Séries Temporais e Modelos Dinâmicos em Econometria

Marcelo C. Medeiros

Departamento de Economia
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Aula 1

Ementa

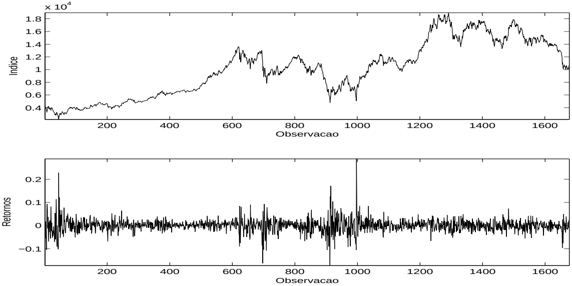
- Introdução aos modelos para séries temporais: definições, interpretação e identificação.
- Propriedades dinâmicas: estacionariedade, função de resposta ao impulso, etc.
- Estimação e propriedades dos estimadores para modelos de séries temporais: mínimos quadrados ordinários (MQO), máxima verossimilhança (MV), variáveis instrumentais (VI) e método generalizado dos momentos (MGM).
- Testes e ciclo de modelagem
- Raiz unitária, cointegração e regressão espúria.
- VAR e cointegração: estimação, interpretação e identificação.
- Previsão.

Séries Temporais

- O que é uma série temporal?
  - Um conjunto de observações de uma determinada variável ao longo do tempo.
  - Sendo um pouco mais específico:
    - Um conjunto de observações de uma determinada variável em <u>intervalos de tempo discretos e equiespaçados</u>.
- Exemplos:
  - Inflação mensal, índice mensal de produção industrial, PIB trimestral, IBOVESPA diário, consumo horário de energia elétrica, etc.

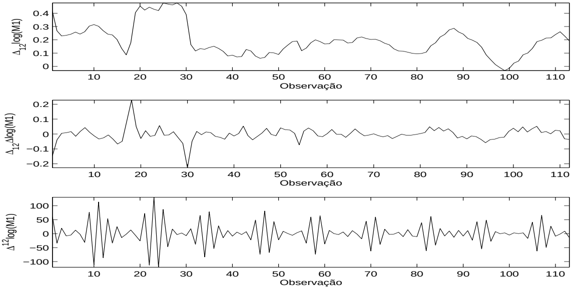
Séries Temporais – Alguns Exemplos

- Índice diário (cotação de fechamento) da BOVESPA e os log retornos para período entre 01/08/1994 e 31/03/2000.



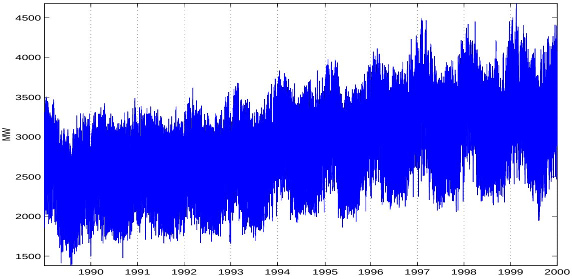
Séries Temporais – Alguns Exemplos

- M1 mensal (média) entre agosto/1994 e dezembro/2004.



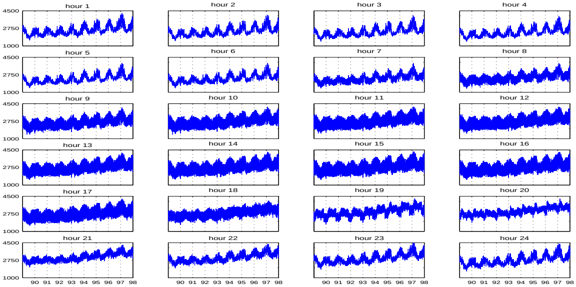
Séries Temporais – Alguns Exemplos

- Consumo horário de energia elétrica na área de concessão de uma empresa no sudeste no Brasil para os anos 1990–2000.



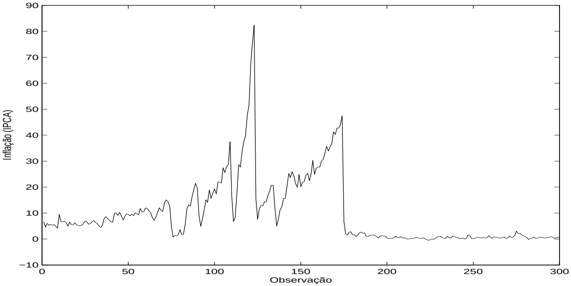
Séries Temporais – Alguns Exemplos

- A figura apresenta os mesmos dados, só que agora a série foi dividida em 24 novas séries. Uma para cada hora (Dados referentes aos anos 1999 e 2000 foram omitidos).



Séries Temporais – Alguns Exemplos

- Inflação mensal medida pelo IPCA para o período entre janeiro de 1980 e dezembro de 2004.



Séries Temporais – Objetivos

- Modelar relações entre variáveis. Podem ser relações estáticas ou dinâmicas (o passado influenciando o futuro). Causalidade.
- Previsão: pontual, intervalos, densidades.
- Dois tipos de modelos:
  1. Modelos univariados: as características das séries de interesse são explicadas exclusivamente a partir do comportamento da própria série.
  2. Modelos multivariados: as características das séries de interesse são explicadas em função não apenas do comportamento da própria série, mas também de outras séries.
     - Modelos escalares: apenas uma equação.
     - Modelos vetoriais: múltiplas equações.
- Modelos estruturais versus forma reduzida. Em geral:
  - modelos estruturais $\Rightarrow$ interpretação econômica;
  - forma reduzida $\Rightarrow$ previsão, "leis do movimento".
- Importante: há situações onde formas reduzidas são economicamente interpretáveis.

Séries Temporais – Objetivos

- Cada tipo de modelo possui certas vantagens e desvantagens, e a opção por determinada abordagem dependerá do objetivo da análise:
  - previsão;
  - relações de causalidade;
  - efeitos de políticas;
  - identificação de choques estruturais.
- Fatos estilizados:
  - tendência, sazonalidade, ciclo;
  - heterocedasticidade;
  - valores extremos (*outliers*);
  - quebras estruturais.

Séries Temporais – Objetivos

- Por que um economista deve estudar econometria para séries temporais?
  1. Macroeconomia
     - Modelos DSGE, modelos de transmissão monetária, avaliação do efeito de diferentes choques, construção de indicadores antecedentes, previsão, etc.
  2. Finanças
     - Análise de risco, otimização de carteiras e seleção de portfólios, análise de eventos, previsão, modelos para estrutura a termo, modelos *macro-finance*, apreçamento de ativos, etc.
  3. Modelos dinâmicos em microeconomia
     - Painel dinâmico, modelos de duração e de escolha discreta para base de dados com muitas observações ao longo do tempo, estrutura de dependência temporal, etc.

Modelos Estruturais

Cameron e Trivedi (2005, cap. 2, pag. 20)

- Uma estrutura é composta pelos seguintes elementos:
  1. um conjunto de variáveis aleatórias $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_T)$ particionado em $(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ por conveniência;
  2. distribuição de probabilidade conjunta de $\mathbf{z}$, $F(\mathbf{z})$;
  3. uma ordenação "a priori" sobre hipóteses de causa-e-efeito e a imposição de restrições, também "a priori"; e
  4. uma forma funcional (paramétrica, não-paramétrica, semi-paramétrica) para a especificação do modelo.

Modelos Estruturais

Comissão Cowles (Sargan, 1988, p. 27)

Um modelo é a especificação da distribuição de probabilidade para um conjunto de observações. Uma estrutura é a especificação dos parâmetros desta distribuição. Portanto, uma estrutura é um modelo para o qual todos os parâmetros possuam valores numéricos.

Modelos Estruturais

- Os elementos de $\mathbf{z}_t$ podem estar relacionados tanto contemporaneamente quanto ao longo do tempo (dinamicamente).
- É consenso a existência de "leis do movimento" que explicam as interações e o comportamento dinâmico dos elementos de $\mathbf{z}_t$.

  $\Rightarrow$ Caso tais leis sejam conhecidas, é possível testar teorias comportamentais e prever o comportamento futuro de $\mathbf{z}_t$.
  $\Rightarrow$ Claro que há também componentes aleatórios na natureza: incerteza, choques, erros dos agentes e distorções referentes ao processo de mensuração e agregação.

Séries Temporais e Processos Estocásticos

- Neste curso os elementos de $\mathbf{z}_t$ são séries temporais.
- Mais formalmente, uma série temporal é uma realização de um processo estocástico.
- Mas o que é um processo estocástico?

Processos Estocásticos

Definição: Variável Aleatória

- Dado um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, uma variável aleatória é uma função real $y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que para todo número real c, $A_c = \{\omega \in \Omega | y(\omega) \leq c\} \in \mathcal{F}$, $\forall\, c \in \mathbb{R}$.

- A probabilidade de ocorrência do evento A_c é definida por $\mathbb{P}$. A função $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ definida como $F(c) = \mathbb{P}(A_c)$ é a *Função Distribuição* de y.

Processos Estocásticos

Definição: Processos Estocásticos

- Um processo estocástico é uma sequência ordenada de variáveis aleatórias, $\{y_t(\omega), \omega \in \Omega, t \in \mathcal{T}\}$, tal que para todo $t \in \mathcal{T}$, $y_t(\omega)$ é uma variável aleatória em Ω e para todo $\omega \in \Omega$, $y_t(\omega)$ é uma realização do processo estocástico indexado em $\mathcal{T}$.

- Portanto, uma série temporal $\{y_t\}_{t=1}^{T}$ é uma realização particular $\{y_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ de um processo estocástico.
- Este processo estocástico é o *mecanismo gerador* da série temporal $y_1(\omega), y_2(\omega), \ldots, y_T(\omega)$, denotada por $\{y_t\}$.
- Para simplificar a notação, $\{y_t\}$ pode representar tanto uma série temporal quanto o respectivo processo estocástico gerador dos dados.

O Mecanismo Gerador de Dados e Modelos Estruturais

- Defina o mecanismo gerador de dados (MGD) como sendo a distribuição conjunta (<u>verdadeira</u>!) de $\mathbf{z}_t$ condicionada ao conjunto de informação disponível:

$$F_t(\mathbf{z}_t|\mathcal{F}_{z,t-1}),$$

onde $\mathcal{F}_{z,t-1} = \{\mathbf{z}_{t-1}, \mathbf{z}_{t-2}, \ldots\}$ é o conjunto de informação.

- Um modelo econométrico é uma família de funções dos dados que tem por objetivo representar (aproximar) o verdadeiro MGD. Formalmente,

$$\{\mathcal{M}\left(\mathbf{z}_t, \mathbf{z}_{t-1}, \mathbf{z}_{t-2}, \ldots, d_t; \psi\right), \psi \in \mathbf{\Psi}\}, \ \mathbf{\Psi} \in \mathbb{R}^p,$$

onde ψ é um vetor de p parâmetros que define o modelo e d_t representa possíveis quebras estruturais.

O Mecanismo Gerador de Dados e Modelos Estruturais

Axioma da Especificação Correta

$$\mathcal{M}_D\left(\mathbf{z}_t, \mathbf{z}_{t-1}, \mathbf{z}_{t-2}, \ldots, d_t; \psi_0\right) = F_t(\mathbf{z}_t|\mathcal{F}_{z,t-1})$$

$$\mathcal{M}_E\left(\mathbf{z}_t, \mathbf{z}_{t-1}, \mathbf{z}_{t-2}, \ldots, d_t; \psi_0\right) = \int \mathbf{z}_t F_t(\mathbf{z}_t|\mathcal{F}_{z,t-1}) d\mathbf{z}$$

$$\mathcal{M}_V\left(\mathbf{z}_t, \mathbf{z}_{t-1}, \mathbf{z}_{t-2}, \ldots, d_t; \psi_0\right) = \int \mathbf{z}_t \mathbf{z}_t' F_t(\mathbf{z}_t|\mathcal{F}_{z,t-1}) d\mathbf{z} - \int \mathbf{z}_t F_t(\mathbf{z}_t|\mathcal{F}_{z,t-1}) d\mathbf{z} \int \mathbf{z}_t' F_t(\mathbf{z}_t|\mathcal{F}_{z,t-1}) d\mathbf{y}$$

O Mecanismo Gerador de Dados e Modelos Estruturais

- Em geral, postulamos modelos da sequinte forma:

$$\mathcal{M}_E\left(\mathbf{z}_t, \mathbf{z}_{t-1}, \mathbf{z}_{t-2}, \ldots, d_t; \psi_0\right) \equiv \mathbf{g}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{d}, \mathbf{u}; \psi_0) = 0,$$

  onde $\mathbf{u}$ é uma perturbação aleatória (erro) que é fundamental para definição da distribuição conjunta de $\mathbf{z} = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$.
- $\mathbf{g}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{d}, \mathbf{u}; \psi_0) = 0$ é a <u>forma estrutural</u>.
- Caso haja uma solução única para $\mathbf{y}_t$ em função de $(\mathbf{y}_{t-1}, \mathbf{y}_{t-2}, \ldots, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{d})$, então

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{h}(\mathbf{y}_{t-1}, \mathbf{y}_{t-2}, \ldots, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{d}; \theta_0),$$

  é a <u>forma reduzida</u> e $\theta_0 = \mathbf{m}(\psi_0)$.

Otimização Intertemporal - Favero (2001, cap. 7)

- Considere o problema usual de otimização de um consumidor representativo:

$$\max_{c_{t+i},A_{t+i}} \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{\infty}(1+\delta)^{-i}U(c_{t+i})|\mathcal{F}_t\right]$$

$$\text{s.a.}$$

$$A_{t+i} = (1+r)A_{t+i-1} + y_{t+i} - c_{t+i}$$

$$\lim_{i\longrightarrow\infty} \mathbb{E}\left[A_{t+i}(1+r)^{i}|\mathcal{F}_t\right] = 0,$$

onde y é a renda, c é o consumo e A é a riqueza que gera um retorno r. U é a função utilidade do consumidor (separável inter- e intra-temporalmente). δ é a taxa de desconto.

Otimização Intertemporal - Favero (2001, cap. 7)

- O problema de otimização pode ser resolvido a partir da maximização do Lagrangiano:

$$\max_{c_{t+i},A_{t+i}} \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{\infty}(1+\delta)^{-i}G_{t+i}|\mathcal{F}_t\right]$$

$$G_{t+i} = U(c_{t+i}) + \lambda_{t+i}[A_{t+i} - (1+r)A_{t+i-1} - y_{t+i} + c_{t+i}].$$

- Hipótese: retorno real é não-estocástico e a função utilidade é dada por

$$U(c_{t+i}) = \frac{c_{t+i}^{1-\gamma}}{1-\gamma},$$

onde γ é o parâmetro de aversão ao risco.

- Dois parâmetros *profundos*: δ e γ.

Otimização Intertemporal - Favero (2001, cap. 7)

- Condições de primeira ordem:

$$\mathbb{E}\left[c_{t+i}^{-\gamma}|\mathcal{F}_t\right] + \mathbb{E}[\lambda_{t+i}|\mathcal{F}_t] = 0, \ \forall\, i$$

$$\mathbb{E}[\lambda_{t+i}|\mathcal{F}_t] - \mathbb{E}\left[\frac{1+r}{1+\delta}\lambda_{t+i+1}|\mathcal{F}_t\right], \ \forall\, i.$$

- Para $i = 0$:

$$\mathbb{E}\left[\frac{1+r}{1+\delta}c_{t+1}^{-\gamma} - c_t^{-\gamma}|\mathcal{F}_t\right] = 0$$

$\Rightarrow$ <u>Modelo Estrutural</u>.

Otimização Intertemporal - Favero (2001, cap. 7)

- A partir das condições de primeira ordem e da condição de transversalidade:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_{t+i}}{(1+r)^i} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{y_{t+i}}{(1+r)^i} + (1+r)A_{t-i}.$$

- Dado que

$$c_{t+i} = c_t \left(\frac{1+r}{1+\delta} \right)^{i/\gamma}, \text{ então}$$

$$c_t = (\rho - 1) \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{y_{t+i}}{(1+r)^i} + (1+r)A_{t-i} \right],$$

onde

$$\rho = \frac{(1+\delta)^{\frac{1}{\gamma}}}{(1+r)^{\frac{1}{\gamma}-1}}.$$

Otimização Intertemporal - Favero (2001, cap. 7)

- Quando $\delta = r$:

$$c_t = r\left[\sum_{i=0}^{\infty}\frac{y_{t+i}}{(1+r)^i} + (1+r)A_{t-i}\right],$$

- A expressão acima representa a função de consumo estrutural e é a solução fechada para o problema de otimização inter-temporal.
- Caso $y_t = \alpha_1 y_{t-1} + u_t$, podemos escrever

$$c_t = (\rho - 1)(1+r)A_{t-1} + (\rho - 1)\frac{1+r}{1+r-\alpha_1}y_t + \varepsilon_t,$$

onde ε_t é um erro auto-correlacionado.
- A equação acima é uma forma reduzida.

Um Modelo Simples de Transmissão Monetária

- Considere as seguintes equações:

$$
\begin{aligned}
\pi_t &= \lambda y_t + \pi_t^e + u_{1t}, \ \ 0 < \lambda < 1 \\
y_t &= \gamma \left(i_{t-1} - \pi_t^e \right) + u_{2t}, \ \ -1 < \gamma < 0 \\
\pi_t^e &= \pi_{t-1} \\
i_t &= i^* + \rho \left(\pi_t - \pi^* \right), \ \ \rho \geq 0,
\end{aligned}
$$

  onde $\mathbf{u}_t = (u_{1t}, u_{2t})' \sim \mathbf{NID}(\mathbf{0}, \mathbf{\Omega})$, π_t é a inflação, y_t é o hiato do produto, π_t^e é a expectativa de inflação para o instante t feita em $t-1$, i_t é a taxa de juros nominal, i^* é a taxa de juros de equilíbrio e π^* é a meta de inflação.

- As equações acima definem um modelo estrutural para $\mathbf{z}_t = (\pi_t, y_t, i_t, \pi_t^e)'$.

Um Modelo Simples de Transmissão Monetária

- Suponha que o interesse seja no comportamento conjunto de (π_t, y_t). O modelo anterior pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \pi_t &= \lambda y_t + \pi_{t-1} + u_{1t} \\ y_t &= \underbrace{\gamma\left(i^* - \rho\pi^*\right)}_{a_0} + \underbrace{\gamma(\rho - 1)}_{a_1}\pi_{t-1} + u_{2t}. \end{aligned}$$

- No modelo acima os choques estruturais continuam identificados.
- As equações acima representam um modelo estrutural "limitado" dado que tanto juros quanto as expectativas de inflação não aparecem mais explicitamente no modelo.

Um Modelo Simples de Transmissão Monetária

- Forma reduzida:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma\left(i^* - \rho\pi^*\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \gamma(\rho - 1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \pi_t \\ y_t \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma\left(i^* - \rho\pi^*\right) \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \gamma(\rho - 1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Um Modelo Simples de Transmissão Monetária

- Dado que

$$\begin{bmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

o modelo resultante é

$$\begin{bmatrix} \pi_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\gamma\left(i^* - \rho\pi^*\right) \\ \gamma\left(i^* - \rho\pi^*\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 + \lambda\gamma(\rho - 1) & 0 \\ \gamma(\rho - 1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1t} + \lambda u_{2t} \\ u_{2t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 \mathbf{z}_{t-1} + \mathbf{v}_t$$

$\Rightarrow$ Modelo Auto-regressivo Vetorial (VAR)

Um Modelo Simples de Transmissão Monetária

- O modelo anterior pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\pi_t = \lambda\gamma\left(i^* - \rho\pi^*\right) + \left[\gamma\lambda(\rho-1)+1\right]\pi_{t-1} + \lambda u_{2,t} + u_{1t}$$

$$\pi_t = \phi_0 + \phi_1\pi_{t-1} + v_{1t}$$

$\Rightarrow$ Modelo Auto-regressivo (AR).

- Que tipo de informação pode ser extraída de cada um dos modelos anteriores?
- Note que todas as quatro formas (estrutural, estrutural “limitada”, VAR e AR) descrevem corretamente o mecanismo gerador de dados. A diferença está no conjunto de informação considerado.

O Modelo de Samuelson (1939)

- Considere a seguinte versão modificada do modelo de Samuelson (*Review of Economics and Statistics*, maio de 1939) de interação entre o "multiplicador keynesiano" e o "princípio do acelerador":

$$
\begin{aligned}
y_t &= c_t + i_t + g \\
c_t &= \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t \\
i_t &= \beta(c_t - c_{t-1}),
\end{aligned}
$$

onde y, c, i, g e ε são, respectivamente, a renda nacional, o consumo, o investimento, os gastos do governo e um erro aleatório.

O Modelo de Samuelson (1939)

- Portanto,

$$y_t = \underbrace{\alpha y_{t-1} + \varepsilon_t}_{\text{consumo}} + \underbrace{\beta(\alpha y_{t-1} + \varepsilon_t - \alpha y_{t-2} - \varepsilon_{t-1})}_{\text{investimento}} + g.$$

- Logo,

$$\begin{aligned} y_t &= g + \alpha(1+\beta)y_{t-1} - \beta\alpha y_{t-1} - \beta\varepsilon_{t-1} + (\beta+1)\varepsilon_t \\ y_t &= \phi_0 + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \theta u_{t-1} + u_t, \end{aligned}$$

onde $u_t = (\beta+1)\varepsilon_t$.

Modelos DSGE

- Após a devida linearização em torno do equilíbrio de *steady-state*, um exemplo típico de um modelo DSGE (*Dynamic Stochastic General Equilibrium*) novo-Keynesiano é:

$$\begin{aligned}\pi_t &= \beta\mathbb{E}_t(\pi_{t+1}) + \kappa x_t + u_{st}\\ x_t &= \mathbb{E}_t(x_{t+1}) - \tau\left[R_t - \mathbb{E}_t(\pi_{t+1})\right] + u_{dt}\\ R_t &= \phi_\pi \pi_t + u_{Rt},\end{aligned}$$

  onde π_t, x_t, e R_t referem-se à inflação, hiato do produto e taxa de juros nominal, respectivamente.
- u_{st}, u_{dt} e u_{Rt} são choques não antecipados.
- $\psi = (\beta, \kappa, \tau, \phi_\pi)'$ são parâmetros profundos (estruturais) da economia.

Modelos DSGE

- A forma reduzida de modelos DSGE linearizados é dada por:

$$\mathbf{A}(\psi)\mathbf{z}_{t+1} = \mathbf{B}(\psi)\mathbf{z}_t + \mathbf{C}(\psi)\mathbf{u}_{t+1} + \mathbf{D}(\psi)\eta_{t+1},$$

onde:

  - $\mathbf{z}_t = (\pi_t, x_t, R_t)'$;
  - $\mathbf{u}_t = (u_{st}, u_{dt}, u_{Rt})'$ e
  - $\boldsymbol{\eta}_{t+1}$ são erros expectacionais.

Conclusão

- Ao longo do curso vamos ver como estimar tanto formas estruturais quanto formas reduzidas.
- Em cada caso, será muito importante entendermos as limitações e o potencial de cada modelo. Análise crítica será fundamental!
- Formas estruturais serão importantes para avaliarmos, por exemplo, o impacto de diferentes políticas monetárias. Enquanto que formas reduzidas serão fundamentais para realização de projeções.