Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления (ИУ)»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии (ИУ7)»

ОТЧЕТ

Лабораторная работа №4

по курсу «Методы вычислений»

на тему: «Метод Ньютона»

Вариант № 6

Студент ИУ7-22М (Группа) (Подпись, дата) К.Э. Ковалец (И. О. Фамилия)

Преподаватель (Подпись, дата) П.А. Власов (И. О. Фамилия)

2024 г.

1 Теоретическая часть

Цель работы: изучение метода Ньютона для решения задачи одномерной минимизации.

Задание:

1. Реализовать модифицированный метод Ньютона с конечно-разностной аппроксимацией производных в виде программы на ЭВМ.

2. Провести решение задачи:

$$\begin{cases} f(x) \to min, \\ x \in [a, b] \end{cases} \tag{1.1}$$

   для данных индивидуального варианта;

3. организовать вывод на экран графика целевой функции, найденной точки минимума $(x^*,\ f(x^*))$ и последовательности точек $(x_i,\ f(x_i))$, приближающих точку искомого минимума (для последовательности точек следует предусмотреть возможность «отключения» вывода ее на экран);

4. провести решение задачи с использованием стандартной функции `fminbnd` пакета $MatLAB$.

Таблица 1.1 – Данные индивидуального варианта

№ вар.	**Целевая функция** $f(x)$	**[a, b]**
6	$\mathrm{ch}\left(\frac{3x^3 + 2x^2 - 4x + 5}{3}\right) + \mathrm{th}\left(\frac{x^3 - 3\sqrt{2}x - 2}{2x + \sqrt{2}}\right) - 2.5$	[0, 1]

1.1 Краткое описание метода Ньютона

Для приближения корня x^* используется точка $\overline{x}$ пересечения касательной к графику $g(x)$ в точке текущего приближения с осью Ox.

Пусть $\overline{x}$ — текущее приближение точки x^*. Уравнение касательной к графику функции g в точке $(\overline{x},\ g(\overline{x}))$:

$$y \ - \ \overline{y} \ = \ g'(\overline{x})(x \ - \ \overline{x}). \tag{1.2}$$

Пересечение с OX:

$$\overline{x} \ = \ \overline{x}' \ - \ \frac{g(\overline{x}')}{g'(\overline{x}')}, \tag{1.3}$$

где $\overline{x}'$ — приближение x^* с предыдущего шага, $\overline{x}$ — приближение x^* с текущего шага.

Условие окончанния итераций:

$$|\overline{x} \ - \ \overline{x}'| \ < \ \varepsilon \text{ или } |g(\overline{x})| \ < \ \varepsilon. \tag{1.4}$$

Замечание

1. Метод Ньютона обладает высокой точностью и скоростью сходимости, если начальное приближение выбрано удачно. Если нет — метод может разойтись. Тогда стоит выполнить несколько итераций другого метода, например, золотого сечения.

2. **Модифицированный метод Ньютона.**

   Рассчетная схема метода:

   $$\overline{x} \ = \ \overline{x}' \ - \ \frac{g(\overline{x}')}{g'(x_0)}, \tag{1.5}$$

   где x_0 — начальное приближение корня.

   В качестве очередного приближения для корня x^* используется точка пересечения прямой, проходящей через x_n и параллельной касательной, с осью Ox в точке x_0.

   В данном методе меньше вычислений в рамках одной итерации, но самих итераций больше.

3. **О вычислениии производных.**

Конечно-разностная аппроксимация производных:

$$f'(\overline{x}) \approx \frac{f(\overline{x} + \delta) - f(\overline{x} - \delta)}{2\delta}, \ \delta > 0; \tag{1.6}$$

$$f''(\overline{x}) \approx \frac{f(\overline{x} - \delta) - 2f(\overline{x}) + f(\overline{x} + \delta)}{\delta^2}, \ \delta > 0. \tag{1.7}$$

Схема рассматриваемого метода представлена на рисунке 1.1.

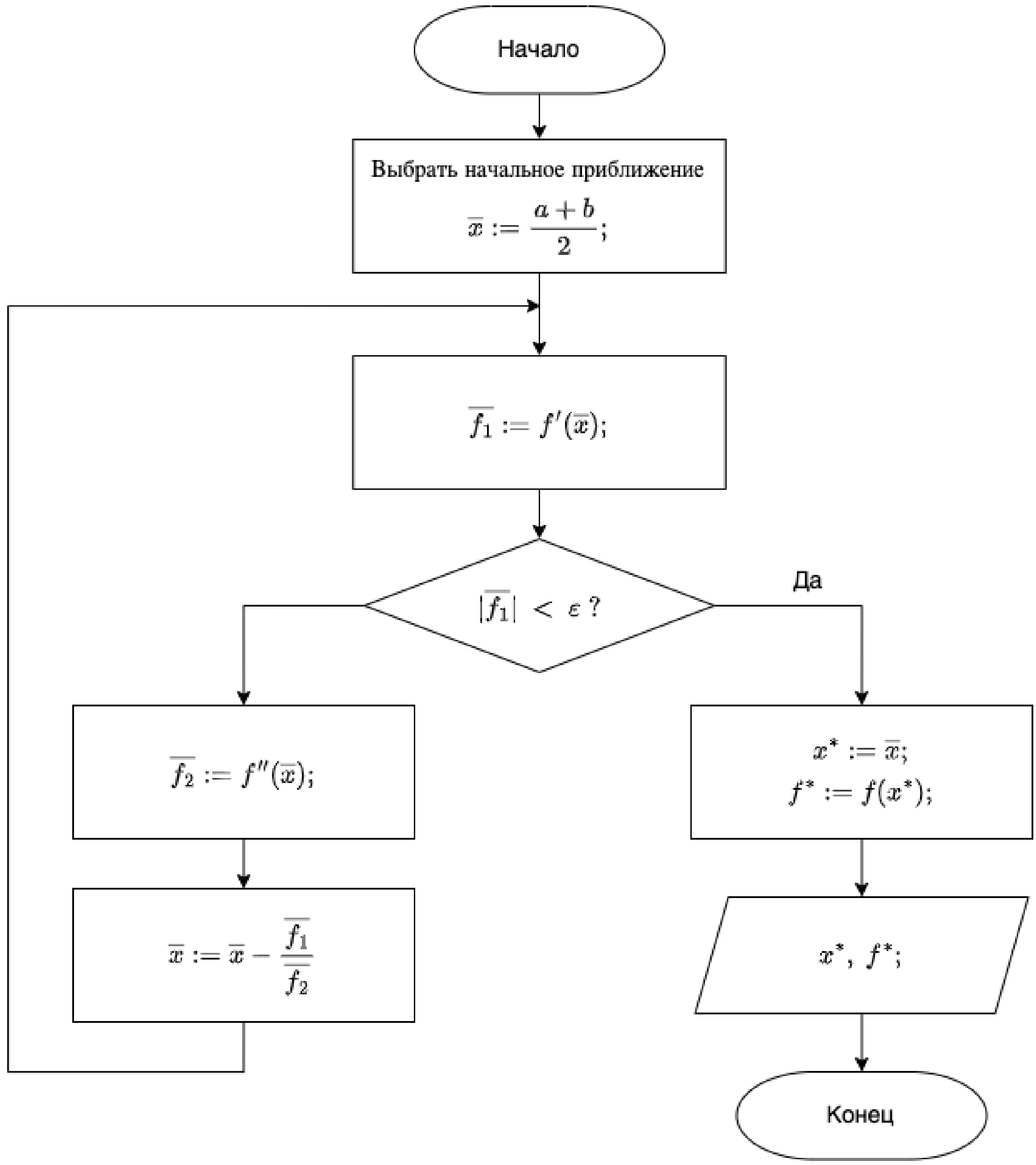

Рисунок 1.1 – Схема алгорима метода Ньютона

2 Практическая часть

Таблица 2.1 – Результаты расчетов для задачи из индивидуального варианта

№ п/п	ε	N	x^*	$f(x^*)$
1	0.01	8	0.4826521305	-1.4738930849
2	0.0001	10	0.4824240968	-1.4738932842
3	0.000001	14	0.4824180859	-1.4738932844

Таблица 2.2 – Обобщающая таблица (для $\varepsilon = 1e - 6$)

№ п/п	Метод	N	x^*	$f(x^*)$
1	Поразрядного поиска	50	0.4824180603	-1.4738932844
2	Золотого сечения	31	0.4824184653	-1.4738932844
3	Парабол	11	0.4824179876	-1.4738932844
4	Ньютона модифицированный	14	0.4824180859	-1.4738932844
5	Функция `fminbnd`	9	0.4824181903	-1.4738932844

В листинге 2.1 представлен код программы.

Листинг 2.1 — Код программы

```
function lab_04()
    clc();

    a = 0;
    b = 1;
    delta = 1e-3;
    eps = 1e-6;

    debugFlag = true;
    delay = 1;

    fplot(@f, [a, b]);
    hold on;

    x = (a + b) / 2;
    f2_x0 = (f(x - delta) - 2 * f(x) + f(x + delta)) / power(delta, 2);
    N = 3;

    while true
        f1 = (f(x + delta) - f(x - delta)) / (2 * delta);
```

Продолжение листинга 2.1

```
        N = N + 2;

        if debugFlag
            fprintf('N = %2d:    x = %.10f;    f1 = %.10f;\n\n', N, x, f1);
            plot(x, f(x), 'xk');
            pause(delay);
        end

        if abs(f1) < eps
            break;
        else
            x = x - f1 / f2_x0;
        end
    end

    x_star = x;
    f_star = f(x);
    N = N + 1;
    scatter(x_star, f_star, 'filled');
    fprintf('Ответ:    N = %2d;    x* = %.10f;    f(x*) = %.10f;\n\n', N, x_star, f_star);

    options = optimset('TolX', eps);
    if debugFlag
        options = optimset(options, 'Display', 'iter');
    end
    [x_star, f_star] = fminbnd(@f, a, b, options);
    fprintf('fminbnd:    x = %.10f;    f(x) = %.10f.\n\n', x_star, f_star);
end

function y = f(x)
    y = cosh((3 .* power(x, 3) + 2 .* power(x, 2) - 4 .* x + 5) ./ 3) + tanh((power(x, 3) - 3 .* power(2, 1/2) .* x - 2) ./ (2 .* x + power(2, 1/2))) - 2.5;
end
```