Матан один кусок

Неопределённый интеграл

Определение интеграла и первообразной

Первообразная

Пусть I - промежуток, f определена на I. F - первообразная для f на промежутке I, если $F'(x) = f(x)$, $x \in I$

Неопределенный интеграл

$\int f(x)\,dx$

1. Любая фиксированная первообразная
2. Множество всех первообразных

Методы интегрирования

Теорема: интегрирование по частям

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

1. На некоторых промежутках $\exists u'$ и v'
2. $\exists \int v\,du$

   Тогда $\exists \int u\,dv$ и работает формула интегрирования по частям

   Доказательство

   $$(uv)' - (\int v\,du)' + c' = u \cdot v'$$

   Замечание

   $$\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$$

Теорема: метод замены переменной

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \{t = x^2\; dt = 2x\,dx\} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t} =$$

$$\frac{1}{\ln}|1+t| + C = \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C$$

Теорема

Пусть $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, $x = \varphi(t), t \in I$ Пусть φ дифф. на I. Тогда справедлива замена $\varphi(t) = x$, $\varphi'\,dt = dx$, то есть $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C$

Доказательство

$$(F(\varphi(t)) + C)' = F'_x \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t) \cdot \varphi'(t))$$

Интегрирование рациональных дробей

> **Простейшие дроби**
>
> Простейшей дробью называется дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $\deg P \leq \deg Q$

Виды простейших дробей

1. $\dfrac{A}{(x-a)^n}$, $A \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$
2. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, $M, N, p, q \in \mathbb{R}$, дискриминант знаменателя отрицательный.

Лемма 1

Лемма

Если $Q(x) = (x-a)^n \cdot \tilde{Q}(x)$, $\tilde{Q}(a) \neq 0$, то можно представить $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ в виде $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{A}{(x-a)^n} + \dfrac{\tilde{P}(x)}{(x-a)^{n-1} \cdot \tilde{Q}(x)}$

Следствия

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{H(x)}{\tilde{Q}(x)}$$

Доказательство

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{A}{(x-a)^n} = \frac{P(x) - A \cdot \tilde{Q}(x)}{Q(x)}$$

$$Q(x) = (x-a)^n \cdot \tilde{Q}(x)$$

$$A : P(a) - A \cdot \tilde{Q}(a) = 0 \implies A = \frac{P(a)}{\tilde{Q}(a)}$$

Лемма 2

Лемма

Пусть $Q(x) = (x^2+px+q)^m \tilde{Q}(x)$, где дискриминант отрицательный.

Тогда $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m} + \dfrac{\tilde{P}(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}\tilde{Q}(x)}$

Следствие

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{M_m x + N_m}{(\dots)^m} + \frac{M_{m-1}x + N_{m-1}}{(\dots)^{m-1}} + \dots + \frac{1(x)}{\tilde{Q}(x)}$$

Доказательство

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m} = \frac{P(x) - (Mx+N)\tilde{Q}(x)}{(\dots)^m \tilde{Q}(x)} =$$

$$= \frac{P(x) - (Mx+n)\tilde{Q}(x)}{(x-x_1)^m (x-\bar{x}_1)^m \tilde{Q}(x)}$$

$$\begin{cases} P(x_1) - (Mx_1 + N)\tilde{Q}(x_1) = 0 \\ P(\bar{x}_1) - (M_1\bar{x}_1 + N)\tilde{Q}(\bar{x}_1) = 0 \end{cases}$$

У СЛУ с двумя уравнениями есть два неизвестных $\implies \exists M, N$

Теорема: любая дробь разложима на простейшие

Теорема

Доказательство

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a_1)^{n_1}\dots(x-a_k)^{n_k}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\dots(x^2+p_tx+q_t^{m_t})}$$

Последовательно применим лемму 1 и 2.

$$\sum_{i=1}^{n_1}\frac{c_i}{(x-a_1)^i}+\dots+\sum+i=1^{n_k}\frac{d_i}{(x-a_k)^i}+\dots=1$$

Пример к теореме

$$\frac{P}{Q}=\frac{(x^2+1)}{(x+1)^2(x-1)}=\frac{A}{(x+1)^2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-1}=$$

$$=\frac{A(x-1)+B(x^2-1)+C(x+1)^2}{(x+1)^2(x-1)}$$

$$x^2+1=A(x-1)B(x^2-1)+C(x+1)^2$$

Затем методом неопределённых коэффициентов найдем A, B, C

Можно использовать формулу Тейлора

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{c+3}$$

1. $A=?$, корень -1, $f(x)=\frac{x}{(x+2)(x+3)}$, $A=f(-1)=-\frac{1}{2}$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{f(x)}{x+1}=\{f(x)=f(-1)+f'(-1)(x+1)\dots\text{- формула Тейлор}$$

$$=\frac{(f(-1)+f'(-1)(x+1)+\dots)}{x+1}$$

$$f(-1)=A$$

$$\frac{x}{(x+1)^2(x+2)(x+3)}=\frac{A}{(x+1)^2}+\frac{B}{(x+1)}+\frac{C}{x+2}+\frac{D}{x+3}$$

Метод Остроградского

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

$$\deg P_k=\deg Q$$

Если у $Q(x)$ есть кратный корень, то применяют метод Остроградского. $Q(x) = Q_1(x) \cdot Q_2(x)$, где $Q_2(x)$ - неприв. множителль Q в степени 1.
Например:

$$Q(x) = (x^2+1)^5(x-2)^2$$

$$Q_2 = (x^2+1)(x-2)$$

Тогда $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)\,dx}{Q_2(x)}$
Задача свелась к интегралу, где в знаменателе нет кратных корней. Продифференцируем обе части.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1'(x)Q_1(x) - P_1(x)Q_1'(x)}{Q_1^2(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$$

$$P(x) = \frac{P_1'(x)Q(x)}{Q_1(x)} - \frac{P_1(x)Q_1'(x)Q(x)}{Q_1^2(x)} + \frac{P_2(x)Q(x)}{Q_2(x)}$$

Интегрирование тригонометрических функций

Универсальная замена

$$\int R(\cos x,\ \sin x)\,dx, \text{ где } R \text{ - рац. дробь}$$

Заменим $t = \tan\frac{x}{2}$.

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

1. $R(-\sin x,\ \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \implies t = \cos x$
2. $R(\sin, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \implies t = \sin x$
3. $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \implies t = \tan x$

Интеграл от дифференциального бинома

Дифференциального бинома

$x^m(a+bx^n)^p\,dx$ - дифф. бином. $a, b \neq 0$, $m, n, p \in \mathbb{Q}$

Теорема: интеграл от дифф. бинома

Теорема
Интеграл "берётся" только в трёх случаях:

1. $p \in \mathbb{Z}$. Тогда заменим $x = t^k$, k - общий знаменатель дробей m и n
2. $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z} \implies a + bx^n = t^s$, где s - знаменатель p
3. $p + \dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$

Определённый интеграл

Определение

Разбиение отрезка и интегральная сумма

Разбиение отрезка

Говорят, что точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ образуют разбиение отрезка $[a, b]$, если $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. τ - разбиение.
$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, \ldots, n$ - длины отрезков разбиения,
$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$ - произв. точки.

Интегральная сумма

Пусть f определена на $[a, b]$. Тогда
$S(f, \tau, \xi) = S_\tau = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ - интегральная сумма

Смысл интегральной суммы

Смысл интегральной суммы - сумма площадей прямоугольников, построенных под графиком на отрезках разбиения

Мелкость разбиения

$\lambda\tau = \max \Delta x_k$ называется мелкостью разбиения.

Интегрируемость по Риману

Интеграл по Риману

Пусть f определена на $[a, b]$. f интегрируема по Риману на $[a, b]$, если

$\exists I \in \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 : \forall \tau \forall \xi \ (\lambda\tau < \delta) \implies I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$. I - интеграл по Риману, или определённый интеграл

Пример

Возьмём функцию Дирихле. $D(x)$ не интегрируема на $[a, b]$

1. $\{\xi_k\} \subset I = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, f(\xi_k) = 0 \implies \forall \tau : S_\tau = 0$
2. $\{\xi_k\} \subset \mathbb{Q}, f(\xi_k) = 1, \forall \tau \ S_\tau = \sum 1 \cdot \Delta x_k = b - a$

Теорема о сумме интегралов

Теорема

Пусть f и g интегрируемы на $[a, b]$, и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда
$\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int\limits_a^b f\,dx + \beta \int\limits_a^b g\,dx$

Доказательство

$$S(\alpha f + \beta g, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha f(\xi_k) + \beta g(\xi_k)) \Delta \xi_k =$$

$$= \alpha \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k + \beta \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k) \Delta x_k$$

$$|S(\alpha f+\beta g,\tau,\xi)-(\alpha\int\limits_a^b f+\beta\int\limits_a^b g)| =$$

$$= |\alpha S(f,\tau,\xi)+\beta S(g,\tau,\xi)-(\alpha\int\limits_a^b f+\beta\int\limits_a^b g)| \le$$

$$\le |\alpha|\left|S(f,\tau,\xi)-\int\limits_a^b f\right|+|\beta|\left|S(g,\tau,\xi)-\int\limits_a^b g\right| < \frac{\epsilon}{|\alpha|+|\beta|}$$

- так как f - интегрируемо, поэтому

$\forall\epsilon>0\exists\delta:\forall\tau\forall\xi(\lambda\tau \implies |S(f,\tau,\xi)-\int\limits_a^b f|<\epsilon.$

Теорема *придумайте название*

Теорема

Если f и g интегрируемы на $[a,b]$ и $f\ge g$ на $[a,b]$, то$\int\limits_a^b f \ge \int\limits_a^b g$

Доказательство

$$\forall\tau,\forall\xi:S(f-g,\tau,\xi)=\sum_{k=1}^{n}(f(\xi_k)-g(\xi_k))\Delta x_k\ge 0$$

По прошлой теореме $f-g$ - интегрируемо, то есть

$$\exists\int\limits_a^b(f-g)$$

-- то есть

$$\forall\tau,\forall xi:S(f-g,\tau,\xi)\ge - \implies \int\limits_a^b(f-g)\ge 0$$

Доказать дома

Ребятки докажите за меня дома, на коллоке будет

По прошлой теореме $\int\limits_a^b (f-g) \geq 0$, то есть $\int\limits_a^b (f-g) = \int\limits_a^b f - \int\limits_a^b g \geq 0$

Теорема об ограниченности интегрируемой на отрезке функции

Теорема

Если f интегрируема по Риману на $[a, b]$, то она ограничена на $[a, b]$

Доказательство

От противного. Пусть f - не ограничена. Тогда есть разбиение τ, на одном из отрезков котого ($[x_{j-1}, x_j]$) функция не ограничена.

Тогда $S(f, \tau, \xi) = f(\xi_j)\Delta x_j + \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$

$$|S(f, \tau, \xi)| > |f(\xi_j)|\Delta x_j - |\sum_{k=j} f(\xi_k)\Delta x_k|$$

Зафиксируем ξ_k, $k \neq j$. Можно подобрать ξ_j так, что
$|f(\xi_j)| > N, N \in \mathbb{N}$
Пусть $C = |\sum\limits_{k=j} f(\xi_k)\Delta x_k|$. Тогда:

$$|S(f, \tau, \xi)| > |f(\xi_j)|\Delta x_j - |\sum_{k=j} f(\xi_k)\Delta x_k| > N \cdot x_k - C$$

Тогда $S\tau$ - ограничено. Противоречие.

Критерий интегрируемости. Сумма Дарбу

Сумма Дарбу

$M_k = \sup\limits_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$, $m_k = \inf\limits_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$

> Верхняя сумма Дарбу
>
> $\overline{S_\tau} = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$ называется верхней суммой Дарбу

> Нижняя сумма Дарбу

$\underline{S_\tau} = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$ называется нижней суммой Дарбу

Интегралы Дарбу

Интегралы Дарбу

Обозначение $I_* = \sup_\tau \underline{S_\tau}$ - нижний интеграл Дарбу, I^* - верхний интеграл Дарбу.

- $\underline{S_\tau} \le I_* \le I^* \le \overline{S_\tau}$

  Доказательство

$$\forall \tau_1 \tau_2 : \underline{S_{\tau_1}} \le \overline{S_{\tau_2}} \implies \sup_{\tau+1} S_{\tau_1} \le \overline{S_{\tau_2}} \implies I_* \le \inf_{\tau_2} = I^* *$$

Теорема о неравенствах, связанных с суммами Дарбу

Теорема

Если f опр. на $[a, b]$, то $\forall \tau_1, \tau_2 \quad \underline{S_{\tau_1}} \le \overline{S_{\tau_2}}$

Доказательство

$\tau = \tau_1 \cup \tau_2$

τ - измельчение τ_1, τ_2, то есть $\tau_1 \subseteq \tau$ и $\tau_2 \subseteq \tau$ и его мелкость меньше. Тогда $\overline{S_\tau} \le \overline{S_{\tau_2}}$, $\underline{S_{\tau_1}} \le \underline{S_\tau}$

$$\underline{S_{\tau_1}} \le \underline{S_\tau} \le \overline{S_\tau} \le \overline{S_{\tau_2}}$$

Следствие

$\forall \tau : \underline{S_\tau} \le I_* \le I^* \le \overline{S_\tau}$

Теорема: критерий интегрируемости

Теорема

Пусть f - ограничена на $[a, b]$. f интегрируема на $[a, b] \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall \tau (\lambda_\tau < \delta \implies \overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} \le \epsilon)$

Доказательство

1. $\Longrightarrow$

   Пусть f интегрируема на $[a, b]$. Тогда по определению интегрируемости, $\exists \delta: \forall \tau, \xi (\lambda_\tau < \delta \implies |S(f_1 \tau) - I| < \frac{\epsilon}{3})$

$$S(f, \tau, xi) < I + \frac{\epsilon}{3}$$

$$\sup_\xi S(f, \tau, \xi) \leq I + \frac{\epsilon}{3}$$

$$\sup_\xi S(f, \tau, \xi) = \overline{S_\tau}$$

   Чтобы доказать это, воспользуемся свойствами $\sup$ и $\inf$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n} \sup A_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \sup f(\xi_k) \Delta x_k = \overline{S_\tau} = M_k X_k$.

   $\sup(A_1 + \dots + A_n) = \sup \left\{ \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k \right\}$

$$I - \frac{\epsilon}{3} \leq \underline{S_\tau} \leq \overline{S_\tau} \leq I + \frac{\epsilon}{3}$$

   Хотим получить: $I - \frac{\epsilon}{3} < \underline{S_\tau} \leq \overline{S_\tau} < I + \frac{\epsilon}{3}$

   1. Рассморим левую часть неравенства из определения $I - \frac{\epsilon}{3} < S(f_1 \tau_1)$, и возьмём $\inf$ по $\xi \implies I - \frac{\epsilon}{3} \leq \inf_\xi S(f_1 \tau_1 \xi) = \inf_\xi S(f_1 \tau_1 \xi)$.

$$S_\tau = \sum_{j=1}^{n} \inf_{x \in [x_1, x_j]} f(x) \Delta x_j$$

$$\sum \inf_{x \in [x_1, x_j]} f(x) \Delta x_j = \inf_{(\xi_0, \dots, \xi_n)} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) \Delta x_j$$

$$S(f_1 \tau_1 \xi) < I + \frac{\epsilon}{3}$$

$$\overline{S_\tau} \leq I + \frac{\epsilon}{3} \implies I - \frac{\epsilon}{3} \leq \underline{S_\tau} \leq \overline{S_\tau} \leq I + \frac{\epsilon}{3}$$

2. $\Longleftarrow$

   $\underline{S_\tau} \leq I_* \leq I^* \leq \overline{S_\tau}$

Знаем, что $\forall\epsilon > 0 \exists\delta : \forall\tau(\lambda_\tau < \delta \implies \overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} < \epsilon)$

$$\underline{S_\tau} \leq S_tau \leq \overline{S_\tau}$$

$$|S_\tau - I_*| < \epsilon$$

- показано геометрически.
$\implies I_*$ - интеграл Римана (по определению интеграла).

Следствие

Если f - интеграл по Риману на $[a,b]$, то $I_* = I^* = \int\limits_a^b f(x)\,dx$

Теорема (без доказательства)

Теорема

f интегрируема на

$[a,b] \iff I_* = I^* * \$, при этом всегда \$ \int\limits_a^b f(x)\,dx = I_* = I^*$

Теорема: аддитивность интегралов

Теорема

$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$, где $a \leq c \leq b$

Доказательство

Покажем сначала равносильность существования этих интегралов.
Рассмотрим точку c и возьмём произвольное разбиение отреза $[a,b]$ τ. $c \in [x_{j-1}, x_j]$. Рассмотрим вспомогательное разбиение отрезков: $\tau' : a < x_1 < \cdots < x_j < c$, $\tau'' : c < x_j < \cdots < b$.

1. Пусть f интегрируема на $[a,b]$. Покажем, что $\exists \int\limits_a^c$ и $\exists \int\limits_c^b$

   f интегрируема на $[a,b] \implies \overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} < \epsilon$ для $\tau : \lambda_\tau < \delta(\epsilon)$

$$\overline{S_\tau} \geq \overline{S_{\tau'} + \overline{S_{\tau''}}}$$

   - очевидно, т.к. в одной из сумм справа $\sup f(x)$ может стать меньше

$$\underline{S_\tau} \leq S_{\tau'} + S_{\tau''}$$

- очевидно

$$\epsilon > \overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} \geq \overline{S_{\tau'}} + \overline{S_{\tau''}} = (\underline{S_{\tau'}} + \underline{S_{\tau''}}) = (\overline{S_{\tau'}} - \underline{S_{\tau'}}) + (\overline{S_{\tau''}} - \underline{S_{\tau''}})$$

2. Пусть f интегрируема на $[a,c]$ и $[c,b]$. Покажем, что $\exists \int\limits_a^b f$

$$\overline{S_\tau} = \sum_{k \neq j} + M_j \delta x_j,\ \underline{S_\tau} = \sum_{k \neq j} m_j \Delta x_j$$

(на j-м отрезке находится точка c)

Пусть f ограничена на $[a,b]$ числами B и $-B$.
Хотим: $\overline{S_\tau} \geq \overline{S\tau'} + \overline{S_{\tau''}}$

$$(?) \quad \overline{S_\tau} \leq \overline{S_{\tau'}} + \overline{S_{\tau''}} + \text{что-то}$$

$$\overline{S_\tau} - (\overline{S_{\tau'}} + \overline{S_{\tau''}}) = \left\{ \sum_{k \neq j} \text{- сокращается} \right\} =$$

$$= M_j \Delta x_j - (\sup f(x)(c - x_{j-1}) + \sup_{[c,x]} f(x)(x_j - c)) \leq$$

$$\leq B\Delta x_j + B(c - x_{j-1} + x_j - c) = 2B\Delta x_j \leq 2B\lambda_\tau$$

Аналогично $\overline{S_\tau} \geq S_{\tau'} + S_{\tau''} - 2B\lambda_\tau$

Таким образом, $\overline{S_\tau} \leq \overline{S_{\tau'}} + \overline{S_{\tau''}} + 2B\lambda_\tau$ и $\underline{S_\tau} \geq \underline{S_{\tau'}} + \underline{S_{\tau''}} - 2B\lambda_\tau$

$$\overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} \leq \overline{S_{\tau'}} + \overline{S_{\tau''}} + 2b\lambda_\tau - \underline{S_{\tau'}} - \underline{S_{\tau''}} + 2B\lambda_\tau =$$

$$= (\overline{S_{\tau'}} - \underline{S_{\tau'}}) + (\overline{S_{\tau''}} \underline{S_{\tau''}}) + 4B\lambda_\tau < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) : \forall \tau (\lambda_\tau < \delta \quad \overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} < \epsilon)$$

Возьмём $\delta = \min \left\{ \delta_1(\frac{\epsilon}{3}), \delta_2(\frac{\epsilon}{3}), \frac{\epsilon}{3 \cdot 4B} \right\}$

3. Теперь покажем, что $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$.

$$(?) \quad |\int\limits_a^b - (\int\limits_a^c + \int\limits_c^b)| < \epsilon$$

$$|\int\limits_a^b - \left(\int\limits_a^c + \int\limits_c^b\right) + (S_{\tau'} + S_{\tau''}) - (S_{\tau'} + S_{\tau''})| \leq$$

$$\leq |\int\limits_a^b -(S_{\tau'} + S_{\tau''})| + |\int\limits_a^c -S_{\tau'}| + |\int\limits_c^b -S_{\tau''}| < \epsilon$$

Утверждение о переопределении интегрируемой функции

Утверждение

Если изменить интегрируемую функцию f в конечном числе точек, значение интеграла не изменится

Доказательство

Докажем для одной точки. Пусть значение переопределяется в точке x_0. Заменим $f(x_0)$ на c. Рассмотрим $g(x) = \begin{cases} f(x), x \neq x_0 \\ f(x_0) - c, x = x_0 \end{cases}$

$f(x) + g(x)$ - новая функция. Покажем, что $\int\limits_a^b g(x) = 0$.

$\forall \tau \quad |S_\tau| \leq |c - f(x_0)| \cdot \lambda_\tau$. Но $\lambda_\tau \to 0 \implies \int\limits_a^b g(x) = 0$

Классы интегрируемых функций

Теорема об интегрируемости непрерывной функции

Теорема

Пусть f непрерына на отрезке $[a, b]$. Тогда f интегрируема на нём.

Доказательство

По теореме Кантора, непрерывная функция на отрезке равномерно непрерывна на нём. Тогда
$\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 : \forall x', x'' \in [a, b] : (|x' - x''| < \delta) \implies |f(x') - f(x'')| < \epsilon$

$$(?) \quad \forall \epsilon' > 0 \exists \delta'(\epsilon) : \forall \tau (\lambda_\tau < \delta' \implies \overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} < \epsilon)$$

Рассмотрим $\tau : \lambda_\tau < \delta$ - из определения равномерной непрерывности.

$$\overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \Delta xk$$

$\forall \xi', \xi'' \in [x_j, x_{j+H}] \quad |\xi' - \xi''| < \delta$, т.к. $\lambda_\tau < \delta$. Тогда
$|f(\xi') - f(\xi'')| < \epsilon$, что равносильно (доказательство позже)
$M_j - m_j < \epsilon$. Но тогда $\sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \Delta x_k \leq \epsilon \cdot \sum \Delta x_k = \epsilon(b-a)$

Доказательство равносильности.

1. $\Longleftarrow$
   $M_j - m_j < \epsilon$ - знаем. $f(\xi') - f(\xi'') \leq M_j - m_j \leq \epsilon$
2. $\Longrightarrow$
   $\forall \xi', \xi'' \quad |f(\xi') = f(\xi'')| < \epsilon$. $\sup_{\xi} (f(\xi') - f(\xi'')) = M_j - f(\xi'') \leq \epsilon$

$X\ Y\ Z($

Теорема об интегрируемости монотонной функкции

Теорема

Пусть f - монотонна на $[a.b]$. Тогда f - интегрируема на $[a,b]$.

Доказательство

Пусть б.о.о. f - возрастает.
$(?) \quad \forall \epsilon > 0 \exists \delta : \forall \tau (\lambda_\tau < \delta \implies \overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} < \epsilon)$

$$\overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} = \sum + k = 1^n (M_k - m_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) \Delta x_k$$

Пусть $\exists \delta : \lambda_\tau < \delta$. Тогда

$$\overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) \Delta x_k \leq \delta \cdot \sum_{1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) \leq \epsilon$$

Возьмём $\delta < \dfrac{\epsilon}{f(b) - f(a)}$

Следствия

1. Функции с конечным числом точек разрыва интегрируемы
2. Кусочно-монотонные функции интегрируемы

3. Можно рассмотреть интеграл, если функция не определена в конечном числе точек

Теорема об интегрируемости композиции функций

Теорема

Пусть f - интегрируема на $[a,b]$, и принимает значение на отрезке $[c,d]$. Пусть φ непрерывна на отрезке $[c,d]$. Тогда $\varphi(f(x))$ инт. на $[a,b]$.

Пример

Для композиции интегрируемых теорема не работает.

$\varphi = \begin{cases} 1, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}, f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, x = \dfrac{p}{q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

$D(x) = \varphi(f(x)) = \begin{cases} 0, x \notin \mathbb{Q} \\ 1, x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

Доказательство

φ равномерно непрерывна на $[c,d]$ (Кантор):

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta : \forall x', x'' \in [c,d] \quad |\varphi(x') - \varphi(x'')| < \delta \implies |\varphi(x') - \varphi(x')|$

$(?) \quad \overline{S_\tau(\varphi(f))} - \underline{S_\tau(\varphi(f))} < \epsilon$. Знаем, что f интегрируема. Тогда $(\lambda_\tau < \delta \implies \overline{S_\tau}(f) - \underline{S_\tau}(f) < \delta^2)$ - взли δ^2 как ϵ.

$$\overline{S_\tau}(\varphi(f)) - \underline{S_\tau}(\varphi(f)) = \sum_{k=1}^{n} (M_k(\varphi(f)) - m_k()\varphi(f))\Delta x_k$$

Поделим на два семейства индексов:

$$I = \{k : M_k(f) - m_k(f) - \delta\}$$

$$II = k : M_k(f) - m_k(f) \geq \delta$$

1. $k \in I$. Тогда воспользуемся леммой $(\sup - \inf)$,
   $f(\xi') - f(\xi'') < \delta; \quad \xi'$, по равномерно непрерывной $\varphi : \xi'' \in [x_{k-1}, x_k] \implies |\varphi(f(\xi')) - \varphi(f(\xi''))| < \epsilon \implies$ по этой же лемме $M_k(\varphi(f)) - m_k(\varphi(f)) < \epsilon$,
   $\sum\limits_{k \in I} (M_k(\varphi(f)) - m_k(\varphi(f)))\Delta x_k < \epsilon(b-a)$
2. $k \in II$. Рассмотрим $\overline{S_\tau}(f) - \underline{S_\tau}(f) < \delta^2$.
   $\sum\limits_{k \in II} (M_k(f) - m_k(f))\Delta x_k \leq \overline{S_\tau}(f) - \underline{S_\tau}(f) < \delta^2$. $\sum\limits_{k \in II} \Delta x_k < \delta^2$.

$\sum\limits_{k\in II}(M_k(\varphi(f))-m_k(\varphi(f)))\Delta x_k \le 2l\cdot \sum\limits_{k\in II}\Delta x_k \le 2l\cdot\epsilon$, где l - ограничение по т. Вейерштрасса.

Следствие

f инт. на $[a,b] \implies |f|, f^k, k>0$ - инт. на $f^k, k\le 0$ - интегриуруема, если $f=0$ в конечном числа точек.

Теорема об интегрируемости произведения функций

Теорема

Пуссть f, g - инт. на $[a,b]$. Тогда $f\cdot g$ инт. на $[a,b]$.

Доказательство

$(f-g)^2 = f^2 - 2fg + g^2$

1. Разность интегрируема
2. f^2, g^2 - по следствию предыдущей теоремы интегируемы.
   $f\cdot g = \dfrac{f^2-g^2-(f-g)^2}{2}$ - сумма интегрируемых функций.

Интеграл с переменным верхним пределом

> Интеграл с переменным верхним пределом
>
> Пусть f инт. на $[a,b]$. ($\implies \forall x\in(a,b)$ $\int\limits_a^x f(t)\,dt$ - существует.) Тогда $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$ - интеграл с переменным верхним пределом.

Теорема об ограниченности Φ

Теорема

Пусть f ограничена на $[a,b]$. Тогда Φ непрерывна и выполняется оценка $\exists C : |\Phi(x)-\Phi(y)|\le C\cdot|x-y|, \forall x,y\in[a,b]$. - липшицевость.

Доказательство

Заметим, что из липшицевости следует непрерывность Φ (по определению непрерывности). Докажем только липшицевость.

Рассмотрим $|\Phi(x)-\Phi(y)| = |\int\limits_a^x f(t)\,dt - \int\limits_a^y f(t)\,dt| = |\int\limits_y^x f(t)\,dt|$.

Рассмотрим $|\sum f(\xi_k)\Delta x)k| \le \sum |f(\xi_k)|\Delta x_k \implies |\int f| \le \int |f|$. Тогда выражение сверху можно оценить:

$$|\int\limits_y^x f(t)\,dt| \le \int\limits_x^y |f(t)|\,dt \le \{|f| \le B\} \le B \cdot \left|\int\limits_x^y dt\right| = B(x-y)$$

Теорема о дифференцируемости Φ

Теорема

Пусть f непрерывна на $[a,b]$. Тогда $\forall x_0 \in (a,b) \quad \Phi'(x_0) = f(x_0)$

Доказательство

$\Phi'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)}{h}$

$$\frac{\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)}{h} = \frac{x_0}{h} \pm \frac{f(x_0)}{h} \cdot h =$$

$$= \frac{\int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - f(x_0)\cdot h}{h} + f(x_0) = \frac{\int_{x_0}^{x_0+h}(f(t)-f(x_0))\,dt}{h} + f(x_0)$$

$$\left|\frac{|phi(x_0+h)-\Phi(x_0)}{h} - f(x_0)\right| = \left|\frac{\int\limits_{x_0}^{x_0+h}(f(t)-f(x_0))\,dt}{h}\right| \le$$

$$\le \frac{1}{h} \cdot \int\limits_{x_0}^{x_0+h} |f(t)-f(x_0)|\,dt \le \{|t-x_0| \le h\}$$

f непрерывна: $\forall \epsilon > 0 \exists \delta : (|t-x_0| < \delta \implies |f(t)-f(x_0)| < \epsilon))$. Возьмём произв. $epsilon$ и найдём по нему δ. Возьмём $h < \delta$:

$$\frac{1}{h} \cdot \int\limits_{x_0}^{x_0+h} |f(t)-f(x_0)|\,dt \le \{|t-x_0| \le h\} \le \frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} \epsilon\,dt = \epsilon$$

Теорема: формула Ньютона-Лейбница

Теорема

Пусть f интегрируема (в смысле определённого интеграла) на $[a, b]$ и имеет первообразную на этом отрезке на $[a, b]$ ($F'f$). Тогда $\int\limits_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$.

> **Tip**
>
> Первообразная может быть и у неинтегрируемой по Риману функции: $F(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x^2}), x \in (0, 1]$.
> $F'(x) = 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + x^2 \cdot \cos(\frac{1}{x^2}) \cdot \left(\frac{2}{x^3}\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x}$

Доказательство

Рассмотрим равномерное разбиение $[a, b]$ (на n равных частей), $\frac{b-a}{n}$ - длина отрезка разбиения. Рассмотрим разность

$$F(b) - F(a) = \sum_1^n (F(x_k) - F(x_{k-1})) =$$

$$= \left\{F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \text{ - т. Лагранжа}\right\} =$$

$$= \sum_1^n f(\xi_k)\Delta x_k =$$

$$= \sum_1^n f(\xi_k) \cdot \frac{(b-a)}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} (F(b) - F(a)) = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n f(\xi_k) \frac{(b-a)}{n} = \int\limits_a^b f(x)\, dx$$

Теорема - формула интегрирования по частям

Теорема

Пусть u и v - непрерывны и кусочно непрерывно дифференцируемы.

$\int uv'\, dx = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vu'\, dx$

Доказательство

По условиям теоремы, оба интеграла существуют как интегралы от кусочно-непрерывной функции.
$(uv)' = u'v + uv'$ - за исключением конечного числа точек.

$$\int\limits_a^b (uv)' = \int\limits_a^b u'v + \int\limits_a^b uv'$$

Теорема: замена переменной

Теорема

Пусть функция f непрерына на отрезке $[x_1, x_2]$, а функция g - непрерывно дифференцируема на $[t_1, t_2]$, и $g(t_1) = x_1$, $g(t_2) = x_2$ и $g(t) \in [x_1, x_2], t \in [t_1, t_2]$. Тогда $\int\limits_{t1}^{t2} f(g(t))g'(t)\,dt = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$.

Доказательство

По условию f - непрерывна. Тогда существует F - первообразная f - по теореме о дифференцируемости интеграла с переменным верхним пределом. (рассмотрим $|Phi(x) = \int\limits_{x_1}^{x} f(t)\,dt$ и $\Phi'(x) = f(x)$). Тогда по формуле Ньютона-Лейбница $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = F(x_2) - F(x_1)$.

Рассмотрим функцию $F(g(t))$. Тогда
$(F(g(t)))' = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t)$. Тогда $F(g(t))$ - первообразная для $f(g(t))g'(t)$. Тогда по формуле Ньютона-Лейбница
$\int\limits_{t_1}^{t_2} f(g(t))g'(t) = F(g(t_2)) - F(g(t_1)) = F(x_2) - F(x_1)$.

Теоремы о среднем

> **Среднее значение функции на отрезке**
>
> Предположим, что f интегрируема на $[a, b]$. Предположим, что нужно посчитать её среднее значение на отрезке.
> $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)}{n}$, где ξ_k - точки с отрезков разбиения. Домножим и поделим на $(b-a)$. Тогда под пределом получается

интегральная сумма для равномерного разбиения, делённая на $(b-a)$. Тогда получается $\dfrac{\int\limits_a^b f(x)\,dx}{b-a}$ - среднее значение функции на отрезке.

Среднее взвешенное функции на отрезке

Пусть $\varphi(x)$ - весовая функция, т.е. $\varphi(x) \geq 0$ на $[a, b]$ и интегрируема. Тогда $\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi(\xi_k) f(\xi_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n}} \cdot \dfrac{(b-a)\cdot b}{(b-a)\cdot n}$ $= \dfrac{\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx}{\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx}$ называется средним взвешенным функции на отрезке.

Замечание

Если f непрерывна, то f достигает $\min = m$ и $\max = M$, и по т. Коши о промежуточном значении
$\exists \mu \in [m, M] : \exists x_0 \in [a, b] : \mu = f(x_0)$

Первая теорема о среднем

Теорема

Пусть f интегрируема на $[a, b]$, φ - весовая функция (≥ 0 и интегрируема), и $m \leq f \leq M$ на $[a, b]$. Тогда $\exists \mu \in [m, M]$, $\mu \cdot \int\limits_a^b \varphi = \int\limits_a^b f \cdot \varphi$. (отношение вот этого на вот это это среднее взвешенное)

Доказательство

1. $\int\limits_a^b \varphi = 0$. Тогда $m\int\limits_a^b \leq \int\limits_a^b f\varphi \leq M\int\limits_a^b f\cdot\varphi \quad (*)$. Тогда $0=0$.
2. $\int\limits_a^b \varphi \neq 0$. В $(*)$ поделим на $\int\limits_a^b \varphi$. Тогда $m \leq \dfrac{\int_a^b f\cdot\phi}{\int\limits_a^b \varphi} \leq M$

   Пример

   Важно, чтобы φ сохраняла знак. Положим $f = x, \varphi = \operatorname{sign} x$ на отрезке $[-1, 1]$. Тогда $\int\limits_{-1}^{1} x\operatorname{sign} x\,dx = 1$. Применим теорему.

   $\int\limits_{-1}^{1} x\text{sign}x = \mu \int\limits_{-1}^{1} \operatorname{sign} x = 0$, поэтому теорема не работает.

Вторая теорема о среднем

Теорема

Пусть на $[a, b]$ функция f монотонно убывает (или возрастает), и φ интегрируема. Тогда

$\exists\xi in[a,b] : \int\limits_a^b f\cdot\varphi = f(a)\int\limits_a^\xi \varphi(x)\,dx + f(b)\int\limits_\xi^b \varphi(x)\,dx$

Без доказательства.

Геометрические приложения интеграла

Площадь под графиком

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t\in[t_1, t_2]$. Посчитаем $\int\limits_{x_1}^{x_2} y(x)$.

$\int\limits_{x_1}^{x_2} y(x)\,dx = \begin{Bmatrix} x = x(t) \\ dx = x'(t)\,dt \end{Bmatrix} = \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\,dt$.

1. x - непрерывно дифференцируема на $[t_1, t_2]$.
2. y - непрерывно дифференцируема на $[x_1, x_2]$
3. Для $x(t)$ существует обратная функция $t(x)$ на $[t_1, t_2]$. Тогда $y(t) = y(t(x)) = y(x)$

Длина дуги кривой

Кривая

Кривой называется непрерывное отображение отрезка $[\alpha, \beta]$ на плоскость.

Спрямляемая кривая

Кривая L называется спрямляемой, если множество длин вписанных в неё ломаных l ограничено сверху.

При добавлении к разбиению отрезка $[\alpha, \beta]$ новых точек ломаная становится длиннее, и её длина приближается к длине кривой. Тогда спрямляемость равносильна наличию длины у кривой.

Тогда длина ломаной равна сумме длин её отрезков. Тогда её можно посчитать по формуле $|l| = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k+1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k+1}))^2}$. Пусть x и y непрерывно дифференцируемы. Тогда x' и y' - скорости, (x', y') - вектор скорости. По теореме лагранжа: $|l| = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{(x'(\xi_k)\Delta t_k)^2 + (y'(\xi_k)\Delta t_k)^2} = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\eta_k))^2}\Delta t_k$. $|l| = \int\limits_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$.

Теорема о длине кривой

Теорема

Пусть $x(t)$ и $y(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[\alpha, \beta]$. Тогда кривая $L = (x(t), y(t))$ - спрямляемая, и $|L| = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$

Доказательство

$(*)\ |l| = \{\text{по т. Лагранжа}\} = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\eta_k))^2}\Delta t_k$. Пусть $\sigma = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\xi_k))^2}\Delta t_k$. Тогда σ - интегральная сумма.

Оценим $||L| - \sigma| = |\sum\limits_{k=1}^{n} (\sqrt{} - \sqrt{})\Delta t_k| \leq$ В каждом из выражений

координата x одинаковая. Тогда расстояние между ними равно разности координат y. $\{$по нер-ву труегольника$\}$
$\le \sum\limits_{k=1}^{n} (y'(\xi_k) - y'(\eta_k))\Delta t_k \le \sum\limits_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta t_k = \overline{S}(y', \tau) = \underline{S}(y', \tau) \le \varepsilon$
, тогда y' интегрируема, т.к. непрерывна.

Мы показали, что длина ломаной близка к интегральной сумме, то есть $||l| - \sigma| < \varepsilon$ при мелких τ. Тогда $(*) \le B \cdot \sum\limits_{1}^{n} \Delta t_k$. Поэтому кривая спрямляема. Тогда $|l| \approx \sigma$ \approx \int\limits_a^b \dots. (интеграл из формулировки теоремы). Тогда $|l| \approx |L|$ (опр. $\sup$).

Покажем теперь, что $||L| - \int_\alpha^\beta| \le |L| - |l||_{(1)} + ||l| - \int_\alpha^\beta|_{(2)}$ (первый интеграл из условия теоремы.). Оценим (1) и (2) по отдельности.
$(1)\, \forall \epsilon > 0 \exists l_e \quad |L| - |l_\epsilon| < \epsilon$. Если ломаная l меньше, чем l_ϵ, то мы вычтем больше $|L| - |l| < \epsilon$ю
$(2)\, ||l| - \sigma| + |\sigma - \int_\alpha^\beta| \le 2\varepsilon$ (выше показано, что первое слагаемое при мелких τ меньше ϵ и второе меньше ε по по определению S).
Тогда выполняется, что
$\forall \epsilon > 0 \quad ||L| - \int_\alpha^\beta| \le |L| - |l||_{(1)} + ||l| - \int_\alpha^\beta|_{(2)} < 3\varepsilon$. Но ε можно взять любой, а разность фиксирована, поэтому она равна нулю.

Численное интегрирование

Пусть известно k точек, в которых известны $f(x_k)$. Можно применить интерполяционный многочлен Лагранжа, построив многочлен $p(x)$. Тогда можно интегрировать $p(x)$.

> **Разделённая разность**
>
> Разделённой разностью первого порядка в узлах x_1, x_2 называется выражение $f(x_1, x_2) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Разделённой разностью k-го порядка в узлах $x_1, \dots, x_{k+1}$ называется $\dfrac{f(x_2, \dots, x_{k+1}) - f(x_1, \dots, x_k)}{x_{k+1} - x_1}$.

Пример: разделённая разность 2-го порядка. Возьмём узлы x_1, x_2, x_3
. $\dfrac{f(x_2, x_3) - f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1}$.

Интерполяционный многочлен в форме Ньютона

$$N(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + \cdots + f(x_0, \ldots, x_n)(x - x_0)\ldots($$

Методы прямоугольников (многочлен 1-й степени)

1. Метод левых прямоугольников - взять функции в левом конце отрезка, и посчитать площадь получившегося прямоугольника.
2. Метод средних прямоугольников - взять среднее значение левого и правого конца отрезков.
3. Метод правых прямоугольников.

Метод трапеций

Многочлен первой степени. Посчитать площадь трапеции, построенной на точках $x_1, x_n, p(x_1), p(x_n)$. Тогда формула многочлена - $N(x) = f(x_1) + f(x_1, x_2)(x - x_1)$ $= f(x_1) + \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$. Проинтегрируем от $a = x_1$ до $b = x_2$: $f(a)b + \dfrac{f(b) - f(a)}{2}(b + a) - f(b)a$

Несобственный интеграл

Несобственный интеграл первого рода

Несобственным интегралом первого рода называется $\lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Здесь предполагается, что $\forall b: f$ интегрируема на $[a, b]$

Abstract

Пусть $win\mathbb{R}$. Несобственным интегралом второго рода называется $\lim\limits_{b \to \omega} \int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^{\omega} f(x)\,dx$. Аналогично, $\forall b \in [a, \omega): f$ интегрируема на $[a, b]$.

Отличие от интеграла Римана

f может быть не ограничена в окрестности ω. Рассмотрим $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{a\to0}\int\limits_a^1 \dots = \lim\limits_{a\to0} 2\sqrt{x}\Big|_a^1$ = $\lim\limits_{a\to0} 2(1-\sqrt{a}) = 2$

Сходящийся несобственный интеграл

Говорят, что несобственный интеграл сходится, если $\exists \lim \in \mathbb{R}$.
Иначе - расходится=

Tip

Несобственный интеграл 2-го рода можно свести к 1-му роду.

Пусть $\omega \in \mathbb{R}$. Тогда $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx = \left\{ \begin{array}{r} t = \dfrac{1}{\omega - x} \\ dt = \dfrac{1}{(\omega-x)^2}\,dx = \dfrac{1}{t^2}\,dx \end{array} \right\}$

Теорема: критерий Коши сходимости несобственного интеграла

Теорема

$$\forall \epsilon > 0 \exists b_\epsilon : \forall b', b'' \quad (b_\epsilon < b' < b'' < \omega) \implies |\int\limits_{b'}^{b''} f(x)\,dx| < \epsilon$$

Без доказательства

Связь с другими интегралами

Связь интеграла Римана и несобственного интеграла

Если f интегрируема по Риману на $[a, b]$, то существует несобственный интеграл второго рода, и он совпадает с собственным (т.е. интегралом Римана).

Теорема: аддитивность по промежутку

Теорема

Пусть $a < c < \omega$. Тогда $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ и $\int\limits_c^\omega f(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно. Если они сходятся, то выполняется свойство аддитивности по промежутку, то есть $\int\limits_a^\omega = \int\limits_a^c + \int\limits_c^\omega$

Доказательство

$\forall b \in [a, \omega)$ имеем аддитивность: $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$. Очевидно, что эти интегралы либо сходятся, либо расходятся одновременно. Тогда $\int\limits_a^\omega$ сходится. Воспользуемся свойством пределов:
$$\lim_{b\to\omega}\int\limits_a^b f = \lim_{b\to\omega}\left(\int\limits_a^c + \int\limits_c^b\right) = \int\limits_a^c + \lim_{b\to\omega}\int\limits_c^b.$$

Теорема: линейность несобственного интеграла

Теорема

Пусть $\int\limits_a^\omega f$ и $\int\limits_a^\omega g$ сходятся. Тогда $\int\limits_a^\omega (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_a^\omega f + \beta \int\limits_a^\omega g$

Доказательство

Доказать дома))))))

Свойства интеграла Римана, которые не переносятся на несобственный интеграл

Интегрируемость произведения интегрируемых функций

$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ - сходится. В случае интеграла Римана - $\int\limits_a^b f\cdot g$ существует, если f и g интегрируемы. Тогда
$$\int\limits_0^1 \frac{1}{sqrtx}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int\limits_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big|_0^1 = +\infty.$$

Теорема о композиции функций

f - интегрируема по Риману $\implies$ $|f|$ интегрируема по Риману. Для несобственных интегралов это не выполняется. Пример: построим такую f, что $\int\limits_1^{+\infty} f$ сходится, а $\int\limits_1^{+\infty} |f|$ расходится. *Дома рассмотреть ступенчатые функции, то есть* $f = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $x \in [n, n+1]$. *Тогда* $\int\limits_1^{+\infty} f = \sum +1^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Рассмотрим числовую ось, отметим на ней числа $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$. Поделим отрезок $[1, 2]$ на две части: в левой части положим $f = 1$, в правой - $f = -1$. Отрезок $[2, 3]$ поделим на четыре части и положим функцию равной 1 и -1 попеременно. На отрезке $[3, 4]$ - 6 частей. Таким образом, на отрезке $[k, k+1]$ будет $2k$ равных частей. Покажем, что интеграл от такой функции - сходится, а интеграл от $|f|$ - расходится. Рассмотрим $b \in [1, +\infty)$ $\quad \int\limits_1^b f(x)\,dx = \int +1^k + \int\limits_k^b = 0 + \int\limits_k^b$. Предположим, что b принадлежит j-ому отрезку разбиения, где $1 \leq j \leq 2k$. Рассмотрим 2 случая:

1. Пусть j - нечётно. Тогда $\int\limits_k^b = \int\limits_k^u + \int\limits_u^b \leq \dfrac{1}{2k} \to 0$, где u - начало j-го отрезка.
2. Пусть j - чётно. Тогда $\int\limits_k^b = \int\limits_k^{j-1} + \int\limits_{j-1}^{j} + \int\limits_u^b \leq \dfrac{1}{2k} \to 0$, где u - начало j-го отрезка.

Признаки сходимости несобственных интегралов

Абсолютно сходящийся интеграл

Несобственный интеграл -- абсолютно сходящийся, если $\int\limits_a^{\omega} |f|$ сходится.

Теорема об абсолютной сходимости

Теорема

Если $\int\limits_a^{\omega} |f|$ сходится, то $\int\limits_a^{\omega}$ сходится.

Доказательство

$\int\limits_{b'}^{b''} |f| < \epsilon \implies |\int\limits_{b'}^{b''} f| < \epsilon$ - по критерию Коши.

Теорема: первый признак сравнения

Теорема

Пусть f и $g \geq 0$ на $[a, \omega)$, и $f(x) \leq g(x)$, $x \in [a, \omega)$. Тогда:

1. $\int\limits_a^\omega g$ сходится $\implies \int\limits_a^\omega f$ сходится
2. $\int\limits_a^\omega f$ расходится $\implies \int\limits_a^\omega g$ расходится

Доказательство

1. $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ - не убывает по верхнему переделу b, т.к. $f \geq 0$. Тогда по теореме о пределе монотонной функции, если интегралы $\int\limits_a^b f$ ограничены сверху, то $\exists \int\limits_a^\omega f$. Тогда $\int\limits_a^b f \leq \int\limits_a^b g \leq \int\limits_a^\omega g$
2. От противного. Пусть $\int\limits_a^\omega f$ - расходится и $\int\limits_a^\omega g$ сходится. Но тогда $\int\limits_a^\omega f$ сходится по первому пункту, т.е. получили противоречие.

Теорема: второй признак сравнения

Теорема

Пусть f и $g > 0$ на $[a, \omega)$ и $\exists c_1, c_2 > 0$ такие, что $c_1 \cdot g \leq f \leq c_2 \cdot g$ на $[a, \omega)$. Тогда $\int\limits_a^\omega f$ и $\int\limits_a^\omega g$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство

1. Предположим, что $\int\limits_a^w f$ сходится. Воспользуемся оценкой $c_1 \cdot g \leq f$. По первому признаку $\int\limits_a^\omega f$ сходится, поэтому $\int\limits_a^\omega g$

сходится
2. Пусть $\int f$ - расходится. Используем правую оценку и первый признак сравнения.
3. *дома аналогично*
4. *дома аналогично*

Теорема: признак сравнения в предельной форме

Теорема

Если $\lim\limits_{x\to\omega}\dfrac{f(x)}{g(x)} = C > 0$, то $\int\limits_a^\omega f$ и $\int\limits_a^\omega g$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство

Пусть $|\dfrac{f}{g} - C| < \epsilon$. Тогда $\epsilon = \dfrac{C}{2}$:

$$-\frac{C}{2} < \frac{f}{g} - C < \frac{C}{2}$$

$$\frac{C}{2} < \frac{f}{g} < \frac{3}{2}C$$

при этом $x \in O(\omega)$. Доказано по второму признаку сравнения.

Теорема: Формула Ньютона-Лейбница

Теорема

Пусть f имеет первообразную на промежутке $[a,\omega)$. Пусть $\int\limits_a^\omega$ существует. Тогда справедлива формула Ньютона-Лейбница: $\int\limits_a^\omega f = F\Big|_a^\omega = \lim\limits_{b\to\omega}(F(b) - F(a))$.

Доказательство

$\int\limits_a^b f = F\Big|_a^b$, поэтому применим обычную формулу Н-Л с пределом:

$$\lim_{b\to\omega}\int_a^b f = \lim_{b\to\omega} F\Big|_a^b$$

Теорема: интегрирование по частям

Теорема

Пусть u, v - непр. на $[a, \omega)$ и кусочно непрерывно дифференцируемы на $[a, \omega)$. U - первообразная функции u, а функция v - имеет непрерывную производную.
Предположим, что сходится интеграл:

$$\int\limits_a^\omega U(x)u'(x)dx$$

Также пусть $\exists \lim\limits_{b\to\omega} u(b)v(b)$
Тогда справедливо:

$$\int\limits_a^\omega u\,dv = uv\Big|_a^\omega - \int\limits_a^\omega v\,du \quad (*)$$

Доказательство

Согласно форме интегрирования по частям для собственных интегралов при каждом $\omega' < \omega$ справедливо равенство

$$\$\int\limits_a^{\omega'} udv = uv\Big|_a^{\omega'} - \int\limits_a^{\omega'} vdu$$

Переходя в котором к пределу при $\omega' \to \omega - 0$ переходм к предположению в теореме $(*)$.

Теорема: признак Дирихле

Теорема

Пусть f непрерывна на $[a, \omega)$ и её первообразная F ограничена на $[a, \omega)$. Пусть g - непрерывно дифференцируема на $[a, \omega)$ и $g \to 0$, когда $x \to \omega$

Доказательство

$\int\limits_a^\omega f \cdot g = \int\limits_a^\omega F' \cdot g = Fg\Big|_a^\omega - \int\limits_a^\omega F \cdot g'$. Нужно доказать, что $\int\limits_a^\omega F' \cdot g$ сходится. Рассмотрим $\lim\limits_{b\to\omega} F(a)g(b) - F(a)g(a)$. Этот предел равен нулю. Теперь рассмотрим второй интеграл $\int\limits_a^\omega F \cdot g'$. Пусть F

ограничена константой M. Тогда

$$-M\left|\int_a^\omega g'\right| \le \int_a^\omega F\cdot g' \le M\cdot\left|\int_a^\omega g'\right|$$

$$\int_a^\omega g' = g(\omega) - g(a) = \lim_{b\to\omega} g(b) = 0$$

$$-M\,|g(a)| \le \dots \le M\,|g(a)|$$

> **Кто-то все намешал**
>
> См. Телековского Теорему 9.10.8 (ст. 75) она вытекает из теоремы 9.10.7 (ст.74) которая вытекает из теоремы интегрирования по частям.   Певел

Теорема: признак Абеля

Теорема

Пусть f непр ан $[a,\omega)$ и $\int\limits_a^\omega$ сходится. Пусть g - непр. дифф. на $[a,\omega)$б монотонна и ограничена на этом же промежутке. Тогда $\int\limits_a^\omega f\cdot g$ сходится

Доказательство

$\int\limits_a^\omega f\cdot g$. f непр. $\implies$ есть первообразная F. Тогда $\int\limits_a^\omega = F(\omega) - F(a)$. Теперь нужно показать, что первообразная ограничена. По условию этот интеграл сходится, поэтому $F(\omega)$ - конечно. $\lim\limits_{b\to\omega} F(b)$. Заметим, что F - непр. как интеграл с переменным верхним пределом. Тогда на любом промежутке $[a,b]$ F - ограничена. (разбиваем промежуток $[a,\omega)$) на промежуток $[a,b]$ и $[b,\omega)$. На $[b,\omega]$ F ограничена по определению предела. Поэтому F огр. на $[a,\omega)$. Поэтому f удовлетворяет условию признака Дирихле. g - монотонна и ограничена $\implies$ $\exists \lim\limits_{b\to\omega} g(b)$ = C. Рассмотрим

$h(x) = g(x) - C$. Понятно, что h - непр.дифф. и $h \to 0$, когда $x \to \omega$, поэтому h тоже удовлетворяет условиям признака Дирихле.

Рассмотрим интеграл $\int\limits_a^\omega f \cdot g == \int\limits_a^\omega f(g-c) + \int\limits_a^\omega f \cdot c$ - сходится по признаку Дирихле $\implies$ данный интеграл сходится.

Ряды

Ряд

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ - ряд

Сходимость ряда

Сходимость ряда

$\sum\limits_{1}^{\infty} a_k$ сходится, если $\exists \lim\limits_{K \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{K} a_k$

Ряд Лейбница

$\sum (-1)^k a_k$, где $a_k \to 0, a_k \geq 0$. Этот ряд сходися.

Теорема: интегральный признак Коши-Маклорена

Теорема

Формулировка теоремы [правитъ | править код]

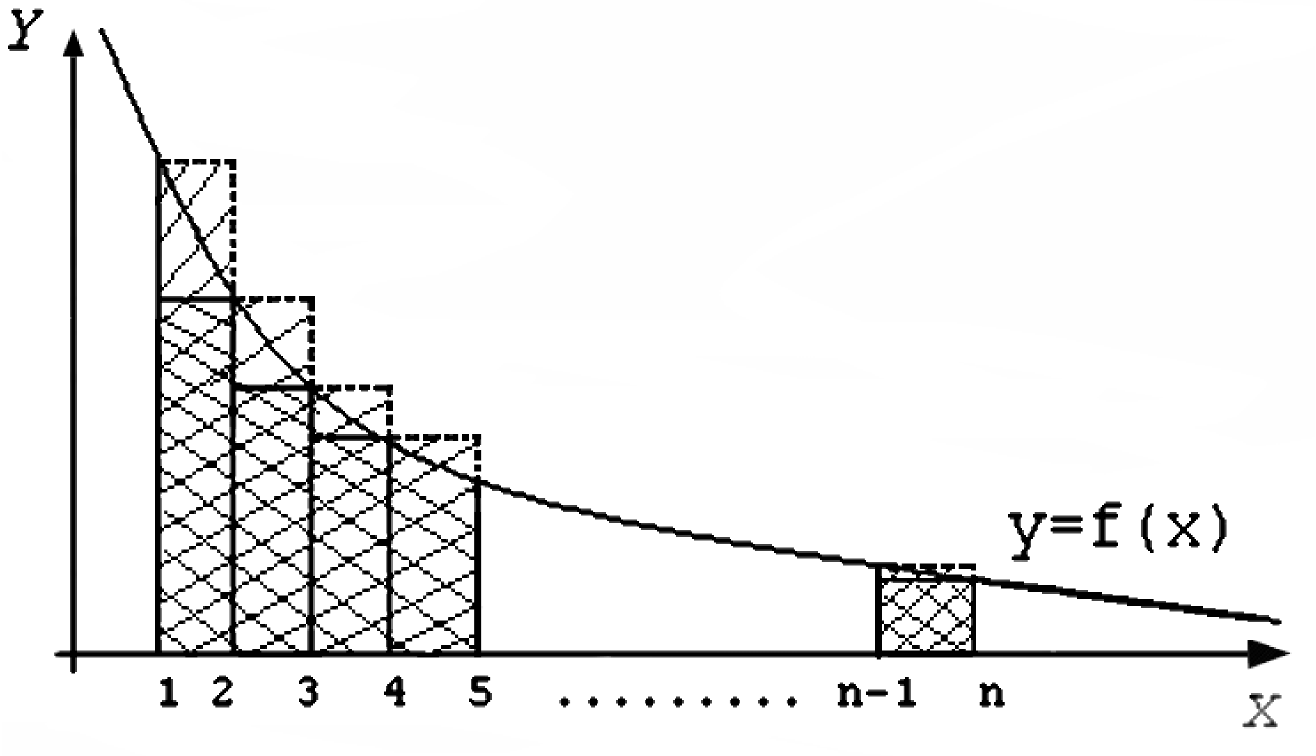
Пусть для функции $f(x)$ выполняется:

1. $\forall x \geqslant 1 \quad f(x) > 0$, т.е. функция принимает положительные значения на промежутке $[1, +\infty)$;
2. $\forall x_1, x_2 \geqslant 1 \qquad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$, т.е. функция является монотонно невозрастающей на $[1, +\infty)$;
3. $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = a_n$ (соответствие значения функции члену ряда).

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Пусть f - убывает к нулю на $[1,+\infty)$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} f(k)$ сходится или расходится одновременно с интегралом $\int\limits_1^{+\infty} f$.

Доказательство



Набросок доказательства [править | править код]

1. Построим на графике $f(x)$ ступенчатые фигуры как показано на рисунке.
2. Площадь большей фигуры равна $S_b = f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n-1)$.
3. Площадь меньшей фигуры равна $S_s = f(2) + f(3) + f(4) + \ldots + f(n)$.
4. Площадь криволинейной трапеции под графиком функции равна $S_{tr} = \int\limits_1^n f(x)\,dx$
5. Получаем $S_s \leqslant S_{tr} \leqslant S_b \ \Rightarrow \ S_n - a_1 \leqslant \int\limits_1^n f(x)\,dx \leqslant S_{n-1}$
6. Далее доказывается с помощью критерия сходимости знакоположительных рядов.

Полное доказательство [править | править код]

$\forall b > 1$ $f(x)$ монотонна на $[1, b]$, следовательно $\int\limits_1^b f(x)dx$ существует.

$\forall x \in [n, n+1]$ $f(n) \geqslant f(x) \geqslant f(n+1)$, следовательно

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \int\limits_n^{n+1} f(n)dx = f(n) \geqslant \int\limits_n^{n+1} f(x)dx \geqslant f(n+1).$$

Отсюда, если $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то

$$S_n - f(1) = f(2) + \ldots + f(n) \leqslant \int\limits_1^n f(x)\,dx \leqslant \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty.$$

Поэтому S_n ограничена. А так как она неубывающая, то она сходится.

Если $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_1^n f(x)\,dx = +\infty$, то

$S_n = f(1) + \ldots + f(n) \geqslant \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx \to +\infty$, значит ряд расходится.

Теорема доказана.

Лемма: преобразования Абеля

Лемма

$\sum\limits_{k=1}^n a_k b_k = S_n$. $B_j = \sum\limits_{k=1}^j b_k, j = 1, \ldots, n$. B_0 - выбранное число.

Доказательство

$$\sum_{k=1}^{N} = \left\{ \begin{matrix} b_k = B_k - B_{k-1} = \\ = \sum_{m=1}^{k} b_m - \sum_{m=1}^{k} b_m = b_k \end{matrix} \right\} = \sum_{k=1}^{n} a_k(B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \sum_{k=1}^{n} a_k B$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1} = \begin{matrix} m = k-1 \\ k = m+1 \end{matrix} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{m+1} B_m = \sum_{k=0}^{n-1} a_k B_k = a_1 B_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} B_k =$$

$$= a_n B_n - a_1 B_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k B_k - a_{k+1} B_k) = a_n B_n - a_1 B_0 - \sum_{k=1}^{n-1} B_k (a_{k+1} - a_k)$$

Преобразования Абеля - аналог интегрирования по частям для рядов. B_j - аналог первообразной для b. $\int\limits_1^i f(x) = \sum\limits_{m=1}^{j-1} b_m = B_{j-1}$, при $B_0 = 0$

$$a_{k+1} - a_k = \frac{a(k+1) - a(k)}{(k+1) - k}$$ - аналог производной

$a(n)B(n) - a(1)B(0) - \sum\limits_{k=1}^{n+1} B(k)a'(k)$ - аналог интеграла.

Теорема: признак Дирихле

Теорема

Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty}$ - ряд. Пусть:

1. a_k монотонна и стремится к нулю при $k \to \infty$
2. $\exists M : \forall N \; |B_N| = |\sum\limits_{k=1}^{N} b_k| \leq M$

   Тогда $\sum a_k b_k$ - сходится.

Доказательство

Запишем преобразование Абеля: $B_0 = 0$,

$$\sum_{k=1} a_k b_k = a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} B_k (a_{kH} - a_k)$$

$$|\sum_{k=1}^{n-1} B_k (a_{kH} - a_k)| \leq M \sum_{k=1}^{n} |a_{k+1-a_k}| =$$

$= \{a_k\text{- монотонны}\} = M|\sum\limits_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)| = \$ = M|a_n - a_1| \to M|a_1|$

- конечное число $\implies \sum\limits_{k=1}^{n-1} B_k(a_{kH} - a_k)$ - сходится.

$|\sum\limits_{1}^{n-1} B_k(a_{k+1} - a_k)| \le \sum\limits_{1}^{n-1} |B_k||a_{k+1} - a_k| \le C$ - сходится по монотонности последовательности

Теорема: признак Абеля

Теорема

Пусть a_k - ограничено и $\sum\limits_{1}^{\infty} b_k$ сходится. Тогда $\sum\limits_{1}^{\infty} a_k b_k$ сходится.

Доказательство

a_k - монотонна и ограничена $\implies$ по теореме о монотонной последовательности $\exists a = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.

$h_k = a_k - a \to 0, k \to \infty$ - монотонна.

$\sum a_k b_k = \sum (h_k + a) b_k = \sum h_k b_k + a \sum b_k$. Первый ряд сходится по признаку Дирихле, второй - по условию.

Перестановка слагаемых в рядах

> **Абсолютно сходящийся ряд**
>
> $\sum a_k$ - абс. сходящийся, если $\sum |a_k|$ сходится.

> **Условно сходящийся ряд**
>
> $\sum a_k$ - сходится условно, если он сходится, но не абсолютно.

Рассмотрим ряд $\sum a_k$. Пусть $\sum a_k^*$ - перестановка этого ряда.

Теорема

Теорема

Пусть $\sum a_k$ сходится абсолютно. Тогда любая перестановка $\sum a_k^*$ сходится к той же сумме.

Доказательство
Дано, что $\sum |a_k|$ сходится. Рассмотрим частичную сумму $\sum\limits_{1}^{n} |a_k^*| \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$, так как a_k^* - подмножество a_k. Но тогда по теореме о монотонной последовательности ряд из модулей $\sum |a_k|$ сходится, то есть $\sum a_k^*$ сходится.

Пусть S - сумма исходного ряда $\sum\limits_{1}^{\infty} a_k$, S_n - его частичная сумма, S_n^* - частичная сумма этого ряда с перестановками.

Так как S - сходится, то $\exists N : \forall n > N : |S - \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k| < \frac{\epsilon}{2}$, то есть $|S - S_n| < \frac{\epsilon}{2}$. Но $\exists M : \{a_1, \ldots, a_N\} \subseteq \{a_1^*, \ldots, a_M^*\}$.
$|S_M^* - S_N| = |\sum\limits_{k=1}^{M} a_k^* - \sum\limits_{k=1}^{N} a_k| \leq \sum\limits_{N+1}^{\infty} |a_k| < \frac{\epsilon}{2}$

лемааа

Лемма
Пусть $\sum a_k$ сходится условно. Тогда пусть $a_k^+ = \begin{cases} a_k, \ a_k \geq 0 \\ 0, \ a_k < 0 \end{cases}$ и $a_k^- = \begin{cases} a_k, \ a_k \leq 0 \\ 0, a_k > 0 \end{cases}$
Тогда $\sum a_k^+$ и $\sum a_k^-$ расходятся

Доказательство
$a_k = a_k^+ + a_k^-$. От противного, пусть $\sum a_k^+$ сходится. Но тогда $\sum a_k^-$ сходится. Но тогда $\sum |a_k|$ сходится. Противоречние

Теорема Римана

Теорема

Доказательство
Фиксируем произвольное A. Уберём из a_k^+ и a_k^- нулевые элементы. Тогда $\alpha_k > 0 \ (a_k^+) - \beta_k \ (a_k^-) \neq 0$. Тогда $\sum \alpha_k \to \infty$ и $\sum -\beta_k \to -\infty$,и $\alpha_k \to +\infty$,и $-\beta_k \to 0$.

1. Берём какие-то первые α_k. Останавливаемся тогда, когда $\sum\limits_1^{N_1} \alpha_k > A$.
2. Берём первые $-\beta_k$. Останавливаемся тогда, когда в сумме $> A$.

Функциональные последовательности и ряды

Функциональная последовательность

Функциональная последовательность

Пусть каждому $n \in \mathbb{N}$ сопоставлена некоторая функция $f_n(x)$, определённая на множестве X. Тогда $f_n(x)$ - функциональная последовательность на множестве X.

Примеры

- $f_n(x) = x^n,\ X = [0, +\infty)$
- $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k+x},\ X = (-1, +\infty)$

Если фиксировать $x = x_0$ и менять n, то получается обычная числовая последовательность. Если фиксировать n_0 и менять x, то получится функция $f_{n_0}(x)$

Равномерная и поточечная сходимость

Поточечная сходимость

Пусть $\forall x_0 \in X$ числовая последовательность $f_n(x_0)$ сходится. Обозначим этот предел как $f(x_0)$. Получаем функцию f, определённую на X:

$$f(x_0) := \lim_{n \to +\infty} f_n(x_0)$$

Тогда последовательность $f_n(x)$ сходится поточечно к функции $f(x)$ на X. Таким образом, это определение представляет собой:

$$\forall x \in X\, \forall \epsilon > 0\, \exists N = N(\epsilon, x) : \forall n > N\, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Равномерная сходимость

Последовательность $f_n(x)$ равномерно сходится на X к функции f, если

$$\forall \epsilon > 0\, \exists N = N(\epsilon) : \forall x \in X\, \forall n > N\, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

. Обозначение: $f_n(x) \rightrightarrows f(x),\ x \in X$.

Восклицательный знак

Очевидно, что поточечная сходимость следует из равномерной. Поэтому при исследовании функциональной последовательности на равномерную сходимость единственный возможный равномерный предел - это поточечный предел.

👊

Используя неравенство треугольника, нетрудно показать, что если $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ и $g_n(x) \rightrightarrows g(x)$ на X, то $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\alpha f_n(x) + \beta g_n(x) \rightrightarrows \alpha f(x) + \beta g(x),\ x \in X$$

Теорема: критерий равномерной сходимости

Теорема

$f_n(x) \rightrightarrows f(x),\ x \in X \iff$
$\iff \forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \forall n > N \sup\limits_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, то есть
$\lim\limits_{n \to +\infty} \sup\limits_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$

Доказательство

$\implies$. Знаем, что
$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \forall x \in X \forall n > N |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. Так как это

неравенство выполняется для всех x, то оно выполняется и для x, при котором достигается $\sup|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

$\Longleftarrow$. Имеем, что $\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \forall n > N \sup\limits_{x \in X}|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. Если $\sup\limits_{x \in X}|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, то очевидно, и $\forall x \in X\, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$

Теорема: критерий Коши равномерной сходимости

Теорема

$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $x \in X \iff$
$\iff \forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \forall x \in X\, \forall n, m > N\, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$

Доказательство

$\Longrightarrow$. Знаем, что
$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) :\ \forall x \in X\, \forall n > N\, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. По неравенству треугольница,
$|f_n(x) - f_m(x)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f(x) - f_m(x)|$.

Отсюда всё стандартно выводится. Мы уже такое делали, проверьте сами 🙂

$\Longleftarrow$. Имеем

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N = N(\epsilon) : \forall x \in X\, \forall n, m > N\, |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

Зафиксируем точку x. Тогда по критерию Коши для предела функции в каждой точке существует $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$. Возьмём $\epsilon = \dfrac{\epsilon'}{2}$
Знаем, что

$$\forall x\ \in X :\ \exists n, m > N\, |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon'}{2}$$

Зафиксируем $n > N$. Тогда

$$\forall m > N :\ \forall x \in X\, |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon'}{2}$$

Перейдём к пределу по m:

$$\forall x \in X \lim_{m \to +\infty} |f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x)| \le \frac{\epsilon'}{2} < \epsilon'$$

Тогда получим:

$$\forall \epsilon' > 0 \, \exists N = N(\epsilon') : \forall x \in X \, \forall n > N \;\; |f_n(x) - f(x)| < \epsilon'$$

Функциональный ряд

Функциональный ряд

Ряд вида $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k(x)$ называется функциональным рядом. При фиксированных x это обычный числовой ряд.

Сходимость функционального ряда

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k(x)$ сходится поточечно/равномерно на множестве X, если на нём поточечно/равномерно сходится последовательность его частичных сумм $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)$.

Признаки равномерной сходимости функциональных рядов

Теорема: признак Вейерштрасса

Теорема

Пусть на множестве X заданы ряды $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k(x)$ и $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k(x)$. При этом $\forall x \in X$ и $k \in \mathbb{N}$:

$$|a_k(x)| \leq b_k(x)$$

Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k(x)$ равномерно сходится на X, то $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k(x)$ тоже равномерно сходится на X.

Доказательство

По критерию Коши:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \forall x \in X \; \forall n > m > N : \sum_{k=m+1}^{n} b_k(x) < \epsilon.$$

Тогда имеем:

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} b_k(x) < \epsilon$$

Таким образом, уловие Коши выполняется и для $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k(x)$. Теорема доказана.

Теорема: признак Дирихле

Теорема

Если

- При каждом фиксированном $x_0 \in X$ числовая последовательность $a_k(x_0)$ монотонна
- Функциональная последовательность $a_k(x)$ равномерно сходится к $f \equiv 0$ на X
- Частичные суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x)$ равномерно ограничены на X, то есть

$$\exists M : \forall n \in \mathbb{N} \; \forall x \in X \; \left| \sum_{k=1}^{n} b_k(x) \right| \leq M$$

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k(x) b_k(x)$ равномерно сходится на X.

Доказательство

Хотим получить оценку вида $\sum\limits_{k=m+1}^{n} a_k(x) b_k(x) < \epsilon$, чтобы сослаться на критерий Коши. Применяя те же рассуждения, что и в преобразовании Абеля получаем

$$\sum_{k=m+1} a_k(x) b_k(x) = a_n(x) V_n(x) - \sum_{k=m+1} V_k(x)(a_{k+1}(x) - a_k(x))$$

Здесь $V_j(x) = \sum\limits_{k=m+1}^{j} b_k(x)$, $V_m(x) := 0$. Всё аналогично обычнтому преобразованию Абеля, где сдвинут нижний индекс.

По условию равномерной ограниченности:

$$|V_j(x)| = \left|\sum_{k=m+1}^{j} b_k(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{j} b_k(x) - \sum_{k=1}^{m} b_k(x)\right| \leq$$

$$\leq \left|\sum_{k=1}^{j} b_k(x)\right| + \left|\sum_{k=1}^{m} b_k(x)\right| \leq 2M$$

Получаем

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k(x) b_k(x)\right| = \left|a_n(x)V_n(x) - \sum_{k=m+1}^{n-1} V_k(x)(a_{k+1}(x) - a_k(x))\right| \leq$$

$$\leq |a_n(x)V_n(x)| + \left|\sum_{k=m+1}^{n-1} V_k(x)(a_{k+1}(x) - a_k(x))\right| \leq$$

$$\leq 2M|a_n(x)| + 2M \sum_{k=m+1}^{n-1} |a_{k+1}(x) - a_k(x)| \quad (🦋)$$

По условию, $a_n(x) \rightrightarrows 0$, то есть при больших n и m для всех $x \in X$

$$|a_n(x)| < \epsilon,$$

$$|a_{m+1}(x)| < \epsilon \quad (🌷)$$

Дано, что $\forall x_0 \in X$ числовая последовательность $a_n(x_0)$ монотонна. Значит,

$$\sum_{k=m+1}^{n-1} |a_{k+1}(x) - a_k(x)| = \left|\sum_{k=m+1}^{n-1} (a_{k+1}(x) - a_k(x))\right| =$$

$$= |a_n(x) - a_{m+1}(x)| \quad (🐌)$$

Подставляя (🌷) и (🐌) в (🦋) и используя неравенство треугольника, получаем

$$(🦋) < 2M\epsilon + 2M|a_n(x) - a_{m+1}(x)| \leq 2M\epsilon + 2M(|a_n(x)| + |a_{m+1}(x)|)$$

Продолжаем оценку, снова применяя (🌷):

$$(🦋) = \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k(x) b_k(x)\right| < 2M\epsilon + 2M(|a_n(x)| + |a_{m+1}(x)|) <$$

$$< 2M\epsilon + 2M(\epsilon + \epsilon) = 6M\epsilon$$

Теорема: признак Абеля

Теорема

Если

- Функциональная последовательность $a_n(x)$ равномерно ограничена на X, то есть

$$\exists M : \forall n \in \mathbb{N}\, \forall x \in X \, |a_n(x)| \leq M$$

- При каждом фиксированном $x_0 \in X$ числовая последовательность $a_k(x_0)$ монотонна
- Ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k(x)$ равномерно сходится на X

  Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k(x) b_k(x)$ равномерно сходится на X.

Доказательство

Используем версию преобразования Абеля из признака Дирихле.

Используя неравенство треугольника и равномерную ограниченность $a_k(x)$, получаем:

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k(x) b_k(x) \right| \leq |a_n(x) V_n(x)| + \left| \sum_{k=m+1}^{n-1} V_k(x)(a_{k+1}(x) - a_k(x)) \right| \leq$$

$$\leq M|V_n(x)| + \sum_{k=m+1}^{n-1} |V_k(x)||a_{k+1}(x) - a_k| \quad (🍙)$$

Вспомним, что

$$V_k(x) = \sum_{j=m+1}^{k} b_j(x)$$

Знаем, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k(x)$ равномерно сходится на X, значит, для больших m, по критерию Коши,

$$|V_k(x)| < \epsilon,\ k > m + 1$$

Подставим это в оценку:

$$(\text{🍙}) \leq M\epsilon + \epsilon \sum_{k=m+1}^{n-1} |a_{k+1}(x) - a_k(x)|$$

Используя монотонность и равномерную ограниченность $a_k(x)$, получаем, что

$$\sum_{k=m+1}^{n-1} |a_{k+1}(x) - a_k(x)| = \left| \sum_{k=m+1}^{n-1} (a_{k+1}(x) - a_k(x)) \right| =$$

$$= |a_n(x) - a_{m+1}(x)| \leq |a_n(x)| + |a_{m+1}(x)| \leq 2M$$

Но тогда

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k(x) b_k(x) \right| = (\text{🍙}) \leq M\epsilon + 2M\epsilon = 3M\epsilon$$

Теорема: равномерная сходимость сохраняет непрерывность функции

Теорема

- $f_n(x)$ определены в некоторой окрестности x_0.
- $f_n(x)$ непрерывны в x_0
- $f_n(x) \rightrightarrows f$ в $O(x_0)$
  Тогда f непрерывна в x_0

Доказательство

Хотим показать, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) \pm f_n(x) \pm f_n(x_0)| \leq$$

$$\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| < 3\epsilon$$

Следствие 1

В условиях теоремы можно переставлять пределы местами, то есть $\lim\limits_{n \to \infty} \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$

Доказательство следствия 1

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Следствие 2: теорема о непрерывности функциональных рядов

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$

- $\forall k : a_k(x)$ определена в $O(x_0)$
- $\forall k : a_k(x)$ непр. в x_0
- $\sum a_k \rightrightarrows S(x)$

  Тогда $S(x)$ непрерывна и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x) = \sum\limits_{1}^{\infty} \lim\limits_{x \to x_0} a_k(x)$

Доказательство следствия 2

- S_n(x) = \sum\limits_1^n a_k(x)$
- $\forall n : \sum\limits_{1}^{n} a_k(x)$ определена в $O(x_0)$
- $\forall n : \sum\limits_{1}^{n} a_k(x)$ непрерывна в x_0

  Применяем теорему.

Пример

Последовательность всюду разрывных функций f_n равномерно сходится к непрерывной f.

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \rightrightarrows f \equiv 0$$

$\zeta(x) = \sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ - дзета-функция Римана

Теорема о *кто*

Теорема

Предположим, что f_n непрерывны на $[a, b]$ и последовательность $f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$. Тогда $\int\limits_a^x f_n(t)\,dt \rightrightarrows \int\limits_a^x f(t)\,dt$

Доказательство

$\forall n : f_n$ непрерывна на $[a, b]$ \implies f_n интегрируема

$$(?) \qquad \sup_{x\in[a,b]} \left| \int\limits_a^x f_n(t)\,dt - \int\limits_a^x f(t)\,dt \right| \to 0 \quad (?)$$

$$\sup_{x\in[a,b]} \left| \int\limits_a^x (f_n(t) - f(t))\,dt \right| \le \sup_{[a,b]} \int\limits_a^x |f_n(t) - f(t)|\,dt \le$$

$$\le \left\{ \begin{matrix} f_n \rightrightarrows f,\ [a,b] \\ \forall t \in [a,b]\ |f_n(t) - f(t)| < \epsilon \end{matrix} \right\} \le \epsilon(b-a)$$

Функция f интегрируема, так как f - непрерывна.

Следствие 1

В условиях теоремы верно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f(t)\,dt = \int\limits_a^b \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)\,dt$

Следствие 2

$\sum\limits_1^\infty a_k(x)$

- $a_k(x)$ непрерывна на $[a,b]$
- $\sum a_k(x) \rightrightarrows S(x)$ на $[a,b]$

  Тогда $S(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и $\int\limits_a^b \sum\limits_1^\infty a_k(x)\,dx = \sum\limits_1^\infty \int\limits_a^b a_k(x)\,dx$

Пример, когда нельзя поменять бесконечную сумму и интеграл местами

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^3x,\ 0 \le x \le \dfrac{1}{2n} \\ 2n^2 - 2n^3x,\ \dfrac{1}{2n} \le x \le \dfrac{1}{n} \\ 0,\ \dfrac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases} \to f \equiv 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = 0$$

В этом случае отсутствует условие равномерной сходимости, нужное для теоремы.

Теорема о диффференцировании функциональных последовательностей

Теорема

- $\exists x_0 \in [a, b] : f_n(x_0)$ сходится
- $f_n(x)$ - непрерывно дифференцируемы на $[a, b]$
- $f_n'(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ на $[a, b]$
  Тогда $f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$ и $f'(x) = \varphi(x)$, то есть
  $(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$

Доказательство

f_n и f_n' - непрерывны, поэтому можно применить формулу Ньютона-Лейбница:

$$f_n(x) - f_n(x_0) = \int\limits_{x_0}^{c} f_n'(t)\,dt \rightrightarrows \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt \quad (\dagger)$$

Применим предыдущую теорему:

$$\int\limits_{x_0}^{c} f_n'(t)\,dt \rightrightarrows \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt$$

$f_n(x_0)$ сходится $\implies$ $f_n(x_0) \rightrightarrows$ (так как от x не зависит)

$$f_n(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f_n' + f_n(x_0)$$

Сумма равномерно сходящихся равномерно сходится (по неравенству треугольника).

Таким образом, $f_n \rightrightarrows f$. Покажем, что $f'(x) = \varphi$.

В $(\dagger)$ в левой части перейдём к $\lim\limits_{n\to\infty}$. $f(x) - f(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt$, так как равномерный предел равен поточечному. Теперь можно дифференцировать:

$$f'(x) = \varphi(x)$$

Степенные ряды

Степенной ряд

Ряд вида $\sum\limits_{1}^{\infty} a_k(x-x_0)^k,\ a_k \in \mathbb{R}$ - степенной ряд с центром в точке x_0.

Ало

Можно сделать замену $t = x - x_0$, поэтому б.о.о. будем рассматривать ряди $\sum a_k x^k$

Теорема: первая теорема Абеля

Теорема

1. Пусть $\sum a_k \overline{X}^k$ сходится, $\overline{X}^k \neq 0$. Тогда $\sum a_k x^k \rightrightarrows$ на любом $[-q, q]$, где $|q| < |\overline{x}|$, и он абсолютно сходится.
2. Пусть $\sum a_k \overline{X}^k$ расходится. Тогда $\forall x : |x| > |\overline{x}| \implies \sum a_k x^k$ сходится

Доказательство

1. $$|a_k X^k| = \frac{|a_k \overline{X}^k| \cdot |x^k|}{|\overline{x}^k|} \leq \left\{ \begin{matrix} |a_k \overline{x}| \leq M \\ \text{т.к.} \sum a_k \overline{x}^k \text{ сходится} \end{matrix} \right\}$$
$$\leq M \left| \frac{x}{\overline{x}} \right| \leq M \left(\frac{q}{|\overline{x}|} \right)^k - \text{сходится}$$
2. От противного. $\exists x : |x| > |\bar{x}| : \sum a_k x^k$ сх. По п.1 $\sum a_k \bar{x}$ сходится. Противоречие.

Радиус сходимости

Радиус сходимости степенного ряда

$R := \sup\left\{|x| : \sum a_k x^k \text{ сходится}\right\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ - радиус сходимости степенного ряда

Теорема: следствие из 1-й теоремы Абеля

Теорема

1. $\sum a_k x^k$ абсолютно сходится на $(-R, R)$
2. $\sum a_k x^k \rightrightarrows$ на $\forall [-q, q] \subset (-R, R)$
3. $S(x)$ непрерывна на $(-R, R)$
4. S интегрируема на $[a, b] \subset (-R, R)$

Доказательство

1. $R = \sup \ldots$.
2. *сидел прогал и потерял..*

Теорема: вторая теорема Абеля

Теорема

Пусть $\sum a_k x^k$ сходится в R $(-R)$. Тогда $\sum a_k x^k \rightrightarrows$ на $[0, \mathbb{R}]$ $([-\mathbb{R}, 0])$.

Доказательство

Признак Абеля. Пусть б.о.о. сходится в $\mathbb{R}$. Тогда $a_k x^k = a_k \mathbb{R} \cdot \dfrac{x^k}{\mathbb{R}^k}$

Лемма о верхнем пределе

Лемма

Пусть $\{u_k\}$ - произвольная последовательность b $\{v_k\} : \exists v := \lim\limits_{k \to \infty} v_k \neq 0$. Тогда $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} w_k = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} u_k v_k = v \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} u_k$.

Доказательство

$\exists k_e : u_{k_e} \to \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} u_k$ - по свойству $\overline{\lim}$

Возьмём подпоследовательность с индексами k_e. Тогда

$$w_{k_e} = u_{k_e} \cdot v_{k_e} \to v \overline{\lim_{k\to\infty}} u_k \leq \overline{\lim_{k\to\infty}} w_k$$

Возьмём k_t такую, что $w_{k_t} \to \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} u_k$. Тогда $w_{k_t} = u_{k_t} v_{k_t}$. Тогда

$$u_{k_t} = \frac{w_{k_t}}{v_{k_t}} \to \frac{\overline{\lim} w_k}{v} \le \overline{\lim} u_k$$

Домножим на v:

$$\overline{\lim} w_k \le v \overline{\lim} u_k$$

Мы получили две оценки с разных сторон.

Лемма: обобщённый признак Коши сходимости числового ряда

Лемма

$\sum\limits_1^\infty p_k$, $\bar{p} = \overline{\lim k \to \infty} \sqrt[k]{|p_k|}$

Если

- $\bar{p} < 1 \implies$ ряд сходится
- $\bar{p} > 1 \implies$ ряд расходится

Доказательство

$\bar{p} < 1$. $\bar{p} = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|p_k|} \implies \exists N : \forall k > N \sqrt[k]{|p_k|} < q$. От противного.

Пусть $\forall N \exists k > N : \sqrt[k]{|p_k|} \ge q$

- если $\sqrt[k]{|p_k|}$ не ограничена $\implies$ можно выделить подпоследовательность с верхним пределом $= \infty$
- Если $\sqrt[k]{|p_k|} \ge q \implies$ по теореме Больцано-Вейершнтасса $\exists \sqrt[ke]{|p_k|} \to b \ge q$, то есть расходится.

$\bar{p} = \overline{\lim} \implies p_{k_t} \to \bar{p}$. Тогда $\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) : \forall k_t > N \quad |\bar{p} - p_{k_t}| < \epsilon$.
Тогда $|p_k| < q^k$, и q^k - геом.прогрессия. Поэтому $|p_k|$ сходится.

$\bar{p} > 1$. Возьмём $\bar{\epsilon} = \bar{p} - 1$. Тогда

$$\bar{p} - |p_{k_t}| \le |\bar{p} - p_{k_t}| < \bar{p} - 1$$

Перенесём $|p_{k_t}|$ вправо

$$1 \le |p_{k_t}|$$

Тогда ряд расходится по необходимому условию сходимости.

Теорема Коши-Адамара

Теорема

$R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|a_k|}}$, $\sum a_k x^k$

Доказательство теоремы

- $|x| < R$. Покажем, что при таких x ряд сходится. $p_k = a_k x^k$. Предположим, что $x \neq 0$, так как в нуле ряд всегда сходится. Тогда

$$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|p_k|} = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|a_k||x^k|} =$$

$$= \{\text{лемма о верхнем переделе}\} = |x| \cdot \overline{\lim}\sqrt[k]{|a_k|} <$$

$$< \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[k]{|a_k|}} \cdot \overline{\lim}\sqrt[k]{|a_k|} = 1$$

  Тогда по признаку Коши ряд сходится.
- $|x| \geq \dfrac{1}{\overline{\lim}\sqrt[k]{|a_k|}}$. Делаем то же самое, получаем оценку $> 1 \implies$ ряд расходится.
- $\dfrac{1}{\overline{\lim}\sqrt[k]{|a_k|}}$ - тогда $\overline{\lim}\sqrt[k]{a_k|x^k|} = |x| \cdot 0 < 1$ - ряд сходится.
- $\overline{\lim}\sqrt[k]{|a_k|} = +\infty \implies$ ряд расходится.

Теорема: бесконечная дифференцируемость степенного ряда

Теорема

Рассмотрим $\sum a_k x^k = S(x)$. Тогда $S'(x)$ - производная степенного ряда = $\sum k a_k x^{k-1}$ и радиус сходимости S' равен радиусу сходимости S.

Доказательство

Рассмотрим $\sum k a_k x^{k-1}$. Тогда

$$R' = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{k|a_k|}} = \left\{\sqrt[k]{k} \to 1\right\} = \{\text{лемма о верхнем пределе}\} =$$

$$= \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

Поэтому радиус сходимости совпадает с исходным. Покажем, что ряд из производных равен S'. Восмользуемся теоремой о дифференцируемости функционального ряда.

- $\exists x_0 : \sum a_k x_0^k$ сходится
- $a_k x^k$ непрерывно дифференцируем
- $\sum k a_k x^{k-1} \rightrightarrows$ на $[-q, q]$?

Возьмём произвольный $[-q, q] \subset (-R, R)$. По 1й теореме Абеля $\sum k a_k x^{k-1} \rightrightarrows$ на $[-q, q] \implies$ на $[-q, q]$ $S'(x) = \sum k a_k x^{k-1}$. Так как q произвольно, то это выполняется и на $(-R, R)$.

Следствие

По индукции S - бесконечно дифференцируема. Поэтому $f(z), z \in \mathbb{C}$:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z), \text{ в } O(z)$$

Если существует производная, то f - аналитична. Тогда у комплексных функций существует бесконечно много производных, если существует хотя бы одно. И таким образом, функция аналитична, только если она представима в виде степенного ряда (ряда Тейлора).

Теорема: все степенные ряды являются рядами Тейлора

Теорема

$S(x) = \sum a_k x^k$. Тогда $S(x) = \sum \frac{S^{(k)}(0)}{k!} x^k$ - ряд тейлора

Доказательство

$$S^{(k)}(x) = \left(\sum_{j<k}{}' \right)^{(k)} + (a_k x^k)^{(k)} + \left(\sum_{j>k} \right)^{(k)} = a_k k! + (a_{k+1} x^{k+1} + \dots)$$

$$a_a = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$$

Теорема Вейерштрасса о равномерном приближении функции многочленом

Теорема

Пусть f непрерывна на $[a,b]$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ существует многочлен $P_\varepsilon(x)$, такой, что $\max\limits_{[a,b]} |f(x) - P_\varepsilon(x)| < \varepsilon$

Доказательство

> **Многочлены Бернштейна**
>
> $$B_{n,k}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k},\ 0 \le k \le n$$
>
> -- многочлен Бернштейна
> Свойства:
>
> 1. $\sum\limits_{k=1}^{n} = C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} B_{n,k=1}$
> 2. Поведение на $[0,1]$.
> $B'_{n,k}(x) = C_n^k (kx^{k-1}(1-x)^{n-k} - x^k(n-k)(1-x)^{n-k-1}) = 0$
> $\implies$ возрастает на $[0, \dfrac{k}{n}]$, убывает на $[\dfrac{k}{n}, 1]$
> 3. $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{k}{n} B_{n,k(x)} = x$
> 4. $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{k^2}{n^2} B_{n,k(x)} = \dfrac{x}{n} + \dfrac{(n-1)}{n} \cdot x^2$
> 5. $\sum\limits_{0}^{n} (\dfrac{k}{n} - x)^2 B_{n,k(x)} = \dfrac{x - x^2}{n}$

1. Для отрезка $[0,1]$. Сопоставим f многочлен $p(x) = \sum\limits_{0}^{N} f(\dfrac{k}{n}) B_{n,k}(x)$. $f(x) - p(x) = \{\text{св-во } 1\} =$ $= \sum\limits_{0}^{n} \left(f(x) - f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right) B_{n,k}(x)$ = \text{{рассмотрим два семейства индексов}} $== \sum\limits_{k \in I} + \sum\limits_{k \in II}$, где

$$I = I(x) = \left\{ k : \left| \frac{k}{n} - x \right| < \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}} \right\}$$

$$II = II(x) = \left\{k : \left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}\right\}$$

1. $$\left|\sum_{k \in II}\right| \leq \sum_{k \in II} \left|f(x) - f(\frac{k}{n})\right| \cdot |B_{n,k(x)}| \leq \{f \leq M \text{ на } [a,b]\} \leq$$

$$\leq 2M \cdot \sum_{k \in II} B_{n,k}(x) \cdot \frac{\left(\dfrac{k}{n} - x\right)^2}{\left(\dfrac{k}{n} - x\right)^2} \leq 2M\sqrt{n} \sum_{k \in II} B_{n,k}(x)(\frac{k}{n} - x)^2 \leq$$

$$\leq 2M\sqrt{n} \sum_{k=0}^{n} = 2M\sqrt{n}\left(\frac{x - x^2}{n}\right) \leq \frac{2M}{\sqrt{n}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

2. По теореме Кантора f равномерно непрерывна на $[0,1]$. Возьмём $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тогда $\exists \delta(\varepsilon') : \dfrac{1}{n^{\frac{1}{4}}} < \delta(\varepsilon')$ при больших n. Тогда

$$\left|\sum_{k \in I}\right| \leq \sum_{I} \left|f(x) - f(\frac{k}{n})\right| B_{n,k}(x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

2. $x = a + (b - a)t$ на $[a, b]$. Пусть f определена на $[a, b]$. Сделаем замену $f(x) = f(a + (b - a)t) = g(t)$, определённая на $[0, 1]$. $|g(t) - p(t)| < \varepsilon$