Parametrik Denklemler

Eğer x ve y, $x=f(t)$ ve $y=g(t)$ $(t\in I)$ şeklinde tanımlanmış fonksiyonlar ise o zaman bu denklemler ile tanımlanan $(x,y)=(f(t),g(t))$ noktalar kümesi bir parametrik eğridir. Bu denklemlere eğrinin "parametrik denklemleri" denir.

t değişkeni eğri için bir parametre, I da parametre aralığıdır. Parametre aralığı $[a,b]$ olursa, yani $a\le t\le b$ ise; eğrinin başlangıç noktası $(f(a),g(a))$, bitiş noktası $(f(b),g(b))$ olur.

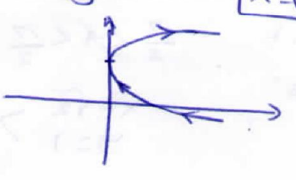
Aralıkla birlikte denklemlere eğrinin bir "parametrizasyonu" denir. * Bir eğrinin birden fazla parametrizasyonu vardır.

* $x=t^2$ $\quad y=t+1$ $\quad -\infty<t<\infty$ eğrisinin denklemini x,y cinsinden bulup çiziniz.

$y=t+1 \Rightarrow t=(y-1) \Rightarrow x=t^2=(y-1)^2$ $\quad \boxed{x=(y-1)^2}$

$t\to-\infty \Rightarrow x\to\infty,\ y\to-\infty$

$t\to\infty \Rightarrow x\to\infty,\ y\to\infty$

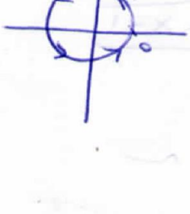


* $x=a\cos t,\ y=a\sin t$, $\quad 0\le t\le 2\pi$

$x^2+y^2=a^2\cos^2t+a^2\sin^2t=a^2$ $\rightarrow$ a yarıçaplı merkezil çember

$t=0 \Rightarrow x=a,\ y=0$

$t=2\pi \rightarrow x=a,\ y=0$



⊛ $x=1+2\cos t$, $y=2\sin t$ parametrizasyonu ile verilen eğriyi bulunuz.

$$\left.\begin{array}{l} x=1+2\cos t \Rightarrow \cos t=\frac{x-1}{2} \\ y=2\sin t \Rightarrow \sin t=\frac{y}{2} \end{array}\right] \rightarrow \cos^2 t+\sin^2 t=\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{y^2}{4}=1$$

$$\Downarrow$$

$(x-1)^2+y^2=4$ çemberi

★ Türev:

f ve g fonksiyonları t de türevlenebilir ise $x=f(t)$ ve $y=g(t)$ de türevlenebilirdir. Bu durumda:

★ $$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)} \quad (f'(t)\neq 0)$$

★ $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

⊛ $x=\sec t$, $y=\tan t$, $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$ eğrisinin $(\sqrt{2},1)$ noktasındaki teğetinin denklemi?

$y=f(x)$ in (a,b) noktasındaki teğeti: $y-b=f'(a).(x-a)$

$$(a,b)=(\sqrt{2},1) \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\sqrt{2}=\sec t\\ 1=\tan t\end{array}\right\} \boxed{t=\frac{\pi}{4}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\sec^2 t}{\sec t.\tan t}=\frac{\sec t}{\tan t} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=f'(\sqrt{2})=\frac{2}{\sqrt{2}}=\underline{\underline{\sqrt{2}}}$$

Teğet: $y-1=\sqrt{2}(x-\sqrt{2}) \Rightarrow \boxed{y=\sqrt{2}x-1}$

Parametrik Olarak Tanımlı Eğrinin Uzunluğu (P4)

Eğer C eğrisi : $x=f(t)$, $y=g(t)$, $a\le t\le b$ ile parametrik olarak tanımlıysa, $t=a$ dan $t=b$'ye artarken C eğrisi üzerinden sadece bir kez geçiliyorsa C nin uzunluğu:

$$L=\int_a^b \sqrt{(f'(t))^2+(g'(t))^2}\,dt \quad \text{dir.}$$

(*) $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, $0\le t\le 2\pi$ çemberinin uzunluğu?

$$\left.\begin{array}{l} f'(t)=-r\sin t \Rightarrow (f'(t))^2=r^2\sin^2 t \\ g'(t)=r\cos t \Rightarrow (g'(t))^2=r^2\cos^2 t \end{array}\right] \rightarrow (f')^2+(g')^2=r^2$$

$$L=\int_0^{2\pi} r\,dt = rt\Big|_0^{2\pi} = \underline{\underline{2\pi r}}$$

(*) $x=t-t^2$, $y=t-t^3 \Rightarrow \dfrac{d^2y}{dx^2}$ türevini t cinsinden bulun. (P3)

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-3t^2}{1-2t}$$

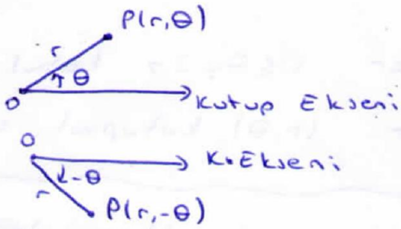
$$y''=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\dfrac{-6t\cdot(1-2t)+2(1-3t^2)}{(1-2t)^2}}{1-2t}=\frac{6t^2-6t+2}{(1-2t)^3}$$

KUTUPSAL KOORDİNATLAR

x ve y dik koordinatları düzlemdeki bir P noktasını bir dikey doğru ile bir yatay doğrunun kesismesi olarak belirtir. Kutupsal koordinatlar ise bir P noktasını, bir cemberle merkezinden cıkan bir ısının kesişmesi olarak belirtir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

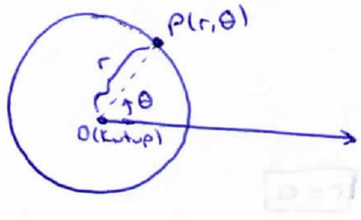
Düzlem üzerinde bir nokta ve bu noktadan cıkan bir ısın secelim. Noktaya kutup, ısına ise kutup ekseni denir. Bu durumda düzlemdeki herhangi bir P noktasını (r,θ) kutupsal koordinat cifti ile gösterebiliriz. Burada r, P'nin orjine olan yönlü uzaklığı; θ'da kutup ekseni ile OP arasındaki yönlü acıdır.

Pozitif $\theta \rightarrow$ Saatin tersi yönünde
Negatif $\theta \rightarrow$ Saat yönünde ölcülür.



★ (r,θ) kutupsal koordinatına karşılık gelen P noktasını göstermek için aşağıdaki yol izlenir:

(r,θ) : Kutup eksenine θ derece acı ile duran doğru üzerinde, kutuptan r birim uzaklıkta bulunan noktadır.



r: Kutuptan P'ye olan yönlü uzaklık

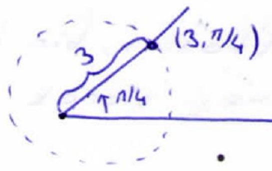
θ: Kutup ekseninden OP'ye olanan yönlü acı

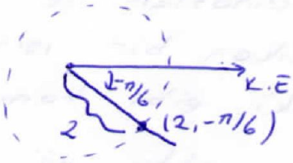
★ Bir noktayı temsil eden sonsuz miktarda kutupsal koordinat cifti vardır.

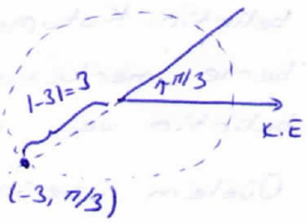
★ Eğer $r=0$ ise θ ne olursa olsun P kutuptur.

★ Eğer $r<0$ ise: P, θ acılı ısının ters yönündeki $\theta+\pi$ acılı ısın üzerinde olup kutuptan $|r|$ birim uzaklıktadır.

* $\left(3, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(2, -\frac{\pi}{6}\right)$, $\left(-3, \frac{\pi}{3}\right)$ noktalarını kutupsal koordinat düzleminde gösteriniz.







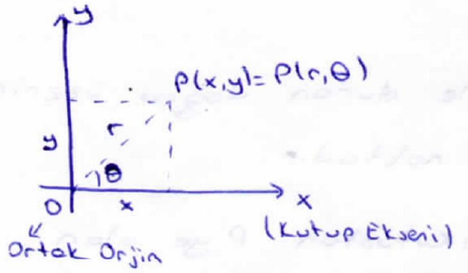
---

* $(r,\theta)=(-r,\theta+\pi)=(-r,\theta+3\pi)=\dots=(-r,\theta+(2k+1)\pi)$

* $(r,\theta)=(r,\theta+2\pi)=(r,\theta+4\pi)=\dots=(r,\theta+2k\pi)$

* Eğer $0\leq\theta\leq 2\pi$ kabul edilirse düzlemin her noktasına tek bir (r,θ) kutupsal çifti karşılık gelir.

Kutupsal Koordinatlar ile Kartezyen Koor. Arasındaki Bağıntılar



$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ x^2+y^2 &= r^2 \end{aligned}}$$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$

* $x^2+y^2=a^2$ çemberinin kutupsal denklemi?

$x=r\cos\theta \quad y=r\sin\theta \Rightarrow x^2+y^2=r^2=a^2 \Rightarrow \boxed{r=a}$

* $r^2=a^2\cos 2\theta$ 'nın kartezyen denklemi?

$x=r\cos\theta \quad y=r\sin\theta \quad \cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

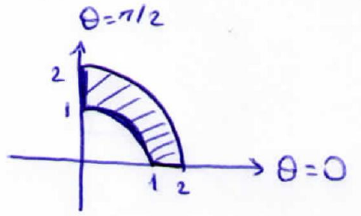
$$r^2=a^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=a^2\left(\frac{x^2}{r^2}-\frac{y^2}{r^2}\right)=\frac{a^2}{r^2}(x^2-y^2)$$

$(r^2)^2=a^2(x^2-y^2) \quad r^2=x^2+y^2$ olduğundan

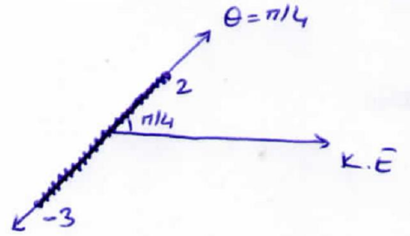
$$\boxed{(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)}$$

(*) Kutupsal koordinatları aşağıdaki şartları sağlayan noktalar kümesinin grafiğini çiziniz. (k:3)

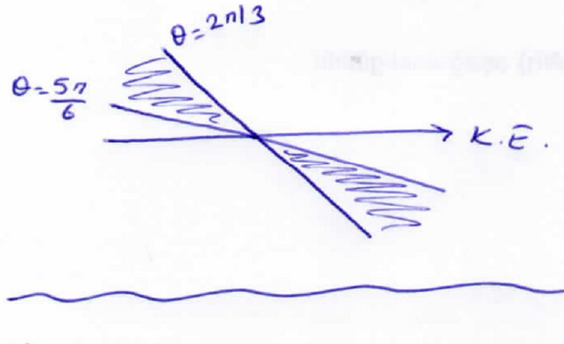
a) $1 \leq r \leq 2$ ve $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$



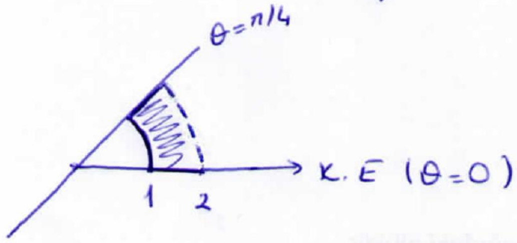
b) $-3 \leq r \leq 2$ ve $\theta = \frac{\pi}{4}$



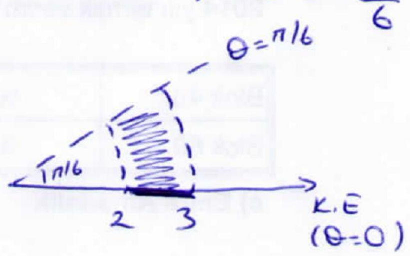
c) $\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$



d) $1 \leq r < 2$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$



e) $2 < r < 3$, $0 \leq \theta < \frac{\pi}{6}$



Ö) $(x-a)^2+y^2=a^2$ çemberinin kutupsal denklemi? K. 4

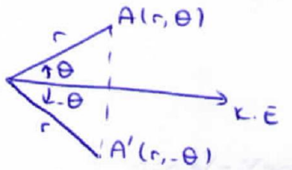
$x^2-2xa+a^2+y^2=a^2 \Rightarrow x^2-2xa+y^2=0$ $\quad x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$

$$r^2\cos^2\theta-2ar\cos\theta+r^2\sin^2\theta=0$$

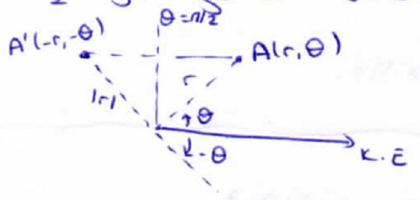
$$r^2=2ar\cos\theta \Rightarrow \boxed{r=2a\cos\theta}$$

Simetri Özellikleri

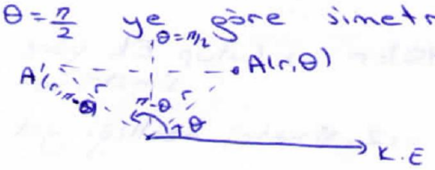
① a) $r=f(\theta)$ da θ yerine $-\theta$ yazdığımızda $f(-\theta)=f(\theta)=r$ ise kutup eksenine göre simetri vardır.



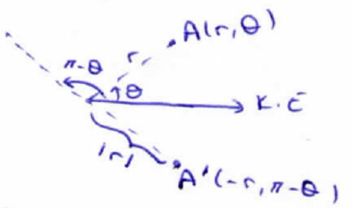
b) $r=f(\theta)$ da θ yerine $-\theta$ yazılınca $f(-\theta)=-f(\theta)=-r$ oluyor ise $\theta=\frac{\pi}{2}$ ye göre simetri vardır.



② a) $r=f(\theta)$ da θ yerine $\pi-\theta$ yazılınca $f(\pi-\theta)=f(\theta)=r$ ise $\theta=\frac{\pi}{2}$ ye göre simetri vardır.

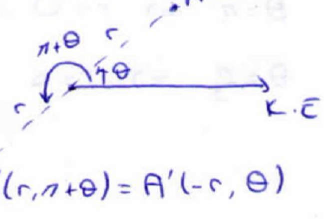


b) $r=f(\theta)$ da θ yerine $\pi-\theta$ yazılınca $f(\pi-\theta)=-f(\theta)=-r$ ise kutup eksenine göre simetri vardır.



③ a) $r=f(\theta)$ da θ yerine $\pi+\theta$ yazılınca $f(\pi+\theta)=f(\theta)=r$ ise (kutuba) orjine göre simetri vardır.

b) (r,θ) eğri üzerinde iken $(-r,\theta)$ da eğri üzerinde ise orjine göre simetri vardır.



$A'(r,\pi+\theta)=A'(-r,\theta)$

(5)

$r=f(\theta)$ Eğrisinin Eğimi / $\frac{dy}{dx}$ türevinin (r,θ) daki değeri

(r,θ) noktasında $r=f(\theta)$ eğrisinin eğimi: $x=r\cos\theta=f(\theta)\cos\theta$, $y=r\sin\theta=f(\theta)\sin\theta$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(r,\theta)}=m=\left.\frac{\overbrace{f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta}^{\frac{dy}{d\theta}}}{\underbrace{f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta}_{\frac{dx}{d\theta}}}\right|_{(r,\theta)}$$

formülü ile bulunur.

Kutupsal Koordinatlarda Eğri Çizimi

$r=f(\theta)$ nın grafiğini çizerken:

① Eğri periyodik ise periyodu bulunur.

② Simetri durumu incelenip çizim aralığı belirlenir.

③ $r=f(\theta)$ nın değişimi türev yardımıyla incelenir.

④ Bazı θ'lar için $(\theta, f(\theta))$ noktaları bulunur.

⑤ θ, r, r' içeren tablo yapılıp eğri çizilir.

⊗ $r=a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$ eğrisinin grafiğini çiziniz.

① Periyod: 2π $\rightarrow [0,2\pi]$ de çizilir.

② $\theta\rightarrow-\theta \Rightarrow f(-\theta)=a(1+\cos(-\theta))=a(1+\cos\theta)=f(\theta)=r \Rightarrow$ Kutup Ek. göre simetri var

$\theta\rightarrow\pi-\theta \Rightarrow f(\pi-\theta)=a(1+\cos(\pi-\theta))=a(1-\cos\theta) \Rightarrow$ 2. simetri özelliği yok

$\theta\rightarrow\pi+\theta \Rightarrow f(\pi+\theta)=a(1+\cos(\pi+\theta))=a(1-\cos\theta) \Rightarrow$ 3. " " "

Kutup eksenine göre simetri olduğundan inceleme aralığı: $[0,\pi]$

③ $f'(\theta)=-a\sin\theta<0$ $(\theta\in(0,\pi)$ için$)$

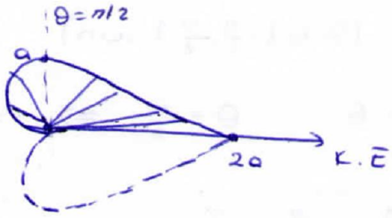
④ $\theta=0 \Rightarrow r=2a$

$\theta=\pi \Rightarrow r=0$

$\theta=\frac{\pi}{2} \Rightarrow r=a$

⑤

θ	0	$\pi/2$	π
r'	$-$	$-$	
r	$2a \searrow$	$a \searrow$	0



✱ $r = a(1-\sin\theta)$ $(a>0)$ eğrisini çiziniz.

① Periyod: 2π $\to$ $[0,2\pi]$ de çizelim.

② $\theta \to -\theta$ $\Rightarrow f(-\theta) = a(1-\sin(-\theta)) = a(1+\sin\theta) \neq f(\theta), -f(\theta)$ 1. S. YOK

$\theta \to \pi-\theta$ $\Rightarrow f(\pi-\theta) = a(1-\sin(\pi-\theta)) = a(1-\sin\theta) = f(\theta)$ $\Rightarrow$ $\theta=\frac{\pi}{2}$ ye göre simetri var

$\theta = \pi+\theta$ $\Rightarrow f(\pi+\theta) = a(1-\sin(\pi+\theta)) = a(1+\sin\theta) \neq f(\theta), -f(\theta)$ 3.S. YOK

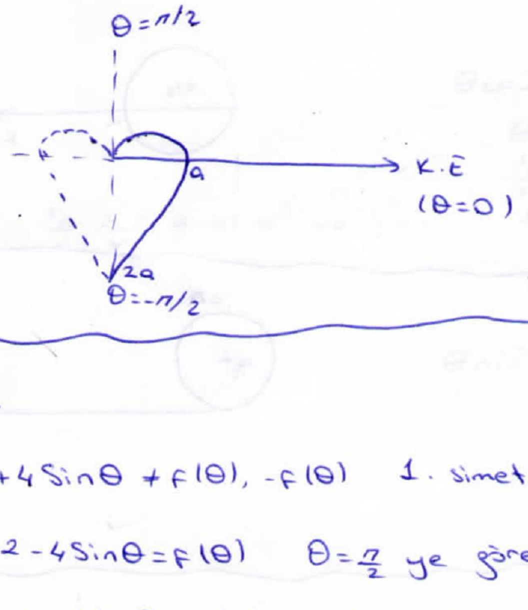
$\theta=\frac{\pi}{2}$ ye göre simetri olduğundan inceleme aralığı: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

③ $f'(\theta) = -a\cos\theta < 0$ $\left(\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right.$ için$)$

④ $\theta=\frac{\pi}{2} \Rightarrow r=0$ $\theta=-\frac{\pi}{2} \Rightarrow r=2a$ $\theta=0 \Rightarrow r=a$

⑤

θ	$-\pi/2$	0	$\pi/2$
r'		$-$	$-$
r	$2a \searrow$	$a \searrow$	0



✱ $r = 2-4\sin\theta$ eğrisini çizin.

$\theta \to -\theta$ $\Rightarrow f(-\theta) = 2-4\sin(-\theta) = 2+4\sin\theta \neq f(\theta), -f(\theta)$ 1. simetri yok

$\theta \to \pi-\theta$ $\Rightarrow f(\pi-\theta) = 2-4\sin(\pi-\theta) = 2-4\sin\theta = f(\theta)$ $\theta=\frac{\pi}{2}$ ye göre s. var.

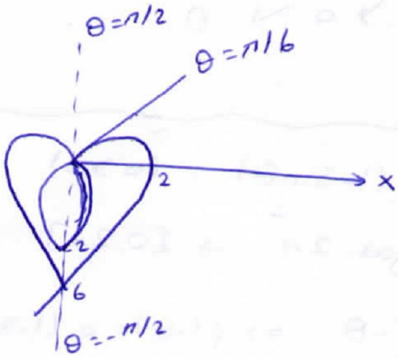
$\theta = \pi+\theta$ $\Rightarrow f(\pi+\theta) = 2-4\sin(\pi+\theta) = 2+4\sin\theta \neq f(\theta), -f(\theta)$ 3. Sim. yok.

Periyod 2π, $\theta=\frac{\pi}{2}$ ye göre simetri var $\Rightarrow$ inceleme aralığı: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$r' = -4\cos\theta < 0$ ($\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ için)

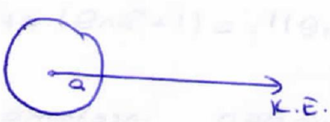
$\theta = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow r = 6$ $\quad \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = -2$ $\quad \theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow r = 0$ $\quad \theta = 0 \Rightarrow r = 2$

θ	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
r'		$-$		$-$		$-$	
r	6	$\searrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-2



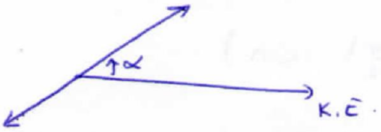
Temel Şekiller

① $r = a \Rightarrow$



Yarıçapı $|a|$ olan merkezil çember ($x^2+y^2=a^2$)

② $\theta = \alpha \Rightarrow$



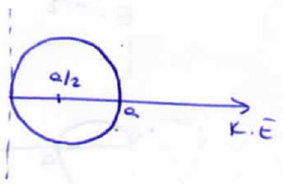
Eğimi α olan doğru

③ $r = a\cos\theta$

$r^2 = a^2\cos^2\theta$

$x^2+y^2 = a^2 \cdot \frac{x^2}{r^2}$

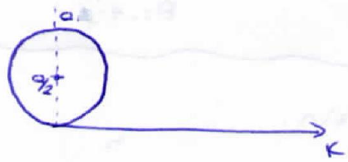
$(x^2+y^2)^2 = a^2x^2$ $\quad x^2+y^2 = ax \rightarrow (x-\frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$



Kutup ve $(a,0)$ noktalarından geçen $\frac{a}{2}$ yarıçaplı çember

($(x-\frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$ çemberi)

④ $r = a\sin\theta$

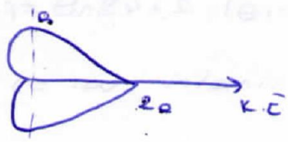


Kutup ve $(a, \frac{\pi}{2})$ noktalarından geçen $\frac{a}{2}$ yarıçaplı çember

($x^2 + (y-\frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4}$ çemberi)

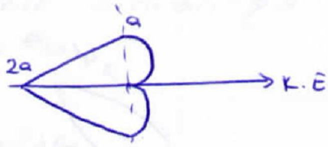
⑤ $r = a(1+\cos\theta)$

$(a>0)$



x-ekseni boyunca uzanan sivri ucu x-ekseninin pozitif yönünde olan Kardiyoid

⑥ $r = a(1-\cos\theta)$
$(a>0)$

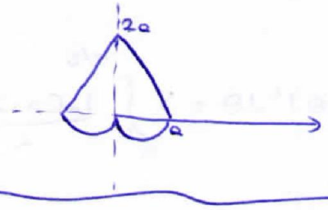


x-ekseni boyunca uzanan, sivri ucu x-ekseninin negatif yönünde olan Kardiyoid

K. ⑧

---

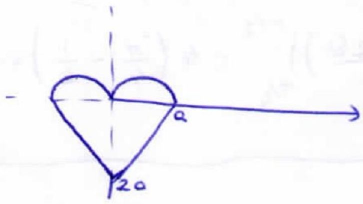
⑦ $r = a(1+\sin\theta)$
$(a>0)$



y-ekseni boyunca uzanan sivri ucu y-ekseninin pozitif yönünde olan Kardiyoid

---

⑧ $r = a(1-\sin\theta)$
$(a>0)$



y-ekseni boyunca uzanan sivri ucu y-ekseninin negatif yönünde olan Kardiyoid.

---

⑨ $r\cos\theta = a \Rightarrow x = a$ doğrusu

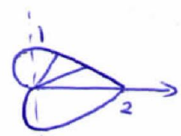
$r\sin\theta = b \Rightarrow y = b$ doğrusu

Kutupsal Koordinatlarda Alan Hesabı

$r = f(\theta)$ denklemiyle verilmiş bir eğrinin $\theta = \alpha$ ve $\theta = \beta$ doğrularıyla sınırlandığı alan:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\, d\theta$$ formülü ile hesaplanır.

⊛ $r = 1+\cos\theta$ eğrisinin alanı?

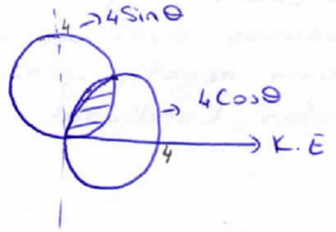


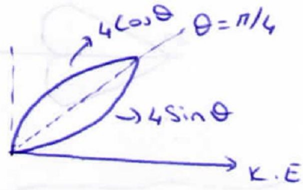
$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left(\theta + 2\sin\theta\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\pi + \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{1}{2}\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \boxed{A = \frac{3\pi}{2}}$$

(*) $r=4\cos\theta$ ile $r=4\sin\theta$ eğrilerinin sınırladığı ortak alan? (9)





$\cos\theta=\sin\theta$

$\theta=\frac{\pi}{4}$

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(4\sin\theta)^2d\theta+\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}(4\cos\theta)^2d\theta=8\int_0^{\pi/4}\frac{1-\cos2\theta}{2}d\theta+8\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta$$

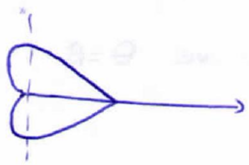
$$=4\left(\theta-\frac{\sin2\theta}{2}\right)\Big|_0^{\pi/4}+4\left(\theta+\frac{\sin2\theta}{2}\right)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}=4\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)+4\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)=\underline{\underline{2\pi-4}}$$

Yay Uzunluğu

$r=f(\theta)$ denklemli eğrinin $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ arasındaki yay uzunluğu

$$S=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\theta$$ formülü ile bulunur.

(*) $r=1+\cos\theta$ eğrisinin uzunluğu?



$r=1+\cos\theta$ $\qquad r'=-\sin\theta$

$$r^2+(r')^2=1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta=2+2\cos\theta$$

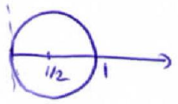
$$=2+2\left[2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\right]=4\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$\sqrt{r^2+(r')^2}=\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}=\left|2\cos\frac{\theta}{2}\right|$$

$$S=\int_0^{2\pi}\left|2\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta=\int_0^{\pi}2\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta+\int_{\pi}^{2\pi}\left(-2\cos\frac{\theta}{2}\right)d\theta$$

$$=4\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi}-4\sin\frac{\theta}{2}\Big|_{\pi}^{2\pi}=\boxed{8}$$

$\circledast$ $r = \cos\theta$ çemberinin uzunluğu?



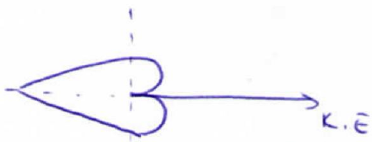
$r = \cos\theta \qquad r' = -\sin\theta$

$r^2 + (r')^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\sqrt{r^2 + (r')^2} = 1$

$$S = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = \theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\pi}}$$

$\circledast$ $r = 1 - \cos\theta$ kardiyoidinin uzunluğu?



$r = 1 - \cos\theta \qquad r' = \sin\theta$

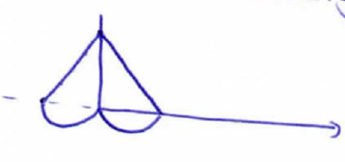
$r^2 + (r')^2 = 1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta = 2 - 2\cos\theta$

$= 2 - 2\left[1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right] = 4\sin^2\frac{\theta}{2}$

$\sqrt{r^2 + (r')^2} = \sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}} = \left|2\sin\frac{\theta}{2}\right|$

$$S = \int_0^{2\pi} \left|2\sin\frac{\theta}{2}\right| d\theta = \int_0^{2\pi} 2\sin\frac{\theta}{2}\, d\theta = -4\cos\frac{\theta}{2}\Big|_0^{2\pi} = 4 + 4 = \underline{\underline{8}}$$

$\circledast$ $r = 1 + \sin\theta$ kardiyoidinin uzunluğu?



$r = 1 + \sin\theta \qquad r' = \cos\theta$

$r^2 + (r')^2 = 1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta$

$= 2(1 + \sin\theta)$

$= 2\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) =$

$\sqrt{r^2 + (r')^2} = \left|2\cos\left(\frac{\pi - 2\theta}{4}\right)\right|$

$= 2\left(1 + \left(2\cos^2\left(\frac{\pi - 2\theta}{4}\right) - 1\right)\right) = 4\cos^2\left(\frac{\pi - 2\theta}{4}\right)$

$$\frac{S}{2} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left|2\cos\left(\frac{\pi - 2\theta}{4}\right)\right| d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos\left(\frac{\pi - 2\theta}{4}\right) d\theta = \frac{2\sin\left(\frac{\pi - 2\theta}{4}\right)}{-\frac{1}{2}} \Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= -4\left[0 - 1\right] = 4 \qquad \boxed{S = 8}$$