

Soru 7) Parametrik olarak

$$x(t) = t^3, \quad y(t) = (1-t^2)^{3/2}, \quad -1 \leq t \leq 1$$

ile verilen eğrinin uzunluğunu bulunuz. (10 P)

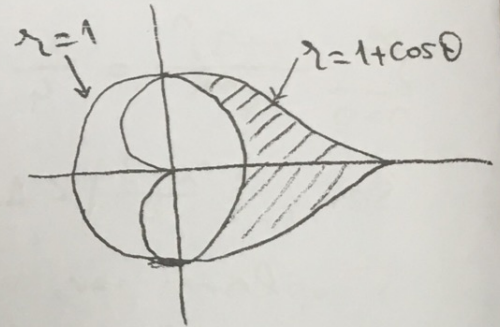
$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= 3t^2 \\ \dot{y}(t) &= -3t(1-t^2)^{1/2} \end{aligned} \right\} \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2} = \sqrt{9t^4 + 9t^2(1-t^2)} = 3|t|$$

$$S = \int_{-1}^1 \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2} dt = \int_{-1}^1 3|t| dt = 6 \int_0^1 t dt$$

$$= 3 \text{ birim}$$

Soru 8) $r=1$ çemberinin dışında ve $r=1+\cos\theta$ kardioidinin içinde kalan bölgenin alanını bulunuz. (15P)

$$1 = 1 + \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = 0 \\ \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$



$$\frac{A}{2} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} [(1+\cos\theta)^2 - 1^2] d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left(2\cos\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2} \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \left[2\sin\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_0^{\pi/2} = 1 + \frac{\pi}{8}$$

$$\Rightarrow A = 2 + \frac{\pi}{4} \text{ birim}^2$$

$$\text{Diğer } A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} [(1+\cos\theta)^2 - 1^2] d\theta$$

YTÜ - Mühendislik Fakülteleri I. Ara Sınav Soru ve Cevap Kağıdı				NOT TABLOSU									
				1	2	3	4	5	6	7	8	T	
Adı Soyadı													
Öğrenci Numarası				Grup No									
Bölümü				Sınav Tarihi				22.03.2019					
Dersin Adı	MAT1071 MATEMATİK I			Sınav Süresi	100 dk			Sınav Yeri					
Dersi veren Öğretim Üyesinin Adı Soyadı				İmza									

YÖK nun 2547 sayılı Kanunun Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin 9. Maddesi olan "Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek" fiili işleyenler bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma cezası alırlar.

Soru 1) $\left\{ \frac{n^{5/2}}{2n^2+1} \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right\}_{n \geq 1}$ dizinin limitini bulunuz. (12 P)

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^{5/2}}{2n^2+1} \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 \cdot \sqrt{n}}{2n^2+1} \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{2n^2+1} \cdot \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} //
 \end{aligned}$$

Soru 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$ serisinin toplamını bulunuz. (13 P)

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k} \cdot \sqrt{k+1}} \\
 &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) \\
 &= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \\
 &= 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = 1 //
 \end{aligned}$$

Soru 5) $\sum_{n=0}^{\infty} n!(x-1)^n$ serisini yakınsak yapan x değer(ler)ini bulunuz. (12 P)

$$a_n = n!$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

old. verilen kuvvet serisi, sadece $x=1$ için yakınsak.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} n!(x-1)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n!(x-1)^n \right)$$

Soru 6) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{4^{n+1}}$ serisinin yakınsaklık aralığını ve toplamını (temsil ettiği fonksiyonu) bulunuz. (13 P)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{4^{n+1}} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+3}{4} \right)^n$$

Seri, $\left| \frac{x+3}{4} \right| < 1$ ise, yani $-7 < x < 1$ ise yakınsak

Toplamını ise, bir Geometrik Seri olarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{4^{n+1}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x+3}{4}} = \frac{1}{1-x}$$

Soru 3) $\sum_{n=2}^{\infty} n \cdot \ln(1 - \frac{1}{n})$ serisinin karakterini (yakınsaklığını veya ıraksaklığını) tespit ediniz. (12 P)

$$a_n = n \cdot \ln(1 - \frac{1}{n}); \quad \forall n \geq 2 \text{ için } (1 - \frac{1}{n})^n > 0$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1 - \frac{1}{n})^n = \ln \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n})^n \right\}$$
$$= \ln e^{-1} = -1 \neq 0$$

old. verilen seri, ıraksaklık Testi gereği ıraksak olmalıdır.

Soru 4) Eğer $\{a_n\}$ dizisi, ardışık olarak

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \cdot a_n, \quad n \geq 1$$

ile tanımlanmışsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin karakterini tespit ediniz. (13 P)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2} < 1$$

old. verilen seri, Bölün Testi gereği yakınsak olmalıdır.