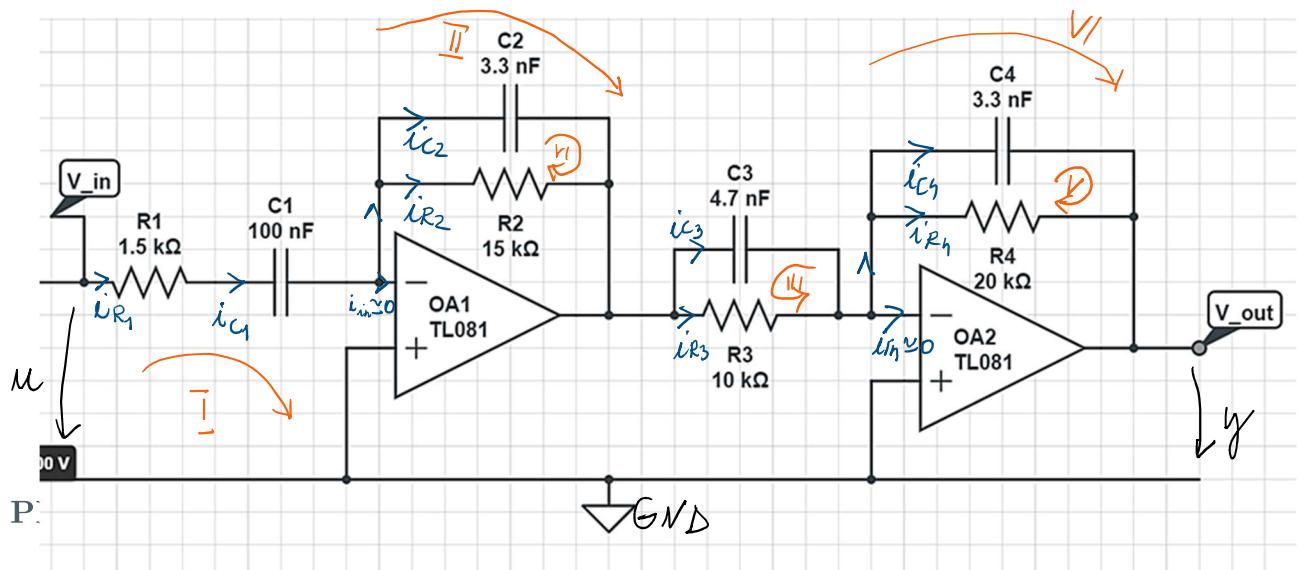
Vom deduce din schema procesului variabilele de stare împreună cu ecuațiile diferențiale de stare, ecuația de ieșire și realizarea de stare în formă compactă.

Sistemul are în componență patru elemente active, care înmagazinează energie: cele patru condensatoare C_1, C_2, C_3 și C_4 . Voi alege cele patru variabile de stare ca și tensiunile de pe cele patru condensatoare. Astfel, matricea stărilor va fi:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \\ u_{C3} \\ u_{C4} \end{pmatrix}$$

Prin aplicarea celor două legi ai lui Kirchoff și a legii lui Ohm voi deduce cele patru ecuații diferențiale.

Figure 2: Circuit cu notațiile pentru Legile lui Kirchoff I și II



Amplificatoarele sunt legate cu borna “+” la GND, iar având în vedere relația dintre cele două borne de intrare a oricărui amplificator operațional,

$$V_+ = V_-$$

pot deduce ușor că potențialul în bornele “-” al amplificatoarelor, potențialul este egal cu potențialul de pe borna “+”, adică cu 0V.

Mai departe, știind că un amplificator operațional are o impedanță foarte mare la intrări (ideal $=\infty$), voi considera că nu intră curent în amplificator, $i_{in} = 0$. (are o valoare neglijabilă, foarte mică în realitate).

Tinând cont de proprietățile amplificatoarelor operaționale, prezentate anterior voi deduce relația pe baza *Teoremei I a lui Kirchoff*, referitor la curenți:

$$i_{R1} = i_{C1} = i_{R2} + i_{C2} = i_{R3} + i_{C3} = i_{R4} + i_{C4}$$

Am evidențiat acești curenți și pe desenul circuitului.

Mai departe, voi deduce următoarele relații pe baza *Teoremei II a lui Kirchoff*, referitor la tensiuni, în buclele semnalate (ochi):

$$\text{I : } u_{R1} + u_{C1} = u(t)$$

$$\text{II : } u_{C2} + u_{C3} = 0$$

$$\text{III : } u_{C2} = u_{R2}$$

$$\text{IV : } u_{C3} = u_{R3}$$

$$\text{V : } u_{C4} = u_{R4}$$

$$\text{VI: } u_{C4} + y(t) = 0 \text{ din care rezultă ecuația de ieșire}$$

$$y = -u_{C4}$$

2.2. Ecuațiile diferențiale de stare

Pe baza relațiilor deduse cu ajutorul teoremelor lui Kirchoff, voi forma cele patru ecuații diferențiale de stare.

Voi utiliza legile lui Ohm și voi ține cont de următoarea relație:

$$i_{C_n} = C_n \frac{\partial u_{C_n}}{\partial t} = C_n \dot{x}_n$$

Luând relațiile deduse din legile lui Kirchoff, se vor deduce ecuațiile:

$$u_{R1} + u_{C1} = u(t) , \text{ echivalent cu } R_1 i_{R1} + x_1 = u$$

$$R_1 i_{C_1} + x_1 = u \Leftrightarrow R_1 C_1 i_{C_1} + x_1 = u \Leftrightarrow R_1 C_1 \dot{x}_1 = -x_1 + u \Leftrightarrow \dot{x}_1 = -\frac{1}{R_1 C_1} x_1 + \frac{1}{R_1 C_1} u$$

$$u_{C_2} = u_{R_2} \Leftrightarrow x_2 = R_2 i_{R_2} \Leftrightarrow x_2 = R_2 (i_{C_1} - i_{C_2}) \Leftrightarrow x_2 = R_2 (C_1 \dot{x}_1 - C_2 \dot{x}_2)$$

Înlocuind \dot{x}_1 din prima relație, obținem

$$\begin{aligned} x_2 &= R_2 \left[C_1 \left(-\frac{1}{R_1 C_1} x_1 + \frac{1}{R_1 C_1} u \right) - C_2 \dot{x}_2 \right] \Leftrightarrow R_2 C_2 \dot{x}_2 = -\frac{R_2}{R_1} x_1 - x_2 + \frac{R_2}{R_1} u \Leftrightarrow \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{R_1 C_2} x_1 - \frac{1}{R_2 C_2} x_2 + \frac{1}{R_1 C_2} u \end{aligned}$$

Relația $u_{C_3} = u_{R_3}$ este echivalentă cu

$$x_3 = R_3 i_{R_3} \Leftrightarrow x_3 = R_3 (i_{C_1} - i_{C_3}) \Leftrightarrow x_3 = R_3 (C_1 \dot{x}_1 - C_3 \dot{x}_3)$$

Înlocuind \dot{x}_1 obținem:

$$x_3 = -\frac{R_3}{R_1} x_1 + \frac{R_3}{R_1} u - R_3 C_3 \dot{x}_3 \Leftrightarrow \dot{x}_3 = -\frac{1}{R_1 C_3} x_1 - \frac{1}{R_3 C_3} x_3 + \frac{1}{R_1 C_3} u$$

Din relația $u_{C_4} = u_{R_4}$ obținem

$$x_4 = R_4 i_{R_4} \Leftrightarrow x_4 = R_4 (i_{C_1} - i_{C_4}) \Leftrightarrow x_4 = R_4 (C_1 \dot{x}_1 - C_4 \dot{x}_4)$$

Înlocuind \dot{x}_1 obținem:

$$x_4 = -\frac{R_4}{R_1} x_1 + \frac{R_4}{R_1} u - R_4 C_4 \dot{x}_4 \Leftrightarrow \dot{x}_4 = -\frac{1}{R_1 C_4} x_1 - \frac{1}{R_4 C_4} x_4 + \frac{1}{R_1 C_4} u$$

Din ultima relație, $y = -u_{C_4}$ rezultă că ieșirea y este egal cu $-x_4$.

2.3. Realizarea de stare

Din ecuațiile diferențiale de stare rezultă realizarea de stare:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{R_1 C_2} & -\frac{1}{R_2 C_2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{R_1 C_3} & 0 & -\frac{1}{R_3 C_3} & 0 \\ -\frac{1}{R_1 C_4} & 0 & 0 & -\frac{1}{R_4 C_4} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ \frac{1}{R_1 C_2} \\ \frac{1}{R_1 C_3} \\ \frac{1}{R_1 C_4} \end{pmatrix} u(t); \\ y(t) = (0 \quad 0 \quad 0 \quad -1) x(t) + (0) u(t); \end{cases}$$

Sistemul are $m=1$ intrare și $p=1$ ieșire. Deci este un sistem SISO (Single Input, Single Output).

Realizarea de stare în formă compactă:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -\frac{1}{R_1C_1} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_1C_1} \\ -\frac{1}{R_1C_2} & -\frac{1}{R_2C_2} & 0 & 0 & \frac{1}{R_1C_2} \\ -\frac{1}{R_1C_3} & 0 & -\frac{1}{R_3C_3} & 0 & \frac{1}{R_1C_2} \\ -\frac{1}{R_1C_4} & 0 & 0 & -\frac{1}{R_4C_4} & \frac{1}{R_1C_4} \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

3. Model matematic de tip funcție de transfer

Pe baza ecuațiilor diferențiale de stare deduse anterior se poate deduce o ecuație diferențială intrare-iesire a sistemului. După aplicarea Transformatei Laplace pe ecuația diferențială obținută, se va obține un model matematic de tip funcție de transfer.

3.1. Obținerea ecuației diferențiale intrare-iesire

Derivând ecuația de ieșire $y = -x_4$ se obține:

$$\dot{y} = -\dot{x}_4$$

Înlocuind \dot{x}_4 în această relație se va obține ecuația diferențială intrare-iesire:

$$\dot{y} = \frac{1}{R_1C_4}x_1 + \frac{1}{R_4C_4}x_4 - \frac{1}{R_1C_4}u \Leftrightarrow \dot{y} = \frac{1}{R_1C_4}x_1 - \frac{1}{R_4C_4}y - \frac{1}{R_1C_4}u$$

Derivând din nou relația, se obține:

$$\ddot{y} = \frac{1}{R_1C_4}\dot{x}_1 - \frac{1}{R_4C_4}\dot{y} - \frac{1}{R_1C_4}\dot{u}$$

Înlocuind \dot{x}_1 în ecuație, se obține:

$$\ddot{y} = \frac{1}{R_1 C_4} \left[-\frac{1}{R_1 C_1} x_1 + \frac{1}{R_1 C_1} u \right] - \frac{1}{R_4 C_4} \dot{y} - \frac{1}{R_1 C_4} \dot{u}$$

Se deduce x_1 din ecuația diferențială \dot{x}_4 și se obține:

$$x_1 = -R_1 C_4 \dot{x}_4 - \frac{R_1}{R_4} x_4 + u$$

Înlocuind x_1 în ecuația diferențială intrare-iesire se obține

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \frac{1}{R_1 C_4} \left[-\frac{1}{R_1 C_1} \left(-R_1 C_4 \dot{x}_4 - \frac{R_1}{R_4} x_4 + u \right) + \frac{1}{R_1 C_1} u \right] - \frac{1}{R_4 C_4} \dot{y} - \frac{1}{R_1 C_4} \dot{u} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ddot{y} = \frac{1}{R_1 C_4} \left[-\frac{C_4}{C_1} \dot{y} - \frac{1}{R_4 C_1} y - \frac{1}{R_1 C_1} u + \frac{1}{R_1 C_1} u \right] - \frac{1}{R_4 C_4} \dot{y} - \frac{1}{R_1 C_4} \dot{u} \\ &\Leftrightarrow \ddot{y} + \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_4 C_4} \right) \dot{y} + \frac{1}{R_1 R_4 C_1 C_4} y = -\frac{1}{R_1 C_4} \dot{u} \end{aligned}$$

3.2. Obținerea funcției de transfer din ecuația intrare-iesire

Se aplică transformata Laplace pe ecuația obținută în condiții inițiale nule și se obține funcția de transfer ca raport de două polinoame:

$$\begin{aligned} s^2 Y(s) + \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_4 C_4} \right) s Y(s) + \frac{1}{R_1 R_4 C_1 C_4} Y(s) &= -\frac{1}{R_1 C_4} s U(s) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(s^2 + \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_4 C_4} \right) s + \frac{1}{R_1 R_4 C_1 C_4} \right) Y(s) &= -\frac{1}{R_1 C_4} s U(s) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{-\frac{1}{R_1 C_4} s}{s^2 + \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_4 C_4} \right) s + \frac{1}{R_1 R_4 C_1 C_4}} = H(s) \end{aligned}$$

Rezultă că funcția de transfer a sistemului este

$$H(s) = \frac{-\frac{1}{R_1 C_4} s}{s^2 + \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_4 C_4}\right)s + \frac{1}{R_1 R_4 C_1 C_4}}$$

3.3. Spațiul stărilor și funcția de transfer

Trecerea din spațiul stărilor la funcția de transfer echivalentă în cazul sistemelor SISO se face prin aplicarea transformatei Laplace în condiții initiale nule:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t) \mid \mathcal{L}, \mathbf{C}\mathbf{I} = 0 \\ y(t) = C\mathbf{x}(t) + Du(t) \mid \mathcal{L} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sX(s) = AX(s) + BU(s); \\ Y(s) = CX(s) + DU(s). \end{cases}$$

Prin eliminarea termenului $X(s)$ se obține relația de legătură între $U(s)$ și $Y(s)$ astfel:

$$X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s) \Rightarrow Y(s) = \left[C(sI - A)^{-1} B + D \right] U(s) \Rightarrow$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1} B + D.$$

Se va aplica această relație pentru deducerea funcției de transfer din realizarea de stare a sistemului.

$$H(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$$

$$C(sI - A)^{-1} B + D = (0 \quad 0 \quad 0 \quad -1) \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ \frac{1}{R_1 C_2} \\ \frac{1}{R_1 C_3} \\ \frac{1}{R_1 C_4} \end{pmatrix} + (0)$$

$$adj(sI - A) = \begin{pmatrix} \left(s + \frac{1}{C_2 R_2}\right)\left(s + \frac{1}{C_3 R_3}\right)\left(s + \frac{1}{C_4 R_4}\right) & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{(sC_3 R_3 + 1)(sC_4 R_4 + 1)}{R_1 C_2 C_3 R_3 C_4 R_4} & \left(s + \frac{1}{R_1 C_1}\right)\left(s + \frac{1}{C_3 R_3}\right)\left(s + \frac{1}{C_4 R_4}\right) & 0 & 0 \\ -\frac{(sC_2 R_2 + 1)(sC_4 R_4 + 1)}{R_1 C_2 R_2 R_3 C_4 R_4} & 0 & \left(s + \frac{1}{R_1 C_1}\right)\left(s + \frac{1}{R_2 C_2}\right)\left(s + \frac{1}{R_4 C_4}\right) & 0 \\ -\frac{(sC_2 R_2 + 1)(sC_3 R_3 + 1)}{R_1 C_2 R_2 C_3 R_3 C_4} & 0 & 0 & \left(s + \frac{1}{R_1 C_1}\right)\left(s + \frac{1}{C_2 R_2}\right)\left(s + \frac{1}{C_3 R_3}\right) \end{pmatrix}$$

$$\det(sI - A) = \frac{(sC_2 R_2 + 1)(sC_3 R_3 + 1)(sC_1 R_1 + 1)(sR_4 C_4 + 1)}{R_1 R_2 R_3 R_4 C_1 C_2 C_3 C_4}$$

Mai departe, se obține funcția de transfer

$$H(s) = \frac{-\frac{s(sC_2 R_2 + 1)(sC_3 R_3 + 1)}{R_2 R_3 R_4 C_1 C_2 C_3}}{\frac{(sC_2 R_2 + 1)(sC_3 R_3 + 1)(sC_1 R_1 + 1)(sR_4 C_4 + 1)}{R_1 R_2 R_3 R_4 C_1 C_2 C_3 C_4}} = -\frac{s}{\frac{(sC_1 R_1 + 1)(sC_4 R_4 + 1)}{R_1 C_4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow H(s) = \frac{-\frac{1}{R_1 C_4} s}{\frac{(sC_1 R_1 + 1)(sC_4 R_4 + 1)}{(s + \frac{1}{R_1 C_1})(s + \frac{1}{R_4 C_4})}} = \frac{-\frac{1}{R_1 C_4}}{(s + \frac{1}{R_1 C_1})(s + \frac{1}{R_4 C_4})}$$

4. Singolaritățile sistemului

O funcție de transfer se compune din două polinoame $\alpha(s)$, respectiv $\beta(s)$. Astfel,

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}$$

4.1. Polii sistemului

Polii sistemului sunt date de rădăcinile polinomului $\alpha(s)$. Prin rezolvarea ecuației $\alpha(s) = 0$ se vor obține polii sistemului.

În cazul nostru, $\alpha(s) = (sC_1 R_1 + 1)(sC_4 R_4 + 1)$.

În continuare, se va rezolva ecuația:

$$\alpha(s) = 0 \Leftrightarrow (sC_1 R_1 + 1)(sC_4 R_4 + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow sC_1 R_1 = -1 \quad \text{sau} \quad sC_4 R_4 = -1$$

Rezultă $\hat{s}_1 = -\frac{1}{R_1 C_1}$ și $\hat{s}_2 = -\frac{1}{R_4 C_4}$ polii sistemului.

Numeric vorbind, $\hat{s}_1 = -\frac{1}{1.5 \cdot 10^{-4}} = -6.6667 \cdot 10^3$, iar $\hat{s}_2 = -\frac{1}{6.6 \cdot 10^{-5}} = -1.5152 \cdot 10^4$.

4.2. Zerourile sistemului

Zerourile sistemului sunt date de rădăcinile polinomului $\beta(s)$. Se obțin prin rezolvarea ecuației $\beta(s) = 0$.

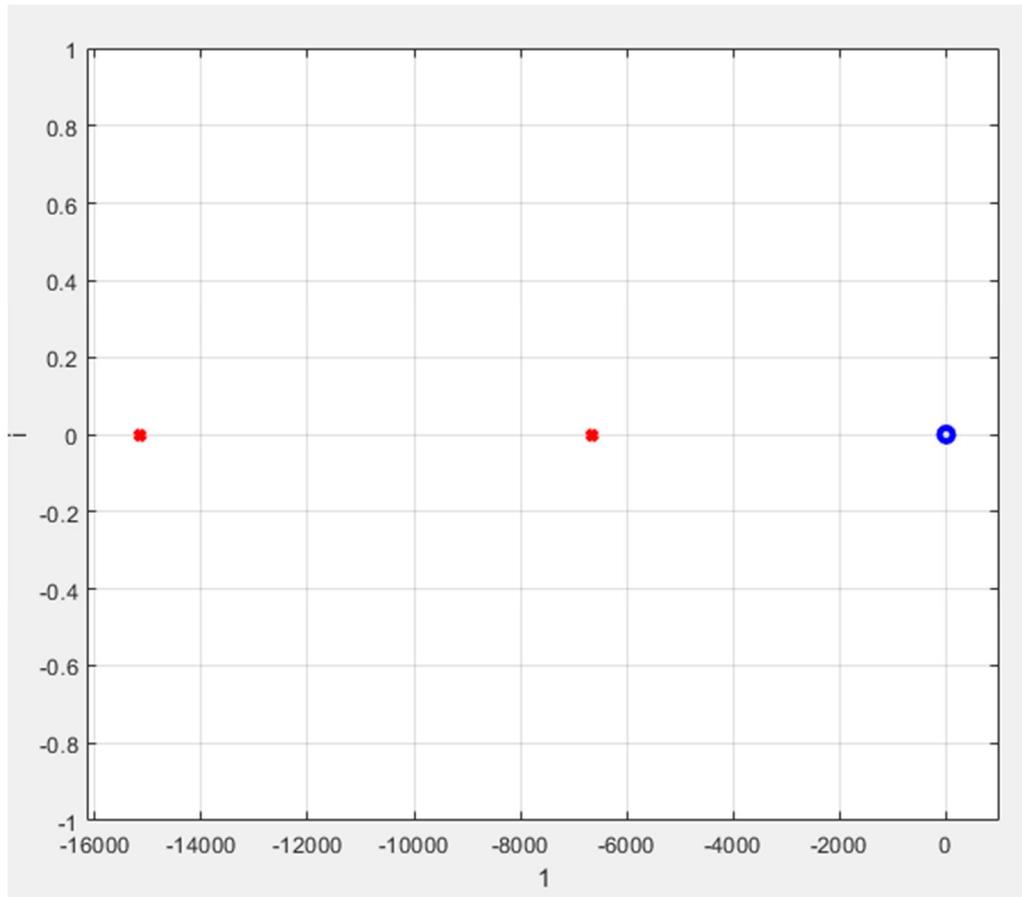
În acest caz, $\beta(s) = -\frac{1}{R_4 C_1} s$.

$$\beta(s) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{R_4 C_1} s = 0 \Leftrightarrow s = 0.$$

Rezultă $s_1^\circ = 0$, singura rădăcină a numărătorului.

Ulterior am observat faptul că am dedus singularitățile din funcția de transfer în formă minimală. Neavând timp, nu am corectat greșeala, dar în graficele din celalalte subpuncte se vor vedea și acele singularități. Ele se anulează în funcția de transfer și nu au influență remarcabilă asupra comportarea sistemului.

4.3. Reprezentarea singularităților în planul complex



Observație: polile și zerourile care se anulează nu am reprezentat. Dacă este necesar, le pot reprezenta cu ușurință la examen.

5. Forme canonice de control

În cele ce urmează, se vor prezenta două forme canonice. Scopul formelor canonice este de a pune în evidență fenomenele de controlabilitate și de observare și pentru a fi posibil trecerea de la o funcție de transfer în spațiul stărilor.

5.1. Forma Canonica de Control – FCC

Se consideră un sistem LTI descris prin funcția de transfer:

$$\text{Forma canonică de control este: } \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{FCC} & B_{FCC} \\ \hline C_{FCC} & D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 & -a_0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \hline b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_1 & b_0 & d \end{array} \right)$$

Se ia funcția de transfer cu gradul corespunzător sistemului (unde $s^n=4$ în cazul de față) și se poate determina FCC simbolic.

Cu ajutorul funcției MATLAB *tf2ss(num,den)* obținem numeric forma canonica de control.

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{FCC} & B_{FCC} \\ \hline C_{FCC} & D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc|c} -63297 & -14358e5 & -13568e9 & -43417e12 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -202020 & -83795e5 & -86834e9 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

5.2. Forma Canonica de Observare – FCO

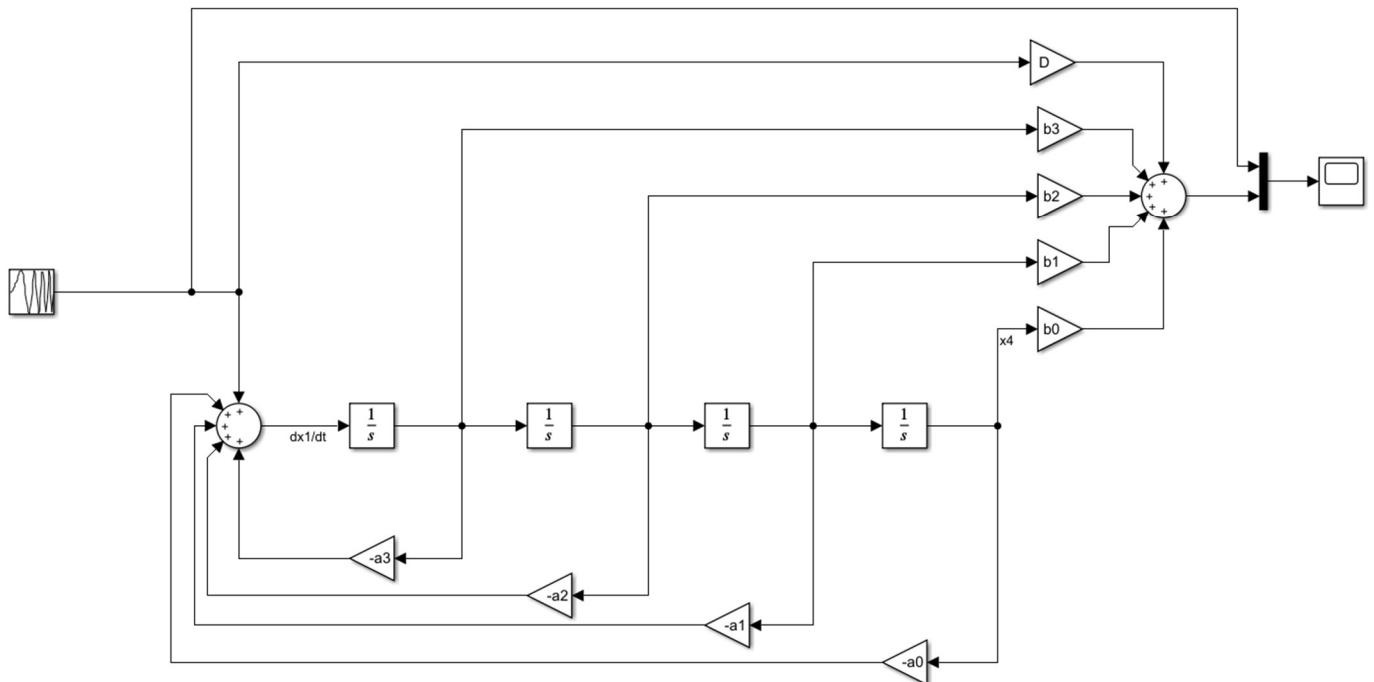
Forma canonica de observare este:

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{FCO} & B_{FCO} \\ \hline C_{FCO} & D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} -a_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 & b_{n-1} \\ -a_{n-2} & 0 & \dots & 0 & 0 & b_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_1 & 0 & \dots & 0 & 1 & b_1 \\ -a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_0 \\ \hline 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & d \end{array} \right).$$

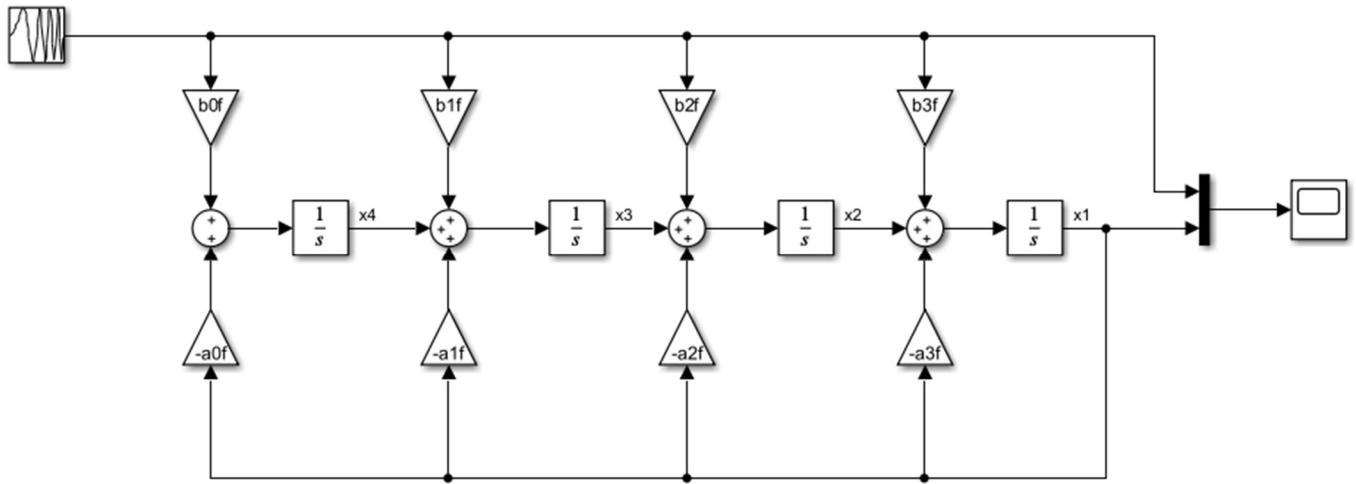
$$A_{FCO} = A_{FCC}^T, \quad B_{FCO} = C_{FCC}^T, \quad C_{FCO} = B_{FCC}^T.$$

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{FCO} & B_{FCO} \\ \hline C_{FCO} & D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} -63297 & 1 & 0 & 0 & -202020 \\ -14358e5 & 0 & 1 & 0 & -83795e5 \\ -13568e9 & 0 & 0 & 1 & -86834e9 \\ -43417e12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

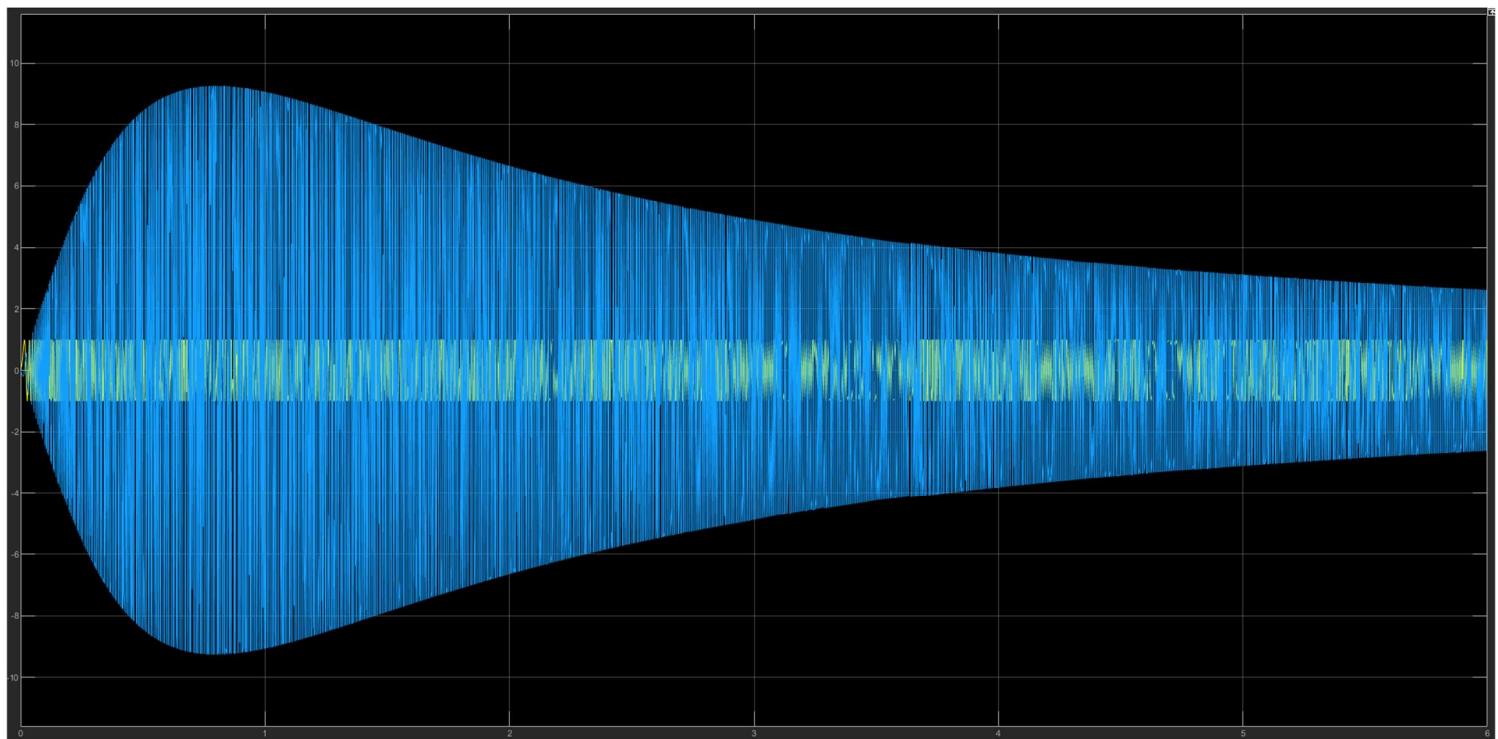
5.3. Scheme bloc FCC și FCO Simulink



Forma canonica de control



Forma canonica de observare



Determinarea tipului filtrului – FTB

6. Funcția de transfer în formă minimală

6.1. Determinarea funcției de transfer în formă minimală

După cum se știe, funcția de transfer se poate exprima ca un raport de două

$$H(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \sum_{k \geq 0} \gamma_k s^{-k}, \quad m \leq n,$$

polinoame: γ_k

unde sunt parametrii Markov. Nu toți parametrii sunt liniar independenti.

După cum spune și teorema, funcția de transfer $H(s)$ este în formă minimală dacă și numai dacă $\text{rang}(\mathcal{H}_{n,n}) = n$, unde n este ordinul sistemului (procesului) pe care descrie funcția de transfer, iar $\mathcal{H}_{n,n}$ este matricea Hankel a sistemului.

În continuare se va verifica dacă funcția de transfer a procesului curent este sau nu este în formă minimală și dacă nu este, se va determina forma minimală.

Funcția de transfer este: $H(s) = \frac{\frac{1}{R_1 C_4} s}{s^2 + \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_4 C_4}\right) s + \frac{1}{R_1 R_4 C_1 C_4}} = \frac{-2.0202 \cdot 10^5 s}{s^2 + 2.182 \cdot 10^4 s + 1.01 \cdot 10^8}$

Parametrii Markov sunt:

$\gamma_0 = 0, \gamma_1 = -2.0202 \cdot 10^5, \gamma_2 = 4.4077 \cdot 10^9, \gamma_3 = -7.5762 \cdot 10^{13}, \gamma_4 = 1.2078 \cdot 10^{18}$, calculați cu ajutorul MATLAB-ului, date fiind numere foarte mari.

Se formează matricea Hankel de ordin 2, funcția de transfer fiind de ordin 2:

$$\mathcal{H}_{2,2} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.0202 \cdot 10^5 & -4.4077 \cdot 10^9 \\ -4.4077 \cdot 10^9 & -7.5762 \cdot 10^{13} \end{pmatrix}$$

Se obține $n' = \text{rang}(\mathcal{H}_{2,2}) = 2$. $n' = n = 2$, ceea ce înseamnă că funcția de transfer este în formă minimală.

Dacă am fi luat funcția de transfer de ordinul 4, nefăcând simplificările, aici reiese că funcția de transfer nu este în formă minimală și continuând algoritmul, s-ar fi obținut $H_m(s)$, funcția de transfer în formă minimală.

Simplificările fiind evidente și ușor de făcute la determinarea funcției de transfer, au fost făcute și astfel s-a obținut direct funcția de transfer în formă minimală.

Observație: Considerând valori fizice mai mici ai componentelor din circuit (rezistoarele și condensatoare) este posibil ca am fi obținut numere "mai frumoase" și mai ușor de lucrat cu ele. De asemenea, banda de trecere a filtrului s-ar modifica la una mai mică. (presupunere)

6.2. Algoritmul pentru a determina fdt în formă minimală

Continuarea algoritmului dacă obținem rangul matricei Hankel mai mic decât ordinul funcției de transfer este:

- Se rezolvă un sistem de forma

$$\text{redus la primele } n' \text{ ecuații, unde } n' \text{ este} \quad - \begin{pmatrix} \gamma_{n+1} \\ \gamma_{n+2} \\ \vdots \\ \gamma_{2n} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_n \\ \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_n & \gamma_{n+1} & \cdots & \gamma_{2n-1} \end{pmatrix}}_{\mathcal{H}_{n,n}} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$$

rangul matricei Hankel.

- Se rescrie sistemul

$$\text{pentru } n' \text{ și se obține} \quad \begin{pmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_n & \gamma_{n-1} & \cdots & \gamma_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix}$$

- Funcția de transfer în formă minimală va fi

$$H_m(s) = \frac{\beta'(s)}{\alpha'(s)}.$$

7. Stabilitatea sistemului

7.1. Determinarea stabilității interne

7.1.1. Analizând valorile proprii ale matricei de stare A

Cu această metodă se consideră intrarea sistemului $u = 0$. Astfel, soluția ecuației de stare este

$$x(t) = e^{At}x(0).$$

Aplicând transformata Laplace, se obține

$$\mathcal{L}\{e^{At}\} = (sI - A)^{-1}.$$

Se impune $\det(\lambda I - A) = 0$ și se obțin valorile proprii ale matricei A ca fiind soluțiile acestei ecuații. Pentru ca sistemul să fie intern stabil, trebuie ca toate valorile proprii să fie în semiplanul complex stâng, adică cu partea reală negativă:

$$\operatorname{Re}\{\lambda_i\} < 0, \forall \lambda_i \in \Lambda(A).$$

Calculăm valorile proprii ale matricei de stare:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I_4 - A) &= \begin{vmatrix} \lambda + \frac{1}{R_1 C_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R_1 C_2} & \lambda + \frac{1}{R_2 C_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{R_1 C_3} & 0 & \lambda + \frac{1}{R_3 C_3} & 0 \\ \frac{1}{R_1 C_4} & 0 & 0 & \lambda + \frac{1}{R_4 C_4} \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^{1+1} \left(\lambda + \frac{1}{R_1 C_1} \right) \left(\lambda + \frac{1}{R_2 C_2} \right) \left(\lambda + \frac{1}{R_3 C_3} \right) \left(\lambda + \frac{1}{R_4 C_4} \right) = 0 \end{aligned}$$

Calculăm valorile proprii:

$$\begin{aligned} \left(\lambda + \frac{1}{R_1 C_1} \right) \left(\lambda + \frac{1}{R_2 C_2} \right) \left(\lambda + \frac{1}{R_3 C_3} \right) \left(\lambda + \frac{1}{R_4 C_4} \right) = 0 &\Leftrightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{R_1 C_1}; \lambda_2 = -\frac{1}{R_2 C_2}; \lambda_3 \\ &= -\frac{1}{R_3 C_3} \text{ și } \lambda_4 = -\frac{1}{R_4 C_4} \end{aligned}$$

Se observă deja că toate valorile proprii a matricei A sunt negative (mărurile fizice putând fi doar numere pozitive), deci se concluzionează că sistemul este intern asymptotic stabil.

Se determină valorile proprii și cu ajutorul MATLAB-ului, pentru verificare utilizând funcția `eig`:

`eig (A)`

Rezultatele de mai sus confirmă și rezultatul din MATLAB:

```
>> eig(A)

ans =

1.0e+04 *

-1.5152
-2.0202
-2.1277
-0.6667
```

Figure 4: Rezultatul funcției `eig`

7.1.2. Folosind criteriul Routh-Hurwitz

Criteriul Ruth-Hurwitz este următorul:

Pentru a determina numărul rădăcinilor din semiplanul drept al unui polinom

$P_c(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0, \quad a_n \neq 0$, construim tabelul Routh-Hurwitz astfel:

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	\dots
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	\dots
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	\dots
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	\dots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
s^0	m_1	0	0	\dots

Acest tabel are câteva reguli de completare:

- dacă nu există suficienți coeficienți pentru a completa o linie, aceasta se completează cu 0;

- linia a treia se completează astfel:

$$b_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}, \quad b_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}, \dots$$

- linia a patra se completează astfel:

$$c_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1}, \quad c_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1}$$

- algoritmul continuă până se calculează m_1 corespunzător liniei s^0 ;
- dacă o linie este formată doar din elemente egale cu 0, aceasta se înlocuiește cu derivata liniei anterioare
- dacă primul element al unei linii este 0, aceasta se înlocuiește cu o valoare foarte mică ε și se continuă calculele

Teoremă: Polinomul caracteristic $P_c(s)$ are toate rădăcinile în semiplanul stâng dacă și numai dacă pe prima coloană a tabelului Routh-Hurwitz nu există nicio schimbare de semn. Numărul schimbărilor de semn coincide cu numărul rădăcinilor din semiplanul drept.

În cazul de față, polinomul caracteristic este

$$\begin{aligned} P_c(\lambda) &= \left(\lambda + \frac{1}{R_1 C_1}\right) \left(\lambda + \frac{1}{R_2 C_2}\right) \left(\lambda + \frac{1}{R_3 C_3}\right) \left(\lambda + \frac{1}{R_4 C_4}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow P_c(\lambda) = \lambda^4 + \left(\frac{1}{R_4 C_4} + \frac{1}{R_3 C_3} + \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_1 C_1}\right) \lambda^3 + \left(\frac{1}{R_3 C_3 R_4 C_4} + \frac{1}{R_2 C_2 R_4 C_4} + \frac{1}{R_2 C_2 R_3 C_3} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{R_1 C_1 R_4 C_4} + \frac{1}{R_1 C_1 R_3 C_3} + \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2}\right) \lambda^2 + \left(\frac{1}{R_2 C_2 R_3 C_3 R_4 C_4} + \frac{1}{R_1 C_1 R_3 C_3 R_4 C_4} + \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 R_4 C_4} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 R_3 C_3}\right) \lambda + \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 R_3 C_3 R_4 C_4} \end{aligned}$$

Numeric vorbind,

$$P_c(\lambda) = \lambda^4 + 6.33 \cdot 10^4 \cdot \lambda^3 + 1.44 \cdot 10^9 \cdot \lambda^2 + 1.5 \cdot 10^{13} \cdot \lambda + 4.34 \cdot 10^{16}$$

Folosim tabelul Routh-Hurwitz pentru acest polinom caracteristic:

λ^4	1	$1.44 \cdot 10^9$	$4.34 \cdot 10^{16}$
λ^3	$6.3 \cdot 10^4$	$1.5 \cdot 10^{13}$	0
λ^2	$1.2 \cdot 10^9$	$4.34 \cdot 10^{16}$	0
λ^1	$1.5 \cdot 10^{13}$	0	0
λ^0	$4.3 \cdot 10^{16}$	0	0

Prima coloană a tabelului Routh-Hurwitz nu are nicio schimbare de semn. Rezultă că polinomul caracteristic are toate răăcăcinile în semiplanul stâng, ceea ce înseamnă că sistemul este intern stabil, ceea ce am demonstrat și anterior.

Calculele liniilor tabelului Routh-Hurwitz au fost făcute pe baza algoritmului descris mai sus.

7.2. Stabilitatea externă

Stabilitatea internă este mai generală și implică stabilitatea externă. Deci, dacă un sistem este intern stabil, evident că va fi și extern stabil. Rezultă că sistemul analizat este și extern stabil.

Acest lucru putem demonstra cu determinarea polilor ai funcției de transfer în formă minimală:

$$H_m(s) = \frac{-\frac{1}{R_1 C_4} s}{(s + \frac{1}{R_1 C_1})(s + \frac{1}{R_4 C_4})} \Leftrightarrow \hat{s}_1 = -\frac{1}{R_1 C_1} < 0 \text{ iar } \hat{s}_2 = -\frac{1}{R_4 C_4} < 0$$

Se conclude că sistemul este extern stabil și din polii funcției de transfer în formă minimală – în sens intrare mărginită, ieșire mărginită (BIBO – Bounded Input, Bounded Output)

7.3. Stabilitatea internă în sens Lyapunov

7.3.1. Metoda II a lui Lyapunov

Se consideră sistemul descris prin ecuația de stare $\dot{x}(t) = Ax(t)$. Conform teoremei lui Lyapunov, se caută o funcție scalară de tip “energie” pozitiv definită, având derivată negativă, ceea ce semnifică un caracter dissipativ a sistemului stabil – un sistem stabil dissipă energie.

Această funcție este de forma

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}, \quad P = P^T > 0 \Rightarrow$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T P \mathbf{x} + \mathbf{x}^T P \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}^T A^T) P \mathbf{x} + \mathbf{x}^T P(A\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T (A^T P + PA)\mathbf{x} < 0.$$

Astfel, sistemul LTI este stabil dacă și numai dacă:

$$A^T P + PA < 0,$$

ceea ce este echivalent cu:

$$A^T P + PA = -Q, \quad Q = Q^T > 0.$$

O metodă algoritmică de a verifica stabilitatea sistemului este de a considera, prin încercări, o matrice pozitiv definită $Q = Q^T > 0$ și de a determina matricea $P = P^T > 0$ prin rezolvarea ecuației Lyapunov atașată: $A^T P + PA = -Q$.

Dacă matricea P are toate valorile proprii pozitive atunci sistemul este intern asymptotic stabil.

7.3.2. Determinarea stabilității interne în sens Lyapunov

Se va alege matricea Q pozitiv definită ca fiind egal cu matricea unitate I_4 .

$$Q = 100 \cdot I_4 = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$$

Dată fiind faptul că sistemul este de ordin 4 și matricele sunt de 4x4, voi lucra cu ajutorul limbajului MATLAB.

Se obține matricea P cu ecuația $A^T P + PA = -Q$.

Cu ajutorul limbajului MATLAB se calculează matricea P utilizând funcția lyap:

$$P = lyap(A', Q) = \begin{pmatrix} 1.75 & -0.019 & -0.0119 & -0.03 \\ -0.019 & 0 & 0 & 0 \\ -0.012 & 0 & 0.0023 & 0 \\ -0.03 & 0 & 0 & 0.003 \end{pmatrix}$$

Valorile proprii a matricei P sunt

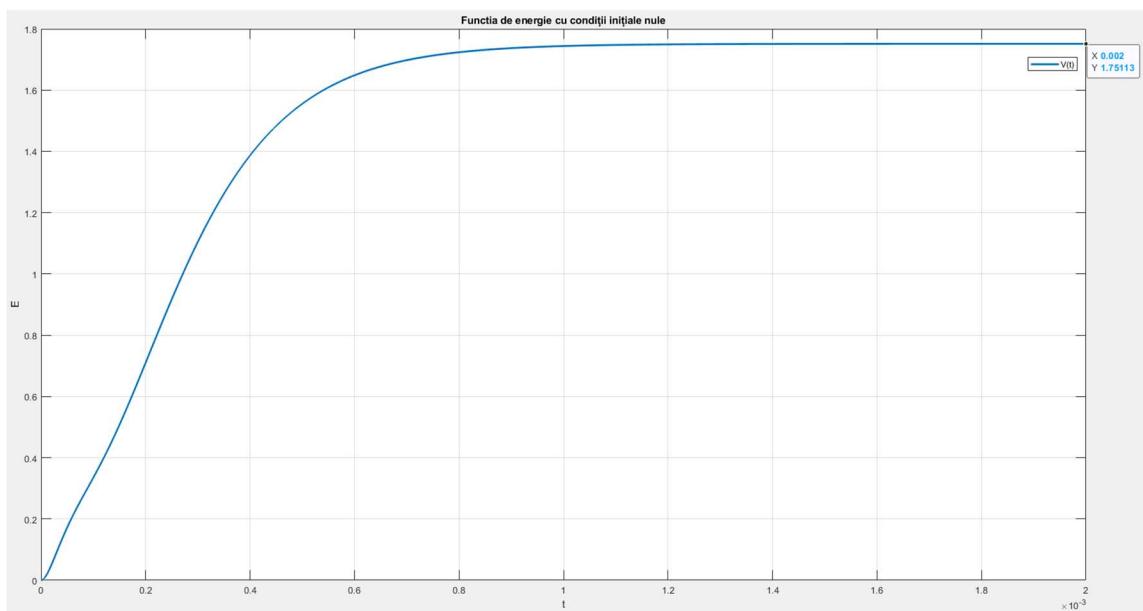
$$\lambda_1 = 0.002; \lambda_2 = 0.0024; \lambda_3 = 0.003 \text{ și } \lambda_4 = 1.75,$$

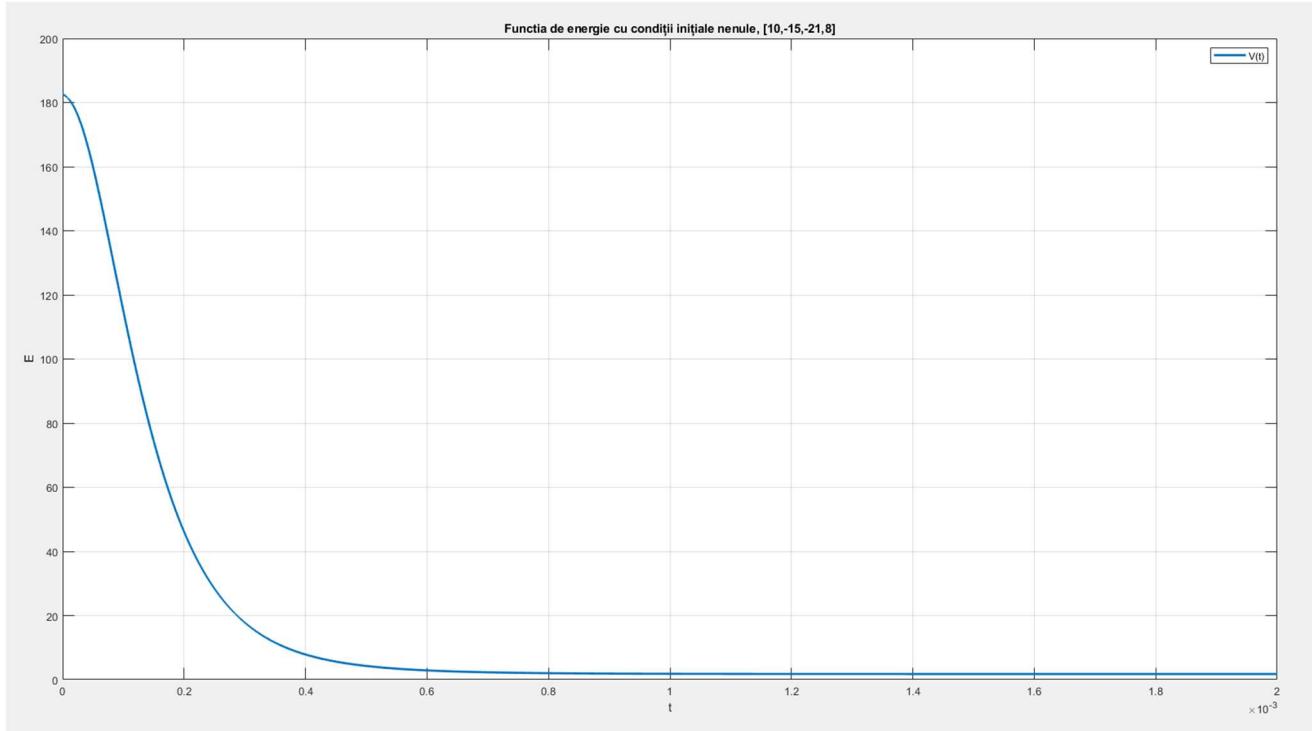
toate pozitive, ceea ce înseamnă că matricea P este pozitiv definită, deci sistemul este intern asymptotic stabil, după cum s-a dedus deja.

Funcția-candidat de tip “energie” pozitiv definită este $V(x) = x^T Px, P = P^T > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow V(x(t)) = V(t) = x^T(t)Px(t)$$

Funcția se determină cu ajutorul MATLAB-ului. În continuare se va prezenta grafic cu evoluția funcției V(t) în timp:





Este evident de pe cele 2 figuri că sistemul disipa energie, deci este stabil.

8. Răspunsurile sistemului

În cazul de față, sistemul are în componență un derivator și un filtru, funcția de transfer este de forma

$$H(s) = \frac{Ks}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

Funcția de transfer în cazul de față este $H(s) =$

$$\frac{-2.02 \cdot 10^5 \cdot s^3 - 8.38 \cdot 10^9 \cdot s^2 - 8.683 \cdot 10^{13} \cdot s}{s^4 + 6.33 \cdot 10^4 \cdot s^3 + 1.436 \cdot 10^9 \cdot s^2 + 1.357 \cdot 10^{13} \cdot s + 4.342 \cdot 10^{16}} = \frac{-2.02 \cdot 10^5 \cdot s}{s^2 + 2.182 \cdot 10^4 \cdot s + 1.0102 \cdot 10^8}$$

Eliminând derivatorul, factorul de proporționalitate este $K = H(0) = -0.002 (\sim 0)$

Funcția de transfer în formă minimală este

$$H_m(s) = \frac{-\frac{1}{R_1 C_4} s}{\left(s + \frac{1}{R_1 C_1}\right)\left(s + \frac{1}{R_4 C_4}\right)} = \frac{-\frac{1}{R_1 C_4} s}{(R_1 C_1 s + 1)(R_4 C_4 s + 1)}$$

Un sistem LTI de ordin superior, în general are următorii parametri ai funcției de transfer:

- constanta de timp T
- factor de proporționalitate K
- factor de amortizare ζ
- pulsăția naturală a oscilațiilor ω_n

Se observă referitor la polii sistemului curent faptul că toate sunt reale și negative. Astfel, la sistemul curent nu se ia în discuție factorul de amortizare și pulsăția naturală a oscilațiilor, acele parametri aparținând sistemelor cu poli complex conjugăți.

8.1. Răspunsul la impuls

Răspunsul la impuls Dirac $\delta(t)$ sau funcția pondere este

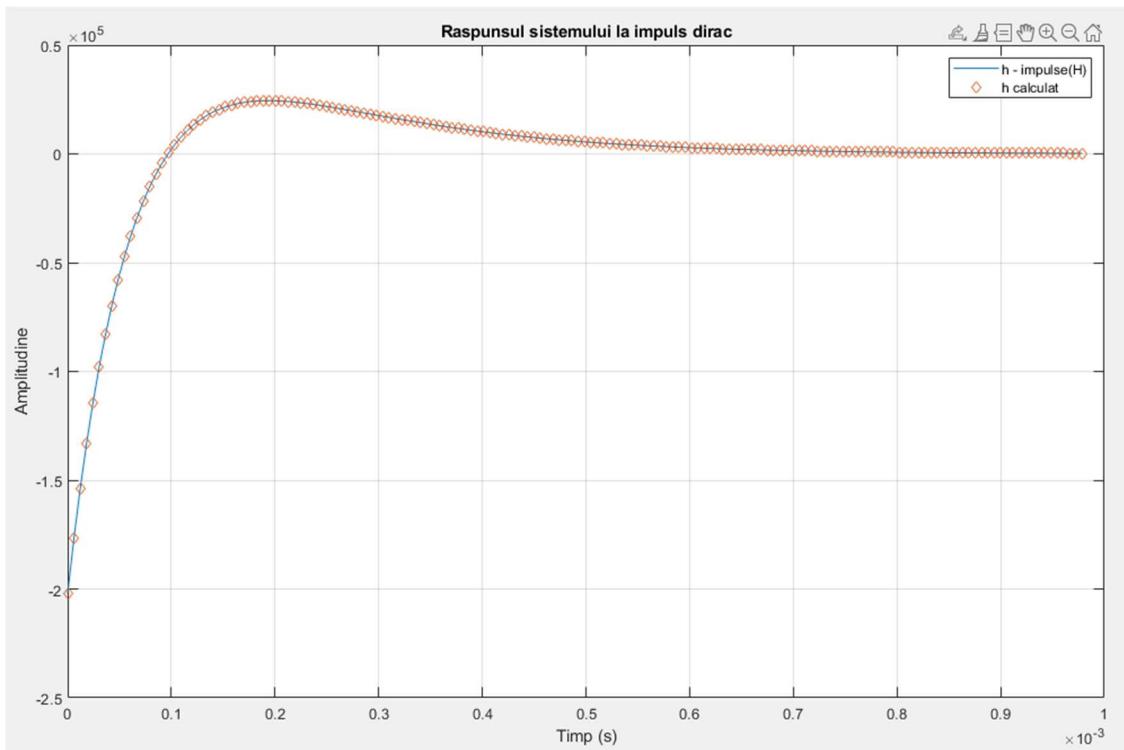
$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\delta(t)\} = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\},$$

unde \mathcal{L}^{-1} este transformata Laplace inversă.

În cazul de față,

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-2.02 \cdot 10^5 \cdot s}{s^2 + 2.182 \cdot 10^4 \cdot s + 1.0102 \cdot 10^8} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-3.6052 \cdot 10^5}{s + 1.5156 \cdot 10^4} + \frac{1.5852 \cdot 10^5}{s + 6.664 \cdot 10^3} \right\} \\
 &\Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow h(s) = -3.6052 \cdot 10^5 \cdot \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + 15156} \right\} + 158520 \cdot \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + 6664} \right\} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow h(t) = -36520 \cdot e^{-15156 \cdot t} + 158520 \cdot e^{-6664 \cdot t}
 \end{aligned}$$

Cu ajutorul limbajului MATLAB se verifică calculele cu ajutorul funcției impulse (grafic):



8.2. Răspunsul indicial

Răspunsul indicial sau răspunsul la o treaptă (treapta Heaviside) al unui sistem este dat de

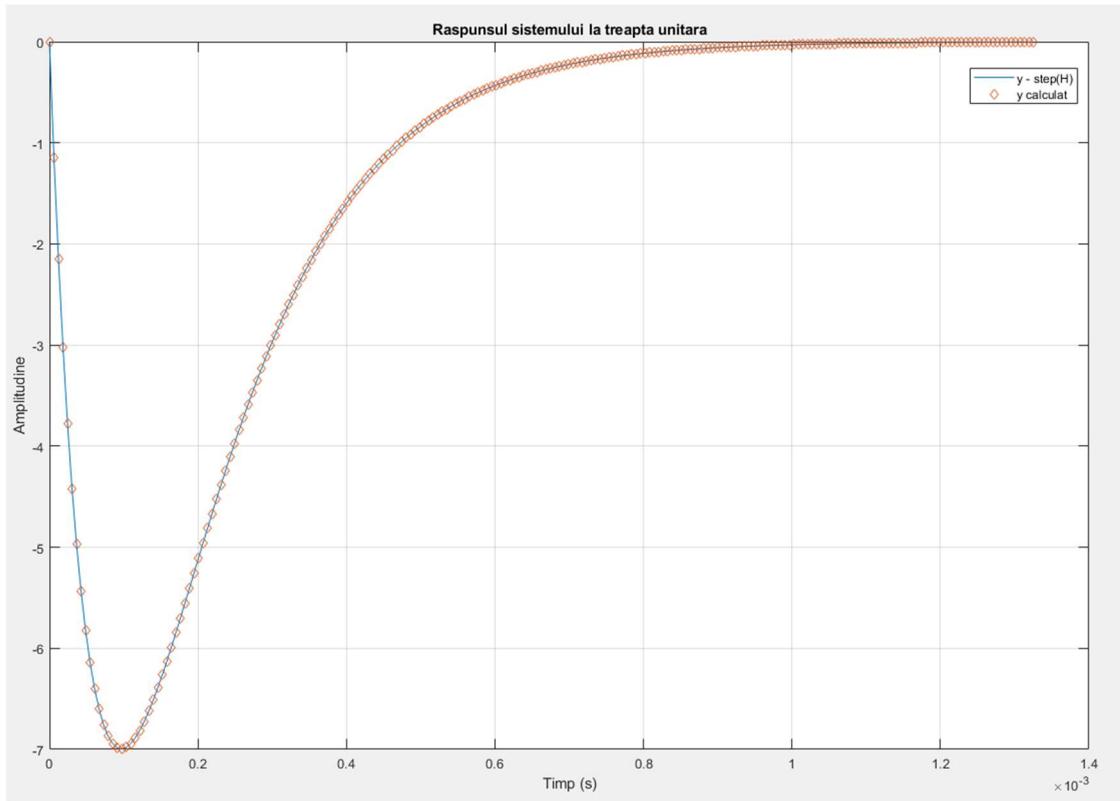
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ H(s) \frac{1}{s} \right\}.$$

În cazul de față,

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-2.02 \cdot 10^5 \cdot s}{s^2 + 2.182 \cdot 10^4 \cdot s + 1.0102 \cdot 10^8} \frac{1}{s} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-2.02 \cdot 10^5}{s^2 + 2.182 \cdot 10^4 \cdot s + 1.0102 \cdot 10^8} \right\} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y_p(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{23.8006}{s + 15156} - \frac{23.8006}{s + 6664} \right\} = 23.8006 \left(\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + 15156} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + 6664} \right\} \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y_p(t) &= 23.8006(e^{-15156 \cdot t} - e^{-6664 \cdot t}) \end{aligned}$$

Analizând rezultatul obținut, se observă că semnalul are doar componentă liberă, componentă permanentă fiind 0 sau foarte mic (-0.002*1(t))

Cu MATLAB, se verifică rezultatele (dacă graficul generat de MATLAB se suprapune cu cel calculat):



De pe graficul răspunsului indicial se poate observa că K are o valoare foarte mică, -0.002, valoare neglijabilă. La simulare cu `step(H)` MATLAB negligează valoarea lui K.

8.3. Răspunsul la rampă

Răspunsul la rampă unitară al unui sistem este dat de $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{H(s)\frac{1}{s^2}\right\}$.

În cazul de față,

$$\begin{aligned} y_v(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2.02 \cdot 10^5 \cdot s}{s^2 + 2.182 \cdot 10^4 \cdot s + 1.0102 \cdot 10^8} \frac{1}{s^2}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2.02 \cdot 10^5}{s^3 + 2.182 \cdot 10^4 \cdot s^2 + 1.0102 \cdot 10^8 \cdot s}\right\} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

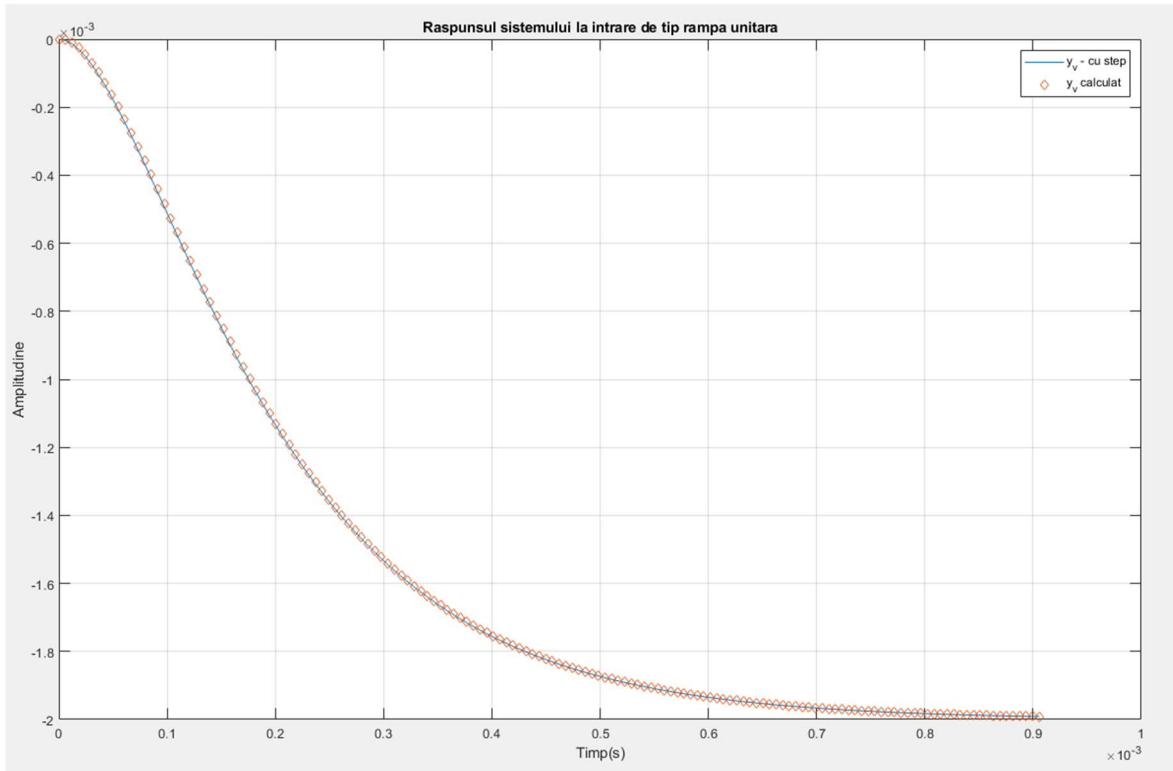
$$\Leftrightarrow y_v(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{0.0016}{s+15156} + \frac{0.0036}{s+6664} - \frac{0.0020}{s} \right\}$$

$$= -0.0016 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+15156} \right\} + 0.0036 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+6664} \right\} - 0.002 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} \Leftrightarrow$$

$$y_v(t) = -0.0016 \cdot e^{-15156 \cdot t} + 0.0036 \cdot e^{-6664 \cdot t} - 0.002 \cdot 1(t)$$

Se observă faptul că intervine o componentă permanentă dar pe măsură foarte mică.

Se verifică rezultatul pe grafic:



9. Performanțele sistemului

Răspunsul unui sistem LTI descris prin funcția de transfer $H(s)$ la o intrare $u(t)$ se calculează astfel:

$$y(t) = h(t) * u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s) \cdot U(s)\} = y_l(t) + y_p(t),$$

unde $y_l(t)$ este componenta liberă sau tranzitorie, proprie sistemului, iar $y_p(t)$ este componenta permanentă sau răspunsul forțat, direct dependentă de intrare.

9.1. Performanțele sistemului în regim tranzitoriu

Pentru sistemul curent de ordin IV descris prin funcția de transfer

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{-2.02 \cdot 10^5 \cdot s^3 - 8.38 \cdot 10^9 \cdot s^2 - 8.683 \cdot 10^{13} \cdot s}{s^4 + 6.33 \cdot 10^4 \cdot s^3 + 1.436 \cdot 10^9 \cdot s^2 + 1.357 \cdot 10^{13} \cdot s + 4.342 \cdot 10^{16}} \\ &= \frac{-2.02 \cdot 10^5 \cdot s}{s^2 + 2.182 \cdot 10^4 \cdot s + 1.0102 \cdot 10^8} \end{aligned}$$

având patru poli reali negativi și trei zerouri (tot reali), se disting următorii parametri de performanță în regim tranzitoriu:

- timpul de răspuns t_r , influențat de constanta de timp T a polului dominant sau aproximativ, suma constantelor de timp a polilor
- timpul de 63%, egal cu o constantă de timp: $y(T) \approx 0,63 \cdot K$
- suprareglajul: σ impus de zerourile sistemului (știind că sistemul are doar poli reali)

Funcția de transfer în cazul de față este

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{-2.02 \cdot 10^5 \cdot s^3 - 8.38 \cdot 10^9 \cdot s^2 - 8.683 \cdot 10^{13} \cdot s}{s^4 + 6.33 \cdot 10^4 \cdot s^3 + 1.436 \cdot 10^9 \cdot s^2 + 1.357 \cdot 10^{13} \cdot s + 4.342 \cdot 10^{16}} = \\ &= \frac{-2.02 \cdot 10^5 \cdot s}{s^2 + 2.182 \cdot 10^4 \cdot s + 1.0102 \cdot 10^8} \end{aligned}$$

Eliminând derivatorul, factorul de proporționalitate este

$$K = H(0) = -0.002 \ (\sim 0)$$

Continuând analiza pe funcția de transfer factorizată cu ajutorul funcției zpk(H) din MATLAB:

$$H(s) = \frac{-202020 \cdot s \cdot (s + 21280) \cdot (s + 20200)}{(s + 21280) \cdot (s + 20200) \cdot (s + 15150) \cdot (s + 6667)}$$

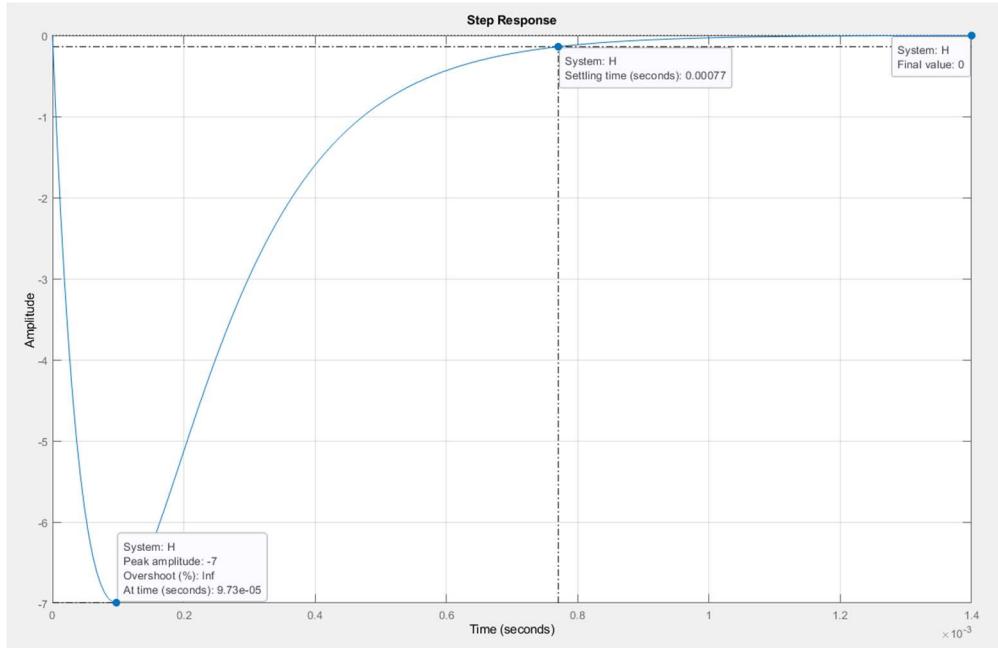
Ce are forma

$$H(s) = \frac{Ks}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

Vor fi calculate constantele de timp de la poli și zerouri. Vom avea șase constante de timp:

$$\begin{aligned}\hat{T}_1 &= T_1^\circ = \frac{1}{21280} s = 46.9 \mu s = 4,69 \cdot 10^{-5} s \\ \hat{T}_2 &= T_2^\circ = \frac{1}{20200} s = 49.5 \mu s = 4.95 \cdot 10^{-5} s \\ \hat{T}_3 &= \frac{1}{15150} s = 66 \mu s = 6.6 \cdot 10^{-5} s \\ \hat{T}_4 &= \frac{1}{6667} s = 150 \mu s = 15 \cdot 10^{-5} s\end{aligned}$$

Se concluzionează că timpul de răspuns este aproximativ 150 microsecunde. Se va extrage rezultatul și din graficul obținut cu ajutorul MATLAB-ului (funcția step(H))



Rezultatul simulării ne dă informații utile:

- timpul de răspuns $t_r = 77 \cdot 10^{-5} s = 77\mu s$, valoare foarte mică, greu de aproximat precis la această scală de mărimi
- suprareglajul $\sigma = \infty$
- $K \approx 0$

9.2. Performanțele sistemului în regim staționar

Componenta permanentă a unui sistem LTI este de natura semnalului de intrare. În funcție de semnalul considerat la intrare, se poate măsura capacitatea sistemului de reglare de a urmări acel semnal prin eroarea stationară ε_{ss} (engl. steady – state, not. alternativă ε_{st}) definită prin:

$$\varepsilon_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} (u(t) - y(t)) = \lim_{s \rightarrow 0} s(U(s) - Y(s)).$$

În ordinea utilizării în practică, se disting următoarele tipuri de erori staționare:

- eroarea staționară la poziție: $\varepsilon_{ssp} [= \varepsilon_{stp}] = 1 - H(0)$, ceea ce semnifică abilitatea sistemului de a urmări o intrare de tip treaptă unitară (treaptă Heaviside), deci $u(t) = 1(t) \Leftrightarrow U(s) = \frac{1}{s}$

- eroarea staționară la vitează: $\varepsilon_{ssv} [= \varepsilon_{stv}]$, ceea ce descrie abilitatea sistemului de a urmări o intrare de tip rampă unitară, deci $u(t) = t \Leftrightarrow U(s) = \frac{1}{s^2}$
- eroarea staționară la acceleratie: $\varepsilon_{ssa} [= \varepsilon_{sta}]$, care descrie abilitatea sistemului de a urmări o intrare de tip parabolă unitară, deci $u(t) = t^2 \Leftrightarrow U(s) = \frac{2}{s^3}$

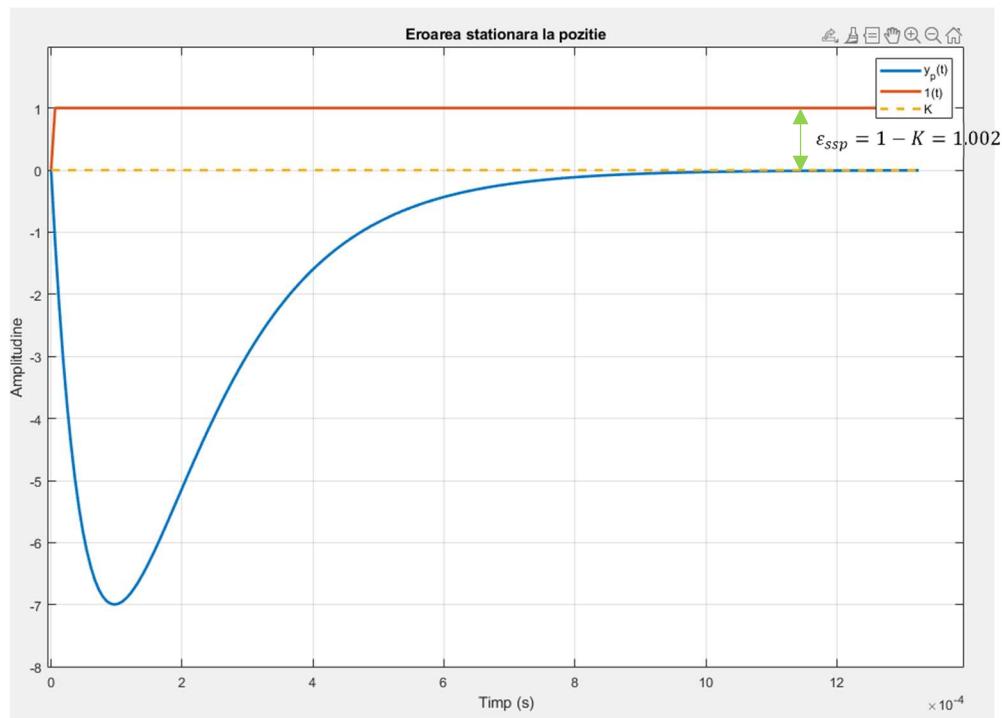
ε_{ssv} este finită numai în cazul în care sistemul are $\varepsilon_{ssp} = 0$, iar ε_{ssa} este finită doar dacă sistemul are $\varepsilon_{ssv} = 0$. Doar la sistemele de performanță foarte mare și acuratețe mare trebuie luară ε_{ssa} în considerare. Exemplu: rachete militare.

9.2.1. Eroarea staționară la poziție

În cazul sistemului curent, $\varepsilon_{ssp} = 1 - K = 1 - 0.002 = 1.002$

Cum este deja calculat răspunsul sistemului la intrarea de tip treaptă unitară, nu se vor face calculele din nou.

În figura următoare se poate observa eroarea staționară la poziție a sistemului:

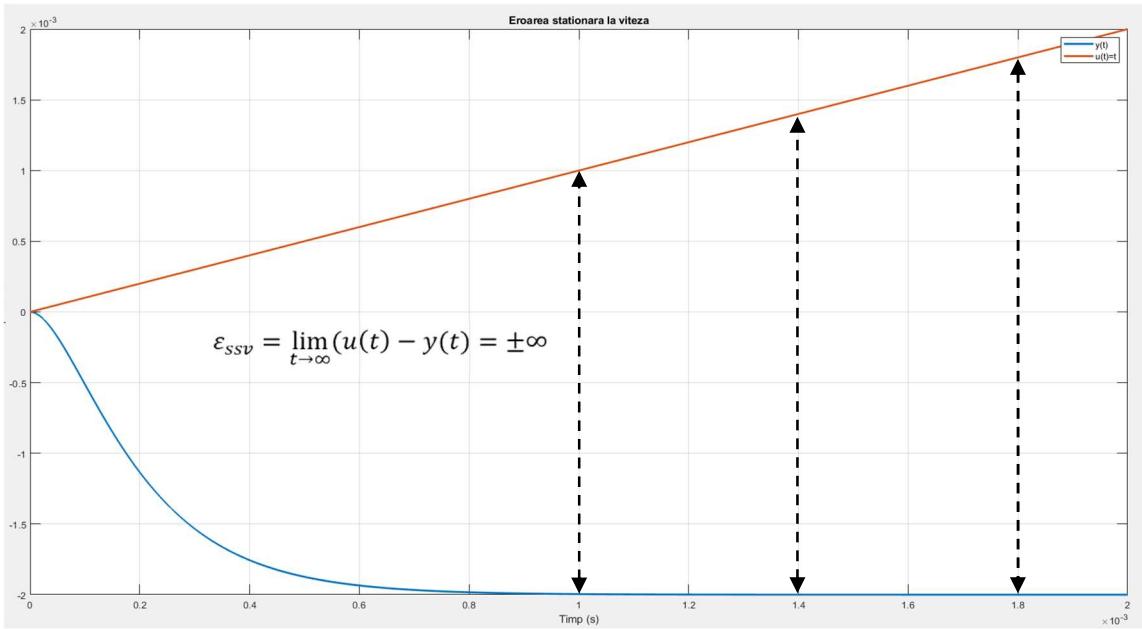


9.2.2. Eroarea staționară la viteza

Eroarea staționară la viteza în cazul sistemului curent va fi infinit dat fiind faptul că eroarea staționară la poziție nu este zero.

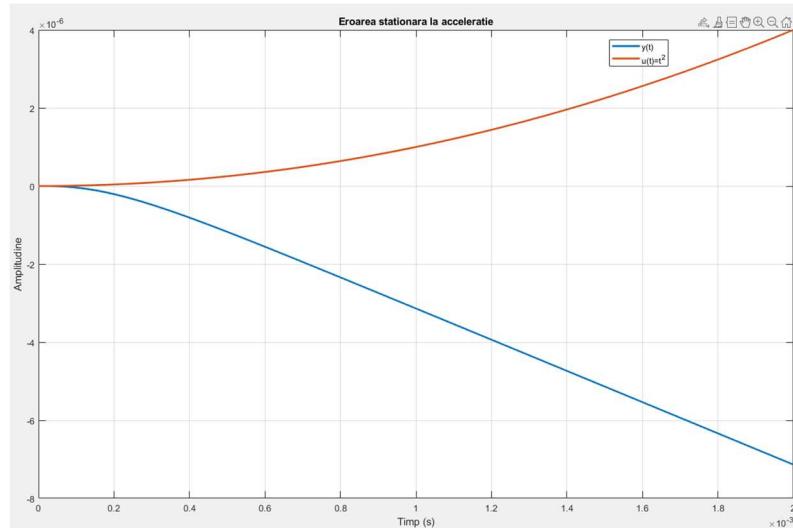
$$\varepsilon_{SSv} = \pm\infty$$

Pe figura următoare este reprezentată eroarea staționară la viteza, evident fiind ca aceasta este infinit.



9.2.3. Eroarea staționară la acceleratie

Dat fiind faptul că eroarea staționară la viteza este infinită, nici nu este cazul să se zică nimic despre eroarea staționară la acceleratie. Se prezintă graficul pentru a observa eroarea staționară la acceleratie:



9.3. Regimul de funcționare și modurile de oscilație a sistemului

Regimul de funcționare prezintă caracterul general al regimului tranzitoriu a unui sistem LTI. Acesta este determinat de modurile de oscilație dominante ale componentei tranzistorii. Polii dominanti se află în dreapta planului complex. În cazul polilor stabili, polii dominanti sunt cei apropiati de axa imaginara.

Modurile de oscilație sunt determinate de polii sistemului LTI, respectiv pot fi de următoarele tipuri:

- în cazul polilor reali de multiplicitate n: $\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{\hat{s}t}$;
- în cazul perechilor de poli complex conjugati de multiplicitate n: $\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{Re\{\hat{s}\}t} \sin(Im\{\hat{s}\}t)$.

Sistemul având 4 poli reali negativi distincți, $\hat{s}_1 \neq \hat{s}_2 \neq \hat{s}_3 \neq \hat{s}_4 \in \mathbb{R}_-$, modurile vor fi:

$$e^{\hat{s}_1 t}, e^{\hat{s}_2 t}, e^{\hat{s}_3 t} \text{ și } e^{\hat{s}_4 t}$$

Regimul de funcționare a sistemului curent este regim aperiodic amortizat.

10. Sistemul cu structură de reglare în buclă închisă

10.1. Determinarea funcției de transfer în buclă închisă

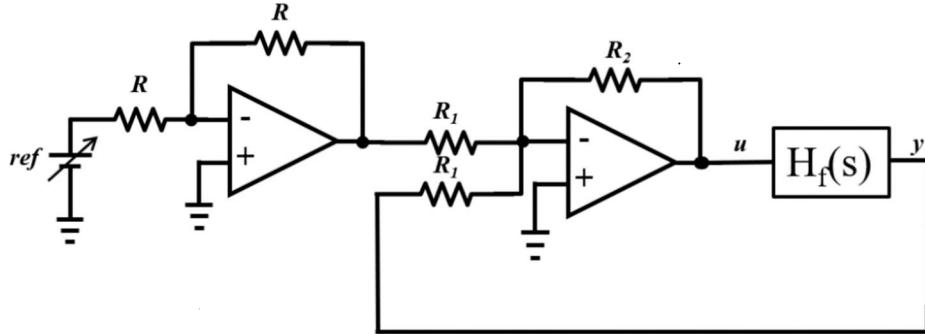


Figure 1: Structura unui sistem de reglare cu regulator proporțional

În figura de mai sus este considerat un sistem de reglare cu buclă închisă cu regulator proporțional. Se va deduce funcția de transfer a sistemului. $H_f(s)$ reprezintă modelul matematic al procesului ales în contextul proiectului.

Se va despărți sistemul de reglare în 2 părți și se va nota cu $H_{AO1}(s)$ funcția de transfer a primei amplificator operațional cu cele două rezistoare notate cu R , respectiv se va nota cu $H_{AO2}(s)$ funcția de transfer al amplificatorului 2 cu rezistoarele R_1 , R_1 și R_2 .

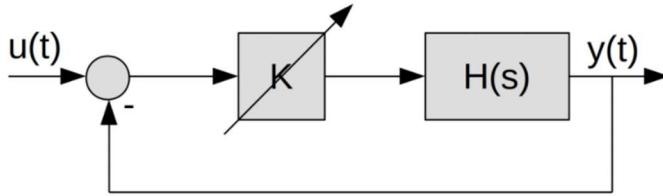
Primul amplificator operațional fiind în montaj inversor, se poate deduce funcția de transfer considerând impedanțe Z echivalente cu R .

$$\text{Asfel, } H_{AO1}(s) = -\frac{Z_{reactie}(s)}{Z_{intrare}(s)} = -\frac{R}{R} = -1.$$

Al doilea amplificator operațional este de fapt un sumator, astfel funcția de transfer va fi

$$H_{AO}(s) = \frac{Z_{reactie}(s)}{R_1(-Ref(s)-Y(s))} = \frac{R_2}{R_1(-H_{AO}(s)-H_f(s))}.$$

Asfel, reiese următoarea schemă:



Pe această schemă $K = \frac{R_2}{R_1}$. Figura reprezintă o schemă de reglare tipică metodei locului rădăcinilor.

Funcția de transfer în buclă închisă este $H_o(s) = \frac{H_d(s)}{1 - H_d(s) \cdot H_r(s)} = \frac{H_d(s)}{1 - H_{des}(s)} = \frac{\frac{K \cdot H(s)}{1 + K \cdot H(s)}}{1 + K \cdot H(s)}, K = \frac{R_2}{R_1} \in (0, \infty)$

În cazul de față, $H_d(s) = H_f(s) \cdot \frac{R_2}{R_1}$, iar $H_r(s) = 1$.

Rezultă că

$$\begin{aligned} H_o(s) &= \frac{H_f(s) \cdot \frac{R_2}{R_1}}{1 + H_f(s) \cdot \frac{R_2}{R_1}} = \frac{R_2 H_f(s)}{R_1 + R_2 H_f(s)} \\ &= \frac{R_2 \frac{-202020s \cdot (s + 21280)(s + 20200)}{(s + 1515)(s + 6667)(s + 21280)(s + 20200)}}{R_1 + R_2 \frac{-202020s \cdot (s + 21280)(s + 20200)}{(s + 1515)(s + 6667)(s + 21280)(s + 20200)}} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow H_o(s) = \\ &= \frac{-R_2 \cdot 202020 \cdot s \cdot (s + 21280) \cdot (s + 20200)}{R_1 \cdot (s + 1515)(s + 6667)(s + 21280)(s + 20200) - R_2 \cdot 202020 \cdot s \cdot (s + 21280) \cdot (s + 20200)}, \end{aligned}$$

funcția de transfer în buclă închisă.

Polii sistemului $H(s)$ în buclă închisă sunt determinați de ecuația caracteristică:

$$P_c(s) = 1 + K \cdot H(s) \equiv 0$$

Pentru $H(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}$ rezultă:

$$1 + K \cdot H(s) = 0 \Leftrightarrow \alpha(s) + K \cdot \beta(s) = 0.$$

Astfel, pentru $K \rightarrow 0$, polii sistemului închis sunt dați de rădăcinile polinomului de la numitor, $\alpha(s) = 0$, iar

pentru $K \rightarrow \infty$, polii sistemului închis tind la rădăcinile polinomului de la numărător:

$$\frac{1}{K} \alpha(s) + \beta(s) = 0$$

În concluzie, polii sistemului închis pornesc din polii sistemului deschis, respectiv tind la zerourile sistemului deschis, pentru $K \in [0, \infty)$.

Se poate constata că, dacă sistemul inițial în buclă deschisă descris prin $H(s)$ are ordinul n , echivalent cu a avea n poli, atunci și sistemul rezultat în urma închiderii buclei are tot ordin n , în cazul în care nu există simplificări între poli și zerouri. Locul geometric al rădăcinilor sistemului în buclă închisă, ca funcție de parametrul K , va avea atunci n ramuri.

Parametrul K în cazul de față este egală cu $\frac{R_2}{R_1}$, adică cu valoarea acestor rezistențe din schema de regulator impus.

10.2. Trasarea și interpretarea locului rădăcinilor

10.2.1. Regulile de trasare

1. Locul rădăcinilor este simetric față de axa reală.
2. Se marchează cu un X în planul complex poziția polilor în buclă deschisă. Cele n ramuri ale locului rădăcinilor pleacă din polii sistemului deschis.
3. Se marchează cu O în planul complex poziția zeroului în buclă deschisă. m ramuri ale locului rădăcinilor ajung în zerourile sistemului deschis, iar celelalte $n - m$ ramuri vor tinde asimptotic spre infinit.
4. Asimptotele se vor intersecta în centrul de greutate al locului rădăcinilor situat pe axa reală și calculat cu ajutorul formulei:

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n \operatorname{Re}(\hat{s}_i) - \sum_{i=1}^m \operatorname{Re}(\hat{s}_i)}{n - m},$$

iar unghiurile de plecare sunt:

$$\Phi_{a_i} = \frac{(2i - 1)\pi}{n - m}, \quad i = \overline{1, n - m}.$$

5. Un punct s_x de pe axa reală aparține locului rădăcinilor dacă este respectată condiția de fază:

$$\sum_{i=1}^m \angle(s_x - \dot{s}_i) - \sum_{i=1}^n \angle(s_x - \hat{s}_i) = \angle\left(\frac{-1}{k \cdot k'}\right).$$

Astfel:

- pentru $k' > 0$, atunci un punct de pe axa reală se află pe locul rădăcinilor dacă în partea dreaptă există un număr impar de singularități
- pentru $k' < 0$, atunci un punct de pe axa reală se află pe locul rădăcinilor dacă în partea dreaptă există un număr par de singularități.

6. Unghiurile de plecare din poli se calculează astfel:

- pentru $k' > 0$ avem:

$$\phi_{\hat{s}_j} = \sum_{i=1}^m \angle(\hat{s}_j - \dot{s}_i) - \sum_{i=1, i \neq j}^n \angle(\hat{s}_j - \hat{s}_i) - (2l + 1)\pi, \quad l \in \mathbb{Z};$$

- pentru $k' < 0$ avem:

$$\phi_{\hat{s}_j} = \sum_{i=1}^m \angle(\hat{s}_j - \dot{s}_i) - \sum_{i=1, i \neq j}^n \angle(\hat{s}_j - \hat{s}_i) - 2l\pi, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

7. Unghiurile de sosire în zerouri se calculează astfel:

- pentru $k' > 0$ avem:

$$\phi_{\dot{s}_j} = - \sum_{i=1, i \neq j}^m \angle(\dot{s}_j - \dot{s}_i) + \sum_{i=1}^n \angle(\dot{s}_j - \hat{s}_i) + (2l + 1)\pi, \quad l \in \mathbb{Z};$$

- pentru $k' < 0$ avem:

$$\phi_{\dot{s}_j} = - \sum_{i=1, i \neq j}^m \angle(\dot{s}_j - \dot{s}_i) + \sum_{i=1}^n \angle(\dot{s}_j - \hat{s}_i) + 2l\pi, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

8. Intersecția ramurilor locului rădăcinilor cu axa imaginară se calculează cu ajutorul tabelului Routh-Hurwitz aplicat pentru ecuația caracteristică $1 + kH_{des}(s) = 0$.
9. Punctele de desprindere de pe axa reală sau de revenire pe axa reală se calculează rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} 1 + kH_{des}(s) = 0 \\ \frac{dH_{des}(s)}{ds} = 0 \end{cases}.$$

Acele soluții ale sistemului care aparțin acei reale unde se poate afla locul rădăcinilor vor fi puncte de desprindere sau de apropiere, iar valoarea lui k corespunzătoare unei soluții s_x este:

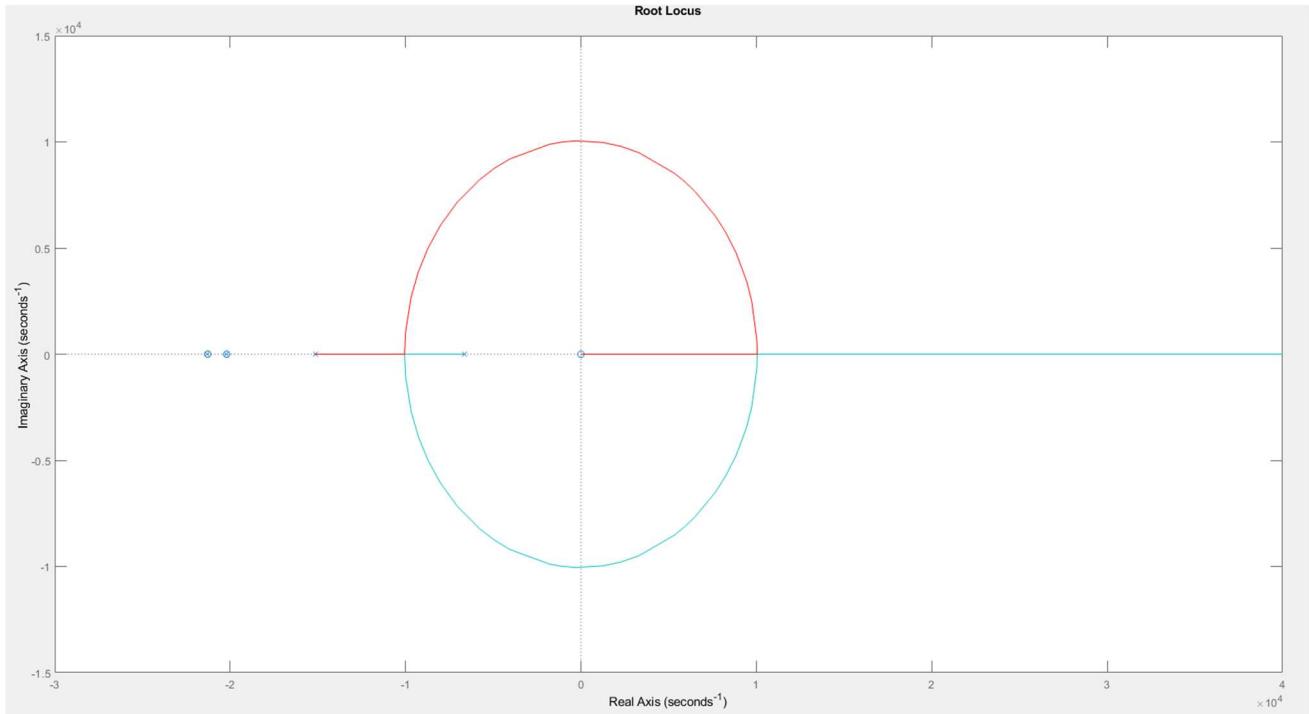
$$k_x = -\frac{1}{H_{des}(s_x)}$$

Observație: Locul Rădăcinilor se trasează pentru $H_{des}(s)$ și se interpretează pentru $H_o(s)$. Polii sistemului în buclă închisă pornesc din polii sistemului în buclă deschisă.

10.2.2. Locul rădăcinilor

Cu ajutorul limbajului MATLAB se poate trasa locul rădăcinilor cu ajutorul funcției `rlocus(H)`.

Cu respectarea regulilor de trasare se poate face trasarea pe foaie, dar în cazul de față graficul va fi realizat cu MATLAB. Mai sus au fost notate regulile de trasare pentru a reproduce și cu mâna la nevoie.



10.2.3. Interpretarea LR

De pe grafic se poate vedea 2 ramuri: o ramură pornește din polul $s_1 = -1.515 \cdot 10^4$ (ramura roșie) iar cealaltă ramură pornește din polul $s_2 = -0.6667 \cdot 10^4$ (ramura albastră/cyan).

De menționat că mai sunt 2 poli și 2 zerouri a sistemului care coincid. În acel caz, ramurile se elimină. Se poate vedea pe LR în semiplanul complex stâng acele 4 puncte.

Cum un singur zero a sistemului rămâne, o ramură va pleca spre infinit. Cele 2 ramuri se ciocnesc în punctul $k_{despr} = 0.0085$ și se despart în poli complex conjugați.

Cele 2 ramuri se întâlnesc în semiplanul complex drept, în punctul $k_{apr} = 0.207$. De remarcat că suntem deja în semiplanul complex drept, deci stabilitatea sistemului s-a schimbat în punctul $k_{cr} = 0.108$.

O ramură se duce în zeroul cu valoarea 0, iar cealaltă ramură se duce în infinit.

De remarcat faptul că $k = \frac{R_2}{R_1}$.

În funcție de k, sistemul are următoarele proprietăți:

1. Stabilitatea:

- dacă $\frac{R_2}{R_1} \in (0 ; k_{cr} = 0.108]$, sistemul este stabil
- pentru $\frac{R_2}{R_1} \in (k_{cr} = 0.108 ; \infty)$, sistemul este instabil

2. Regimurile de funcționare și modurile de oscilație a sistemului – pentru cele 2 ramuri care nu se anulează

➔ Celelalte ramuri se anulează din cauza că sunt poli și zerouri care coincid.

- pentru $\frac{R_2}{R_1} \in (0, k_{despr} = 0.0085)$, regim aperiodic amortizat, cu modurile $e^{\hat{s}_1 t}, e^{\hat{s}_2 t}; \hat{s}_1 \neq \hat{s}_2 \in \mathbb{R}_-$
- pentru $\frac{R_2}{R_1} = k_{despr} = 0.0085$, regim aperiodic critic amortizat, cu modurile $e^{\hat{s} t}, t e^{\hat{s} t}; \hat{s}_1 = \hat{s}_2 = \hat{s} \in \mathbb{R}_-$
- pentru $\frac{R_2}{R_1} \in (k_{despr} = 0.0085; k_{cr} = 0.108)$, regim oscilant amortizat, cu modurile $e^{Re\{\hat{s}_{1,2}\}t} \sin(Im\{\hat{s}_{1,2}\}t); \hat{s}_1, \hat{s}_2 \in \mathbb{C}_-$
- pentru $\frac{R_2}{R_1} = k_{cr} = 0.108$, regim oscilant întreținut, cu modurile $\sin(Im\{\hat{s}_{1,2}\}t); \hat{s}_{1,2} \in \mathbb{C}, Re\{\hat{s}_{1,2}\} = 0$
- pentru $\frac{R_2}{R_1} \in (k_{cr}; k_{apr} = 0.207)$, regim oscilant neamortizat (instabil), cu modurile $e^{Re\{\hat{s}_{1,2}\}t} \sin(Im\{\hat{s}_{1,2}\}t); \hat{s}_{1,2} \in \mathbb{C}_+$
- pentru $\frac{R_2}{R_1} = k_{apr} = 0.207$ și pentru $\frac{R_2}{R_1} \in (k_{apr}; \infty)$, regim aperiodic neamortizat, cu modurile $e^{\hat{s}_1 t}, e^{\hat{s}_2 t}; \hat{s}_1 \neq \hat{s}_2 \in \mathbb{R}_+$

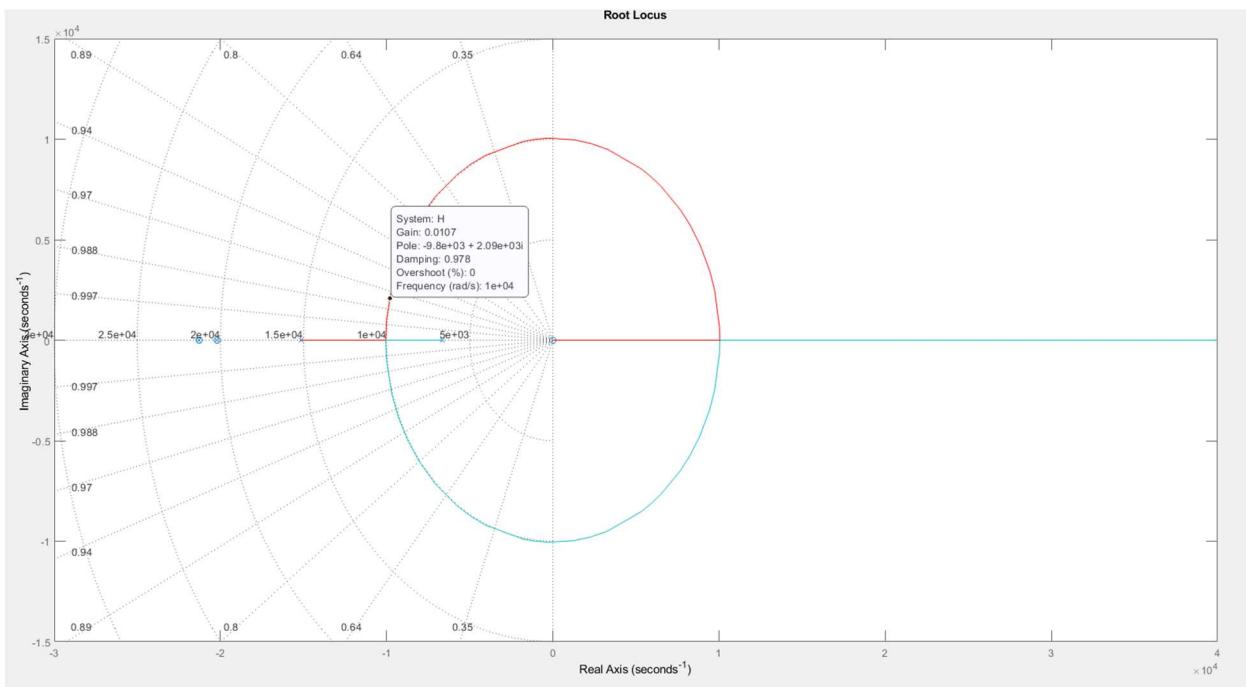
10.2.4. Determinarea performanțelor sistemului

Se va căuta valori pentru rezistențele R_1 și R_2 astfel încât sistemul de reglare:

- să aibă suprareglaj minim
- să aibă cel mai mic timp de urcare posibil

A. Suprareglaj minim

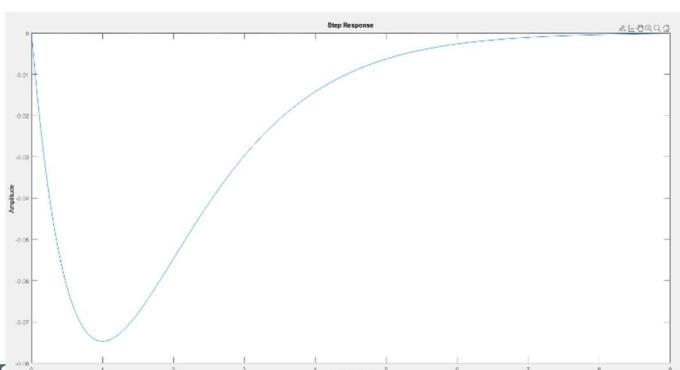
Cu rlocus putem vizualiza grid-ul, iar funcția ne oferă informații foarte utile pentru proiectarea sistemului.



Cu ajutorul funcției rlocus din MATLAB se observă că sistemul are suprareglaj minim atunci când $k < 0,0107$, adică $\frac{R_2}{R_1} < 0,0107$

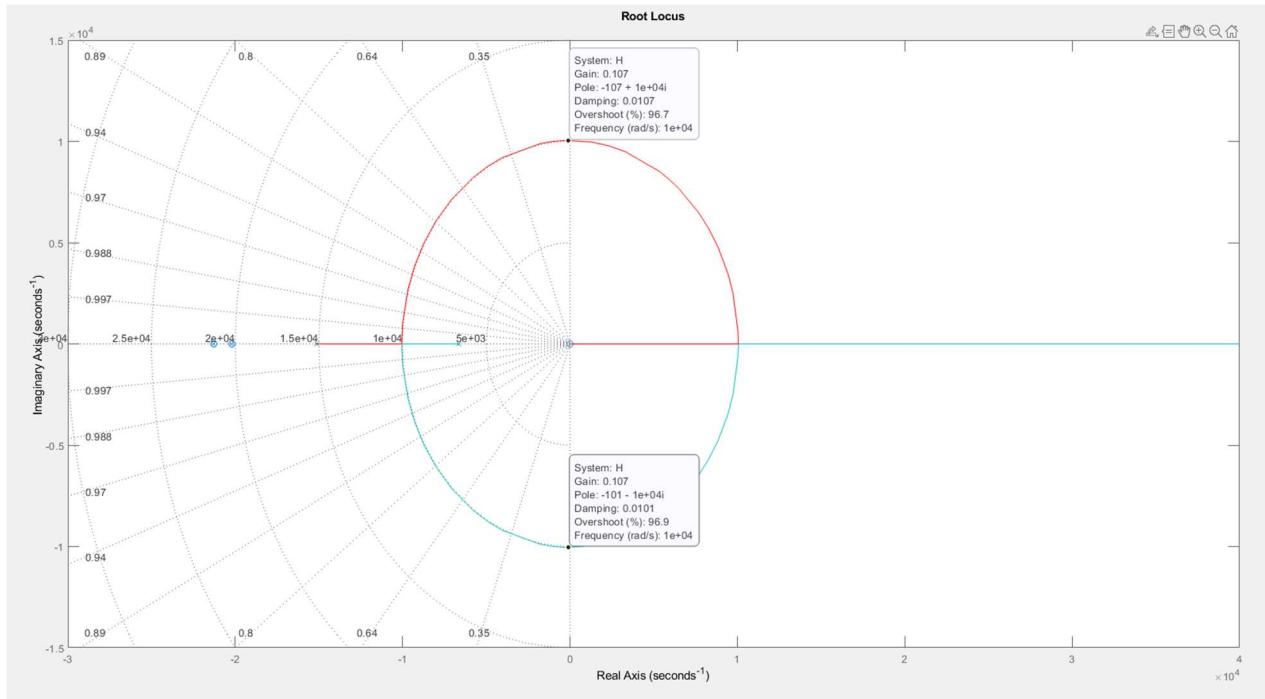
Aceasta înseamnă ca $R_2 < 0,0107 \cdot R_1$. $R_1 = 10\text{k}\Omega \Rightarrow R_2 = \sim 100 \text{ Ohm}$

Validare:



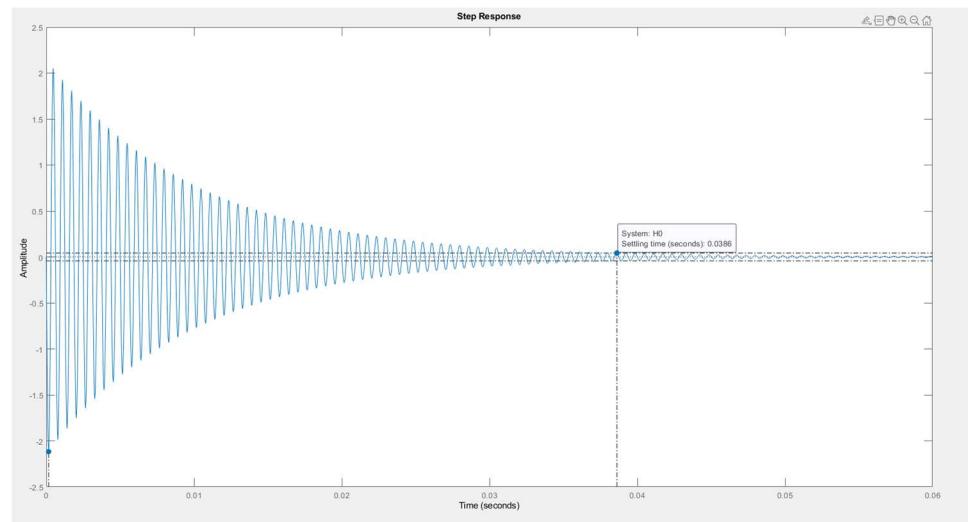
B. Cel mai mic timp de urcare posibil

În acest caz, partea reală a polilor trebuie să fie cât mai mică.
Am ales polii c.c. cele mai apropiate de axa imaginară:

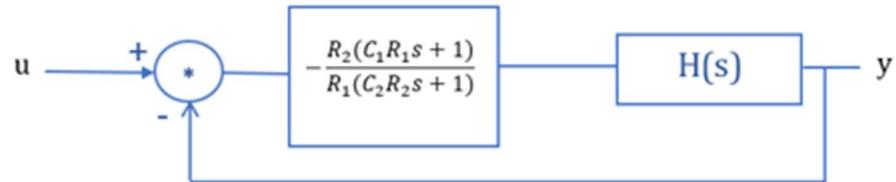
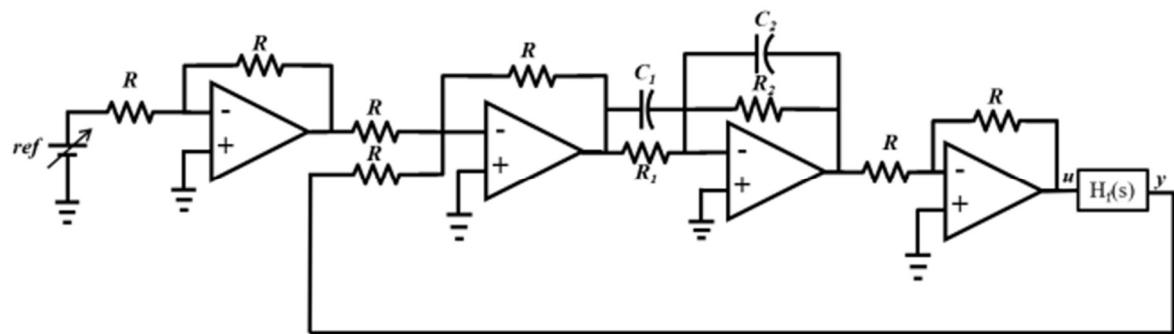


$$\frac{R_2}{R_1} \leq 0.107, \text{ de exemplu } R_2=1\text{KOhm}, R_1 = 100 \text{ Ohm}$$

Validare:



11. Structura de reglare II în buclă închisă



$$H_1(s) = \frac{-R}{R} = -1$$

$$Y(s) = -\frac{Z_r(s)}{Z_{in1}(s)} U_1(s) - \frac{Z_r(s)}{Z_{in2}(s)} U_2(s) = -\frac{Z_r(s)}{Z_{in2}(s)} (U_1(s) - U_2(s))$$

$$\Rightarrow H_2(s) = -\frac{Z_r(s)}{Z_{in1}(s)} = \frac{-R}{R} = -1$$

12. Bibliografie

Pentru elaborarea proiectului au fost utilizate următoarele resurse:

- Îndrumătorul de laborator TSI
- Resursele puse la dispoziție la laboratorul TSI
- Cursul TSI
- Google

Din păcate, neștiind ca nu voi avea suficient timp, există subpuncte nefratare în acest proiect. Pe parcursul săptămânii 14 voi încerca să completez noțiunile care lipsesc din proiect.