

## SERİLER

9

Bir kuralla birbirine bağlı sayılar dizisinin bütün terimlerinin toplamından elde edilen ifadeye seri denir.

\* Yani;  $\{a_n\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$  dizisinin terimleri toplanarak  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$  serisi elde edilir ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ şeklinde gösterilir.}$$

Örneğin:

$$(*) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

$$(*) \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n}$$

$$(*) \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$(*) \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

NOT: Bir serinin ilk teriminin 1 den başlaması zorunluluğu yoktur. Gerekli olduğunda serinin indisini başka bir değere başlatmak için değiştirebiliriz. Örneğin;  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  toplamını  $\sum_{m=3}^{\infty} a_{m-2}$  şeklinde yazabiliriz.

Her iki toplam da aynı sonucu verir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots = \sum_{m=3}^{\infty} a_{m-2}$$

(10)

Kısmi Toplamlar Dizisi ve  
Bir Serinin Yakınsaklığı

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  serisinin  $\{S_n\}$  ile gösterilen kısmi toplamlar

dizisi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

⋮

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$\{S_n\} = \{S_1, S_2, S_3, \dots\}$$

$\{S_n\}$  dizisine " $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  serisinin kısmi toplamlar dizisi",

$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  toplamına da "serinin n. kısmi toplamı" denir.

\*  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$  toplamı  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  serisinin n. kısmi

toplamı olmak üzere, eğer  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$  ise o zaman

" $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  serisi S toplamına yakınsıyor" denir ve bu

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = S$  ile ifade edilir. Benzer şekilde;

eğer  $\{S_n\}$  kısmi toplamlar dizisi ıraksar veya  $\infty$ 'a ıraksar

ise seri-de aynı şekilde ıraksar veya  $\infty$ 'a ıraksar.

## ÖZET:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  serisi için;  $S_n$  n. kısmi toplam olmak üzere:

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$  ise seri  $S$ 'ye yakınsar (yani toplamı  $S$ 'dir)  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \pm \infty$  ise seri  $\pm \infty$ 'a ıraksar  
 $\rightarrow$  limit mevcut değil ise seri ıraksar

## Geometrik Seri:

n. terimi  $a_n = a \cdot r^{n-1}$  olan  $\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots$  şeklindeki seriye "geometrik seri" denir. Burada  $a$  ve  $r$ ,  $a \neq 0$  ile verilen sabit sayılardır.

Geometrik serinin ilk terimi  $a$  sayıdır.  $r$  sayısına serinin ortak oranı denir. Çünkü  $n \geq 1$  için

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a \cdot r^n}{a \cdot r^{n-1}} = r \text{ dir.}$$

## Geometrik Serinin Yakınsaklığı / İraksaklığı:

$\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^{n-1}$  geometrik serisinin n. kısmi toplamı  $S_n$ 'i hesaplayalım.

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$$

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n$$

$$S_n - rS_n = a - ar^n = a(1 - r^n)$$

$$(1 - r)S_n = a(1 - r^n)$$

① Eğer  $r=1$  ise  $\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a = a + a + a + \dots + a + \dots$  serisi (12)

elde edilir. Bu durumda  $S_n = a + a + \dots + a = n \cdot a$  ve

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a \rightarrow +\infty \ (a > 0)$  olur ki; böylece seri ıraksak  
 $\rightarrow -\infty \ (a < 0)$

tır.

\*  $r \neq 1$  ise  $(1-r)S_n = a \cdot (1-r^n) \Rightarrow \boxed{S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}}$

②  $|r| < 1$  ise  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$  olduğundan  $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-r}}$  olur.  
 Yani seri  $\frac{a}{1-r}$  'ye yakınsar.

③  $r > 1$  ise  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$  olur. Bu durumda:

\*  $a > 0$  ise  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = +\infty$   
 \*  $a < 0$  ise  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = -\infty$  } olur. Yani seri  $+\infty / -\infty$  'a ıraksar.

④  $r \leq -1$  ise  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$  mevcut değildir. Dolayısıyla

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  mevcut değildir. Seri ıraksaktır.

\* Bütün durumları özetlersek:

$\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^{n-1} \rightarrow \begin{cases} |r| < 1 \text{ ise } \frac{a}{1-r} \text{ 'ye yakınsar} \\ r \geq 1 \text{ } \left. \begin{matrix} a > 0 \\ a < 0 \end{matrix} \right\} \text{ ise } +\infty / -\infty \text{ 'a ıraksar} \\ r \leq -1 \text{ ise seri ıraksaktır.} \end{cases}$

$$① 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = ?$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad a=1 \quad |r| = \frac{1}{2} < 1 \rightarrow \text{Seri Yakınsaktır}$$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow \text{Seri } 2'ye \text{ yakınsar.}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 2 \text{ dir.}$$

$$② \pi - e + \frac{e^2}{\pi} - \frac{e^3}{\pi^2} + \dots \text{ serisinin toplamını bulunuz.}$$

$$\pi - e + \frac{e^2}{\pi} - \frac{e^3}{\pi^2} + \dots = \pi \left( 1 - \frac{e}{\pi} + \frac{e^2}{\pi^2} - \frac{e^3}{\pi^3} + \dots \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi \cdot \left(-\frac{e}{\pi}\right)^{n-1} \quad a=\pi$$

$$r = -\frac{e}{\pi}$$

$$|r| = \left| -\frac{e}{\pi} \right| = \frac{e}{\pi} \underset{\substack{\rightarrow 2,71 \\ \rightarrow 3,14}}{< 1} \Rightarrow \text{Seri } \frac{a}{1-r} = \frac{\pi}{1+\frac{e}{\pi}} = \frac{\pi^2}{e+\pi} 'ye \text{ yakınsar.}$$

$$③ 1 + 2^{1/2} + 2 + 2^{3/2} + \dots = ?$$

$$\underbrace{\quad}_{\sqrt{2}} \quad \underbrace{\quad}_{\sqrt{2}} \quad \underbrace{\quad}_{\sqrt{2}} \rightarrow r = \sqrt{2} \quad a=1$$

$$1 + 2^{1/2} + 2 + 2^{3/2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2})^{n-1} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} r = \sqrt{2} > 1 \\ a = 1 > 0 \end{array} \right\} \text{Seri } +\infty'ya \text{ ıraksar}$$

$$④ x = 0,323232\dots = 0,\overline{32} \text{ sayısını serileri kullanarak iki tamsayının oranı olarak yazınız.}$$

$$x = 0,323232\dots = \frac{32}{100} + \frac{32}{(100)^2} + \frac{32}{(100)^3} + \dots = \frac{32}{100} \left( 1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{(100)^2} + \dots \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{32}{100} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^{n-1} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = \frac{32}{100} \\ r = \frac{1}{100} < 1 \end{array} \right\} \text{Seri yakınsaktır}$$

$$x = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{32}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{32}{99}$$

## Teleskopik ve Harmonik Seriler

(14)

Teleskopik Seri: Bir serinin kısmi toplamları, eğer onun terimlerini basit kesirlere ayırarak basit olarak formüle edilebiliyorsa bu seriye "Teleskopik Seri" denir.

Harmonik Seri:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  serisine "Harmonik Seri" denir.

Bu seri  $+\infty$ 'a ıraksar.

$$(*) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} = ?$$

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

Seri teleskopik seridir.

$$\frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$S_n = \sum_{n=1}^n \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} = 1 \text{ dir.}$$

$$(*) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 3k + 2} = ?$$

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k^2 + 3k + 2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{n^2 + 3n + 2}$$

$$\frac{1}{k^2 + 3k + 2} = \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$$

$$S_n = \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = 1 - \frac{1}{n+2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+2} \right) = 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 3k + 2} = 1$$

$$\textcircled{*} \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = ?$$

$$S_n = \ln \frac{3}{4} + \ln \frac{8}{9} + \dots + \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) !$$

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n}\right)$$

$$S_n = \ln\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n}\right)$$

$$\boxed{\ln a + \ln b = \ln a \cdot b}$$

$$= \ln\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \dots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right) = \ln \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln \frac{1}{2} //$$

### Seriler ile İlgili Bazı Teoremler:

$$\textcircled{1} \sum a_k = A, \sum b_k = B \text{ ise } \sum a_k + b_k = A + B, \sum \alpha a_k = \alpha A$$

$$\textcircled{2} \sum a_n \text{ ıraksak ise } \alpha \sum a_n \text{ de ıraksaktır.}$$

$$\textcircled{3} \sum a_n \text{ ıraksak, } \sum b_n \text{ yakınsak ise } \sum a_n + b_n \text{ de ıraksaktır.}$$

$$\textcircled{4} \sum a_n \text{ ve } \sum b_n \text{ her ikisi de ıraksak olsalar dahi}$$

$\sum a_n + b_n$  serisi yakınsak olabilir. Örneğin:

$$\left. \begin{array}{l} \sum a_n = 1 + 1 + 1 + \dots \\ \sum b_n = -1 - 1 - 1 - \dots \end{array} \right\} \sum a_n + b_n = 0 + 0 + \dots = 0 \Rightarrow \text{yakınsak}$$

⑤ Bir seriye sonlu sayıda terim eklemek veya silmek serinin karakterini deęistirmez.

★★  
⑥  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  serisi yakınsak ise  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  dir. (Tersi doęru değildir)

★★  
⑦ n. Terim Testi:

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$  ise  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  serisi ıraksaktır.

⑧  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

$a=1, r=\frac{1}{2} < 1$        $a=1, r=\frac{1}{3} < 1$   
 $\frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$        $\frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

⑨  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^{n+1}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$a=\frac{1}{3}, r=\frac{1}{3} < 1$        $a=\frac{4}{3}, r=\frac{2}{3} < 1$   
 $= \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} + \frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2}$

⑩  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$  serisi yakınsak mıdır?

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$  olduğundan n. terim testine göre ıraksaktır.

⑪  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$  serisi ıraksaktır. Çünkü  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1}$  limiti mevcut değildir. Olayısıyla n. terim testine göre ıraksaktır.