Soru 7) Bir f fonksiyonu, $f(0,0)=0$ ve $(x,y)\neq(0,0)$ için $f(x,y)=\dfrac{e^{x^3+y^2}-1}{x^2+y^2}$ ile tanımlanıyor. Eğer mevcut ise, $f_x(0,0)$ ve $f_y(0,0)$ sayılarını bulunuz. (12 P)

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{h^3}-1}{h^3}$$

$$\stackrel{L}{=}\lim_{h\to 0}\frac{3h^2e^{h^3}}{3h^2}=1\ //$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^{h^2}-1}{h^3}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{e^{h^2}-1}{h^2}\cdot\frac{1}{h}\right)\quad \text{yok!}$$

Soru 8) Kabul edelim ki z, x ve y nin diferansiyellenebilen bir fonksiyonu olarak

$$y\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-x\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

deklemini sağlamaktadır. Bu denklemin **kutupsal koordinatlar**da alacağı şekli bulunuz. (13 P)

$$x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta \Rightarrow z=z(x,y)=f(\rho,\theta)$$

$$\frac{\partial z}{\partial\theta}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta}$$

$$=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot(-\rho\sin\theta)+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot(\rho\cos\theta)$$

$$=-y\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+x\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$=0\ //$$

YTÜ - Mühendislik Fakülteleri
II. Ara Sınav Soru ve Cevap Kağıdı

Adı Soyadı			
Öğrenci Numarası		Grup No	
Bölümü			
Dersin Adı	MAT1072 MATEMATİK II	Sınav Tarihi	27.04.2019
		Sınav Süresi	90 dk
		Sınav Yeri	
Dersi veren Öğretim Üyesinin Adı Soyadı		İmza	

NOT TABLOSU								
1	2	3	4	5	6	7	8	T

YÖK nun 2547 sayılı Kanunun *Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin* 9. Maddesi olan *"Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek"* fiili işleyenler bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma cezası alırlar.

Soru 1) Eğer $n \geq 0$, bir tamsayı ise, $\sum_{k=n}^{\infty} 3^{n-k}$ toplamını bulunuz. (13 P)

I. YOL

$$\sum_{k=n}^{\infty} 3^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k} - \sum_{k=0}^{n-1} 3^{-k} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - \frac{1-3^{-n}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{2} 3^{1-n}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=n}^{\infty} 3^{n-k} = \frac{1}{2} 3^{n} \cdot 3^{1-n} = \frac{3}{2} \ //$$

II. YOL $m = k - n$ al.

$$\sum_{k=n}^{\infty} 3^{n-k} = \sum_{m=0}^{\infty} 3^{-m} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \ //$$

Soru 2) $\lim_{x \to 0} \int_{x}^{2x} \frac{e^{2t}-1}{t^2}\, dt$ limitini hesaplayınız. (12 P)

$$e^{u} = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \cdots$$

$$e^{2t} - 1 = 1 + 2t + 2t^2 + \frac{4t^3}{3} + \cdots - 1$$

$$L = \lim_{x \to 0} \int_{x}^{2x} \frac{e^{2t}-1}{t^2}\, dt = \lim_{x \to 0} \int_{x}^{2x} \left(\frac{2}{t} + 2 + \frac{4}{3}t + \cdots\right) dt$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[2\ln|t| + 2t + \frac{2}{3}t^2 + \cdots\right]_{x}^{2x} = 2\ln 2 \ //$$

Soru 3) Aşağıda verilen eğrinin, t nin artışı yönündeki s yay uzunluk fonksiyonunu bulunuz. (12P)

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2}(t-1)^2\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}(t^2-2t)\vec{j} + \vec{k}, \quad t \geq 0 .$$

$\vec{r}\,'(t) = (t-1)\vec{i} + \sqrt{3}\,(t-1)\vec{j} \Rightarrow \|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{(t-1)^2 + 3(t-1)^2} = 2|t-1|$

$s(t) = \int_0^t \|\vec{r}\,'(u)\|\,du = \int_0^t 2|u-1|\,du$

1°) $0 \leq t \leq 1$ için $s(t) = \int_0^t 2(1-u)\,du = -(1-u)^2 \Big|_0^t = 1-(1-t)^2$

2°) $t > 1$ için $s(t) = \int_0^1 2(1-u)\,du + \int_1^t 2(u-1)\,du$

$= -(1-u)^2 \Big|_0^1 + (u-1)^2 \Big|_1^t = (t-1)^2 + 1.$

Soru 4) $f(x,y) = \arcsin\dfrac{1-x^2-y^2}{3} + \ln(y-x^2)$ ile verilen f fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.
(Şekil çizilecek) (13P)

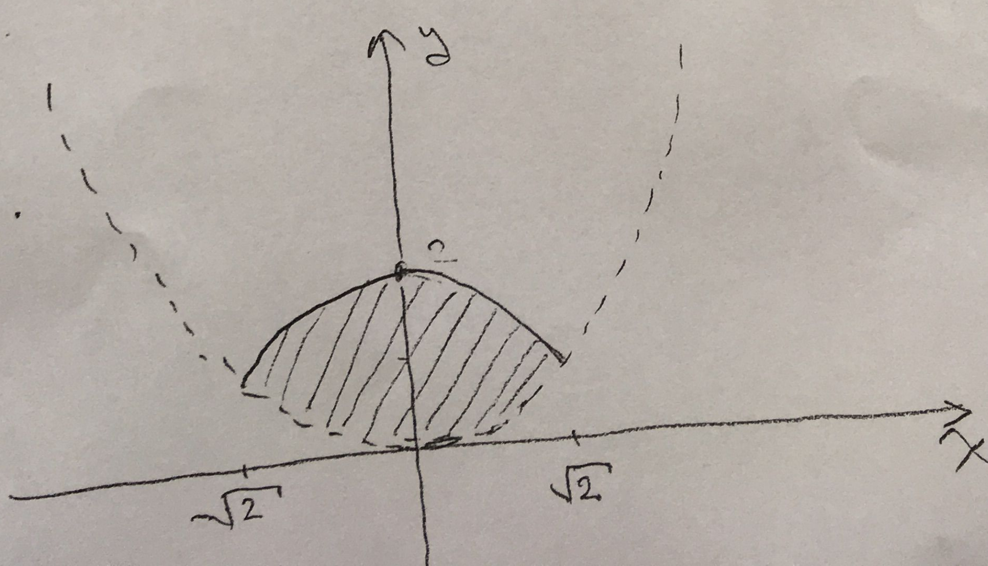
$\forall \theta$ için $-1 \leq \sin\theta \leq 1$

$f_1(x,y) = \arcsin\dfrac{1-x^2-y^2}{3}$; $\quad -1 \leq \dfrac{1-x^2-y^2}{3} \leq 1$

1°) $0 \leq x^2+y^2 \leq 4$

$f_2(x,y) = \ln(y-x^2)$; $\quad$ 2°) $y > x^2$

$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2+y^2 \leq 4\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$



Soru 5) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x-\sqrt{xy}}{2x^2-xy-y^2}$ limitini hesaplayınız. (12 P)

$$L = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(2x+y)(x-y)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(2x+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} \qquad (x \neq y)$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\sqrt{x}}{(2x+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$$

$$= \frac{1}{6}$$

Soru 6) $(x,y)\neq(0,0)$ için $f(x,y)=\dfrac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ ile verilen f fonksiyonunu (0,0) noktasında sürekli hale getiriniz. (13 P)

$\forall (x,y)$ için $x^4+y^4 \leq x^4+2x^2y^2+y^4 = (x^2+y^2)^2 \Rightarrow$

$\forall (x,y)\neq(0,0)$ için $0 \leq \dfrac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}} \leq \dfrac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \sqrt{x^2+y^2}$

$\Rightarrow$ Sıkıştırma Kuralı gereği

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0$$

olup,

$$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad g(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

fonksiyonu süreklidir.