TAYLOR VE MACLAURİN SERİLERİ

Soru: Yakınsaklık aralığı içindeki bir kuvvet serisi toplamının her mertebeden türevi olan bir sürekli fonk. olduğunu biliyoruz. Acaba bunun tersi doğru mudur? Eğer bir $f(x)$ fonksiyonunun bir I aralığında her mertebeden türevi varsa o aralıkta fonksiyonu bir kuvvet serisi ile ifade edebilir miyiz? Eğer yapabilirsek bu kuvvet serisinin katsayıları için ne söylenebilir?

Son soruyu, eğer $f(x)$ fonksiyonu pozitif yakınsaklık yarıçapına sahip

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\dots+a_n(x-a)^n+\dots$$

kuvvet serisi olarak ifade edilirse cevaplayabiliriz. I yakınsaklık aralığının içindeki terimleri tek tek türevlersek;

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-a)+3a_3(x-a)^2+\dots+n(x-a)^{n-1}+\dots$$

$$f''(x)=1.2a_2+2.3.a_3(x-a)+3.4.a_4(x-a)^2+\dots$$

$$f'''(x)=1.2.3.a_3+2.3.4.a_4(x-a)+3.4.5.a_5(x-a)^2+\dots$$

$\vdots$

Tüm n'ler için genel olarak şöyle yazabiliriz:

Bu denklemler $x=a$ da geçerli olduklarından;

$$f'(a)=a_1,\quad f''(a)=1.2.a_2,\quad f'''(a)=1.2.3.a_3,\dots,f^{(n)}(a)=n!\,a_n$$

elde ederiz. Böylece; eğer böyle bir seri varsa bir tanedir ve n. katsayısı $a_n=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ şeklindedir.

Dolayısıyla f'in bir seri açılımı varsa şöyle olmalıdır:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\dots \qquad (*)$$

Şimdi, eğer $x=a$ merkezli bir I aralığında her mertebeden türevi olan herhangi bir f fonksiyonu ile başlarsak ve bu fonksiyonu (*) daki seriyi üretmek için kullanırsak, bu seri I daki her x için $f(x)$'e yakınsar mı?

Cevap "belki" dir. Bazı fonksiyonlar için doğru, bazıları için ise yanlıştır.

Taylor Serisi: f fonksiyonu, bir a noktasını içeren bir aralıkta her mertebeden türevlenebilir bir fonk. olsun. Bu durumda f tarafından $x=a$ noktasında üretilen Taylor Serisi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

Maclaurin Serisi: f tarafından üretilen Maclaurin Serisi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0).x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

olarak tanımlanır. Yani Maclaurin Serisi $x=0$ daki Taylor Serisidir.

Taylor Polinomları: f fonksiyonu bir a noktasını içeren bir aralıkta n. mertebeden türeve sahip bir fonksiyon olsun. Bu durumda, f tarafından $x=a$ da üretilen n. mertebe Taylor Polinomu $P_n(x)$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

* Yüksek mertebeden Taylor Polinomları, f in a civarındaki en iyi polinom yaklaşımlarını verir.

(*) $f(x)=e^x$ tarafından üretilen $x=0$ daki Taylor Serisini ve Taylor Polinomunu bulunuz. (43)

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=e^x \to f(0)=1 \\ f'(x)&=e^x \to f'(0)=1 \\ f''(x)&=e^x \to f''(0)=1 \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x)&=e^x \to f^{(n)}(0)=1 \end{aligned}\right\}$$

Taylor Serisi $\Rightarrow f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

$$=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

Taylor Polinomu $\Rightarrow P_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$

(*) $f(x)=\cos x$ in $x=0$ daki Taylor Serisi ve Polinomu?

$f(x)=\cos x \to f(0)=1$

$f'(x)=-\sin x \to f'(0)=0$

$f''(x)=-\cos x \to f''(0)=-1$

$f'''(x)=\sin x \to f'''(0)=0$

$\vdots$

$f^{(2n)}(x)=(-1)^n\cos x \to f^{(2n)}(0)=(-1)^n$

$f^{(2n+1)}(x)=(-1)^{n+1}\sin x \to f^{(2n+1)}(0)=0$

Taylor Serisi $\Rightarrow f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots=1+0x-\frac{x^2}{2}+0.x^3+\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Taylor Polinomu $\Rightarrow P_{2n}(x)=P_{2n+1}(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

$\left(f^{(2n+1)}(0)=0\right.$ olduğundan $\left.P_{2n}(x)=P_{2n+1}(x)\right)$

(*) $f(x)=\frac{1}{x}$ tarafından $a=2$ de üretilen Taylor Serisini (44)

bulunuz. Hangi noktalarda seri $\frac{1}{x}$'e yakınsar?

$f(2), f'(2), f''(2) \dots$ hesaplamalıyız.

$$f(x)=\frac{1}{x} \to f'(x)=\frac{-1}{x^2} \to f''(x)=\frac{\overset{2.1}{\widehat{2}}}{x^3} \to f'''(x)=\frac{\overset{\to 3.2.1}{-6}}{x^4} \dots f^{(n)}(x)=(-1)^n\cdot\frac{n!}{x^{n+1}}$$

$$f(2)=\frac{1}{2} \qquad f'(2)=-\frac{1}{2^2} \qquad f''(2)=\frac{2!}{2^3} \dots f^{(n)}(2)=(-1)^n\frac{n!}{2^{n+1}}$$

Taylor Serisi:

$$f(2)+f'(2)(x-2)+f''(2)(x-2)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n+\dots$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{(x-2)}{2^2}+\frac{(x-2)^2}{2^3}+\dots+(-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}+\dots \text{ olur.}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{(x-2)}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \text{Geometrik Seri} \qquad a=\frac{1}{2}$$

$$r=-\frac{(x-2)}{2}$$

Bu seri geometrik seridir ve $|r|=\left|-\frac{(x-2)}{2}\right|=\left|\frac{x-2}{2}\right|<1$

için mutlak yakınsaktır.

$$\text{Toplamı}=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{x-2}{2}}=\frac{1}{x} \text{ dir.}$$

$\left|\frac{x-2}{2}\right|<1 \Rightarrow |x-2|<2 \Rightarrow \boxed{0<x<4}$ değerleri için Taylor Serisi $\frac{1}{x}$ e yakınsar

---

(*) $\sqrt[3]{1,2}$ için; 2. mertebe Taylor polinomunu kullanarak yaklaşık değer bulun.

$f(x)=\sqrt[3]{x}$, $a=1$ olsun.

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \qquad f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-5/3} \Rightarrow f(1)=1 \qquad f'(1)=\frac{1}{3} \qquad f''(1)=-\frac{2}{9}$$

$$f(x)\approx P_2(x)=1+\frac{1}{3}(x-1)-\frac{2}{9}\frac{(x-1)^2}{2!}$$

$$f(1,2)\approx P_2(1,2)=1+\frac{1}{3}\cdot 0,2-\frac{1}{9}\cdot(0,2)^2=\underline{1,062}$$

Sık Kullanılan Maclaurin Serileri

① $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots \quad (-1 < x < 1)$

② $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 + \dots \quad (-1 < x < 1)$

③ $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (\forall x \in \mathbb{R})$

④ $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad (\forall x \in \mathbb{R})$

⑤ $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad (\forall x \in \mathbb{R})$

⑥ $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad (-1 < x \leq 1)$

⑦ $\text{ArcTan}\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \quad (-1 \leq x \leq 1)$

(*) $e^{-x^2/3}$ ün Maclaurin Serisi?

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

$$e^{-\frac{x^2}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x^2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{3^n n!} = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{1}{2!} \frac{x^4}{3^2} + \dots \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

(48)

(*) $\sin^2 x$ in Maclourin Serisinin genel terimi?

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) = \frac{1}{2}\left(1 - 1 + \frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^4}{4!} \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^6}{6!} \cdots\right)$$

$$= \frac{2x}{2!} - \frac{2^3x^4}{4!} + \frac{2^5x^6}{6!} \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^{2n+1} \cdot x^{2n+2}}{(2n+2)!} \quad (\forall x \text{ için})$$

(*) Tanx 'in Maclourin serisinin ilk 3 terimini Cosx ve Sinx in seri açılımları yardımıyla bulunuz.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \cdots}$$

$$\begin{array}{l|l}
x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \\
\hline
-\left(x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{4!}\right) & x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots \\
\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} \cdots & \\
-\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{6} \cdots\right) & \\
\frac{2x^5}{15} \cdots &
\end{array}$$

(*) $E(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ nin Maclourin Serisinin genel terimi?

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{3!} \cdots \qquad (\forall t \text{ için})$$

$$E(x) = \int_0^x \left(1 - t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} \cdots\right) dt = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{\underset{5.2!}{10}} - \frac{t^7}{7.3!} + \frac{t^9}{9.4!} \cdots \Big|_0^x$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5.2!} - \frac{x^7}{7.3!} + \frac{x^9}{9.4!} \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1) \cdot n!} \quad (\forall x \text{ için})$$

(*) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3}$ limitini seri açılımı ile hesaplayın. (49)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\cdots}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3!}-\overbrace{\frac{x^2}{5!}+\frac{x^4}{7!}-\cdots}^{0}\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

(*) $\lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x}-1)\cdot\ln(1+x^3)}{(1-\cos 3x)^2} = ?$

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\cdots \Rightarrow e^{2x} = 1+2x+\frac{(2x)^2}{2!}+\cdots$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots \Rightarrow \cos 3x = 1-\frac{(3x)^2}{2!}+\frac{(3x)^4}{4!}-\cdots$$

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots \Rightarrow \ln(1+x^3) = x^3-\frac{x^6}{2}+\frac{x^9}{3}-\cdots$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x}-1)\cdot\ln(1+x^3)}{(1-\cos 3x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\cancel{1}+2x+\frac{(2x)^2}{2!}+\cdots-\cancel{1}\right)\cdot\left(x^3-\frac{x^6}{2}+\frac{x^9}{3}-\cdots\right)}{\left(\cancel{1}-\cancel{1}+\frac{9x^2}{2}-\frac{3^4x^4}{4!}-\cdots\right)^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x^4+2x^5+\cdots}{\left(\frac{9x^2}{2}-\frac{3^4x^4}{4!}+\cdots\right)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2+\overbrace{2x+\cdots}^{0}}{\left(\frac{9}{2}-\underbrace{\frac{3^4x^2}{4!}+\cdots}_{0}\right)^2} = 2\cdot\frac{4}{81} = \underline{\underline{\frac{8}{81}}}$$