Wie visualisiert man einen Hyperwürfel

Ivanildo Kowsoleea

25. Dezember 2015

1 Was ist ein Hyperwürfel?

Ein Hyperwürfel ist ein Würfel in der vierten Dimension. Wie sieht so ein Ding aus, und wie konstruiert man so etwas?

Um die Konstruktion besser zu verstehen fangen wir mit einem 0-dimensionalen Würfel an: einen Punkt. Da wir hier nur einen Punkt zur Verfügung braucht man auch keine Koordinaten. Beim Übergang zum eindimensionalen Fall — ein Linienstück — nehmen wir den ursprünglichen Punkt und vergeben die eindimensionale Koordinate (0). Wir Kopieren diesen Punkt, vergeben hier die Koordinate (1), und verbinden beide Punkte mit einander. Das jetzt entstandene Linienstück ist unser eindimensionaler Würfel.

$$(0) \to (1) \tag{1}$$

Wir breiten jetzt aus zur zweiten Dimension. Das Linienstück in (1) bekommt eine zweite Koordinate gleich 0:

$$(0,0) \to (1,0) \tag{2}$$

Anschließend kopieren wir dieses Linienstück und geben der Kopie als zweite Koordinate die 1. Danach verbinden wir jeden Punkt mit seiner Kopie.

$$\begin{aligned}
(0,0) &\to (1,0) \\
(0,1) &\to (1,1) \\
(0,0) &\to (0,1) \\
(1,0) &\to (1,1)
\end{aligned} \tag{3}$$

Diese vier Linienstücke bilden ein Quadrat — die zweidimensionale Variante des Würfels (siehe Abbildung 1 auf Seite 3).

Die vier Koordinatenpaare in (3) geben genau die Liniensegmente an, die mit einander verbunden werden müssen, um ein Quadrat zu erzeugen.

Genau so finden wir die Liniensegmente die wir für ein Würfel (dreidimensional) brauchen. Wir nehme die 4 Liniensegemnte aus (3) und versehen sie mit einer dritten Koordinate die wir gleich 0 stellen. Danach nehmen wir wieder die Liniensegmente, diesmal aber mit der 1 als dritte Koordinate. Die vier Eck-

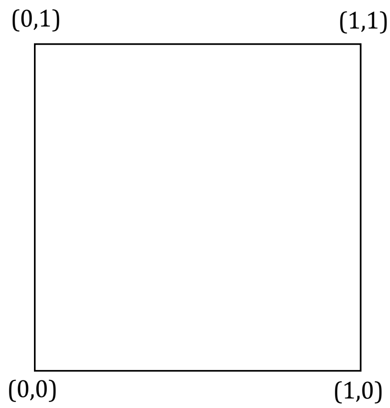

Abbildung 1: Ein Quadrat

punkte verbinden wir noch mit deren Kopien.

$$
\begin{aligned}
(0,0,0) &\rightarrow (1,0,0)\\
(0,1,0) &\rightarrow (1,1,0)\\
(0,0,0) &\rightarrow (0,1,0)\\
(0,1,0) &\rightarrow (1,1,0)\\
\\
(0,0,1) &\rightarrow (1,0,1)\\
(0,1,1) &\rightarrow (1,1,1)\\
(0,0,1) &\rightarrow (0,1,1)\\
(0,1,1) &\rightarrow (1,1,1)\\
\\
(0,0,0) &\rightarrow (0,0,1)\\
(0,1,0) &\rightarrow (0,1,1)\\
(1,0,0) &\rightarrow (1,0,1)\\
(1,1,0) &\rightarrow (1,1,1)
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Die 12 Liniensegmente wür den Würfel sind gegeben in (4). Abbildung 2 auf Seite 4 zeigt den Würfel nochmal.

Die Konstruktion des Hyperwürfels stellt jetzt kein Problem mehr da. Wir versehen die 12 Liniensegmente aus (4) mit einer 4. Koordinate gleich 0. Das wiederholen wir mit einer 4. Koordinate gleich 1 und verbinden die 8 Eckpunkte

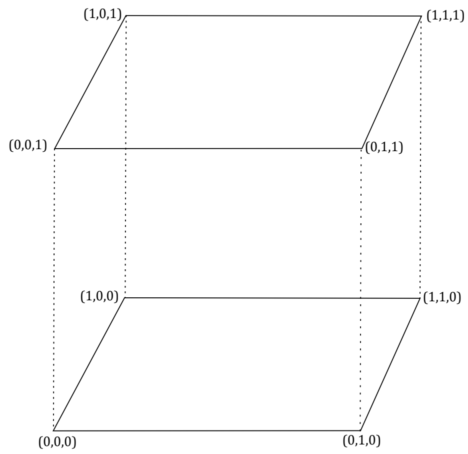

Abbildung 2: Ein Würfel

mit deren Kopien. Das Ergebnis ist:

$$\begin{gathered}
(0,0,0,0) \to (1,0,0,0);\ (0,1,0,0) \to (1,1,0,0) \\
(0,0,0,0) \to (0,1,0,0);\ (0,1,0,0) \to (1,1,0,0) \\
(0,0,1,0) \to (1,0,1,0);\ (0,1,1,0) \to (1,1,1,0) \\
(0,0,1,0) \to (0,1,1,0);\ (0,1,1,0) \to (1,1,1,0) \\
(0,0,0,0) \to (0,0,1,0);\ (0,1,0,0) \to (0,1,1,0) \\
(1,0,0,0) \to (1,0,1,0);\ (1,1,0,0) \to (1,1,1,0) \\
\\
(0,0,0,1) \to (1,0,0,1);\ (0,1,0,1) \to (1,1,0,1) \\
(0,0,0,1) \to (0,1,0,1);\ (0,1,0,1) \to (1,1,0,1) \\
(0,0,1,1) \to (1,0,1,1);\ (0,1,1,1) \to (1,1,1,1) \\
(0,0,1,1) \to (0,1,1,1);\ (0,1,1,1) \to (1,1,1,1) \\
(0,0,0,1) \to (0,0,1,1);\ (0,1,0,1) \to (0,1,1,1) \\
(1,0,0,1) \to (1,0,1,1);\ (1,1,0,1) \to (1,1,1,1) \\
\\
(0,0,0,0) \to (0,0,0,1);\ (1,0,0,0) \to (1,0,0,1) \\
(0,1,0,0) \to (0,1,0,1);\ (1,1,0,0) \to (1,1,0,1) \\
(0,0,1,0) \to (0,0,1,1);\ (1,0,1,0) \to (1,0,1,1) \\
(0,1,1,0) \to (0,1,1,1);\ (1,1,1,0) \to (1,1,1,1)
\end{gathered} \tag{5}$$

Es ist leider nicht ohne weiteres Möglich, den Hyperwürfel zu zeichnen. Ich möchte jedoch einen Versuch unternehmen, den vierdiemensionalen Würfel auf drei Dimensionen zu projizieren, damit eine Visualisation möglich wird.