Pınar Albayrak
3. Uygulama

⊛ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ serisinin toplamı?

$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ $(-1<x<1)$ olduğunu biliyoruz.

↓ Türev

$\sum_{k=1}^{\infty} k.x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ $(-1<x<1)$

↓ x ile çarp

$\sum_{k=1}^{\infty} k.x^{k} = \frac{x}{(1-x)^2}$ $(-1<x<1)$

$x=\frac{1}{2}$ ise $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = \frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} = \underline{\underline{2}}$

⊛ $I=\int_0^x \frac{1-\text{Cost}}{t^2}\,dt$ için bir kuvvet serisi temsili bulunuz.

$\text{Cost} = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots$

$$I = \int_0^x \frac{1-\left(1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\frac{t^6}{6!}+\cdots\right)}{t^2}\,dt = \int_0^x \left(\frac{1}{2!} - \frac{t^2}{4!} + \frac{t^4}{6!} - \cdots\right) dt$$

$$= \frac{t}{2!} - \frac{t^3}{3.4!} + \frac{t^5}{5.6!} - \cdots \Big|_0^x = \frac{x}{2!} - \frac{x^3}{3.4!} + \frac{x^5}{5.6!} - \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n . x^{2n+1}}{(2n+1).(2n+2)!}$$

㊀ $\int_0^x \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}\,dt$ için kuvvet seri temsili bulunuz.

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots \Rightarrow e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \cdots$$

$$\Rightarrow 1 - e^{-t^2} = t^2 - \frac{t^4}{2!} + \frac{t^6}{3!} + \cdots$$

$$\int_0^x \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}\,dt = \int_0^x \frac{t^2 - \frac{t^4}{2!} + \frac{t^6}{3!} - \cdots}{t^2}\,dt$$

$$= \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{3!} - \frac{t^6}{4!} + \cdots\right) dt$$

$$= t - \frac{t^3}{3.2!} + \frac{t^5}{5.3!} - \frac{t^7}{7.4!} + \cdots \Big|_0^x = x - \frac{x^3}{3.2!} + \frac{x^5}{5.3!} - \frac{x^7}{7.4!} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1).(n+1)!}$$

㊀ $\lim_{x\to 0} \frac{1+x^2-e^{x^2}}{x^2}$ limitini seri açılımları yardımıyla hesaplayın.

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1} + \cancel{x^2} - \cancel{1} - \cancel{x^2} - \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} - \cdots}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} -\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{3!} \cdots\right) = 0$$

㊀ $A = \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = ?$

I. Yol

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}_{a=\frac{1}{2}\quad r=\frac{1}{2}\quad \text{Geometrik seri}} = \underset{n=1}{\frac{1}{2}} + \underset{n=2}{\frac{1}{2^2}} + \underbrace{\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{A} = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + A = 1 \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{4}}$$

II. Yol

$$A = \sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} = \frac{1}{2^3}\cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}_{a=1\quad r=\frac{1}{2}\quad \text{Geometrik seri}} = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \,// \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{4}}$$

$n \to n+2$ dönüşümü ile

$a/1-r$

(*) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+\text{Arctan}x^2}\right)$ limitini seri açılımları ile hesaplayın.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\text{Arctan}x^2}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\text{Arctan}x^2}{x(x+\text{Arctan}x^2)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-\frac{1}{3}x^6+\frac{1}{5}x^{10}-\cdots}{x^2+x\left(x^2-\frac{1}{3}x^6+\frac{1}{5}x^{10}-\cdots\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cancel{x^2}\Big(1\overbrace{-\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{5}x^8-\cdots}^{0}\Big)}{\cancel{x^2}\Big(1+\underbrace{x-\frac{1}{3}x^5+\frac{1}{5}x^9+\cdots}_{0}\Big)}=\underline{1}$$

(*) $\ln x$ fonksiyonunun Taylor polinomunun ilk 4 terimini kullanarak $\ln(1,2)$ için yaklaşık bir değer bulun.

$f(x)=\ln x$ $\quad a=1$

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$ $\quad f(1)=0$

$f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ $\quad f'(1)=1$

$\quad f''(1)=-1$

$f'''(x)=\dfrac{2}{x^3}$ $\quad f'''(1)=2$

$$f(x)\approx f(1)+f'(1).(x-1)+f''(1).\frac{(x-1)^2}{2!}+f'''(1).\frac{(x-1)^3}{3!}=P_3(x)$$

$$f(1,2)=\ln(1,2)\approx 0+1.(1,2-1)+(-1).\frac{(1,2-1)^2}{2}+2.\frac{(1,2-1)^3}{3!}=0,2-\frac{1}{2}.(0,2)^2+\frac{(0,2)^3}{3!}$$

$$=\underline{0,182}$$

⊛ $\frac{x}{(1-x)^2}$ fonksiyonu için bir kuvvet serisi temsili elde ediniz ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (-1<x<1) \text{ olduğunu biliyoruz.}$$

↓ Türev

$$\sum_{n=1}^{\infty} n.x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (-1<x<1)$$

↓ x ile çarp

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n.x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (-1<x<1)}$$

⊛ $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$ için bir kuvvet serisi temsili ve geçerli olduğu aralığı bulunuz.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (|x|<1) \text{ olduğunu biliyoruz.}$$

↓ $x \to -x-1$

$$\frac{1}{1-(-x-1)} = \frac{1}{2+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x-1)^n \quad (|-x-1|<1 \Rightarrow |x+1|<1)$$

↓

$$\frac{1}{2+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n.(1+x)^n \quad (|x+1|<1)$$

↓ Türev

$$-\frac{1}{(x+2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n.n.(1+x)^{n-1} \quad (|x+1|<1)$$

↓

$$\frac{1}{(x+2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}.n.(1+x)^{n-1} \quad (-2<x<0)$$

⊗ $|x|<1$ için $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}$ serisinin toplamını bulup bu toplam yardımı ile $\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}$ serisinin toplamını bulunuz.

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ $\quad |x|<1$ olduğunu biliyoruz.

$\Big\downarrow x = x^2$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} \qquad -1<x<1$$

$\Big\downarrow x$ ile çarp

$$\underline{\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} = \frac{x}{1-x^2}} \qquad (-1<x<1) \qquad (1)$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{2n}}}_{=} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$$

$x=\frac{1}{2}$ için (1)'i kullanırsak:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

⊗ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\cdot x^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapını bulunuz.

Kök Testi ile:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}x^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot|x| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{e}}\cdot|x| = \frac{|x|}{e}<1$$

$$\Downarrow$$

$$|x|<e$$

$$\Downarrow$$

Yakınsaklık Yarıçapı $= R = e$

⊛ $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^{n+2}$ serisinin yakınsadığı fonksiyonu ve bu yakınsamanın gerçekleştiği aralığı bulunuz.

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ $(-1<x<1)$ olduğunu biliyoruz.

$\downarrow x^2$ ile çarp

$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} = \frac{x^2}{1-x}$ $(-1<x<1)$

$\downarrow$ Türev al

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^{n+1} = \frac{2x.(1-x)+x^2}{(1-x)^2} = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2}$ $(-1<x<1)$

$\downarrow x$ ile çarp

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^{n+2} = \frac{2x^2-x^3}{(1-x)^2} \quad (-1<x<1)}$$

⊛ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{3^n}$ kuvvet serisinin yakınsaklık aralığını ve bu aralıkta temsil ettiği fonksiyonu bulunuz.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x+2}{3}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{x+2}{3}\right)$ Geometrik Seri

$r = \frac{x+2}{3}$ $a = \frac{x+2}{3}$

Bu seri $|r| = \left|\frac{x+2}{3}\right| < 1$ için yani $|x+2|<3 \Rightarrow \boxed{-5<x<1}$ için yakınsaktır.

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x+2}{3}\right)^n = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{x+2}{3}}{1-\frac{x+2}{3}} = \frac{x+2}{1-x}$ $(-5<x<1)$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{3^n} = \frac{x+2}{1-x} \quad (-5<x<1)}$$

(*) $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}$ serisinin toplamını ve yakınsaklık aralığını bulup bu seri yardımıyla $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{4^n}$ serisinin toplamını bulunuz.

$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$ $(-1<x<1)$ olduğunu biliyoruz.

$\downarrow x\to x^2$ yaz

$\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}$ $(-1<x<1)$

$\downarrow x$ ile çarp

$\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}=\frac{x}{1-x^2}$ $(-1<x<1)$

$\downarrow$ Türev al

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1).x^{2n}=\frac{1-x^2+2x.x}{(1-x^2)^2}=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}\quad(-1<x<1)}\ *$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{4^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=\frac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^2}=\frac{20}{9}$$

(*) da
$x=\frac{1}{2}$ yazarsak

(*) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{b^n.x^n}{\ln n}$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapının 3 olması için b nin alacağı değerleri bulun. (2016-Final sorusu)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b^{n+1}.x^{n+1}}{\ln(n+1)}\cdot\frac{\ln n}{b^n x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{\ln n}{\ln(n+1)}}_{\lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{1/(n+1)}=1}.|b|.|x|=|b|.|x|<1$$

$\Rightarrow |x|<\frac{1}{|b|}$ olmalı

O halde $R=\frac{1}{|b|}$ dir.

$R=3\Rightarrow\frac{1}{|b|}=3\Rightarrow|b|=\frac{1}{3}\Rightarrow b=\mp\frac{1}{3}$

(*) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ limitini kuvvet serilerini kullanarak hesaplayınız.

$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots \quad e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^5}{5!} + \cdots$

$\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\cancel{1} + \cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{2!}} + \frac{x^3}{3!} + \cancel{\frac{x^4}{4!}} + \frac{x^5}{5!} \cdots\right) - \left(\cancel{1} - \cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{2!}} - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) - \cancel{2x}}{\cancel{x} - \left(\cancel{x} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\frac{x^3}{3!} + 2\frac{x^5}{5!} + \cdots}{\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^3}\left(\frac{2}{3!} + \overbrace{\frac{2x^2}{5!} + \cdots}^{0}\right)}{\cancel{x^3}\left(\frac{1}{3!} + \underbrace{\frac{x^2}{5!} + \cdots}_{0}\right)} = \underline{\underline{2}}$$

(*) $y = xe^{-x}$ fonksiyonunun seriye açılımından yararlanarak $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!} \cdot 2^{n+1}$ alterne serisinin toplamını bulunuz.

$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots \Rightarrow e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{(-1)^n \cdot x^n}{n!} + \cdots$

$y = x \cdot e^{-x} = x - x^2 + \dfrac{x^3}{2!} - \dfrac{x^4}{3!} + \cdots + (-1)^n \cdot \dfrac{x^{n+1}}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{x^{n+1}}{n!}$

$x = 2$ alırsak

$2 \cdot e^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!} \cdot 2^{n+1} \Rightarrow \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot 2^{n+1}}{n!} = \dfrac{2}{e^2}}$

YTÜ - Fen-Edebiyat Fakültesi 2015-2016 Bahar Dönemi-Bütünleme Sınavı Soru ve Cevap Kâğıdı			NOT TABLOSU				
			1. S	2.S	3.S	4.S	TOPLAM
Adı Soyadı							
Öğrenci No	Grup No						
Bölümü			Sınav Tarihi	20/06/2016			
Dersin Adı	MAT1072 MATEMATİK 2		Süre	100dk	Derslik		
Öğr. Üye. Adı Soyadı			İmza				

YÖK nun 2547 sayılı Kanunun ***Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin*** 9. Maddesi olan ***"Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek"*** fiili işleyenler **bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma** cezası alırlar.

1-a) $L(x)=\int_0^x \cos(t^2)dt$ fonksiyonunun Maclaurin serisini bulunuz. Serinin ilk 2 terimini kullanarak $L(0.1)$ değerini yaklaşık olarak hesaplayınız.*(12 Puan)*

$$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!},\ -\infty<x<+\infty \qquad \cos(t^2)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{4k}}{(2k)!} \quad 2$$

$$L(x)=\int_0^x\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{4k}}{(2k)!}\right)dt=\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\int_0^x t^{4k}dt}_{3}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\left(\frac{t^{4k+1}}{4k+1}\Big|_0^x\right)$$

$$L(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\frac{x^{4k+1}}{4k+1} \quad 2$$

$$L(0.1)\cong\sum_{k=0}^{1}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\frac{(0.1)^{4k+1}}{4k+1}=\frac{1}{10}-\frac{1}{2}\frac{1}{10^5.5}=\frac{1}{10}-\frac{1}{10^6}=0,0999 \quad 5$$

1-b) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln n}$ serisinin mutlak yakınsak, şartlı yakınsak ıraksak olup olmadığını belirleyiniz.*(13 Puan)*

$a_n=(-1)^n\frac{1}{n\ln n}$. $\sum|a_n|=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ integral testi uygulanabilir.

$f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ pozitif, sürekli, azalan $x\geq 2$ için.

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\int_{\ln 2}^{\infty}\frac{du}{u}=\lim_{b\to\infty}\int_{\ln 2}^{b}\frac{du}{u}=\infty \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n} \text{ Iraksaktır}$$

$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln n}$ serisi de mutlak yakınsak değildir 5

Alternatif Seri Testi (AST) $u_n=\frac{1}{n\ln n}$, $u_n>0$ $n\geq 2$ 1

. $n\ln n<(n+1)\ln(n+1) \Rightarrow u_{n+1}<u_n$ 2

. $\lim_{n\to\infty} u_n\to 0$ 2

Tüm AST koşulları sağlandığından $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln n}$ şartlı yakınsar 1

Buradan ⇒ seri yakınsaktır Ancak mutlak yakınsak değil şartlı yakınsaktır denir 2

13

25

2) a) $-1 < x < 1$ için $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x - x^3$, $f_3(x) = x - x^3 + x^5$, $f_4(x) = x - x^3 + x^5 - x^7, \ldots$ şeklinde bir $f_n(x)$ dizisi bir sonsuz serinin kısmi toplamlar dizisi olarak verilsin. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ limitini sonsuz serinin toplamı olarak bulunuz. (12p)

$$f_n(x) = x - x^3 + x^5 - x^7 + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot x^{2n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot x^{2n-1} = x \underbrace{-}_{-x^2} x^3 \underbrace{+}_{-x^2} x^5 \underbrace{-}_{-x^2} x^7 + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot x^{2n-1} + \cdots$$

Geometrik Seri

$a = x \quad r = -x^2$

Bu seri $|r| = |-x^2| < 1$ yani $-1 < x < 1$ için yakınsaktır.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot x^{2n-1} = \frac{a}{1-r} = \frac{x}{1-(-x^2)} = \frac{x}{1+x^2} \qquad (-1 < x < 1)$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n^4 + \ln n}$ serisinin karakterini belirleyiniz. (13p)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^2}{n^4 + \ln n} \text{ mutlak yakınsak mı?} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + \ln n} \text{ yakınsak mı?}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\begin{array}{l} p = 2 > 1 \\ \text{yakınsak} \end{array} \right) \text{ seçelim.}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^4 + \ln n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{n^4 + \ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^4}^{\,1}}{\cancel{n^4}\big(1 + \underbrace{\tfrac{\ln n}{n^4}}_{0}\big)} = 1 \neq 0, \infty$$

$$\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{4n^3} = 0 \right)$$

Limit testine göre iki seri aynı karakterlidir.

Yani $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + \ln n}$ yakınsaktır. O halde $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n^2}{n^4 + \ln n}$ mutlak yakınsaktır.

16

* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^{n+1}}$ serisinin yakınsaklık aralığını ve temsil ettiği fonksiyonu bulunuz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n-1}}{\underbrace{3^n}_{3.3^{n-1}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{3}}_{a} \Big(\underbrace{\frac{x+2}{3}}_{r} \Big)^{n-1}$$

$a = \frac{1}{3}$

$r = \frac{x+2}{3}$

Geometrik seri

$|r| = \left| \frac{x+2}{3} \right| < 1$ ise seri yakınsaktır

$\Downarrow$

$-3 < x+2 < 3 \Rightarrow \boxed{-5 < x < 1}$ Yak. aralığı

Seri bu aralıkta $\frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{x+2}{3}} = \frac{1}{1-x}$ 'e yakınsar.

---

* Genel terimi $a_n = \frac{n^2}{2n+1} . \operatorname{Sin}\left(\frac{3}{n}\right)$ olan dizinin limiti?

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{2n+1} . \operatorname{Sin}\frac{3}{n} = \lim_{n \to \infty} \underbrace{\frac{3n}{2n+1}}_{\frac{3}{2}} . \underbrace{\frac{\operatorname{Sin}\frac{3}{n}}{\frac{3}{n}}}_{1} = \frac{3}{2}$$

---

* Genel terimi $a_1 = \frac{2}{3}$, $a_{n+1} = \frac{2(n+1)}{3n} . a_n$ ile verilen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin karakteri?

Oran Testi ile: $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{2(n+1)}{3n} = \frac{2}{3} < 1$

Oran Testine göre Seri yakınsak