Pınar Albayrak
Mat 2
1. Uygulama

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+4n+3} = ?$

$\left.\frac{4}{n^2+4n+3} = \frac{A}{n+3} + \frac{B}{n+1}\right\} \Rightarrow \boxed{A=-2 \mid B=2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+4n+3} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}$

$S_n = 2\left[\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{6}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n+1}}-\frac{1}{n+3}\right)\right]$

$S_n = 2\left[\frac{5}{6}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{5}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2+4n+3} = \frac{5}{3}$

(*) $\sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(\frac{k-1}{k}\right)$ serisinin toplamını bulup sonucu yorumlayın.

$S_n = \ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + \ln\frac{3}{4} + \cdots + \ln\frac{n-1}{n}$

$= \ln\left(\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\cdots\frac{\cancel{n-1}}{n}\right) = \ln\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{1}{n}\right) = -\infty$

$\Downarrow$

Seri $-\infty$'a ıraksar.

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\ln n}{\sqrt[3]{n}}$ serisinin karakteri?

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ seçelim. $p=\frac{1}{3}<1$ ıraksak seri

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1+\ln n}{\sqrt[3]{n}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} = \lim_{n\to\infty}(1+\ln n) = \infty \Rightarrow$ Limit Testine göre, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ ıraksak olduğundan

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\ln n}{\sqrt[3]{n}}$ de ıraksaktır.

⊛ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2 2^n}$ karakteri?

I. Yol Oran Testi ile:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n+3}{(n+1)^2 2^{n+1}}}{\frac{2n+1}{n^2 2^n}} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{(2n+3).n^2}{(n+1)^2.(2n+1)}}_{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$$

Oran Testine göre Seri yakınsaktır.

II. Yol Limit Testi ile:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ seçelim. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $|r| = \frac{1}{2} < 1$ Geo. seri yakınsaktır.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n+1}{n^2 2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n^2} = 0 \Rightarrow$$

Limit Testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ yakınsak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2.2^n}$ de yakınsaktır.

⊛ $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^3} - \sqrt{n^3-1}$ karakteri?

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ seçelim. $p = \frac{3}{2} > 1$ yakınsak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3} - \sqrt{n^3-1}}{\frac{1}{\sqrt{n^3}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^3}.(\sqrt{n^3} - \sqrt{n^3-1})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3}.\overbrace{(\sqrt{n^3} - \sqrt{n^3-1})(\sqrt{n^3} + \sqrt{n^3-1})}^{1}}{\sqrt{n^3} + \sqrt{n^3-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3} + \sqrt{n^3-1}} = \frac{1}{2} \neq 0, \infty$$

Limit Testine göre iki seri aynı karakterli. Yani $\sum \sqrt{n^3} - \sqrt{n^3-1}$ de yakınsaktır.

$$\frac{1+2\ln 2}{\underset{4+5}{\underbrace{9}}} + \frac{1+3\ln 3}{\underset{9+5}{\underbrace{14}}} + \frac{1+4\ln 4}{\underset{16+5}{\underbrace{21}}} + \cdots$$

serisinin yakınsaklığını inceleyin.

$n=2 \quad n=3 \quad n=4$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+n\ln n}{n^2+5} = \frac{1+2\ln 2}{9} + \frac{1+3\ln 3}{14} + \cdots$$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ seçelim. Harmonik Seridir, ıraksaktır.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1+n\ln n}{n^2+5}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+n^2\ln n}{n^2+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(\overset{0}{\frac{1}{n}}+\overset{\infty}{\ln n}\right)}{\cancel{n^2}\left(1+\underset{0}{\frac{5}{n^2}}\right)} = \infty \Rightarrow$$

Limit Tes. göre $\sum \frac{1}{n}$ ıraksak olduğundan $\sum \frac{1+n\ln n}{n^2+5}$ de ıraksak

---

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}-1}{6^{n-1}} = ?$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}-1}{6^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^{n-1}} = 2 - \frac{6}{5} = \frac{4}{5}$$

$a=1 \quad r=\frac{1}{2}$

$|r| = \frac{1}{2} < 1$

$$\text{Toplam} = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$a=1 \quad r=\frac{1}{6}$

$|r| = \frac{1}{6} < 1$

$$\text{Toplam} = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \frac{6}{5}$$

(*) $\left\{ \frac{1}{9}, \frac{2}{12}, \frac{4}{15}, \frac{8}{18}, \frac{16}{21}, \ldots \right\}$ dizisinin genel terimi?

$$\frac{2^0}{3.3} \quad \frac{2^1}{3.4} \quad \frac{2^2}{3.5} \quad \frac{2^3}{3.6} \quad \frac{2^4}{3.7}$$

1.terim 2. terim 3. terim 4. terim 5. terim

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{2^{n-1}}{3.(n+2)} \right\}$$

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+\ln^2 n)}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

$f(x) = \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$ olsun. $f(x)$ $[1,\infty)$ da
→ pozitiftir $(f(x)>0)$
→ Azalandır $(f'(x)<0)$
→ Süreklidir ($[1,\infty)$ da süreksizlik noktası yoktur)
} integral Testi kullanılabilir

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \lim_{R\to\infty} \int_1^{R} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \lim_{R\to\infty} \int_0^{\ln R} \frac{du}{1+u^2} = \lim_{R\to\infty} \operatorname{Arctan} u \Big|_0^{\ln R}$$

$$\left\{ \begin{matrix} \ln x = u \\ \frac{dx}{x} = du \end{matrix} \right\} \begin{matrix} x=1 \Rightarrow u=0 \\ x=R \Rightarrow u=\ln R \end{matrix}$$

$$= \lim_{R\to\infty} (\underbrace{\operatorname{Arctan}(\underbrace{\ln R}_{\infty})}_{\pi/2} - \underbrace{\operatorname{Arctan} 0}_{0})$$

$= \pi/2 \Rightarrow$ improper integral yakınsak

integral Testine göre; $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$ yakınsak olduğundan

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+\ln^2 n)}$ serisi yakınsaktır.

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ karakteri?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}}{\frac{n^2}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{(n+1)^2}{n^2}}_{1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1$$

Oran Testine göre Seri yakınsaktır.

⊛ $\{a_n\} = \left\{ \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2+1} \right\}$ dizisinin yakınsaklığını inceleyin.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \left[\underbrace{\left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{n+1}}_{e^{-1}} \right]^{\overbrace{\frac{n^2+1}{n+1}}^{\infty}} = e^{-\infty} = 0 \Rightarrow \text{dizi yakınsak}$$

⊛ $\{a_n\} = \left\{ \left(\frac{2n+1}{2n-3} \right)^{n/3} \right\}$ dizisinin yakınsaklığı?

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{2n-3} \right)^{n/3} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{4}{2n-3} \right)^{n/3} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{4}{2n-3} \right)^{2n} \right]^{1/6}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\underbrace{\left(1 + \frac{4}{2n-3} \right)^{2n-3}}_{e^4} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{4}{2n-3} \right)^{3}}_{1} \right]^{1/6} = (e^4)^{1/6} = e^{2/3}$$

$\downarrow$

Dizi yakınsak

⊛ $\{a_n\} = \left\{ \frac{3n^2 - n + 1}{n - 2n^2} \right\}$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} a_n = -\frac{3}{2}$ olduğunu gösteriniz.

$\forall \varepsilon > 0$ için $n \geq N$ iken $\left| \frac{3n^2-n+1}{n-2n^2} + \frac{3}{2} \right| < \varepsilon$ olacak şekilde bir N tamsayısı var mı?

$$\left| \frac{3n^2-n+1}{n-2n^2} + \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{n+2}{2n(1-2n)} \right| = \frac{n+2}{2n.(2n-1)} \leq \frac{3n}{2n(2n-1)} = \frac{3}{2(2n-1)} < \varepsilon$$

$\frac{3}{2.(2n-1)} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2\varepsilon} + 1 \right)$ bulunur.

N'i $\frac{1}{2}.\left(\frac{3}{2\varepsilon} + 1 \right)$ den büyük herhangi bir tamsayı olarak alırsak

$\forall \varepsilon > 0$ için $n \geq N$ iken $|a_n - L| < \varepsilon$ şartı sağlandığından

$\lim_{n\to\infty} a_n = -\frac{3}{2}$ dir.

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\sqrt{n+1} - \ln\sqrt{n}$ serisinin n. kısmi toplamı için bir formül bulunuz ve bu formül yardımıyla serinin yakınsaklığını inceleyiniz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\ln\sqrt{n} + \ln\sqrt{n+1} \Rightarrow S_n = -\overbrace{\ln 1}^{0} + \cancel{\ln\sqrt{2}} - \cancel{\ln\sqrt{2}} + \cancel{\ln\sqrt{3}} - \dots - \cancel{\ln\sqrt{n}} + \ln\sqrt{n+1}$$

$$= \ln\sqrt{n+1}$$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln\sqrt{n+1} = +\infty \Rightarrow$ Seri $+\infty$'a ıraksar

---

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \text{ArcCos}\frac{1}{n+1} - \text{ArcCos}\frac{1}{n+2}$ serisinin n. kısmi toplamı için bir formül bulup yakınsaklığını inceleyiniz. Yakınsak ise değerini bulunuz.

$$S_n = \text{ArcCos}\frac{1}{2} - \cancel{\text{ArcCos}\frac{1}{3}} + \cancel{\text{ArcCos}\frac{1}{3}} - \cancel{\text{ArcCos}\frac{1}{4}} + \dots + \cancel{\text{ArcCos}\frac{1}{n+1}} - \text{ArcCos}\frac{1}{n+2}$$

$$S_n = \underbrace{\text{ArcCos}\frac{1}{2}}_{\pi/3} - \text{ArcCos}\frac{1}{n+2} = \frac{\pi}{3} - \text{ArcCos}\frac{1}{n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{3} - \underbrace{\text{ArcCos}\underbrace{\frac{1}{n+2}}_{0}}_{\pi/2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow \text{Seri yakınsaktır.}$$

Toplamı $-\frac{\pi}{6}$ dır.

(*) $\{a_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n\right\}$ dizisinin yakınsaklığını inceleyin.

I. Yol

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}_{e}\right]^{1/n \to 0} = e^0 = 1 \Rightarrow \text{Dizi yakınsaktır.}$$

II. Yol Logaritmik limit ile de çözülebilir.

$$\circledast \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = ?$$

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2} \qquad A = \frac{1}{2} \quad B = -\frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n-2}} - \cancel{\frac{1}{n}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}$$

$\circledast \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+3n+1}{n^3(n+1)^3}$ serisinin toplamını bulunuz.

$\displaystyle\frac{3n^2+3n+1}{n^3 . (n+1)^3} = \frac{(1+n)^3 - n^3}{n^3(1+n)^3} = \frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3}$ olduğundan

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+3n+1}{n^3(n+1)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3}$ dır.

$$S_n = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2^3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2^3}} - \cancel{\frac{1}{3^3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3^3}} - \cancel{\frac{1}{4^3}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{(n-1)^3}} - \cancel{\frac{1}{n^3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n^3}} - \frac{1}{(n+1)^3}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)^3}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{(n+1)^3} = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+3n+1}{n^3(1+n)^3} = \underline{1}$$

⊛ $\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\frac{4}{5!}+\cdots=?$

$\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\frac{4}{5!}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+2)!}$ $\qquad \frac{n+1}{(n+2)!}=\frac{n+2-1}{(n+2)!}=\frac{n+2}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+2)!}$

$=\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}$

olduğundan

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+2)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}$ dir.

$$S_n=\left(\frac{1}{2!}-\cancel{\frac{1}{3!}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3!}}-\cancel{\frac{1}{4!}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{(n+1)!}}-\frac{1}{(n+2)!}\right)=\frac{1}{2!}-\frac{1}{(n+2)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+2)!}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots=\frac{1}{2}$$

⊛ $X=2,131313\ldots=2,\overline{13}$ sayısını serileri kullanarak iki tamsayının oranı olarak ifade ediniz.

$$x=2,\overline{13}=2+\underbrace{\frac{13}{100}+\frac{13}{(100)^2}+\frac{13}{(100)^3}+\cdots}_{\text{Geometrik Seri}}=2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{13}{100}\cdot\left(\frac{1}{100}\right)^{n-1}$$

$a=\frac{13}{100}$ $\quad r=\frac{1}{100}$

$|r|=\frac{1}{100}<1 \Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{13}{100}\cdot\left(\frac{1}{100}\right)^{n-1}=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{13}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{13}{99}$

seri yakınsaktır

$$x=2+\frac{13}{99}=\frac{211}{99}$$

⊛ $4-1+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}+\frac{1}{64}\cdots=?$ $\Rightarrow a=4 \quad r=-\frac{1}{4}$ Geometrik Seridir

$-1/4 \quad -1/4 \quad -1/4 \quad -\frac{1}{4}$

$\sum_{n=1}^{\infty}4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \Rightarrow |r|=\frac{1}{4}<1$ Seri $\frac{a}{1-r}$ 'ye yakınsar.

$$\frac{a}{1-r}=\frac{4}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{16}{5} \Rightarrow 4-1+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}\cdots=\frac{16}{5}$$

(*) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)^n}{n^{n+3}}$ karakteri?

Kök testini düşünürsek:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{1}{(\sqrt[n]{n})^3}}_{1} = 1 \rightarrow \text{Kök Testi Sonuç vermez} \times$$

Limit Testini düşünürsek:

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ seçelim. $p=3>1$ yakınsaktır

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n-1)^n}{n^n \cdot \cancel{n^3}}}{\frac{1}{\cancel{n^3}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} \neq 0, \infty$$

Limit Testine göre iki seri aynı karakterli. $\sum \frac{1}{n^3}$ yakınsak olduğundan $\sum \frac{(n-1)^n}{n^{n+3}}$ de yakınsaktır.

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{3n} \cdot \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}$ karakteri?

Kök testi uygulayalım.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{3n} \cdot \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} e^3 \cdot \left(\frac{n}{n+2}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^3 \cdot \frac{1}{\left(\frac{n+2}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} e^3 \cdot \frac{1}{\underbrace{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}_{e^2}} = e > 1$$

Kök Testine göre seri ıraksaktır.