

Pınar
Altaysoy
final
Uygulama

$$\textcircled{4} \quad f(x,y) = 8x^3 + y^3 - 12xy + 8 \quad \text{ekstremumlarını araştırın.}$$

$$F_x = 24x^2 - 12y = 0 \quad \textcircled{1} \quad \text{den } y = 2x^2 \text{ bulunur.}$$

$$F_y = 3y^2 - 12x = 0 \quad \textcircled{2} \quad \text{de } y = 2x \text{ yazılım}$$

$$3.4x^4 - 12x = 0$$

$$12(x^3 - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

$$x=0 \rightarrow y=0 \rightarrow (0,0) \quad \text{K.N.}$$

$$x=1 \rightarrow y=2 \rightarrow (1,2)$$

$$A = f_{xx} = 48x \quad B = f_{xy} = -12 \quad C = f_{yy} = 6y$$

	$A = 48x$	$B = -12$	$C = 6y$	$B^2 - AC$
(0,0)	0	-12	0	$(-12)^2 - 0 > 0 \Rightarrow (0,0) \text{ Eyer N.}$
(1,2)	48	-12	12	$\begin{cases} (-12)^2 - 12 \cdot 48 < 0 \\ A = 48 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (1,2) \text{ yerel} \\ \text{min. noktası} \end{cases}$

$$\textcircled{5} \quad f(x,y) = 2y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 12xy \quad \text{max/min.?}$$

$$F_x = 6x - 12y = 0 \quad \textcircled{1} \quad \text{den } x = 2y$$

$$F_y = 6y^2 - 6y - 12x = 0 \quad \textcircled{2} \quad \downarrow \textcircled{2}$$

$$6y^2 - 6y - 24y = 0$$

$$6y^2 - 30y = 0 \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=5 \end{cases}$$

$$y=0 \rightarrow \begin{cases} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{cases} \quad x=0 \rightarrow (0,0) \quad \text{K.N.}$$

$$y=5 \rightarrow \begin{cases} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{cases} \quad x=10 \rightarrow (10,5)$$

$$A = f_{xx} = 6 \quad B = f_{xy} = -12 \quad C = f_{yy} = 12y - 6$$

	$A = 6$	$B = -12$	$C = 12y - 6$	$B^2 - AC$
(0,0)	6	-12	-6	$(-12)^2 - (-6) \cdot 6 > 0 \Rightarrow (0,0) \text{ Eyer N.}$
(10,5)	6	-12	54	$\begin{cases} (-12)^2 - 54 \cdot 6 < 0 \\ A = 6 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (10,5) \\ \text{yerel min. noktası} \end{cases}$

①.

④ $f(x,y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$ ekstremum noktaları?

$$\begin{cases} f_x = y - 2x - 2 = 0 \\ f_y = x - 2y - 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y - 2x = 2 \\ -2y + x = 2 \end{cases} \quad \begin{aligned} x = y = -2 &\Rightarrow (-2, -2) \rightarrow \text{kritik noktası} \\ A = f_{xx} = -2 & \\ B = f_{xy} = 1 & \\ C = f_{yy} = -2 & \end{aligned}$$

$$B^2 - AC = 1 - 4 = -3 < 0$$

$$\underbrace{A = -2 < 0}_{(-2, -2)}$$

(-2, -2) yerel max noktası

⑤ $f(x,y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulup sınırlarını.

$$f_x = 3x^2 - 3y = 0 \quad ①$$

$$f_y = 3y^2 - 3x = 0 \quad ②$$

$$\begin{aligned} x = 0 \xrightarrow{①} y = 0 &\rightarrow (0,0) \\ x = 1 \xrightarrow{②} y = 1 &\rightarrow (1,1) \end{aligned}$$

$$\text{① den } 3x^2 - 3y = 0 \rightarrow y = x^2$$

\downarrow ②'de yerleştirilim

$$3x^4 - 3x = 0$$

$$3x(x^3 - 1) = 0 \rightarrow \boxed{x=0} \rightarrow \boxed{x=1}$$

$$A = f_{xx} = 6x \quad B = f_{xy} = -3 \quad C = f_{yy} = 6y$$

	$A = 6x$	$B = -3$	$C = 6y$	$B^2 - AC$
(0,0)	0	-3	0	$9 > 0 \rightarrow (0,0)$ Eyer N.
(1,1)	6	-3	6	$(-3)^2 - 6 \cdot 6 < 0 \quad \left. \begin{array}{l} A = 6 > 0 \\ \end{array} \right\} (1,1) \text{ yerel minimum noktası}$

⑥ $f(x,y) = x^3 - 3x + 2y^2 + 2$ max/min?

$$f_x = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \quad \left. \begin{array}{l} \text{K.N} \\ (1,0) \end{array} \right\}$$

$$f_y = 4y = 0 \rightarrow y = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ (-1,0) \end{array} \right\}$$

$$A = f_{xx} = 6x \quad B = f_{xy} = 0 \quad C = f_{yy} = 4$$

	$A = 6x$	$B = 0$	$C = 4$	$B^2 - AC$
(1,0)	6	0	4	$0 - 6 \cdot 4 < 0, A = 6 > 0 \Rightarrow (1,0) \text{ min noktası}$
(-1,0)	-6	0	4	$0 - 6 \cdot (-6) > 0 \rightarrow (-1,0) \text{ Eyer Noktası}$

②.

2016-yaz okulu

Soru 3-a) $x^2 + 2y^2 + z^2 = 7$ elipsoidinin $\vec{r}(t) = t^{-1}\vec{i} + t\vec{j} + (3-t)\vec{k}$ eğrisine $P(1,1,2)$ noktasında paralel olup olmadığını araştırınız. (13 P)

Yüzeyin normali, $F = x^2 + 2y^2 + z^2 - 7$ ile

$$\nabla F = \langle 2x, 4y, 2z \rangle \Big|_{(1,1,2)} = \langle 2, 4, 4 \rangle$$

Eğrinin ~~teğet~~ vektörü $\vec{\Gamma}'(t) = \left\langle -\frac{1}{t^2}, 1, -1 \right\rangle$ ve

$$t=1 \text{ ile } \vec{\Gamma}'(1) = \langle -1, 1, -1 \rangle$$

$$\nabla F \cdot \vec{\Gamma}'(1) = \langle 2, 4, 4 \rangle \cdot \langle -1, 1, -1 \rangle = -2 \neq 0 \text{ old. dan}$$

yüzey, eğriye paralel deildir.

Soru 3-b) $x^2 + y^2 + z^2 = 4y + 2z + 5$ külesi ile $3x^2 + 2y^2 - 2z = 3$ paraboloidi $P(1,2,4)$ noktasında kesişmektedir. Bu noktadaki açıyı bulunuz. (12 P)

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 2z - 5$$

$$G(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 - 2z - 3$$

$$\nabla F = \langle 2x, 2y-4, 2z-2 \rangle \Big|_P = \langle 2, 0, 6 \rangle$$

$$\nabla G = \langle 6x, 4y, -2 \rangle \Big|_P = \langle 6, 8, -2 \rangle$$

$$\cos \theta = \frac{\nabla F \cdot \nabla G}{|\nabla F| |\nabla G|} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} //$$

*) $g\left(\frac{x}{z}\right) = yz$ ise $x \cdot z_x - y \cdot z_y = z$ olduğunu gösterin.

F: $g\left(\frac{x}{z}\right) - yz = 0 \rightarrow$ Kapalı Fonk.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_z} = -\frac{\frac{1}{z} \cdot g'\left(\frac{x}{z}\right)}{-\frac{x}{z^2} \cdot g'\left(\frac{x}{z}\right) - y} = \frac{z \cdot g'\left(\frac{x}{z}\right)}{x g'\left(\frac{x}{z}\right) + y z^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_y}{f_z} = -\frac{-z}{-\frac{x}{z^2} g'\left(\frac{x}{z}\right) - y} = -\frac{z^3}{x g'\left(\frac{x}{z}\right) + y z^2}$$

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x z g'\left(\frac{x}{z}\right)}{x g'\left(\frac{x}{z}\right) + y z^2} + \frac{y z^3}{x g'\left(\frac{x}{z}\right) + y z^2} = \frac{z(x g'\left(\frac{x}{z}\right) + y z^2)}{x g'\left(\frac{x}{z}\right) + y z^2} = z \quad \checkmark$$

*) $\frac{(2,05)^2}{(10,95)^2}$ sayısını a) lineerleştirmeye ile
b) diferansiyel hesap ile } yarlaşıklık
olarak hesaplayın.

a) $L(x,y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$

$$f_x = \frac{2x}{y^2} \quad f_x(2,1) = 4 \quad f_y = -\frac{2x^2}{y^3} \quad f_y(2,1) = -8 \quad f(2,1) = 4$$

$$L(x,y) = 4 + 4(x - 2) - 8(y - 1) \Rightarrow f(2,05, 0,95) \approx L(2,05, 0,95) \\ = 4 + 4(2,05 - 2) - 8(0,95 - 1) \\ = 4 + 4 \cdot 0,05 - 8 \cdot 0,05 = 4,6$$

b) $dz = f_x(x_0, y_0) dx + f_y(x_0, y_0) dy$

$$f_x(2,1) = 4 \quad f_y(2,1) = -8 \quad x_0 = 2 \quad y_0 = 1$$

$$x = 2,05 \quad y = 0,95$$

$$dx \approx \frac{x - x_0}{\Delta x} = 2,05 - 2 = 0,05$$

$$dy \approx \Delta y = y - y_0 = 0,95 - 1 = -0,05$$

$$dz \approx \Delta z = f(2,05, 0,95) - f(2,1) = \frac{(2,05)^2}{(10,95)^2} - 4$$

bulduklarımıza
yerine koyalım:

$$\frac{(2,05)^2}{(10,95)^2} - 4 \approx 4 \cdot 0,05 - 8 \cdot (-0,05) \Rightarrow \frac{(2,05)^2}{(10,95)^2} \approx 4 + 0,2 + 0,4 = 4,6$$

(19)

*) $f(x,y,z) = xe^{yz}$ fonksiyonunun $C: \begin{cases} x=t^2 \\ y=t+1 \\ z=2t \end{cases}$ eğrisinin

$(4,3,4)$ noktasındaki teğet: boyunca $(4,3,4)$ noktasındaki türevini hesaplayınız.

$$\nabla f = e^{yz}\vec{i} + xze^{yz}\vec{j} + xyze^{yz}\vec{k} \quad |\nabla f| = \langle e^{12}, 16e^{12}, 12e^{12} \rangle$$

$$C \text{ eğrisi: } \vec{r}(t) = t^2\vec{i} + (t+1)\vec{j} + 2t\vec{k}$$

↓ Teğeti:

$$\vec{r}'(t) = 2t\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{r}'(2) = \langle 4, 1, 2 \rangle \quad |\vec{r}'(2)| = \sqrt{16+1+4} = \sqrt{21}$$

$$\vec{v} = \frac{\vec{r}'(2)}{|\vec{r}'(2)|} = \left\langle \frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}} \right\rangle$$

$$(D_{\vec{v}f})|_{(4,3,4)} = \nabla f|_{(4,3,4)} \cdot \vec{v} = \langle e^{12}, 16e^{12}, 12e^{12} \rangle \cdot \left\langle \frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}} \right\rangle = \frac{44}{\sqrt{21}} e^{12}$$

*) $x^3+y^3+z^3-3xyz=4$ yüzeyinin $(1,1,2)$ noktasındaki teğet düzleminin ve normal doğrusu?

$$F: x^3+y^3+z^3-3xyz-4=0$$

$$\nabla F = f_x\vec{i} + f_y\vec{j} + f_z\vec{k} = \langle 3x^2-3yz^2, 3y^2-3xz^2, 3z^2-3xy \rangle$$

$$\nabla F|_{(1,1,2)} = \langle -3, -3, 9 \rangle \rightarrow \text{Teğet düzleme normal}$$

$$\nabla F|_{(1,1,2)} = \langle -3, -3, 9 \rangle \rightarrow \text{Normal doğrusuya paralel}$$

$$(1,1,2)$$

Teğet Düzlem

$$-3(x-1) - 3(y-1) + 9(z-2) = 0$$

Normal Ogru

$$\begin{cases} x = 1-3t \\ y = 1-3t \\ z = 2+9t \end{cases}$$

*) Eğer f ve g iki deş türerlenebilir tek değişkenli fonksiyonlar ise $w = f(x-ct) + g(x+ct)$ için $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ olduğunu gösterin.

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -c f'(x-ct) + c g'(x+ct) \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 f''(x-ct) + c^2 g''(x+ct)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f'(x-ct) + g'(x+ct) \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f''(x-ct) + g''(x+ct) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

*) $z = x^2 - 4xy - 2y^2 + 12x - 12y - 1$ yüzeyine teğet olan yatay düzlem hangisidir? Teğet noktasını bulunuz.

Bir düzlem eğer denklemi $z = k$ formunda ise yataydır. Bu ise denklemin x ve y den bağımsız olduğunu gösterir. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ olduğunu gösterir.

$$F: z - x^2 + 4xy + 2y^2 - 12x + 12y + 1 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} F_x = -2x + 4y - 12 = 0 \\ F_y = 4x + 4y + 12 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = -4 \\ y = 1 \end{array} \Rightarrow z = -31 \text{ bulunur.}$$

Aranan düzlem $z = -31$, noktası ise $(-4, 1, -31)$ noktasıdır.

*) $f(x,y) = \sqrt{2x^2 + e^{2y}}$ fonksiyonu verilsin. $f(2.2, -0.2)$ için yaklaşıklı bir değer bulunuz.

$(2,0)$ noktasında lineerlestirme yapalım. $x_0 = 2$ $y_0 = 0$

$$f(2,0) = 3$$

$$F_x = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2 + e^{2y}}} \quad F_x(2,0) = \frac{4}{3}$$

$$F_y = \frac{2e^{2y}}{2\sqrt{2x^2 + e^{2y}}} \quad F_y(2,0) = \frac{1}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} L(x,y) = 3 + \frac{4}{3}(x-2) + \frac{1}{3}(y-0) \\ F(x,y) \approx L(x,y) \Rightarrow f(2.2, -0.2) \\ \approx L(2.2, -0.2) \\ L(2.2, -0.2) = 3 + \frac{4}{3} \cdot (2.2-2) + \frac{1}{3} \cdot (-0.2) \\ = 3.2 \end{array} \right\}$$

* $z = \operatorname{Arctan}(x^2 - xy)$ yüzeyinin $(0, -1)$ deki teğet düzlemini bulunuz.

$$x=0, y=-1 \Rightarrow z = \operatorname{Arctan} 0 = 0 \Rightarrow \text{Nokta } (0, -1, 0)$$

$\nabla f|_{(0, -1, 0)}$ \rightarrow Teğet düzleme dik vektör ($F: \operatorname{Arctan}(x^2 - xy) - z = 0$)

$$f_x|_{(0, -1, 0)} = \frac{2x-y}{1+(x^2-xy)^2}|_{(0, -1, 0)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$f_y|_{(0, -1, 0)} = \frac{-x}{1+(x^2-xy)^2}|_{(0, -1, 0)} = 0 \quad f_z|_{(0, -1, 0)} = -1$$

$$\nabla f|_{(0, -1, 0)} = \vec{i} - \vec{k}$$

$$\text{Teğet Düzlem: } 1(x-0) + 0(y+1) + 1(z-0) = 0 \Rightarrow [x = z]$$

* $z = \sin(x+y^2)$ nin $(\pi, 0)$ deki teğet düzlemini? Normal doğrusu?
 $x=\pi, y=0 \Rightarrow z=0 \Rightarrow \text{Nokta: } (\pi, 0, 0)$

$F: \sin(x+y^2) - z = 0 \Rightarrow \nabla f|_{(\pi, 0, 0)} \rightarrow$ Düzlemin normali

$$\nabla f|_{(\pi, 0, 0)} = \cos(x+y^2)|_{(\pi, 0, 0)} \vec{i} + 2y \cdot \cos(x+y^2)|_{(\pi, 0, 0)} \vec{j} - \vec{k} = -\vec{i} - \vec{k}$$

$$\text{T. Düzlem: } -1 \cdot (x-\pi) + 0 \cdot (y-0) - 1 \cdot (z-0) = 0$$

$$-\pi + x - z = 0 \Rightarrow \boxed{x+z=\pi}$$

$\nabla f|_{(\pi, 0, 0)} \rightarrow$ Doğrusal paralel vektör

$$\begin{aligned} N. \text{Doğru: } & x = \pi - t \\ & y = 0 + 0t = 0 \\ & z = 0 - t = -t \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & x = \pi - t, y = 0, z = -t \\ & \end{aligned} \right\}$$

(42)

* $f(x,y) = x + y \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) fonksiyonun ekstremumlarını incleyin.

$$f_x = 1 + y \cos x = 0 \quad \textcircled{1}$$

$$f_y = \sin x = 0 \quad \textcircled{2} \rightarrow \begin{array}{l} x=0 \\ \downarrow \textcircled{1} \\ \boxed{y=-1} \\ \downarrow \\ (0, -1) \end{array} \quad \begin{array}{l} x=\pi \\ \downarrow \textcircled{1} \\ \boxed{y=1} \\ \downarrow \\ (\pi, 1) \end{array} \rightarrow \text{Kritik noktalar}$$

$$A = f_{xx} = -y \sin x \quad B = f_{xy} = \cos x \quad C = f_{yy} = 0$$

	$A = -y \sin x$	$B = \cos x$	$C = 0$	$B^2 - AC$
$(0, -1)$	0	1	0	$1^2 - 0 = 1 > 0 \rightarrow (0, -1) \text{ Eyer N.}$
$(\pi, 1)$	0	-1	0	$(-1)^2 - 0 = 1 > 0 \rightarrow (\pi, 1) \text{ Eyer N.}$

* $x = u^2 + v^2$, $y = u \cdot v$ ise $(u, v) = (\sqrt{2}, 1)$ noktasında

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_x = ?$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_x = \begin{array}{l} x, y \rightarrow \text{bağımsız değişken} \\ u, v \rightarrow \text{bağımlı değişken} \end{array}$$

$$x = u^2 + v^2 \quad \begin{array}{l} \text{y'ye göre} \\ \text{türev} \end{array} \quad 0 = 2u \cdot uy + 2v \cdot vy \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \sqrt{2} \\ v = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 0 = 2\sqrt{2}uy + 2vy \\ 1 = uy + \sqrt{2}vy \end{array}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}uy + 2vy = 0$$

$$+2/ \quad uy + \sqrt{2}vy = 1$$

$$-2uy = 2 \rightarrow uy = \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(31)

④ $x^3 + 3x^2y^2 + y^3 + 4xy - z^2 = 0$ yüzeyi ile $x^2 + y^2 + z^2 = 11$ yüzeyinin kesiminden oluşan eğriye P(1,1,3) noktasında teğet olan doğrunun parametrik denklemi?

Teğet doğru P'de hem 1. yüzeyin hem de 2. yüzeyin gradyeline diktir.

$$F: x^3 + 3x^2y^2 + y^3 + 4xy - z^2 = 0 \Rightarrow \nabla F = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$$F_x = 3x^2 + 6xy^2 + 4y \quad F_x|_P = 23$$

$$F_y = 6x^2y + 3y^2 + 4x \quad F_y|_P = 13$$

$$F_z = -2z$$

$$F_z|_P = -6$$

$$\nabla F|_P = \langle 13, 13, -6 \rangle$$

$$G: x^2 + y^2 + z^2 - 11 = 0$$

$$\nabla G = G_x \vec{i} + G_y \vec{j} + G_z \vec{k}$$

$$G_x = 2x \quad G_y = 2y \quad G_z = 2z$$

$$G_x|_P = 2 \quad G_y|_P = 2 \quad G_z|_P = 6$$

$$\nabla G|_P = \langle 2, 2, 6 \rangle$$

$$\vec{v} = \nabla G|_P \times \nabla F|_P = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 13 & 13 & -6 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 90\vec{i} - 90\vec{j} = \langle 90, -90, 0 \rangle \rightarrow \begin{array}{l} \text{Doğrunun} \\ \text{yön} \\ \text{vektörü} \end{array}$$

$x_0 = y_0 = 2$
P(1,1,3)

$$x = x_0 + at = 1 + 90t$$

$$y = y_0 + bt = 1 - 90t$$

$$z = z_0 + ct = 3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 90t \\ y = 1 - 90t \\ z = 3 \end{array} \right. \quad \text{teğet doğru}$$



NOT TABLOSU

Adı Soyadı		1.S	2.S	3.S	4.S	TOPLAM
Öğrenci No	Grup No					
Bölümü		Sınav Tarihi	30/05/2016			
Dersin Adı	MAT1072 MATEMATİK 2	Süre	100dk	Derslik		
Öğretim Üyesinin Adı Soyadı		İmza				

YÖK nun 2547 sayılı Kanunun *Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin* 9. Maddesi olan "Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek" fiili işleyenler bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma cezası alırlar.

1-a) $\{a_n\} = \left\{ \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^n \right\}$ dizisinin limitini bulunuz. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin karakterini belirleyiniz.(12 Puan)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n+2} \right)^{n+2} \right]^{\frac{n}{n+2}} = e^{-1}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{-1} \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ögesi tırafsız bir seridir.

1-b) f fonksiyonu, tek değişkenli ve türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere, $z = x f\left(\frac{y}{x}\right)$ yüzeyi üzerinde herhangi bir $P_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasında, yüzeye teğet olan düzlemin orijinden geçtiğini gösteriniz.(13 Puan)

$$F = x f\left(\frac{y}{x}\right) - z$$

$$F_x = 1 \cdot f\left(\frac{y}{x}\right) + \left(-\frac{y}{x^2}\right) \cdot f'\left(\frac{y}{x}\right), \quad F_x(P_0) = f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - \left(\frac{y_0}{x_0}\right) f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)$$

$$F_y = x \cdot \frac{1}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right), \quad F_y(P_0) = f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)$$

$$F_z = -1$$

Teğet Düzlemler

$$\left(f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - \left(\frac{y_0}{x_0}\right) f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right) \right) (x - x_0) + f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right) (y - y_0) - (z - z_0 f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)) = 0$$

(0,0,0) da sağlanmalıdır.

$$-\left(f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - \left(\frac{y_0}{x_0}\right) f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right) \right) x_0 + f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right) (-y_0) + \left(-x_0 f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right) = 0$$

$$-\left(f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - \left(\frac{y_0}{x_0}\right) f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right) \right) x_0 + f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right) y_0 - f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right) z_0 + x_0 f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) = 0 //$$

3-a) $\sin[\pi(0.01)(1.05) + \ln(1.05)]$ nin yaklaşık değerini toplam diferansiyel veya lineer yaklaşım kullanarak hesaplayınız. (12 Puan)

$$f(x,y) = \sin(\pi xy + \ln y) \quad f(0,1) = 0 \quad h = \Delta x = 0.01 \\ k = \Delta y = 0.05$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \pi y \cos(\pi xy + \ln y), \quad \frac{\partial f(0,1)}{\partial x} = \pi$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\pi x + \frac{1}{y}\right) \cos(\pi xy + \ln y) \quad \frac{\partial f(0,1)}{\partial y} = 1$$

$$f(0.01; 1.05) \approx f(0,1) + 0.01 \cdot \pi + 0.05 \cdot 1 \approx 0.08146$$

3-b) $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{8}{y}$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz ve sınıflandırınız. (13 Puan)
bulunuz. (13 Puan)

$$\begin{aligned} f_x &= y - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{x^2} \\ f_y &= x - \frac{8}{y^2} = 0 \Rightarrow x = \frac{8}{y^2} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{8}{(\frac{1}{x^2})} \\ x = 0 \quad x = 1/2 \end{cases} \quad x - 8x^4 = 0$$

kritik N.

$$x=0 \notin D_f$$

$P(1/2, 4)$ ikin

$$f_{xx} = \frac{2}{x^3}, \quad f_{yy} = \frac{16}{y^3}, \quad f_{xy} = 1$$

$$f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = \frac{1}{(\frac{1}{2})^3} \cdot \frac{16}{4^3} - 1 = 3 > 0$$

$$f_{xx} = 16 > 0 \quad \Rightarrow \quad P(1/2, 4) \text{ lokal min noktalar.}$$

2b) f in tanım kümesi $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$

$x=0$ iken f_x tanımsız old. da, $\forall b \in \mathbb{R}$ için $(0,b)$ setindeki noktalar kritik noktalar

S. 2-a) Bir $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, parçalı olarak,

İçin kritik noktalarında $f(x,y)=0$ ve $\forall (x,y) \in D$ için $f(x,y) = \begin{cases} 1-\cos(\sqrt{x^2+y^2}), & (x,y) \neq (0,0) \\ \frac{1}{2}, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$f(x,y) \geq 0$ old. da, \lim kritik noktalar min. değer 0'dır.

min. noktasıdır ve min. değer 0'dır.

ile veriliyor. f nin \mathbb{R}^2 üzerinde sürekli olup olmadığını araştırınız. (13 P)

$(x,y) \neq (0,0)$ için $f(x,y) = \frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$ olup

$f, \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ da süreklidir. $(x,y) = (0,0)$ da

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0)$ ise f, \mathbb{R}^2 de sürekli olur.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$$

$$\begin{cases} u = x^2+y^2 \\ (x,y) \rightarrow (0,0) \text{ iken } u \rightarrow 0^+ \\ u \rightarrow 0^+ \text{ iken } x^2+y^2 \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{1-\cos u}{u^2}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\sin u}{2u} = \frac{1}{2} = f(0,0) \text{ old. da } f,$$

\mathbb{R}^2 de sürekli dir.

S. 2-b) $f(x,y) = y^2 \cdot \sqrt{x}$ ile tanımlı f fonksiyonunun bütün kritik noktalarını ve varsa ekstremum (maksimum-minimum) değer(ler)ini bulunuz. (12 P)

$$\left. \begin{array}{l} f_x = \frac{y^2}{2\sqrt{x}} \\ f_y = 2y\sqrt{x} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} f_x = 0 \Rightarrow x > 0 \text{ iken } y = 0 \\ f_y = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ veya } y = 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} (0,b) \text{ iken} \\ f_x \text{ tanımsız old. da} \\ (0,b) \text{ Kritik Nokta} \end{array} \right\}$$

$a \geq 0$ olmak üzere $(a,0)$ kritik noktalar

$\forall x \geq 0$ ve $y \neq 0$

$$f(x,y) - f(a,0) = y^2 \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow f(a,0) = 0 \text{ bir yerel minimumdur.}$$

$$\rightarrow f(x,y) - f(0,b) = y^2 \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow f(0,b) = 0 \text{ yerel minimum}$$