Helymeghatározás alapjai gyakorlat
Navigációs szolgáltatások és alkalmazások (VITMMA07)

Hollósi Gergely
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem,
Távközlési és Médiainformatikai Tanszék

2020. október 7.
2020. október 9.

1. Bevezetés

A *Navigációs szolgáltatások és alkalmazások* tantárgy *Helymeghatározás alapjai* gyakorlat két fő részből áll, az első részben a hely és orientációval kapcsolatos feladatok megoldása kerül terítékre, míg a második részben a helymeghatározási feladat megoldását végezzük el.

A számítások során vagy kézi erőt alkalmazunk, vagy a Matlab programot használjuk. A Matlab kiváltható Octave[1] programcsomaggal, ugyanakkor az Octave segítségével bizonyos számításokat (pl. a kvaterniókkal kapcsolatos számításokat) másképpen végezhetünk, mint Matlab segítségével. A különbségeket a megfelelő résznél jelezzük.

A feladatok után a 3. szakaszban ellenőrző kérdések találhatók, melyekre a válaszokat 3–3 plusz pontért **2020. október 9. 10 óráig** lehet a `hollosi.gergely@vik.bme.hu` címre megküldeni.

2. Hely és orientáció feladatok

Példa Írjuk fel azt a forgatási mátrixot, amely először az Y tengely körül forgat 30 fokot, majd az X tengely körül forgat 20 fokot!

Megoldás Első lépésként írjuk fel a két tengely körüli forgatást jelképező

[1] `https://www.gnu.org/software/octave/index`

mátrixokat:

$$R_Y = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & 0 & \sin 30^\circ \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin 30^\circ & 0 & \cos 30^\circ \end{bmatrix} \qquad R_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 20^\circ & -\sin 20^\circ \\ 0 & \sin 20^\circ & \cos 20^\circ \end{bmatrix}$$

A teljes forgatási mátrix a két mátrix szorzata. Ne feledjük el, hogy a szorzásokat fordított sorrendben kell elvégezni a transzformációkhoz képest!

$$R = R_X R_Y$$

Magát a forgatási mátrixot MATLAB vagy Octave segítségével könnyen kiszámíthatjuk:

```
octave:1> Ry=[cosd(30),0,sind(30); 0,1,0; -sind(30),0,cosd
    (30)]
  Ry =

  0.86603   0.00000   0.50000
  0.00000   1.00000   0.00000
  -0.50000   0.00000   0.86603

octave:2> Rx=[1,0,0;0,cosd(20),-sind(20);0,sind(20),cosd(20)
    ]
  Rx =

  1.00000   0.00000   0.00000
  0.00000   0.93969  -0.34202
  0.00000   0.34202   0.93969

octave:3> R=Rx*Ry
  R =

  0.86603   0.00000   0.50000
  0.17101   0.93969  -0.29620
  -0.46985   0.34202   0.81380
```

Példa Legyen egy három dimenziós forgatási mátrix

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0.5 & 0.5 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Határozzuk meg a forgatás tengelyét és szögét!

Megoldás Egy forgatási mátrix tengelye ($\mathbf{v}$) a forgatás során nem változik, tehát az a forgatás sajátvektora, valamint a hozzá tartozó sajátérték $\lambda = 1$,

hiszen $\mathbf{Rv} = \mathbf{v}$, amiből $(\mathbf{R} - \mathbf{I})\mathbf{v} = 0$. Tehát keressük az a $\mathbf{v}$ vektort, amelyre:

$$(\mathbf{R} - \mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0.5 & -0.5 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \end{bmatrix} \mathbf{v} = 0$$

A középső sor megfelelő skalárszorosát kivonva az első és utolsó sorból (megtehetjük, hiszen az egyenlet homogén), kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nyilvánvaló, hogy a tengely a $\mathbf{v} = [1, 1, 0]^T$ vektorral párhuzamos, origón áthaladó egyenes (behelyettesítéssel láthatjuk). Az egyenlet persze megoldható tetszőleges másik módszerrel (pl. Gauss elimináció, SVD felbontás). A szög megállapításához válasszunk egy erre merőleges vektort, például az $\mathbf{a} = [0, 0, 1]$ vektort (hiszen $\mathbf{av} = 0$)! Könnyű észrevenni, hogy $\mathbf{Ra} \perp \mathbf{a}$, így a forgatás szöge 90 fok.

Példa Írjuk fel a $\mathbf{v} = [1, 2, 3]$ tengely körüli $\alpha = 40°$ forgatáshoz tartozó forgatási kvaterniót! Írjuk fel az ugyanekkora szöggel, de az X tengely körüli forgatást jelképező kvaterniót!

Megoldás Emlékezzük vissza, hogy egy tengely körüli forgatást jelképező kvaterniót az alábbi képlettel írhatjuk fel:

$$\mathbf{q} = e^{\frac{\theta}{2}(u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k})} = \cos\frac{\theta}{2} + (u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k})\sin\frac{\theta}{2}$$

Fontos kiemelni, hogy a forgatást jelképező tengely **egységvektor** kell legyen! Tehát,

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \left[\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right]$$

Ebből már nagyon egyszerű a forgatási kvaternió felírása:

$$\mathbf{q} = \cos 20° + (\frac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{14}}\mathbf{j} + \frac{3}{\sqrt{14}}\mathbf{k})\sin 20°$$

$$\Diamond$$

Hasonlóképpen, a X tengely körüli forgatáshoz felírhatjuk a tengelyt, mint egységvektort:

$$\mathbf{u} = [1, 0, 0]$$

, amiből a forgatási kvaternió:

$$\mathbf{q} = \cos 20^\circ + \mathbf{i} \sin 20^\circ$$

Példa Forgassuk el a $\mathbf{p} = [1, 2, 1]$ vektort a $\mathbf{u} = [1, 1, 1]$ tengely körül 30 fokkal! Oldjuk meg a feladatot kvaterniók és a Rodrigues formula segítségével is!

Megoldás Első lépésként vegyük fel az egyes változókat:

```
u=[1,1,1];
p=[1,2,1];
a=30;
```

Normalizáljuk a tengely vektorát, hiszen látható, hogy $\|\mathbf{u}\| \neq 1$. Ez egy nagyon fontos lépés, hiszen a kvaternió elkészítéséhez egységvektorra van szükségünk:

```
u=u/norm(u);
```

Ezután már létrehozhatjuk a forgatáshoz szükséges kvaterniót a $\mathbf{q} = \cos\frac{\theta}{2} + (u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k}) \sin\frac{\theta}{2}$ képlet alapján MATLAB alatt:

```
q=[cosd(a/2),u(1)*sind(a/2),u(2)*sind(a/2),u(3)*sind(a/2)];
```

Természetesen a forgatni kívánt vektort is kvaternióvá kell alakítanunk a $\mathbf{v} = p_x\mathbf{i} + p_y\mathbf{j} + p_z\mathbf{k}$ formában, hogy egy tiszta kvaterniót kapjunk:

```
v=[0,p(1),p(2),p(3)];
```

A forgatást végül a $\mathbf{p}' = \mathbf{q}\mathbf{p}\mathbf{q}^{-1}$ képlet alapján tudjuk elvégezni:

```
pvQ=quatmultiply(quatmultiply(q,v),quatinv(q));
```

Itt a `pvQ` változó fogja tárolni az elforgatott vektort, ahol az elforgatott vektort az imaginárius részek tartalmazzák. Octave[2] esetén a kvaterniók kezelését másképpen kell elvégezni, de a lépések ugyanazok. A teljes kód alul látható, itt mind az Octave, mind a MATLAB kód megtalálható:

```
u=[1,1,1];
p=[1,2,1];
a=30;

u=u/norm(u);

# Octave
```

[2]Octave esetében a *quaternion* csomag telepítése szükséges, amit innen tudunk letölteni: `https://octave.sourceforge.io/quaternion/index.html`. Letöltés után a `pkg install quaternion-2.4.0.tar.gz` paranccsal tudjuk telepíteni az Octave konzolból.

```
q=quaternion(cosd(a/2),u(1)*sind(a/2),u(2)*sind(a/2),u(3)*
    sind(a/2));
v=quaternion(0,p(1),p(2),p(3));
pvQ=q*v*inv(q);

# MATLAB
q=[cosd(a/2),u(1)*sind(a/2),u(2)*sind(a/2),u(3)*sind(a/2)];
v=[0,p(1),p(2),p(3)];
pvQ=quatmultiply(quatmultiply(q,v),quatinv(q));
```

A Rodrigues formula segítségével is könnyen elvégezhetjük a forgatást. Itt is először felveszzük a bemeneti adatokat, majd a tengely vektorát normalizáljuk.

```
u=[1,1,1];
p=[1,2,1];
a=30;

u=u/norm(u);
```

Ezután létrehozzuk a keresztszorzat mátrixot az

$$[\mathbf{u}]_\times = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}$$

képlet alapján.

```
K=[0 -u(3) u(2)
u(3) 0 -u(1)
-u(2) u(1) 0];
```

Ezután a Rodrigues formulát alkalmazzuk ($\mathbf{R} = \mathbf{I} + \sin\phi[\mathbf{u}]_\times + (1-\cos\phi)[\mathbf{u}]_\times^2$), majd egyszerű mátrixszorzással elvégezzük a forgatást:

```
R=eye(3)+sind(a)*K+(1-cosd(a))*K*K;
pvRodr=R*p';
```

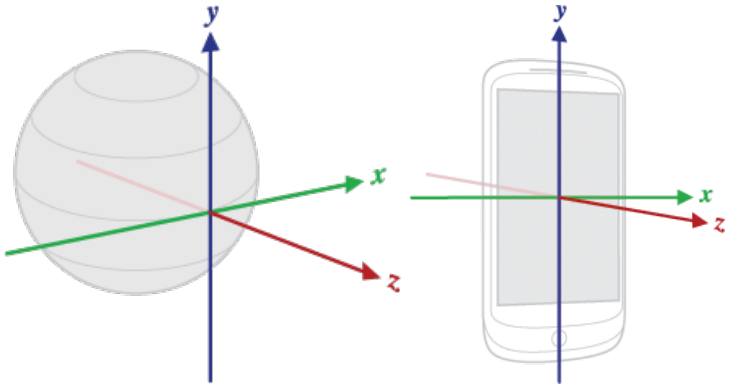
A teljes kód itt található:

```
u=[1,1,1];
p=[1,2,1];
a=30;

u=u/norm(u);

K=[0 -u(3) u(2)
u(3) 0 -u(1)
-u(2) u(1) 0];
R=eye(3)+sind(a)*K+(1-cosd(a))*K*K;
pvRodr=R*p';
```

Példa Egy nyugalomban lévő okostelefon gyorsulásérzékelő szenzora az $\mathbf{a} = \left[0.28\frac{m}{s^2}, -0.108\frac{m}{s^2}, 9.936\frac{m}{s^2}\right]$ értéket mutatja egy adott pillanatban, míg a mágneses szenzor a $\mathbf{h} = [18.75\mu T, 10.31\mu T, -44.43\mu T]$ értéket. Határozzuk meg a telefon megközelítő orientációját egy olyan koordinátarendszerben, ahol az Y tengely észak irányába mutat, a Z tengely az föld középpontjával ellentétes irányba, és az X tengely ezekre jobbkéz szerint merőleges (a koordinátarendszereket lásd. az ábrán)!



Megoldás Amint azt tudjuk, a mágneses vektor és a gyorsulás vektor (jelen esetben a nyugalmi helyzet miatt a gravitáció) segítségével 3 szabadságfokú orientációt határozhatunk meg. A két vektor a telefon koordinátarendszerében (az ábrán a jobb oldalon) értelmezett. Vizsgáljuk meg a két vektort!

```
a=[0.28,-0.108,9.936]
h=[18.75,10.31,-44.43]

alength=norm(a)
hlength=norm(h)

% alength =  9.9405
% hlength =  49.314
```

Láthatjuk, hogy a mágneses térerősség nagyjából $49.314\mu T$ értékű, míg a gyorsulás $9.9405\frac{m}{s^2}$ értékű, amely utóbbi közel esik az elfogadott $9.81\frac{m}{s^2}$ értékhez. Tudjuk, hogy a gravitációs vektor megközelítőleg a föld közepe felé mutat, tehát „függőleges". Ugyanakkor a gyorsulás vektor éppen ellentétes a gravitációs vektorral, hiszen nyugalomban az ellenerő éppen ellentétesen mutat. Tehát az $\mathbf{a}$ vektorunk az *ég felé mutat*, azaz $\mathbf{g} = -\mathbf{a}$!

Mi a helyzet a mágneses vektorral? Ez utóbbi egyrészt nem a valós észak felé mutat (ezt most elhanyagoljuk), másrészt nem is vízszintes. Tekintsük a bezárt szögüket:

```
a=a/norm(a)
```

```
h=h/norm(h)
angle=acosd(dot(a,h))

% angle =  153.14
```

Itt normalizáltuk a két vektor hosszát, majd egyszerű skaláris szorzattal kiszámítottuk a bezárt szögüket fokban. Mivel az $\mathbf{a}$ vektorunk függőlegesen az ég felé mutat, azt mondhatjuk, hogy a mágneses vektorunk meredeken a föld felé mutat, ez azonban nem meglepetés a 47-dik szélességi fok környékén. A fontos az, hogy a két vektor *nem merőleges* egymásra!

Az orientáció meghatározásához készítsünk először egy merőleges bázisrendszert a vektorainkból! Legyen ez a bázisunk az $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ bázisrendszer. Kérdés, hogy az orientációt melyik vektorra alapozzuk elsősorban? Mivel a függőleges irányt sokkal pontosabban mutatja a gyorsulási vektor, mint az északi irányt a mágneses vektor (hiszen az nem csak északra, hanem lefelé is mutat), használjuk a gyorsulási vektort. Legyen $z = -\mathbf{a}$, tehát a gravitációs vektor iránya. Válasszuk az $\mathbf{x}$ irányt merőlegesnek jobbkéz szabály szerint a gravitációs vektor és mágneses vektor által megadott síkra, azaz $\mathbf{x} = \frac{\mathbf{z}\times\mathbf{h}}{\|\mathbf{z}\times\mathbf{h}\|}$ (itt a vektort egy lépésben normalizáltuk). Az $\mathbf{y}$ irányt pedig természetesen válasszuk merőlegesnek mindkét vektorra, azaz $\mathbf{y} = \mathbf{x} \times \mathbf{z}$ (nincs szükség normalizálásra, hiszen mindkét vektor egység hosszúságú és merőlegesek egymásra)! Ugyanezek a lépések MATLABban:

```
z=-a
x=cross(z,h)
x=x/norm(x)
y=cross(x,z)
```

Az orientáció meghatározásához már csak a forgatási mátrixot kell felírnunk, amely természetesen a két koordinátarendszer bázisvektorainak a viszonyát írja le. Vegyük észre, hogy a $\mathbf{z}$ vektorunk a gravitáció vektora a *telefon koordinátarendszerében*! Ugyanígy, az $\mathbf{y}$ vektor a mágneses vektor merőleges komponense a gravitációs vektorra a *telefon koordinátarendszerében.* Ebből tehát az orientációs mátrix:

$$R_{\text{earth to phone}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T & \mathbf{y}^T & -\mathbf{z}^T \end{bmatrix}$$

Az utolsó oszlopot meg kell szoroznunk mínusz eggyel, hiszen a gravitációs vektor a globális koordinátarendszerben pont ellentétesen mutat a Z tengely irányával. A kapott orientációs mátrix az a transzformáció, amely a *globális koordinátarendszer pontjait transzformálja a telefon koordinátarendszerébe.*

```
  a=[0.28,-0.108,9.936]
  h=[18.75,10.31,-44.43]

  alength=norm(a)
  hlength=norm(h)

  a=a/norm(a)
```

```
  h=h/norm(h)

  angle=acosd(dot(a,h))

  z=-a
  x=cross(z,h)
  x=x/norm(x)
  y=cross(x,z)

  R=[x' y' -z']
```

Példa Tegyük fel, hogy egy klasszikus, kétdimenziós távolságmérésen alapuló helymeghatározási rendszerünk létezik. A rendszerben 5 darab fix helyen található horgonypont (ún. anchor) található, melyektől egy mozgó eszköz valamilyen technológia segítségével megméri a távolságát (minden mérés esetében 5 távolságadat). Határozza meg a felhasználó helyzetét Newton-Gauss iteráció, Kalman-szűrő és RANSAC algoritmus segítségével!

A feladathoz három Octave file tartozik, melyekben a kiindulási adatok találhatók:

anchors.mat A horgonypontok koordinátáit tartalmazó mátrix

measurements A horgonypontoktól való távolságmérések adatai (távolság és a távolságméréshez tartozó szórás)

real_loc.mat A felhasználó valós helyzetét tartalmazó adathalmaz

A feladathoz kiindulási pontként használhatjuk a mellékelt fájlokat, melyek bizonyos részfeladatokban segítenek, illetve egy kiindulási csonkot tartalmaz a `main.m` fájlban, melynek kiegészítésével a feladatot könnyebben elvégezhetjük.

Megoldás Első lépésként töltsük be az adatokat, majd ábrázoljuk azokat.

```
clear all;
close all;

% Mérések betöltése
%  d(i,j) - i-dik idöpontban az eszköz távolsága a j-dik
    anchortól
load measurements;

% A méröeszközök helyzetének betöltése
% anchors(k,1) - az k-dik anchor X koordinátája
% anchors(k,2) - az k-dik anchor Y koordinátája
```

```
load anchors;

% Az eszköz valós helyzete a hiba vizsgálatához
% real_loc(i,1) - az i-dik idöpontban az eszköz X koordinátá
    ja
% real_loc(i,2) - az i-dik idöpontban az eszköz Y koordinátá
    ja
load real_loc;
```

Az környezet törlése után a `load` paranccsal betöltjük a méréseket, és a horgonypontok koordinátáit. A horgonypontok egy `anchors` mátrixban találhatok, soronként egy horgonypont, oszlopokban pedig a koordinátáik találhatók. A mérések egy `d` mátrixban találhatók, itt minden sor egy-egy időpillanat, az oszlopok pedig az adott időpontban történt távolságmérések. Az első oszlop az első horgonyponttól történt mérés, és így tovább.

Rajzoljuk ki az egyes horgonypontokat, majd a felhasználó bejárt útvonalát is. A `circle` függvény segítségével pedig rajzoljuk ki az egyes időpillanatokban a horgonypontokhoz tartozó méréseket!

```
for step=1:size(d,1)  % Iteráció az idöpillanatokra
  clf;

  % Horgonypontok kirajzolása
  main_plot=scatter(anchors(:,1),anchors(:,2),'r');
  axis([-12 22 -12 12]);
  axis equal;
  hold on;

  % Valós helyzet ábrázolása
  plot(real_loc(1:step,1),real_loc(1:step,2),'rx-','
      LineWidth',2);

  % Távolságok kirajzolása körökként
  for i=1:size(d,2)
  circle(anchors(i,1),anchors(i,2),d(step,i),'b');
  end;

  %
  % Az algoritmusokat ide implementáljuk
  %

  pause;
end;
```

Láthatóan egy `for` ciklusban implementáltuk a kirajzolást, amely időben engedi futtatni az algoritmust, ha lefuttatjuk, akkor a `pause` függvény megállítja a futtatást egy gomb megnyomásáig. Így egy billentyű megnyomásával a következő időpillanatra léphetünk, és áttekinthetjük, miként alakul a felhasználó valós helyzete, és a helyhez tartozó távolságmérések.

Mérési modell Adott időpillanatban a mérések egy távolságvektort alkotnak, azaz $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \end{bmatrix}$, ahol

$$d_k = \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2}$$

Az egyenletben a felhasználó helyzete $\mathbf{l}(x, y)$, a horgonypontok koordinátái pedig $\mathbf{p}_k(x_k, y_k)$. A mérési modell tehát

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_5 \end{bmatrix} = f(\mathbf{l}) = \begin{bmatrix} \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{l}\| \\ \vdots \\ \|\mathbf{p}_5 - \mathbf{l}\| \end{bmatrix}$$

Jól látható, hogy ez egy túldefiniált, nem-lineáris egyenletrendszer, mely zárt alakban nem megoldható.

Newton-Gauss iteráció Kezdjük a megoldást a Newton-Gauss implementációval, amely lehetővé teszi, hogy a nem-lineáris egyenletrendszert iteratív módszerrel megoldjuk. A Newton-Gauss iteráció iterációs lépése a következő:

$$\mathbf{l}_{n+1} = \mathbf{l}_n - (J^T J)^{-1} J^T (f(\mathbf{l}_n) - \mathbf{d})$$

, ahol $\mathbf{l}_n$ a felhasználó helye az n-dik iterációban, f a mérési modell, J az f függvény Jacobi-mátrixsza, $\mathbf{d}$ a mérési vektor. A Jacobi-mátrix a parciális deriváltakból álló mátrix, azaz:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial d_1}{\partial x} & \frac{\partial d_1}{\partial y} \\ \vdots & \\ \frac{\partial d_5}{\partial x} & \frac{\partial d_5}{\partial y} \end{bmatrix}$$

, ahol a deriváltak

$$\frac{\partial d_k}{\partial x} = \frac{x - x_k}{\sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2}}$$
$$\frac{\partial d_k}{\partial y} = \frac{y - y_k}{\sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2}}$$

Ebből a Newton-Gauss algoritmus megvalósítása meglehetősen egyszerű MATLAB-ban. Definiáljuk a fájl legelején (a fő iteráción kívül) a Newton-Gauss iteráció eredményeképpen létrejött helyek eltárolására alkalmas mátrixot:

```
1  nghist=[];
```

Ezután készítsük el a Newton-Gauss iterációt. A példában 10 iterációt alkalmazunk, valós körülmények között természetesen valamilyen leállási feltételre van szükség. Az $\mathbf{l}_n$ iterációs állapotvektort az `ngloc` változó tárolja. Az egyes eredményeket végül az `nghist` változóba konkatenáljuk, így a Newton-Gauss algoritmus által visszaadott hisztorikus útvonalat ki tudjuk rajzolni (zöld színt használva).

```
% Newton-Gauss algoritmus, 10 iterációval
ngloc=[0;0];
for iter=1:10
  J=[]; % Jacobi mártix

  % A Jacobi mátrix kitöltés soronként (horgonypontonként)
  for ai=1:size(anchors,1)
    J(ai,1)=(ngloc(1)-anchors(ai,1))/sqrt((ngloc(1)-anchors(
        ai,1))^2+(ngloc(2)-anchors(ai,2))^2);
    J(ai,2)=(ngloc(2)-anchors(ai,2))/sqrt((ngloc(1)-anchors(
        ai,1))^2+(ngloc(2)-anchors(ai,2))^2);

    eps(ai,1)=sqrt((ngloc(1)-anchors(ai,1))^2+(ngloc(2)-
        anchors(ai,2))^2)-d(step,ai);
  end

  % Newton-Gauss iterációs lépés
  ngloc=ngloc-inv(J'*J)*J'*eps;
end

% Historikus útvonal gyüjtése és kirajzolása
nghist=[nghist; ngloc'];
plot(nghist(:,1),nghist(:,2),'gx-','LineWidth',2);
```

Kalman-szűrő Mivel a mérési modellünk nem lineáris, ezért kiterjesztett Kalman-szűrőt kell alkalmaznunk. Legyen a Markov modellünk a következő:

$$\mathbf{l}_{i+1} = \mathbf{l}_i + \mathbf{q}$$
$$\mathbf{d}_i = f(\mathbf{l}) + \mathbf{r}$$

, ahol $\mathbf{l}_i$ a felhasználó helye az i-dik időpillanatban, $\mathbf{d}_i$ a távolságmérések az i-dik időpillanatban, f a mérési modell (lásd. Newton-Gauss). Az $\mathbf{r} \sim N(0, R)$ zaj normális eloszlású, és az R kovariancia mátrix diagonális, és ismert (`dvar` változóban található értékek). A $\mathbf{q} \sim N(0, Q)$ zaj ismert, fix kovariancia mátrixszal rendelkezik. A dinamikus modell szerint tehát az eszköz várható értékben nem változtat helyet (hiszen az identitás függvény), csak valamekkora valószínűséggel (Q) és tetszőleges irányba. A kiterjesztett Kalman-szűrő szerint tehát $\mathbf{l}$ eloszlása is normális, méghozzá $\mathbf{l} \sim N(\mathbf{m}, P)$.

A kiterjesztett Kalman-szűrő megoldási egyenlete tehát:

$$
\begin{aligned}
m_i^- &= m_{i-1} \\
P_i^- &= P_{i-1} + Q_{i-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_i &= d_i - f(m_i^-) \\
S_i &= F_x(m_i^-) P_i^- F_x^T(m_i^-) + R_i \\
K_i &= P_i^- F_x^T(m_i^-) S_i^{-1} \\
m_i &= m_i^- + K_i v_i \\
P_i &= P_i^- - K_i S_i K_i^T
\end{aligned}
\tag{1}
$$

, ahol F_x az f Jacobi-mátrixsza (lásd. Newton-Gauss). Ezek alapján a Kalman-szűrő könnyedén implementálható MATLAB-ban. Kezdetben definiáljuk az alapvető állapotvektorokat és zaj kovarianciákat a fájl elejére:

```
% Kalman filter állapotvektor
kfhist=[];
m=[];
P=eye(2);
Q=eye(2)*1;
```

Itt a dinamikus modell zajának 1 métert adtunk meg, így az eszköz elmozdulását 1 méter szórásra állítottuk, tehát a prediktált pozíciója az előző hely nagyjából 3 méteres körzetében lesz 99% valószínűséggel.

```
% Kalman-szürö
if isempty(m)
  m=ngloc;  % A kezdeti hely a Newton-Gauss iteráció alapján
end;

% Predikciós lépés
m=m;
P=P+Q;

H=[];
for ai=1:size(anchors,1)
  H(ai,1)=(m(1)-anchors(ai,1))/sqrt((m(1)-anchors(ai,1))^2+(
      m(2)-anchors(ai,2))^2);
  H(ai,2)=(m(2)-anchors(ai,2))/sqrt((m(1)-anchors(ai,1))^2+(
      m(2)-anchors(ai,2))^2);

  h(ai,1)=sqrt((m(1)-anchors(ai,1))^2+(m(2)-anchors(ai,2))
      ^2);
end
R=diag(dvar(step,:));

% Frissítési lépés
v=d(step,:)'-h;
```

```
S=H*P*H'+R;
K=P*H'*inv(S);
m=m+K*v;
P=P-K*S*K';

% Historikus utvonal gyüjtése és kirajzolása
kfhist=[kfhist; m'];
plot(kfhist(:,1),kfhist(:,2),'bx-','LineWidth',2);
circle(kfhist(end,1),kfhist(end,2),P(1,1),'b'); % A hiba mé
    rtékének jelzése
```

A következő fontos megjegyzéseket tesszük. A Kalman-szűrő kezdeti állapotának a Newton-Gauss iteráció eredményét vesszük (csak az első pozíció esetében). Az R kovariancia mátrixot figyeljük meg, hogy a bemeneti adatok alapján töltjük ki, méghozzá diagonál mátrixra, tehát az egyes távolságmérések között nem feltételezünk korrelációt. Az algoritmus végén külön sorban kirajzoljuk a hely szórását is körként, méghozzá a kovariancia mátrix első eleme segítségével (valóságban ez ellipszis is lehetne, vagy akár a kovariancia mátrixban lehetnek nem diagonális elemek is, ezeket most elhanyagoljuk).

RANSAC A RANSAC algoritmusok az ún. robusztus algoritmusok közé tartoznak, melyek lehetővé teszik a felállított sztochasztikus modellünktől eltérő hibák feltárását, és a modellnek nem megfelelő mérések, ún. outlierek kiszűrését. A feladatok során csupán a legegyszerűbb, fix iterációszámmal dolgozó (tehát nem adaptív) RANSAC algoritmust implementáljuk.

A megvalósítás során minden iterációban kiválasztunk két mérést, hiszen két mérés esetén két kört kapunk, amelyeknek kettő, egy, vagy nulla metszéspontja lehet. Első esetben véletlenszerűen választunk a két metszéspont közül, az utolsó esetben a két kör középpontját összekötő egyenesen vesszük fel a metszéspontot. A metszéspont ismeretében a méréseket aszerint osztályozzuk inlier és outlier mérésekre, hogy melyik található a pont $\varepsilon = 2$ méteres körzetében. Ennek megfelelően összeállítjuk a mérések indexeiből az inlier index halmazt. Amennyiben ez több elemet tartalmaz, mint az eddigi legtöbb elemet tartalmazó halmaz, a legjobb megoldásként kezeljük. Végül az iterációk lejátszása után a legtöbb inlier-t tartalmazó halmazban található méréseket vastagabb körként ábrázoljuk (valóságban ezeket a méréseket használjuk a további becslések során, pl. a Kalman-szűrőben, vagy a Newton-Gauss iterációban).

A RANSAC megvalósítása MATLAB környezetben ezek alapján nyilvánvaló:

```
% RANSAC
error_threshold=2;  % Az inlier mérések maximális hibája, mé
    terben
best_inlier_idx=[]; % Az iterációk során eddig megtalált
    legnagyobb inlier halmaz
for iter=1:30
  % Minimális mintahalmaz kiválasztása (2 pont a körök metsz
```

```
      éséhez)
  anchor_idx1=randi(size(anchors,1));
  anchor_idx2=randi(size(anchors,1));

  % Figyeljünk arra, hogy ne legyen a két index azonos
  while anchor_idx1 == anchor_idx2
    anchor_idx2=randi(size(anchors,1));
  end

  % A két kiválasztott horgonyponthoz tartozó távolsági görb
      ék metszete (2 db, ebből egy kiválasztása véletlenszerü
      en)
  test_point=circle_intersect(anchors(anchor_idx1,1),anchors
      (anchor_idx1,2),d(step,anchor_idx1),anchors(anchor_idx2
      ,1),anchors(anchor_idx2,2),d(step,anchor_idx2));
  test_point=test_point(randi(2),:);

  % A próbamegoldáshoz tartozó inlierek összegyüjtése
  inlier_idx=[];
  for ai=1:size(anchors,1)
    distance=sqrt((anchors(ai,1)-test_point(1))^2+(anchors(
        ai,2)-test_point(2))^2);
    if abs(distance-d(step,ai)) < error_threshold
      inlier_idx=[inlier_idx ai];
    end
  end

  % Ha a talált megoldás jobb, akkor mentsük le
  if length(inlier_idx) > length(best_inlier_idx)
    best_inlier_idx = inlier_idx;
  end
end

% Az inlier távolságok ábrázolása vastagabb körként
for i=best_inlier_idx
  circle(anchors(i,1),anchors(i,2),d(step,i),'LineWidth',2);
end
```

Figyeljük meg, hogy a körök metszéspontját a `circle_intersect` függvénnyel végezzük, amely a két kör középpontját és a két kör sugarát várja az argumentumában. A függvényt a `circle_intersect.m` fájlban találjuk, és mellékeltük a gyakorlat anyagához.

3. Kérdések

Az ellenőrző kérdések során a két csoportból 1-1 szabadon választott kérdésre kell a választ elküldeni a 3–3 pluszpontért.

3.1. Helymeghatározás alapjai

- Milyen viszonyítási rendszereket ismerünk a helymeghatározása témakörében?
- Írja le egy ϕ szöggel történő, tetszőleges $u = [u_x, u_y, u_z]$ tengely körüli forgatást jelképező kvaterniót!
- Írja le, miként számítjuk ki egy Rodrigues-vektorhoz tartozó forgatási mátrixot!

3.2. Helymeghatározási feladat megoldása

- Ha x jelöli a mérési vektorunkat, f a modellünket és θ a paraméterhalmazt, írja fel a legkisebb négyzetes eltérés költségfüggvényét!
- Írja fel a Newton-Gauss nemlineáris egyenletek megoldási módszerének frissítési egyenletét!
- Írja fel a Bayes tételt! Jelölje a prior, posterior és hipotézis fogalmakat!
- Írja fel a kiterjesztett Kalman-szűrő állapotegyenleteit!
- Írja fel a RANSAC valószínűségi megállási feltételét!