

Soru 7) Parametrik olarak

$$x(t) = t^3, \quad y(t) = (1-t^2)^{3/2}, \quad -1 \leq t \leq 1$$

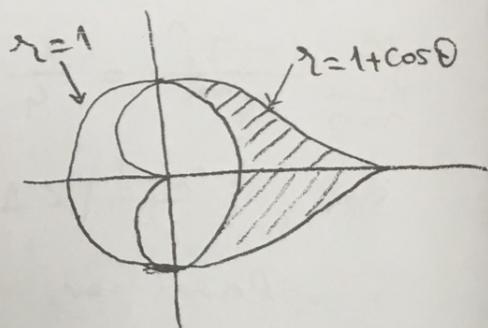
ile verilen eğrinin uzunluğunu bulunuz. (10 P)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 3t^2 \\ \dot{y}(t) &= -3t(1-t^2)^{1/2} \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2} = \sqrt{9t^4 + 9t^2(1-t^2)} \\ = 3|t| \\ S = \int_{-1}^1 \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2} dt = \int_{-1}^1 3|t| dt = 6 \int_0^1 t dt \end{array} \right.$$

$$= 3 \text{ binim}$$

Soru 8) $r = 1$ çemberinin dışında ve $r = 1 + \cos \theta$ kardiyoidinin içinde kalan bölgenin alanını bulunuz. (15P)

$$r = 1 + \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = 0 \\ \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$



$$\begin{aligned} \frac{A}{2} &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} [(1+\cos\theta)^2 - 1^2] d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left(2\cos\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2} \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[2\sin\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\pi/2} = 1 + \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = 2 + \frac{\pi}{4} \text{ cm}^2$$

$$\text{II. yol } A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} [(1+\cos\theta)^2 - 1^2] d\theta$$

	YTÜ - Mühendislik Fakülteleri I. Ara Sınav Soru ve Cevap Kağıdı		NOT TABLOSU								
Adı Soyadı			1	2	3	4	5	6	7	8	T
Öğrenci Numarası		Grup No									
Bölümü			Sınav Tarihi		22.03.2019						
Dersin Adı	MAT1071 MATEMATİK I		Sınav Süresi	100 dk		Sınav Yeri					
Dersi veren Öğretim Üyesinin Adı Soyadı			İmza								
YÖK'nun 2547 sayılı Kanunun Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin 9. Maddesi olan "Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek" fiili işleyenler bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma cezası alırlar.											

Soru 1) $\left\{ \frac{n^{5/2}}{2n^2+1} \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right\}_{n \geq 1}$ dizinin limitini bulunuz. (12 P)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^{5/2}}{2n^2+1} \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 \cdot \sqrt{n}}{2n^2+1} \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{2n^2+1} \cdot \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} // \end{aligned}$$

Soru 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$ serisinin toplamını bulunuz. (13 P)

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k} \cdot \sqrt{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = 1 //$$

Soru 5) $\sum_{n=0}^{\infty} n!(x-1)^n$ serisini yakınsak yapan x değer(ler)ini bulunuz. (12 P)

$$a_n = n!$$

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

old. verilen kuvvet serisi, sadece $x=1$ için
yakınsat.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} n!(x-1)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n!(x-1)^n \right)$$

Soru 6) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{4^{n+1}}$ serisinin yakınsaklığını ve toplamını (temsil ettiği fonksiyonu) bulunuz. (13 P)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+3}{4} \right)^n = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+3}{4} \right)^n$$

Sen, $\left| \frac{x+3}{4} \right| < 1$ ise, yani $-7 < x < 1$ ise yakınsat

Toplamı ise, bir Geometrik Seri olur

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{4^{n+1}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x+3}{4}} = \frac{1}{1-x}$$

Soru 3) $\sum_{n=2}^{\infty} n \cdot \ln(1 - n^{-1})$ serisinin karakterini (yakınsaklığını veya iraksaklılığını) tespit ediniz. (12 P)

$$a_n = n \cdot \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right); \quad \forall n \geq 2 \text{ için } \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \ln\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right\}$$

$$= \ln e^{-1} = -1 \neq 0$$

old. verilen sen, Uraksaklık Testi gereği yakınsak olmalıdır.

Soru 4) Eğer $\{a_n\}$ dizisi, ardışık olarak

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot a_n, \quad n \geq 1$$

ile tanımlanmışsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin karakterini tespit ediniz. (13 P)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} < 1$$

old. verilen sen, Bölün Testi gereği yakınsak olmalıdır.