

SERİLER

Bir kurala birbirine bağlı sayılar dizisinin bütün terimlerinin toplamından elde edilen ifadeye seri denir.

* Yani; $\{a_n\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ dizisinin terimleri toplanarak $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ serisi elde edilir ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ şeklinde gösterilir.}$$

Örneğin:

$$\textcircled{*} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

$$\textcircled{*} \quad \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n}$$

$$\textcircled{*} \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\textcircled{*} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

NOT: Bir serinin ilk teriminin 1 den başlama zorunluluğu yoktur. Genellikle olduğunda serinin indisini başka bir değerden başlatmak için değiştirebiliriz. Örneğin; $n=m-2$ dönüşümünü kullanarak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ toplamını $\sum_{m=3}^{\infty} a_{m-2}$ şeklinde yazabiliyoruz.

Her iki toplam da aynı esitimi verir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots = \sum_{m=3}^{\infty} a_{m-2}$$

Kısmi Toplamlar Dizisi ve
Bir Serinin Yakınlığı

(10)

$\sum_{n=1}^{\infty}$ on serisinin $\{S_n\}$ ile gösterilen kısmi toplamlar

dizisi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \{S_n\} = \{S_1, S_2, S_3, \dots\}$$

$\{S_n\}$ dizisine " $\sum_{n=1}^{\infty}$ on serisinin kısmi toplamlar dizisi",

$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ toplamına da "serinin n. kısmi toplamı" denir.

* $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$ toplamı $\sum_{n=1}^{\infty}$ on serisinin n. kısmi

toplamı olmak üzere, eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ ise o zaman

" $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi S toplamına yakınıyor" denir ve bu

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = S$ ile ifade edilir. Benzer şekilde;

eğer $\{S_n\}$ kısmi toplamlar dizisi noktası veya $+\infty$ 'a yakındır,

ise seride aynı şekilde noktası veya $+\infty$ 'a yakındır.

OZET :

$\sum_{n=1}^{\infty}$ on serisi için ; S_n n. kismi toplam olmak üzere:

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

- = S ise seri S' ye yakinse (yanı toplamı S' dir)
- = ∞ ise seri ∞ 'a yakılır
- limit mercut değil ise seri irakılır

Geometrik Seri:

n. terimi $a_n = a \cdot r^{n-1}$ olan $\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots$ şeklindeki seride "geometrik seri" denir. Burada a ve r , $a \neq 0$ ile verilen sabit sayılardır.

Geometrik serinin ilk terimi a sayısıdır. r sayısına serinin ortak oranı denir. Çünkü $n \geq 1$ için

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a \cdot r^n}{a \cdot r^{n-1}} = r \text{ dir.}$$

Geometrik Serinin Yakınsaklılığı / İrakılığı:

$\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^{n-1}$ geometrik serisinin n. kismi toplamı S_n i hesaplayalım.

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$$

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n$$

$$S_n - rS_n = a - ar^n = a(1 - r^n)$$

$$(1 - r)S_n = a(1 - r^n)$$

① Eğer $r=1$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a = a + a + a + \dots + a + \dots$ serisi 12

elde edilir. Bu durumda $S_n = a + a + \dots + a = n \cdot a$ ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a \begin{cases} \rightarrow +\infty & (a > 0) \\ \rightarrow -\infty & (a < 0) \end{cases}$$

olur ki; böylece seri iraksak

tir.

* $r \neq 1$ ise $(1-r)S_n = a \cdot (1-r^n) \Rightarrow S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

② $|r| < 1$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-r}$ olur.
Yani seri $\frac{a}{1-r}$ ye yakinsar.

③ $r > 1$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$ olur. Bu durumda:

* $a > 0$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = +\infty$ } olur. Yani seri $+\infty$ 'a yakinsar.
* $a < 0$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = -\infty$ } iraksar.

④ $r \leq -1$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$ mevcut degildir. Olayisyla

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ mevcut degildir. Seri iraksaktir.

Bütün durumları özetlerset:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^{n-1} \rightarrow \begin{cases} |r| < 1 \text{ ise } \frac{a}{1-r} \text{ ye yakinsar} \\ r \geq 1 \begin{cases} a > 0 \end{cases} \text{ ise } +\infty \text{ 'a yakinsar} \\ r \geq 1 \begin{cases} a < 0 \end{cases} \text{ ise } -\infty \text{ 'a yakinsar} \\ r \leq -1 \text{ ise seri iraksaktir.} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = ?$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad a=1 \quad r=\frac{1}{2} \quad |r| = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{Seri yekinsiktir}$$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow \text{Seri } 2'ye \text{ yekinsiz.}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 2 \text{ dir.}$$

$$\textcircled{2} \quad \pi - e + \frac{e^2}{\pi} - \frac{e^3}{\pi^2} + \dots \text{ serisinin toplamını bulunuz.}$$

$$\pi - e + \frac{e^2}{\pi} - \frac{e^3}{\pi^2} + \dots = \pi \left(1 - \frac{e}{\pi} + \frac{e^2}{\pi^2} - \frac{e^3}{\pi^3} + \dots\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi \cdot \left(-\frac{e}{\pi}\right)^{n-1} \quad a=\pi \quad r=-\frac{e}{\pi}$$

$$|r| = \left|-\frac{e}{\pi}\right| = \frac{e^{2,71}}{\pi \approx 3,14} < 1 \Rightarrow \text{Seri} \quad \frac{a}{1-r} = \frac{\pi}{1+\frac{e}{\pi}} = \frac{\pi^2}{e+\pi} 'ye \text{ yekinsiz.}$$

$$\textcircled{3} \quad 1 + 2^{1/2} + 2 + 2^{3/2} + \dots = ?$$

$$1 + 2^{1/2} + 2 + 2^{3/2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2})^{n-1} \Rightarrow \begin{cases} r=\sqrt{2} > 1 \\ a=1 > 0 \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{Seri } +\infty'ye \\ \text{iroksor} \end{array} \right.$$

$$\textcircled{4} \quad x = 0,323232\dots = 0,\overline{32} \text{ sayısını serileri kullanarak iki tamsayıının oranı olarak yazınız.}$$

$$x = 0,323232\dots = \frac{32}{100} + \frac{32}{(100)^2} + \frac{32}{(100)^3} + \dots = \frac{32}{100} \left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{(100)^2} + \dots\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{32}{100} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^{n-1} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{32}{100} \\ r = \frac{1}{100} < 1 \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{Seri} \\ \text{yekinsiktir} \end{array} \right.$$

$$x = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{32}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{32}{99} =$$

Teleskopik ve Harmonik Seriler

Teleskopik Seri: Bir serinin kismi toplamları, eğer onun terimlerini basit kesirlerle ~~çarparak~~ ~~çarparak~~ basit olacak formüle edilebiliyse bu seriye "Teleskopik Seri" denir.

Harmonik Seri: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisine "Harmonik Seri" denir.

Bu seri $+\infty$ 'a yakılır.

$$\textcircled{*} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = ?$$

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Seri teleskopik seridir.

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 \text{ dir.}$$

$$\textcircled{*} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+3k+2} = ?$$

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k^2+3k+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{n^2+3n+2}$$

$$\frac{1}{k^2+3k+2} = \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$$

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = 1 - \frac{1}{n+2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n+2} = 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+3k+2} = 1$$

$$\textcircled{*)} \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = ?$$

$$S_n = \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{8}{9} + \dots + \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) !$$

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n}\right)$$

$$S_n = \ln\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n}\right)$$

$$\boxed{\ln a + \ln b = \ln ab}$$

$$= \ln\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{2^n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{n+1}{2^n}\right) = \ln \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln \frac{1}{2} //$$

Seriler ile ilgili Bozı Tesirler:

$$\textcircled{1} \quad \sum \alpha x = A, \quad \sum \beta x = B \text{ ise} \quad \sum \alpha x + \beta x = A + B, \quad \sum \alpha \alpha x = \alpha A$$

$$\textcircled{2} \quad \sum a_n \text{ ıraklıktır} \text{ ise } \sum \alpha a_n \text{ de ıraklıktır.}$$

$$\textcircled{3} \quad \sum a_n \text{ ıraklıktır}, \quad \sum b_n \text{ yakınsak ise} \quad \sum a_n + b_n \text{ de ıraklıktır.}$$

$$\textcircled{4} \quad \sum a_n \text{ ve } \sum b_n \text{ her ikisi de ıraklıktır} \text{ olsalar da}.$$

$\sum a_n + b_n$ serisi yakınsak olabilir. Örneğin:

$$\left. \begin{array}{l} \sum a_n = 1 + 1 + 1 + \dots \\ \sum b_n = -1 - 1 - 1 - \dots \end{array} \right\} \sum a_n + b_n = 0 + 0 + \dots + 0 + \dots = 0 \Rightarrow \text{yakınsak}$$

⑤ Bir seride sonlu sayıda terim eklemek veya silmek serinin karakterini değiştirmez.

★ ★ ⑥ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak ise $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ dir. (Teri doğru değildir)

★ ★ ⑦ n. Terim Testi:

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi iraksaktır.

$$\textcircled{*} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}_{a=1} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}_{a=1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\underbrace{r=\frac{1}{2}<1}_{\text{teri doğrusu}} \quad \underbrace{r=\frac{1}{3}<1}_{\text{teri doğrusu}}$$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \quad \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$\textcircled{*} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^{n+1}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}_{a=\frac{1}{3}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}_{a=\frac{4}{3}}$$

$$\underbrace{r=\frac{1}{3}<1}_{\text{teri doğrusu}} \quad \underbrace{r=\frac{2}{3}<1}_{\text{teri doğrusu}}$$

$$\text{teri doğrusu} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} + \frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2}$$

⑧ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$ serisi yakınsak midir?

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{1}{2} \neq 0$ olduğundan n. terim testine göre iraksaktır.

⑨ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ serisi iraksaktır. Çünkü $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1}$ limiti mevcut değildir. Dolayısıyla n. terim testine göre iraksaktır.