DİZİLER

Bir dizi dediğimiz zaman $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ şeklinde belli bir düzene göre verilmiş sayıları kastediyoruz.

* Örneğin: $2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, \ldots$ dizisinde ilk terim $a_1 = 2$, ikinci $a_2 = 4$ ve genel olarak n. terim $a_n = 2n$ dir.

* Buradaki n tamsayısına indis denir. Listede a_n teriminin kaçıncı sırada olduğunu ifade eder.

* a_n'e dizinin genel terimi (n. terimi) denir.

* Bir dizi, $\{a_n\}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ şeklinde gösterilir.

* Bir diziyi aynı zamanda, pozitif tamsayılar kümesi üzerinde tanımlanmış reel değerli bir fonksiyon olarak da düşünebiliriz.

$$n \in \mathbb{Z}^+ \xrightarrow{f(n) = \{a_n\}} a_n \in \mathbb{R} \qquad f(n) = \{a_n\} : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$$

* $\{a_n\} = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n}, \ldots\} = \{\sqrt{n}\}$

* $\{a_n\} = \left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots\right\} = \left\{(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}\right\}$

* $\{a_n\} = \{1, -1, 1, -1, \ldots\} = \{(-1)^{n+1}\}$

* $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ ile tanımlı $\{a_n\}$ dizisinin ilk 6 terimini bulunuz.

$a_1 = 1 \qquad a_2 = 1$

$a_3 = a_{1+2} = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2$

$a_4 = a_{2+2} = a_2 + a_3 = 1 + 2 = 3$

$a_5 = a_{3+2} = a_3 + a_4 = 2 + 3 = 5$

$a_6 = a_{4+2} = a_4 + a_5 = 3 + 5 = 8 \quad \Rightarrow \{a_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots\}$

Diziler ile İşlemler

$\{a_n\}, \{b_n\}$ iki dizi ve α bir sabit olmak üzere:

① $\alpha.\{a_n\} = \{\alpha a_1, \alpha a_2, \dots\} = \{\alpha a_n\}$

② $\{a_n\} \mp \{b_n\} = \{a_1 \mp b_1, a_2 \mp b_2, \dots, a_n \mp b_n, \dots\} = \{a_n \mp b_n\}$

③ $\dfrac{\{a_n\}}{\{b_n\}} = \left\{\dfrac{a_1}{b_1}, \dfrac{a_2}{b_2}, \dots, \dfrac{a_n}{b_n}, \dots\right\} = \left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ ($\forall n \in Z^+$ için $b_n \neq 0$)

Dizilerle İlgili Bazı Özellikler

① Sınırlı Diziler:

* Eğer bütün n indisleri için $a_n \leq M$ şartını sağlayacak şekilde bir M sayısı varsa $\{a_n\}$ dizisi üstten sınırlıdır denir. M, $\{a_n\}$ için bir üst sınırdır. Eğer M, $\{a_n\}$ için bir üst sınır ise ve M den küçük hiçbir sayı $\{a_n\}$ için üst sınır değilse M'ye "EKÜS" denir.

* Eğer bütün n indisleri için $a_n \geq m$ şartını sağlayacak şekilde bir m sayısı varsa $\{a_n\}$ dizisi alttan sınırlıdır denir. m, $\{a_n\}$ için bir alt sınırdır. Eğer m, $\{a_n\}$ için bir alt sınır ise ve m den büyük hiçbir sayı $\{a_n\}$ için bir alt sınır değilse m'ye "EBAS" denir.

* Eğer $\{a_n\}$ hem alttan hem de üstten sınırlı ise $\{a_n\}$'e "sınırlı dizi" denir. $\{a_n\}$ sınırlı değilse ona "sınırsız dizi" denir.

(*) $\{a_n\} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ dizisi alttan 1 ve 1'den küçük her reel sayı ile sınırlıdır. EBAS'ı 1 dir. Dizi üstten sınırlı değildir. Dolayısıyla sınırlı değildir. Sınırsız dizidir.

(*) $\{a_n\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots \right\}$ dizisi sınırlı mıdır?

EBAS $\{a_n\}$ = ? EKÜS $\{a_n\}$ = ?

Dizi alttan $\frac{1}{2}$, üstten 1 ile sınırlıdır. Dolayısıyla sınırlıdır.

EBAS $\{a_n\} = \frac{1}{2}$ EKÜS $\{a_n\} = 1$ dir.

2) Monoton Dizi:

Eğer bütün n indisleri için $a_n \leq a_{n+1}$ oluyorsa $\{a_n\}$ dizisine "azalmayan dizi", tersine $a_n \geq a_{n+1}$ oluyorsa $\{a_n\}$'e artmayan dizi denir. Eğer $\{a_n\}$ azalmayan veya artmayan ise ona "Monoton Dizi" denir.

(*) $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$ dizisi monoton mudur?

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} > 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n \Rightarrow \text{Dizi azalmayan}$$

$\Downarrow$

Monoton dizi

(*) $\{a_n\} = \left\{ \overset{a_1}{1}, \overset{a_2}{\frac{1}{2}}, \overset{a_3}{\frac{1}{4}}, \overset{a_4}{\frac{1}{8}}, \dots \right\}$ dizisi monoton mudur?

$\{a_n\} = \left\{ \frac{1}{2^{n-1}} \right\}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^{n-1}}} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow a_{n+1} < a_n \Rightarrow \text{Dizi artmayandır}$$

$\Downarrow$

Monoton dizidir

Bir Dizinin Limiti

Dizilerdeki limit kavramı, fonksiyonlardaki limit kavramının bir özel durumudur.

Tanım: $\{a_n\}$ bir dizi olsun. Eğer her reel pozitif ε sayısı için $n \geq N$ iken $|a_n - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ tamsayısı varsa $\{a_n\}$ dizisi L limitine yakınsar denir ve $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ ile gösterilir. L'ye dizinin limiti denir.

* Eğer böyle bir L sayısı mevcut değilse $\{a_n\}$ dizisine "ıraksak dizi" denir.

$$\lim_{n\to\infty} a_n \begin{cases} \to L \text{ (bir reel sayı)} \Rightarrow \{a_n\} \text{ yakınsak dizi} \\ \to \mp\infty \Rightarrow \text{Dizi } \mp\infty\text{'a ıraksar. (dizi ıraksaktır)} \\ \to \text{Limit yok} \Rightarrow \text{Dizi ıraksaktır.} \end{cases}$$

* Fonksiyonlardaki limit kuralları (çarpım, toplam vs...) dizilerde de geçerlidir.

⊛ $\{a_n\} = \{\frac{1}{n}\}$ dizisinin limitinin 0 olduğunu limit tanımı ile gösteriniz.

Her $\varepsilon > 0$ için $n \geq N$ iken $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ o.ş. bir $N = N(\varepsilon)$ tamsayısı var mı?

$\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n$ olur. N'yi $\frac{1}{\varepsilon}$ dan büyük herhangi bir tamsayı olarak seçersek sonuç tüm $n \geq N$ ler için sağlanır.

⊛ $\{a_n\} = \left\{ \frac{n-1}{n} \right\}$ dizisi verilsin. $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ olduğunu gösteriniz.

$\forall \varepsilon > 0$ için $n \geq N$ iken $\left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| < \varepsilon$ o.ş. $N = N(\varepsilon)$ var mı?

$\left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| = \left| -\frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n$ olur. N yi $\frac{1}{\varepsilon}$ dan büyük herhangi bir tamsayı olarak seçersek sonuç tüm $n \geq N$ için sağlanır.

Limit Kuralları:

$\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ (A, B reel sayı) ise:

① $\lim_{n\to\infty} (a_n \mp b_n) = A \mp B$ ② $\lim_{n\to\infty} k.a_n = k.A$ ③ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ $(B \neq 0)$

---

④ Sandviç Teoremi: $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ birer dizi olsunlar. Eğer $n \geq N$ iken $a_n \leq b_n \leq c_n$ ve $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$ ise $\lim_{n\to\infty} b_n = L$ dir.

---

⑤ Sürekli Fonksiyon Teoremi: $\{a_n\}$ bir reel sayı dizisi olsun. Eğer $a_n \to L$ ise ve f fonksiyonu her a_n de tanımlı ve L'de sürekli ise o zaman $f(a_n) \to f(L)$ dir.

⑥ Bir dizinin limiti varsa tektir.

⊛ $\{n\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ dizi $+\infty$'a ıraksar. Çünkü $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$ dur.

⊛ $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, -1, \ldots\}$ dizisi ıraksaktır. Çünkü $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ limiti mevcut değildir.

☆ Yakınsak dizi sınırlıdır. Ancak tersi doğru değildir. Yani sınırlı bir dizi yakınsak olmak zorunda değildir!

⊛ $\left\{ \frac{\cos n}{n} \right\}$ dizisinin limitini sıkıştırma teoremi ile bulun.

$-1 \leq \cos n \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}$ $\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

olduğundan Sıkıştırma Teo. göre $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$ dır.

⊛ $\{a_n\} = \{\sqrt{n^2+2n} - n\}$ dizisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+2n} - n = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}+2n-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{2}{n}}_{0}}+1\right)} = \underline{1} \rightarrow$ Dizi yakınsak

---

L'Hopital Kuralını Kullanmak

Aşağıdaki teorem $\lim_{n\to\infty} a_n$ ile $\lim_{x\to\infty} f(x)$ arasındaki bağlantıyı somutlaştırır. Bu da bazı dizilerin limitlerini hesaplarken L'Hopital kuralını kullanmamızı sağlar.

Teorem: $f(x)$ in her $x \geq n_0$ için tanımlı bir fonksiyon olduğunu ve $\{a_n\}$'in de her $n \geq n_0$ için $a_n = f(n)$ şartını sağlayan bir dizi olduğunu varsayalım. O zaman,

✯ $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ ise $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ dir. ✯

⊛ $\{a_n\} = \left\{ \frac{\ln n}{n} \right\}$ dizisi yakınsak mıdır?

$f(x) = \frac{\ln x}{x}$: düşünelim.

$\lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\infty/\infty} \xrightarrow{\text{L'Hop.}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0 \Rightarrow \{a_n\}$ yakınsaktır

(*) $\{a_n\} = \{\sin n\pi\}$ dizisi yakınsak mıdır?

Yanlış Çözüm

$f(x) = \sin \pi x$ $(x \in \mathbb{R})$ olarak düşünürsek : $\lim_{x\to\infty} \sin \pi x$ limiti mevcut değildir. O zaman $\lim_{n\to\infty} \sin n\pi$ mevcut değildir. Dizi ıraksaktır. ✗

Doğru Çözüm:

$\{a_n\} = \{\sin n\pi\} = \{0, 0, 0, \ldots\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow$ Dizi yakınsaktır. ✓

Monoton Dizi Teoremi:

a) Bir $\{a_n\}$ dizisi alttan sınırlı ve artmayan ise
b) Bir $\{a_n\}$ dizisi üstten sınırlı ve azalmayan ise
} Yakınsaktır!

* Üstten sınırlı, azalmayan bir dizinin [redacted]
EKÜS'ü [redacted] dizinin yakınsadığı sayıdır.

* Alttan sınırlı, artmayan bir dizinin [redacted]
EBAS'ı [redacted] dizinin yakınsadığı sayıdır.

(*) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ dizisinin monotonluğunu, sınırlılığını, EBAS ve EKÜS'ü inceleyin.

$$\left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\right\}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n+1}{n+2}} = \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} < 1 \Rightarrow a_n < a_{n+1} \Rightarrow \text{Dizi azalmayan}$$

$\Downarrow$

Monoton dizi.

Dizi alttan $\frac{1}{2}$ ve ondan küçük her sayı ile sınırlıdır.

EBAS $= \frac{1}{2}$ dir.

Dizi üstten 1 ve ondan büyük her sayı ile sınırlıdır.

$\lim \frac{n}{n+1} = 1$ dir. Dolayısıyla EKÜS $= 1$ dir.

Sıkça Rastlanan Limitler

① $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

② $\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1 \quad (x>0)$

③ $\lim_{n\to\infty} x^n = 0 \quad (|x|<1)$

④ $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad (\forall x \text{ için})$

⑤ $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$

⑥ $\lim_{n\to\infty} x^n = +\infty \quad (x>1)$

⊛ $\lim_{n\to\infty} \frac{100^n}{n!} = 0$

⊛ $\left\{ \left(\frac{n-2}{n}\right)^n \right\}$ dizisi yakınsak mıdır?

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^n = e^{-2} \Rightarrow$ dizi yakınsaktır.

⊛ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\underbrace{\sqrt[n]{3}}_{3^{1/n}}}_{1} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{1} = 1$

⊛ $\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$

⊛ $\{a_n\} = \left\{ \left(2-\frac{1}{2^n}\right) \cdot \left(3+\frac{1}{2^n}\right) \right\}$ dizisi yakınsak mıdır?

$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(2-\underbrace{\frac{1}{2^n}}_{0}\right)}_{2} \cdot \underbrace{\left(3+\underbrace{\frac{1}{2^n}}_{0}\right)}_{3} = 6 \rightarrow$ Dizi yakınsak