Wie visualisiert man einen Hyperwürfel

Ivanildo Kowsoleea

14. Januar 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Was ist ein Hyperwürfel?

Ein Hyperwürfel ist ein Würfel in der vierten Dimension. Wie sieht so ein Ding aus, und wie konstruiert man so etwas?

Um die Konstruktion besser zu verstehen fangen wir mit einem 0-dimensionalen Würfel an: einen Punkt. Da wir hier nur einen Punkt zur Verfügung braucht man auch keine Koordinaten. Beim Übergang zum eindimensionalen Fall — ein Linienstück — nehmen wir den ursprünglichen Punkt und vergeben die eindimensionale Koordinate (0). Wir Kopieren diesen Punkt, vergeben hier die Koordinate (1), und verbinden beide Punkte mit einander. Das jetzt entstandene Linienstück ist unser eindimensionaler Würfel.

$$(0) \rightarrow (1) \tag{1}$$

Wir breiten jetzt aus zur zweiten Dimension. Das Linienstück in (1) bekommt eine zweite Koordinate gleich 0:

$$(0,0) \rightarrow (1,0) \tag{2}$$

Anschließend kopieren wir dieses Linienstück und geben der Kopie als zweite Koordinate die 1. Danach verbinden wir jeden Punkt mit seiner Kopie.

$$\begin{aligned} (0,0) &\rightarrow (1,0) \\ (0,1) &\rightarrow (1,1) \\ (0,0) &\rightarrow (0,1) \\ (1,0) &\rightarrow (1,1) \end{aligned} \tag{3}$$

Diese vier Linienstücke bilden ein Quadrat — die zweidimensionale Variante des Würfels (siehe Abbildung 1 auf Seite 3).

Genau so finden wir die Liniensegmente, die wir für ein Würfel (dreidimensional) brauchen. Wir nehme die 4 Liniensegemnte aus (3) und versehen sie

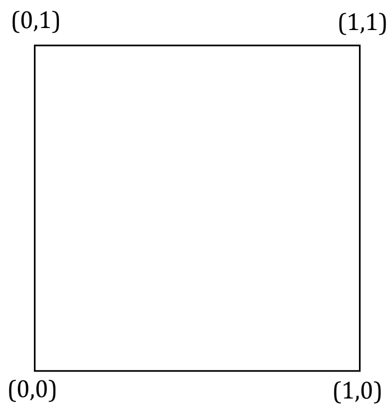

Abbildung 1: Ein Quadrat

mit einer dritten Koordinate die wir gleich 0 stellen. Danach nehmen wir wieder die Liniensegmente, diesmal aber mit der 1 als dritte Koordinate. Die vier Eckpunkte verbinden wir noch mit deren Kopien.

$$
\begin{aligned}
(0,0,0) &\rightarrow (1,0,0)\\
(0,1,0) &\rightarrow (1,1,0)\\
(0,0,0) &\rightarrow (0,1,0)\\
(0,1,0) &\rightarrow (1,1,0)\\
\\
(0,0,1) &\rightarrow (1,0,1)\\
(0,1,1) &\rightarrow (1,1,1)\\
(0,0,1) &\rightarrow (0,1,1)\\
(0,1,1) &\rightarrow (1,1,1)\\
\\
(0,0,0) &\rightarrow (0,0,1)\\
(0,1,0) &\rightarrow (0,1,1)\\
(1,0,0) &\rightarrow (1,0,1)\\
(1,1,0) &\rightarrow (1,1,1)
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Die 12 Liniensegmente wür den Würfel sind gegeben in (4). Abbildung 2 auf Seite 4 zeigt den Würfel nochmal.

Die Konstruktion des Hyperwürfels stellt jetzt kein Problem mehr da. Wir versehen die 12 Liniensegmente aus (4) mit einer 4. Koordinate gleich 0. Das wiederholen wir mit einer 4. Koordinate gleich 1 und verbinden die 8 Eckpunkte

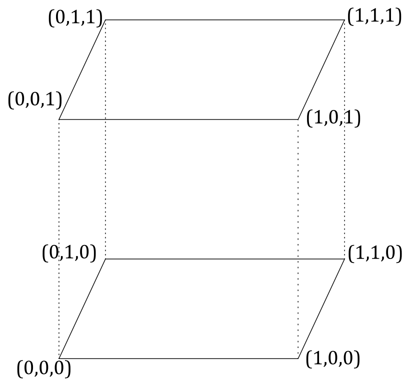

Abbildung 2: Ein dreidimensionaler Würfel

mit deren Kopien. Das Ergebnis ist:

$$
\begin{gathered}
(0,0,0,0) \to (1,0,0,0);\ (0,1,0,0) \to (1,1,0,0) \\
(0,0,0,0) \to (0,1,0,0);\ (0,1,0,0) \to (1,1,0,0) \\
(0,0,1,0) \to (1,0,1,0);\ (0,1,1,0) \to (1,1,1,0) \\
(0,0,1,0) \to (0,1,1,0);\ (0,1,1,0) \to (1,1,1,0) \\
(0,0,0,0) \to (0,0,1,0);\ (0,1,0,0) \to (0,1,1,0) \\
(1,0,0,0) \to (1,0,1,0);\ (1,1,0,0) \to (1,1,1,0) \\
\\
(0,0,0,1) \to (1,0,0,1);\ (0,1,0,1) \to (1,1,0,1) \\
(0,0,0,1) \to (0,1,0,1);\ (0,1,0,1) \to (1,1,0,1) \\
(0,0,1,1) \to (1,0,1,1);\ (0,1,1,1) \to (1,1,1,1) \\
(0,0,1,1) \to (0,1,1,1);\ (0,1,1,1) \to (1,1,1,1) \\
(0,0,0,1) \to (0,0,1,1);\ (0,1,0,1) \to (0,1,1,1) \\
(1,0,0,1) \to (1,0,1,1);\ (1,1,0,1) \to (1,1,1,1) \\
\\
(0,0,0,0) \to (0,0,0,1);\ (1,0,0,0) \to (1,0,0,1) \\
(0,1,0,0) \to (0,1,0,1);\ (1,1,0,0) \to (1,1,0,1) \\
(0,0,1,0) \to (0,0,1,1);\ (1,0,1,0) \to (1,0,1,1) \\
(0,1,1,0) \to (0,1,1,1);\ (1,1,1,0) \to (1,1,1,1)
\end{gathered}
\tag{5}
$$

Es ist leider nicht ohne weiteres Möglich, den Hyperwürfel zu zeichnen. Ich möchte jedoch einen Versuch unternehmen, den vierdimensionalen Würfel auf drei Dimensionen zu projizieren, damit eine Visualisation möglich wird.

2 Die Projektion

Betrachten wir den Fall wobei ein Punkt aus dem zweidimensionalen Raum auf eine Linie (eindimensionaler Raum) projiziert wird. Siehe Abbildung 3.

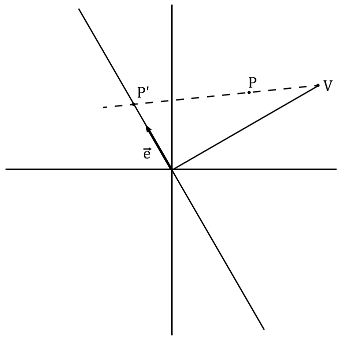

Abbildung 3: Projektion von einem Punkt P auf eine Linie gegeben durch $\vec{e}$, gesehen von V aus

Der eindimensionale Projektionsraum wird durch den Vektor $\vec{e}$ bestimmt. Die Linie vom Ursprung nach V steht senkrecht auf $\vec{e}$. Jetzt muss P' – der Schnittpunkt der Projektionslinie mit der Linie VP – ermittelt werden.

Der Projektionsraum $\vec{l}$ wird gegeben durch:

$$\vec{l} = \lambda\vec{e} \tag{6}$$

Die Linie VP als $\vec{m}$ ist gegeben durch:

$$\vec{m} = \vec{v} + \mu(\vec{p} - \vec{v}) \tag{7}$$

Den Schnittpunkt ermitteln wir, indem wir $\vec{l}$ und $\vec{m}$ einander gleich stellen:

$$\lambda\vec{e} = \vec{v} + \mu(\vec{p} - \vec{v}) \tag{8}$$

Jetzt nehmen wir von beiden Seiten der Gleichung 8 das Vektorprodukt mit $\vec{v}$

$$\lambda(\vec{v} \cdot \vec{e}) = (\vec{v} \cdot \vec{v}) + \mu(\vec{v} \cdot (\vec{p} - \vec{v})) \tag{9}$$

Weil $\vec{v}$ und $\vec{e}$ senkrecht aufeinander stehen, gilt:

$$(\vec{v} \cdot \vec{e}) = 0 \tag{10}$$

Die linke Seite der Gleichung 9 ist also gleich 0. Der Wert von μ ist leicht zu ermitteln:

$$\mu = \frac{-(\vec{v} \cdot \vec{v})}{(\vec{v} \cdot (\vec{p} - \vec{v}))} \tag{11}$$

Der Punkt P' ist nun festgelegt in dem man den gefundenen Wert für μ in Gleichung 7 einsetzt:

$$P' : \vec{p'} = \vec{v} - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{v})}{(\vec{v} \cdot (\vec{p} - \vec{v}))}(\vec{p} - \vec{v}) \tag{12}$$

Die Ausbreitung auf höheren Dimensionen ist fast trivial. Betrachten wir eine Projektion von drei auf zwei Dimensionen. Anstelle der Linie gegeben durch Gleichung 6 tritt jetzt eine Ebene gegeben durch 2 Vektoren $\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$. Somit wird Gleichung 8:

$$\lambda_1 \vec{e_1} + \lambda_2 \vec{e_2} = \vec{v} + \mu(\vec{p} - \vec{v}) \tag{13}$$

Weil beide Vektoren $\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$ senkrecht auf $\vec{v}$ stehen wird nach Vektormultiplikation mit $\vec{v}$ die linke Seite der entstandene Gleichung wieder gleich 0. Der Wert von μ bleibt unverändert. Verallgemeinert für eine Projektion von $n + 1$ auf n Dimensionen wird Gleichung 8:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e_i} = \vec{v} + \mu(\vec{p} - \vec{v}) \tag{14}$$

Weil alle $\vec{e_i}$ senkrecht stehen auf $\vec{v}$, gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\vec{v} \cdot \vec{e_i}) \ = 0 \tag{15}$$

weshalb μ und P' unverändert bleiben (siehe Gleichung 11 und Gleichung 12). Wenn alle Vektoren $\vec{e_i}$ die Länge 1 haben, und senkrecht aufeinander stehen (Orthonormal) kann man die Koordinaten p'_i von P' im n-dimensionalen Raum mit

$$p'_i = \vec{p'} \cdot \vec{e_i} \tag{16}$$

ermitteln.

3 Das Visualisieren des Hyperwürfels

Die vorher erklärte Grundlagen wurden in einem „Python"-Programm festgelegt. Um einen ersten Eindruck zu bekommen, habe ich den Hyperwürfel generieren lassen, und anschließend in 2 Schritten (von 4 auf 3 und von 3 auf 2 Dimensionen) auf eine Ebene projizieren lassen. Das Ergebnis ist in Abbildung 4 zu sehen.

Der Hyperwürfel wurde mit Koordinaten von -1 bis 1 generiert. Bei der Projektion von 4 auf 3 Dimensionen sind $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ und $\vec{e_3}$ gleich $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$.

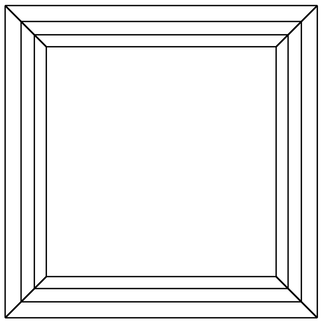

Abbildung 4: Ein erster Eindruck des Hyperwürfels

Der Standpunkt des Betrachters $\vec{v}$ ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$. Somit schauen wir vom Zentrum einer Seite von einer Distanz gleich 10 Einheiten, wobei der Würfelkante die Länge 2 hat.

Bei der anschließende Projektion von 3 auf 2 Dimensionen sind $\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$ gleich $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}$ befindet sich am $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}$.

Bedingt durch die Art wie diese Projektionen programmiert wurden und wie sie aufeinander folgen, läuft die x_1-Achse

4 Eine Rotation

Um einen besseren Eindruck zu bekommen, möchte ich den Hyperwürfel rotieren. Ich werde zuerst die letzte Projektion anpassen. Es ist nicht nötig, den Würfel zu rotieren. Es reicht, wenn ich die Vektoren $\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$ und $\vec{v}$ anpasse. Damit erspare ich mir das Rotieren der 16 Eckpunkte des Würfels.

Ich möchte den Würfel om 10° um die z-Achse drehen. Dazu muss ich alle Projektionsvektoren om -10° drehen. Die Rotationsmatrix wird also:

$$R_3 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

wobei $\alpha = -10 \cdot \frac{\pi}{180}$

Die Vektoren $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ und $\vec{v}$ werden:

$$\vec{e_1'} = R\vec{e_1},\ \vec{e_2'} = R\vec{e_2},\ \vec{v'} = R\vec{v} \tag{18}$$

Das Ergebnis ist in Abbildung 5 zu sehen.

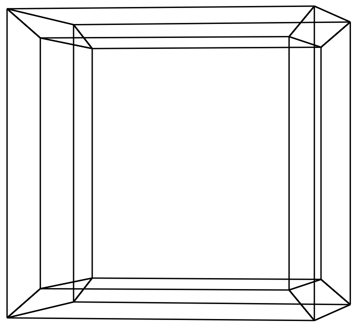

Abbildung 5: Der Hyperwürfel om 10° im dreidimensionalen Raum gedreht

Es scheint, als befände sich ein kleinerer Würfel innerhalb eines Größeren.

Ich möchte jetzt sehen, wie sich eine Rotation in der vierten Dimension auf den Hyperwürfel auswirkt. Ich entscheide mich für eine einfache Rotation, wobei x_1 und x_2 invariant bleiben. Somit wird der Rotationsmatrix R_4:

$$R_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ 0 & 0 & -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \tag{19}$$

Für verschiedene β