⊛ $P(1,1,0)$ ve $Q(4,-1,-2)$ noktalarından geçen doğruya dik olan ve $(2,0,1)$ den geçen düzlemi bulunuz.

$$\vec{n} = \vec{PQ} = \langle \overset{A}{3}, \overset{B}{-2}, \overset{C}{-2} \rangle \qquad \underset{x_0,\ y_0,\ z_0}{(2,0,1)} \Rightarrow 3.(x-2)-2(y-0)-2(z-1)=0$$

$$\boxed{3x-2y-2z=4}$$

⊛ $A(1,6,-4)$ noktasından geçen ve $\left\{\begin{array}{l} x=1+2t \\ y=2-3t \\ z=3-t \end{array}\right\}$ doğrusunu içeren düzlemin denklemi? (2016-Büt. sorusu)

$$\left.\begin{array}{l} x=1+2t \\ y=2-3t \\ z=3-t \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \vec{v}=\langle 2,-3,-1\rangle \to \text{doğruya paralel vektör} \\ B(1,2,3) \to \text{doğru üzerinde bir nokta} \end{array}$$

$\vec{AB} = \langle 0,-4,7\rangle$ ve $\vec{v} = \langle 2,-3,-1\rangle$ düzlem üzerindedir.

Düzlemin normali $\vec{AB}\times\vec{v}$ ye paraleldir.

$$\vec{n} = \vec{AB}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -4 & 7 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \langle \underset{A}{25}, \underset{B}{14}, \underset{C}{8} \rangle \to \text{normal vektör}$$

$\underset{x_0\ y_0\ z_0}{A(1,6,-4)} \to$ düzlem üz. nokta

$$25(x-1)+14(y-6)+8(z+4)=0 \Rightarrow \boxed{25x+14y+8z=77}$$

⊛ $P(-1,2,3)$ den geçen ve $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}$ ile $\vec{v}=2\vec{i}-3\vec{k}$ vektörlerine paralel olan düzlem?

Düzlemin normali $= \vec{n} \parallel \vec{u}\times\vec{v}$ olur.

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \langle \underset{A}{-6}, \underset{B}{3}, \underset{C}{-4} \rangle \qquad \underset{x_0\ y_0\ z_0}{P(-1,2,3)}$$

$$-6(x+1)+3(y-2)-4(z-3)=0$$

$$\boxed{-6x+3y-4z=0}$$

3 → 1 - ~~2~~ - 55 - ~~62~~ - ~~63~~ - ~~70~~ - ~~67~~

4 → ~~62~~ - ~~63~~ - ~~67~~

Soru 4. $x+y=1$ ve $2x+y-2z=2$ düzlemleri veriliyor.

a) Bu düzlemlerin kesişim doğrusunun parametrik denklemlerini bulunuz. ***(13puan)***

b) Bu düzlemlerin kesişim doğrusuna dik olan ve $P(3,1,-1)$ noktasından geçen düzlemin denklemini bulunuz. ***(12puan)***

a) $x+y=1 \qquad 2x+y-2z=2$ 4

$\vec{n_1}=\vec{i}+\vec{j} \qquad \vec{n_2}=2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$

1

$$\vec{V}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -2\end{vmatrix}=-2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$$ 4

$$z=0 \Rightarrow \begin{aligned} -x-y&=-1\\ 2x+y&=2\\ \hline x=1 &\Rightarrow y=0\end{aligned}$$

$A(1,0,0)$

$$\begin{cases} x=1-2t\\ y=2t\\ z=-t\end{cases}$$ 5

b) $\vec{PP_0}=(x-3)\vec{i}+(y-1)\vec{j}+(z+1)\vec{k}$ 4

$\vec{V}\cdot(\vec{PP_0})=0 \Rightarrow -2(x-3)+2(y-1)-(z+1)=0$

4

$$\boxed{-2x+2y-z=-3}$$ 4

$(0,1,-1)$

21

* $x=(1,2,3)$ den geçen ve $x+y+z=1$ düzlemine paralel olan düzlem?

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}=\langle 1,1,1\rangle \\ x=(1,2,3)\end{array}\right\}\quad x-1+y-2+z-3=0 \Rightarrow x+y+z=6$$

---

* $P(1,2,1)$ ve $Q(2,0,1)$ den geçen ve $3x-y+z=6$ düzlemine dik olan düzlem?

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n_1}=\langle 3,-1,1\rangle \Rightarrow \boxed{\vec{n}\perp\vec{n_1}} \\ \vec{PQ}=\langle 1,-2,0\rangle \Rightarrow \boxed{\vec{n}\perp PQ}\end{array}\right\}\quad \vec{n}=\vec{n_1}\times\vec{PQ}$$

$$\vec{n_1}\times\vec{PQ}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 1\\ 1 & -2 & 0\end{vmatrix}=\langle \overset{A}{2},\overset{B}{1},\overset{C}{-5}\rangle \qquad P(\overset{x_0}{1},\overset{y_0}{2},\overset{z_0}{1})$$

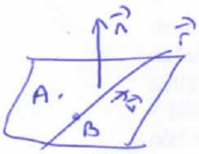
$$2(x-1)+(y-2)-5(z-1)=0 \qquad 2x+y-5z=-1$$

---

* $A(1,1,0)$ noktasından geçen ve $\vec{r}=\langle 1+2t,2-3t,3-t\rangle$ doğrusunu içeren düzlemin denklemi?

$$\left.\begin{array}{l}x=1+2t\\ y=2-3t\\ z=3-t\end{array}\right\}\quad \vec{v}=\langle 2,-3,-1\rangle$$

$$\left.\begin{array}{l}B(1,2,3)\\ A(1,1,0)\end{array}\right]\ \vec{AB}=\langle 0,1,3\rangle \qquad \vec{n}=\vec{v}\times\vec{AB}$$



$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -3 & -1\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}=\langle \overset{A}{-8},\overset{B}{-6},\overset{C}{2}\rangle \qquad A(\overset{x_0}{1},\overset{y_0}{1},\overset{z_0}{0})$$

$$-8(x-1)-6(y-1)+2z=0$$

$$-8x-6y+2z=-14$$

⊛ $x_1=(1,2,1)$ ve $x_2=(2,1,0)$ noktalarından geçen doğru ile $y_1=(3,-1,0)$ ve $y_2=(4,-3,0)$ noktalarından geçen doğru $(2,1,0)$ noktasında kesişmektedir. Öyle bir l doğrusu bulunuz ki hem bu noktadan geçsin, hem de her iki doğruya da dik olsun.

$\vec{v_1}=\overrightarrow{x_1x_2}=\langle 1,-1,-1\rangle \qquad \vec{v_2}=\overrightarrow{y_1y_2}=\langle 1,-2,0\rangle$

$$\vec{v}=\vec{v_1}\times\vec{v_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & -2 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -2 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=-2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$$

$\vec{v}=\langle \overset{a}{-2},\overset{b}{-1},\overset{c}{-1}\rangle \rightarrow$ doğrunun yön vektörü

$(\overset{x_0}{2},\overset{y_0}{1},\overset{z_0}{0}) \rightarrow$ doğru üzerinde bir nokta

$$\boxed{\begin{aligned} x&=2-2t\\ y&=1-t\\ z&=-t\end{aligned}}$$

⊛ $\begin{cases} x=2t^2+3 \\ y=t^4\end{cases}$ parametrik denklemi ile verilen eğrinin $t=-1$ noktasındaki teğet doğrusunun denklemini bulunuz.

$t=-1 \Rightarrow \begin{array}{l} x=5\\ y=1\end{array} \Rightarrow (5,1)$ den geçen teğetin denklemi:

$$\boxed{y-1=f'(5).(x-5)}$$

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{4t^3}{4t}=t^2 \Rightarrow f'(5)=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-1}=1$$

$y-1=x-5$

$\boxed{y=x-4}$

Teğet denklemi

⊛ $\lambda x - y + 3z = 1$ ile $2x + 3y - \lambda z = 4$ ün dik olması için $\lambda = ?$

$\vec{n_1} = \langle \lambda, -1, 3 \rangle$ $\vec{n_2} = \langle 2, 3, -\lambda \rangle$ $\rightarrow \vec{n_1} \perp \vec{n_2} \Rightarrow \vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0$

$\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = \lambda .2 - 1.3 - 3.\lambda = 0 \Rightarrow -\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = -3}$

⊛ $x = (1,1,0)$ ve $y = (-1,3,1)$ den geçen doğrunun parametrik denklemi?

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v} = \overrightarrow{xy} = \langle -2, 2, 1 \rangle \\ x = (1,1,0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 1 - 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{array}$$

⊛ $x = (1,1,-2)$ den geçen ve xy- düzlemine dik olan doğru?

Doğru xy-düzlemine dik ise ona paralel doğru $\vec{v} = \vec{k}$ dır.

$x = (1,1,-2)$ $\vec{v} = \vec{k}$ $\Rightarrow$ $\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ z = -2 + t \end{array}$ doğrusudur.

⊛ $x = (1,2,3)$ den geçen ve $x + y + z = 1$ düzlemine paralel olan düzlem?

$x + y + z = 1 \Rightarrow \vec{n} = \langle 1,1,1 \rangle \rightarrow$ aradığımız düzlemin de dik!

$x = (1,2,3)$ $\vec{n} = \langle 1,1,1 \rangle \Rightarrow 1.(x-1) + 1.(y-2) + 1.(z-3) = 0$

$\downarrow$

$\boxed{x + y + z = 6}$

⊛ $x + \lambda y + 2z = 3$ ve $\lambda x + y - 2z = 1$ düzlemleri paralel ise $\lambda = ?$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n_1} = \langle 1, \lambda, 2 \rangle \\ \vec{n_2} = \langle \lambda, 1, -2 \rangle \end{array}\right\} \vec{n_1} \parallel \vec{n_2} \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda}{1} = \frac{2}{-2} = -1$$

$\Downarrow$

$\boxed{\lambda = -1}$

S.4 **a)** $x + 2y + 3z = 5$ düzleminin $x - 2y + z = 3$ düzlemine dik olup olmadığını araştırınız.(7p)

Düzlemlerin normolleri sırasıyla

$\vec{n_1} = \langle 1, 2, 3 \rangle$ olup $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 1 - 4 + 3 = 0$

$\vec{n_2} = \langle 1, -2, 1 \rangle$

olduğundan verilen düzlemler diktir.

b) $x - 2y + 5z = 1$ düzleminin $x = 2 - t,\ y = 1 + 2t,\ z = t - 1$ doğrusuna paralel olup olmadığını araştırınız.(7p)

Doğrunun yönlü vektörü $\vec{v} = \langle -1, 2, 1 \rangle$ olup

Düzlemin normal vektörü $\vec{n} = \langle 1, -2, 5 \rangle$

$\vec{v} \cdot \vec{n} = -1 - 4 + 5 = 0$ olduğundan doğru düzleme paraleldir.

c) $t, [-1,0]$ aralığında değişken, $x(t) = t^2, y(t) = 1 - t^2$ ile çizilmiş yolun uzunluğunu bulunuz.(10p)

$$L = \int_{-1}^{0} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt = \int_{-1}^{0} \sqrt{(2t)^2 + (-2t)^2}\, dt$$

$$= 2\sqrt{2} \int_{-1}^{0} |t|\, dt = -2\sqrt{2} \int_{-1}^{0} t\, dt = \sqrt{2} \text{ br}$$

16

Başarılar dilerim.

⑥ $X_1=(1,4,2)$ ve $X_2(1,5,3)$ noktalarından geçen l_1 doğrusu ile $Y_1(3,1,5)$ ve $Y_2(4,0,7)$ den geçen l_2 doğrusu bir P noktasında kesişmektedir.

a) P noktasını bulunuz.

b) Öyle bir l doğrusu bulunuz ki hem P den geçsin hem de l_1 ve l_2 ye dik olsun.

a) $\overrightarrow{X_1X_2}=\vec{v_1}=\langle 0,1,1\rangle \Rightarrow l_1: \begin{cases} x=1 \\ y=4+t \\ z=2+t \end{cases}$

$\overrightarrow{Y_1Y_2}=\vec{v_2}=\langle 1,-1,2\rangle \Rightarrow l_2: \begin{cases} x=3+s \\ y=1-s \\ z=5+2s \end{cases}$

$1=3+s$
$4+t=1-s$
$2+t=5+2s$

$s=-2$
$t=-1$

$\boxed{P(1,3,1)}$

b) $l \perp l_1 \Rightarrow \vec{v}\perp\vec{v_1}$
$l \perp l_2 \Rightarrow \vec{v}\perp\vec{v_2}$
$\vec{v}=\vec{v_1}\times\vec{v_2}$

$$\vec{v_1}\times\vec{v_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=\langle 3,+1,-1\rangle$$

a b c

$$\boxed{\begin{aligned} x&=1+3t \\ y&=3+t \\ z&=1-t \end{aligned}}$$

http://avesis.yildiz.edu.tr/pkanar/dokumanlar

⊗ $A(1,1,2)$, $B(0,2,3)$, $C(2,1,1)$ den geçen düzlem?

$\vec{v_1} = \overrightarrow{AB} = \langle -1, 1, 1 \rangle$ $\quad \vec{v_2} = \overrightarrow{AC} = \langle 1, 0, -1 \rangle$

$$\vec{n} = \vec{v_1} \times \vec{v_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 0\vec{j} - \vec{k} = -\vec{i} - \vec{k}$$

$\underset{x_0, y_0, z_0}{A(1,1,2)}$ $\quad \vec{n} = \langle \underset{A}{-1}, \underset{B}{0}, \underset{C}{-1} \rangle \Rightarrow -1(x-1) + 0.(y-1) - 1.(z-2) = 0$

$$\boxed{+x + z = +3}$$

⊗ $P(1,2,1)$ ve $Q(2,0,1)$ den geçen ve $3x - y + z = 6$ düzlemine dik olan düzlem?

$3x - y + z = 6 \Rightarrow \vec{n_1} = \langle 3, -1, 1 \rangle \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{n_1}$

$\overrightarrow{PQ} = \langle 1, -2, 0 \rangle \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{PQ} \longrightarrow \vec{n} = \overrightarrow{PQ} \times \vec{n_1}$

$$\overrightarrow{PQ} \times \vec{n_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \langle \underset{A}{-2}, \underset{B}{-1}, \underset{C}{5} \rangle \quad P(\underset{x_0}{1}, \underset{y_0}{2}, \underset{z_0}{1})$$

$$\boxed{-2(x-1) - (y-2) + 5(z-1) = 0}$$

Soru 3. $\vec{r}(t)=t\,\vec{i}+\left(\sqrt{e^{2t}-1}+\arcsin\left(e^{-t}\right)\right)\vec{j}+\vec{k}$ denklemi ile verilen eğrinin $0\le t\le \ln 2$ aralığında kalan kısmının uzunluğunu bulunuz.

Cevap 3.

L, $r=\vec{r}(t)$, $0\le t\le \ln 2$, eğri parçasının uzunluğu olmak üzere

$$L=\int_0^{\ln 2}|r'(t)|\,dt$$ ile verilir. (05)

Her $t>0$ için

$$r'(t)=\vec{i}+\left(\frac{e^{2t}}{\sqrt{e^{2t}-1}}+\frac{-e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}\right)\vec{j}+0\,\vec{k}$$ (05)

$$=\vec{i}+\frac{e^{2t}-1}{\sqrt{e^{2t}-1}}\vec{j}+0\,\vec{k}$$

$$=\vec{i}+\sqrt{e^{2t}-1}\,\vec{j}+0\,\vec{k}$$ (05)

olduğundan, her $t>0$ için

$$|r'(t)|=\sqrt{1+e^{2t}-1+0}=e^t$$ dır. (05)

Buna göre,

$$L=\underbrace{\int_0^{\ln 2}|r'(t)|\,dt=\int_0^{\ln 2}e^t\,dt=e^t\Big|_0^{\ln 2}}_{(03)}=\underbrace{e^{\ln 2}-1=2-1=1\text{ br}}_{02}$$

bulunur.

13

YTÜ - Fen-Edebiyat Fakültesi Bütünleme Sınav Soru ve Cevap Kağıdı			NOT TABLOSU						
			1. S	2. S	3. S	4. S	5. S	6. S	TOPLAM
Adı Soyadı									
Öğrenci Numarası		Grup No							
Bölümü				Sınav Tarihi			22.06.2015		
Dersin Adı	Matematik II		Sınav Süresi	80	Sınav Yeri				
Dersi veren Öğretim Üyesinin Adı Soyadı				İmza					

YÖK nun 2547 sayılı Kanunun ***Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin*** 9. Maddesi olan ***"Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek"*** fiili işleyenler **bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma** cezası alırlar.

1) $A(t) = (5t-6)\vec{i} + t^2\vec{j} + 9\vec{k}$ ve $B(t) = t^2\vec{i} + (2t+3)\vec{j} + t^2\vec{k}$ zamana bağlı hareket eden sırasıyla A ve B cisimlerinin vektörel konum fonksiyonları olsun.

a) A ve B cisimlerinin çarpıştıkları anı ve bu andaki konumlarını belirleyiniz. (12p)

$A(t)=B(t) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5t-6=t^2 \\ t^2=2t+3 \\ 9=t^2 \end{array}\right\}$ $\cancel{t=-3}$ $t=3$

$B(3)=A(3)=9\vec{j}+9\vec{k}+9\vec{i}$

b) Çarpışma anında A ile B cisimleri arasındaki açı nedir? (Aradaki açı teğetlerinin açısı olarak alınacaktır.) (13p)

$A'(t)=5\vec{i}+2t\vec{j}$ $\quad B'(t)=2t\vec{i}+2\vec{j}+2t\vec{k}$

$\vec{v_1}=A'(3)=5\vec{i}+6\vec{j}$

$\vec{v_2}=B'(3)=6\vec{i}+2\vec{j}+6\vec{k}$

$\vec{v_1}.\vec{v_2}=|\vec{v_1}|.|\vec{v_2}|.\mathrm{Cos}\theta$

$30+12=\sqrt{61}.\sqrt{76}.\mathrm{Cos}\theta$

$\theta=\mathrm{ArcCos}\dfrac{42}{\sqrt{61.76}}$

Başarılar dilerim

5