Определённый интеграл

Определение

Разбиение отрезка и интегральная сумма

Разбиение отрезка

Говорят, что точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ образуют разбиение отрезка $[a, b]$, если $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. τ - разбиение.
$\Delta x_k = x_k - x_{k-1},\ k = 1, \ldots, n$ - длины отрезков разбиения,
$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k],\ k = 1, \ldots, n$ - произв. точки.

Интегральная сумма

Пусть f определена на $[a, b]$. Тогда $S(f, \tau, \xi) = S_\tau = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k$ - интегральная сумма

Смысл интегральной суммы

Смысл интегральной суммы - сумма площадей прямоугольников, построенных под графиком на отрезках разбиения

Мелкость разбиения

$\lambda\tau = \max \Delta x_k$ называется мелкостью разбиения.

Интегрируемость по Риману

Интеграл по Риману

Пусть f определена на $[a, b]$. f интегрируема по Риману на $[a, b]$, если $\exists I \in \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 : \forall \tau \forall \xi\ (\lambda \tau < \delta) \implies I = \int\limits_a^b f(x)\, dx$. I - интеграл по Риману, или определённый интеграл

Пример

Возьмём функцию Дирихле. $D(x)$ не интегрируема на $[a, b]$

1. $\{\xi_k\} \subset I = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, f(\xi_k) = 0 \implies \forall \tau : S_\tau = 0$
2. $\{\xi_k\} \subset \mathbb{Q}, f(\xi_k) = 1, \forall \tau\ S_\tau = \sum 1 \cdot \Delta x_k = b - a$

Теорема о сумме интегралов

Теорема

Пусть f и g интегрируемы на $[a, b]$, и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда $\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g)\, dx = \alpha \int\limits_a^b f\, dx + \beta \int\limits_a^b g\, dx$

Доказательство

$$S(\alpha f + \beta g, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha f(\xi_k) + \beta g(\xi_k)) \Delta \xi_k =$$

$$= \alpha \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k + \beta \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k) \Delta x_k$$

$$|S(\alpha f + \beta g, \tau, \xi) - (\alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g)| =$$

$$= |\alpha S(f, \tau, \xi) + \beta S(g, \tau, \xi) - (\alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g)| \leq$$

$$\leq |\alpha| \left| S(f, \tau, \xi) - \int_a^b f \right| + |\beta| \left| S(g, \tau, \xi) - \int_a^b g \right| < \frac{\epsilon}{|\alpha| + |\beta|}$$

- так как f - интегрируемо, поэтому

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta : \forall \tau \forall \xi (\lambda \tau \implies |S(f, \tau, \xi) - \int\limits_a^b f| < \epsilon.$

Теорема *придумайте название*

Теорема

Если f и g интегрируемы на $[a, b]$ и $f \geq g$ на $[a, b]$, то $\int\limits_a^b f \geq \int\limits_a^b g$

Доказательство

$$\forall \tau, \forall \xi : S(f-g, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^{n} (f(\xi_k) - g(\xi_k)) \Delta x_k \geq 0$$

По прошлой теореме $f - g$ - интегрируемо, то есть

$$\exists \int\limits_a^b (f-g)$$

-- то есть

$$\forall \tau, \forall xi : S(f-g, \tau, \xi) \geq - \implies \int\limits_a^b (f-g) \geq 0$$

> **Доказать дома**
>
> Ребятки докажите за меня дома, на коллоке будет

По прошлой теореме $\int\limits_a^b (f-g) \geq 0$, то есть $\int\limits_a^b (f-g) = \int\limits_a^b f - \int\limits_a^b g \geq 0$

Теорема об ограниченности интегрируемой на отрезке функции

Теорема

Если f интегрируема по Риману на $[a, b]$, то она ограничена на $[a, b]$

Доказательство
От противного. Пусть f - не ограничена. Тогда есть разбиение τ, на одном из отрезков котого ($[x_{j-1}, x_j]$) функция не ограничена. Тогда
$S(f, \tau, \xi) = f(\xi_j)\Delta x_j + \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$

$$|S(f, \tau, \xi)| > |f(\xi_j)|\Delta x_j - |\sum_{k=j} f(\xi_k)\Delta x_k|$$

Зафиксируем $\xi_k,\ k \neq j$. Можно подобрать ξ_j так, что $|f(\xi_j)| > N, N \in \mathbb{N}$
Пусть $C = |\sum\limits_{k=j} f(\xi_k)\Delta x_k|$. Тогда:

$$|S(f, \tau, \xi)| > |f(\xi_j)|\Delta x_j - |\sum_{k=j} f(\xi_k)\Delta x_k| > N \cdot x_k - C$$

Тогда $S\tau$ - ограничено. Противоречие.

Критерий интегрируемости. Сумма Дарбу

Сумма Дарбу

$M_k = \sup\limits_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$, $m_k = \inf\limits_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$

Верхняя сумма Дарбу

$\overline{S_\tau} = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$ называется верхней суммой Дарбу

Нижняя сумма Дарбу

$\underline{S_\tau} = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$ называется нижней суммой Дарбу

Интегралы Дарбу

Интегралы Дарбу

Обозначение $I_* = \sup\limits_{\tau} \underline{S_\tau}$ - нижний интеграл Дарбу, I^* - верхний интеграл Дарбу.

- $\underline{S_\tau} \leq I_* \leq I^* \leq \overline{S_\tau}$
  Доказательство

$$\forall \tau_1 \tau_2 : \underline{S_{\tau_1}} \leq \overline{S_{\tau_2}} \implies \sup_{\tau+1} S_{\tau_1} \leq \overline{S_{\tau_2}} \implies I_* \leq \inf_{\tau_2} = I^* *$$

Теорема о неравенствах, связанных с суммами Дарбу

Теорема

Если f опр. на $[a, b]$, то $\forall \tau_1, \tau_2 \quad \underline{S_{\tau_1}} \leq \overline{S_{\tau_2}}$

Доказательство

$\tau = \tau_1 \cup \tau_2$
τ - измельчение τ_1, τ_2, то есть $\tau_1 \subseteq \tau$ и $\tau_2 \subseteq \tau$ и его мелкость меньше.
Тогда $\overline{S_\tau} \leq \overline{S_{\tau_2}}$, $\underline{S_{\tau_1}} \leq \underline{S_\tau}$

$$\underline{S_{\tau_1}} \leq \underline{S_\tau} \leq \overline{S_\tau} \leq \overline{S_{\tau_2}}$$

Следствие

$\forall \tau : \underline{S_\tau} \leq I_* \leq I^* \leq \overline{S_\tau}$

Теорема: критерий интегрируемости

Теорема

Пусть f - ограничена на $[a, b]$. f интегрируема на
$[a, b] \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall \tau (\lambda_\tau < \delta \implies \overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} \leq \epsilon)$

Доказательство

1. $\implies$

   Пусть f интегрируема на $[a, b]$. Тогда по определению интегрируемости, $\exists \delta : \ \forall \tau, \xi (\lambda_\tau < \delta \implies |S(f_1 \tau) - I| < \frac{\epsilon}{3})$

$$S(f, \tau, xi) < I + \frac{\epsilon}{3}$$

$$\sup_\xi S(f, \tau, \xi) \leq I + \frac{\epsilon}{3}$$

$$\sup_\xi S(f, \tau, \xi) = \overline{S_\tau}$$

   Чтобы доказать это, воспользуемся свойствами $\sup$ и $\inf$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n} \sup A_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \sup f(\xi_k) \Delta x_k = \overline{S_\tau} = M_k X_k$.

   $\sup(A_1 + \cdots + A_n) = \sup \left\{ \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k \right\}$

$$I - \frac{\epsilon}{3} \leq \underline{S_\tau} \leq \overline{S_\tau} \leq I + \frac{\epsilon}{3}$$

   Хотим получить: $I - \frac{\epsilon}{3} < \underline{S_\tau} \leq \overline{S_\tau} < I + \frac{\epsilon}{3}$

   1. Рассморим левую часть неравенства из определения $I - \frac{\epsilon}{3} < S(f_1 \tau_1)$, и возьмём $\inf$ по $\xi \implies I - \frac{\epsilon}{3} \leq \inf_\xi S(f_1 \tau_1 \xi) = \inf_\xi S(f_1 \tau_1 \xi)$.

$$\underline{S_\tau} = \sum_{j=1}^{n} \inf_{x \in [x_1, x_j]} f(x) \Delta x_j$$

$$\sum \inf_{x \in [x_1, x_j]} f(x) \Delta x_j = \inf_{(\xi_0, \ldots, \xi_n)} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) \Delta x_j$$

$$S(f_1 \tau_1 \xi) < I + \frac{\epsilon}{3}$$

$$\overline{S_\tau} \leq I + \frac{\epsilon}{3} \implies I - \frac{\epsilon}{3} \leq \underline{S_\tau} \leq \overline{S_\tau} \leq I + \frac{\epsilon}{3}$$

2. $\Longleftarrow$

$\underline{S_\tau} \le I_* \le I^* \le \overline{S_\tau}$

Знаем, что $\forall \epsilon > 0 \exists \delta : \forall \tau (\lambda_\tau < \delta \implies \overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} < \epsilon)$

$$\underline{S_\tau} \le S_tau \le \overline{S_\tau}$$

$$|S_\tau - I_*| < \epsilon$$

- показано геометрически.

$\implies I_*$ - интеграл Римана (по определению интеграла).

Следствие

Если f - интеграл по Риману на $[a, b]$, то $I_* = I^* = \int\limits_a^b f(x)\,dx$

Теорема (без доказательства)

Теорема

f интегрируема на

$$[a, b] \iff I_* = I^* * \$, и при этом всегда \$ \int\limits_a^b f(x)\,dx = I_* = I^*$$

Теорема: аддитивность интегралов

Теорема

$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$, где $a \le c \le b$

Доказательство

Покажем сначала равносильность существования этих интегралов.
Рассмотрим точку c и возьмём произвольное разбиение отреза $[a, b]$ τ.
$c \in [x_{j-1}, x_j]$. Рассмотрим вспомогательное разбиение отрезков:
$\tau' : a < x_1 < \dots < x_j < c$, $\tau'' : c < x_j < \dots < b$.

1. Пусть f интегрируема на $[a,b]$. Покажем, что $\exists \int\limits_a^c$ и $\exists \int\limits_c^b$

f интегрируема на $[a,b] \implies \overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} < \epsilon$ для $\tau : \lambda_\tau < \delta(\epsilon)$

$$\overline{S_\tau} \geq \overline{S_{\tau'} + \overline{S_{\tau''}}}$$

- очевидно, т.к. в одной из сумм справа $\sup f(x)$ может стать меньше

$$\underline{S_\tau} \leq S_{\tau'} + S_{\tau''}$$

- очевидно

$$\epsilon > \overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} \geq \overline{S_{\tau'}} + \overline{S_{\tau''}} = (\underline{S_{\tau'}} + \underline{S_{\tau''}}) = (\overline{S_{\tau'}} - \underline{S_{\tau'}}) + (\overline{S_{\tau''}} - \underline{S_{\tau''}})$$

2. Пусть f интегрируема на $[a,c]$ и $[c,b]$. Покажем, что $\exists \int\limits_a^b f$

$$\overline{S_\tau} = \sum_{k\neq j} + M_j \delta x_j,\ \underline{S_\tau} = \sum_{k \neq j} m_j \Delta x_j$$

(на j-м отрезке находится точка c)

Пусть f ограничена на $[a,b]$ числами B и $-B$.
Хотим: $\overline{S_\tau} \geq \overline{S\tau'} + \overline{S_{\tau''}}$

$$(?) \quad \overline{S_\tau} \leq \overline{S_{\tau'}} + \overline{S_{\tau''}} + \text{что-то}$$

$$\overline{S_\tau} - (\overline{S_{\tau'}} + \overline{S_{\tau''}}) = \left\{ \sum_{k\neq j} \text{- сокращается} \right\} =$$

$$= M_j \Delta x_j - (\sup f(x)(c - x_{j-1}) + \sup_{[c,x]} f(x)(x_j - c)) \leq$$

$$\leq B \Delta x_j + B(c - x_{j-1} + x_j - c) = 2B\Delta x_j \leq 2B\lambda_\tau$$

Аналогично $\overline{S_\tau} \geq S_{\tau'} + S_{\tau''} - 2B\lambda_\tau$

Таким образом, $\overline{S_\tau} \leq \overline{S_{\tau'}} + \overline{S_{\tau''}} + 2B\lambda_\tau$ и $\underline{S_\tau} \geq \underline{S_{\tau'}} + \underline{S_{\tau''}} - 2B\lambda_\tau$

$$\overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} \leq \overline{S_{\tau'}} + \overline{S_{\tau''}} + 2b\lambda_\tau - \underline{S_{\tau'}} - \underline{S_{\tau''}} + 2B\lambda_\tau =$$

$$= (\overline{S_{\tau'}} - \underline{S_{\tau'}}) + (\overline{S_{\tau''}}\underline{S_{\tau''}}) + 4B\lambda_\tau < \epsilon$$

$$\forall\epsilon > 0 \exists\delta(\epsilon) : \forall\tau(\lambda_\tau < \delta \quad \overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} < \epsilon)$$

Возьмём $\delta = \min\left\{\delta_1(\frac{\epsilon}{3}), \delta_2(\frac{\epsilon}{3}), \frac{\epsilon}{3 \cdot 4B}\right\}$

3. Теперь покажем, что $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$.

$$(?) \quad |\int\limits_a^b - (\int\limits_a^c + \int\limits_c^b)| < \epsilon$$

$$|\int\limits_a^b - \left(\int\limits_a^c + \int\limits_c^b\right) + (S_{\tau'} + S_{\tau''}) - (S_{\tau'} + S_{\tau''})| \leq$$

$$\leq |\int\limits_a^b - (S_{\tau'} + S_{\tau''})| + |\int\limits_a^c - S_{\tau'}| + |\int\limits_c^b - S_{\tau''}| < \epsilon$$

Утверждение о переопределении интегрируемой функции

Утверждение

Если изменить интегрируемую функцию f в конечном числе точек, значение интеграла не изменится

Доказательство

Докажем для одной точки. Пусть значение переопределяется в точке x_0.

Заменим $f(x_0)$ на c. Рассмотрим $g(x) = \begin{cases} f(x), x \neq x_0 \\ f(x_0) - c, x = x_0 \end{cases}$

$f(x) + g(x)$ - новая функция. Покажем, что $\int\limits_a^b g(x) = 0$.

$\forall\tau \quad |S_\tau| \leq |c - f(x_0)| \cdot \lambda_\tau$. Но $\lambda_\tau \to 0 \implies \int\limits_a^b g(x) = 0$

Классы интегрируемых функций

Теорема об интегрируемости непрерывной функции

Теорема

Пусть f непрерына на отрезке $[a, b]$. Тогда f интегрируема на нём.

Доказательство

По теореме Кантора, непрерывная функция на отрезке равномерно непрерывна на нём. Тогда
$\forall\epsilon > 0 \exists\delta(\epsilon) > 0 : \forall x', x'' \in [a, b] : (|x' - x''| < \delta) \implies |f(x') - f(x'')| < \epsilon$

$$(?) \quad \forall\epsilon' > 0 \exists\delta'(\epsilon) : \forall\tau(\lambda_\tau < \delta' \implies \overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} < \epsilon)$$

Рассмотрим $\tau : \lambda_\tau < \delta$ - из определения равномерной непрерывности.

$$\overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta xk$$

$\forall\xi', \xi'' \in [x_j, x_{j+H}] \quad |\xi' - \xi''| < \delta$, т.к. $\lambda_\tau < \delta$. Тогда $|f(\xi') - f(\xi'')| < \epsilon$, что равносильно (доказательство позже) $M_j - m_j < \epsilon$. Но тогда
$\sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k \leq \epsilon \cdot \sum \Delta x_k = \epsilon(b - a)$

Доказательство равносильности.

1. $\impliedby$
   $M_j - m_j < \epsilon$ - знаем. $f(\xi') - f(\xi'') \leq M_j - m_j \leq \epsilon$
2. $\implies$
   $\forall\xi', \xi'' \quad |f(\xi') = f(\xi'')| < \epsilon. \sup_{\xi}(f(\xi') - f(\xi'')) = M_j - f(\xi'') \leq \epsilon$

$X\ Y\ Z($

Теорема об интегрируемости монотонной функкции

Теорема

Пусть f - монотонна на $[a. b]$. Тогда f - интегрируема на $[a, b]$.

Доказательство

Пусть б.о.о. f - возрастает.

$(?) \quad \forall\epsilon > 0 \exists\delta : \forall\tau(\lambda_\tau < \delta \implies \overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} < \epsilon)$

$$\overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} = \sum +k = 1^n (M_k - m_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}))\Delta x_k$$

Пусть $\exists\delta : \lambda_\tau < \delta$. Тогда

$$\overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}))\Delta x_k \leq \delta \cdot \sum_{1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) \leq \epsilon$$

Возьмём $\delta < \dfrac{\epsilon}{f(b) - f(a)}$

Следствия

1. Функции с конечным числом точек разрыва интегрируемы
2. Кусочно-монотонные функции интегрируемы
3. Можно рассмотреть интеграл, если функция не определена в конечном числе точек

Теорема об интегрируемости композиции функций

Теорема

Пусть f - интегрируема на $[a, b]$, и принимает значение на отрезке $[c, d]$. Пусть φ непрерывна на отрезке $[c, d]$. Тогда $\varphi(f(x))$ инт. на $[a, b]$.

Пример

Для композиции интегрируемых теорема не работает.

$\varphi = \begin{cases} 1, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}, f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, x = \dfrac{p}{q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

$D(x) = \varphi(f(x)) = \begin{cases} 0, x \notin \mathbb{Q} \\ 1, x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

Доказательство

φ равномерно непрерывна на $[c, d]$ (Кантор):

$\forall\epsilon > 0 \exists\delta : \forall x', x'' \in [c, d] \quad |\varphi(x') - \varphi(x'')| < \delta \implies |\varphi(x') - \varphi(x')|$

$(?) \quad \overline{S_\tau(\varphi(f))} - \underline{S_\tau(\varphi(f))} < \epsilon$. Знаем, что f интегрируема. Тогда

$(\lambda_\tau < \delta \implies \overline{S_\tau}(f) - \underline{S_\tau}(f) < \delta^2)$ - взли δ^2 как ϵ.

$$\overline{S_\tau}(\varphi(f)) - \underline{S_\tau}(\varphi(f)) = \sum_{k=1}^{n}(M_k(\varphi(f)) - m_k()\varphi(f))\Delta x_k$$

Поделим на два семейства индексов:

$$I = \{k : M_k(f) - m_k(f) - \delta\}$$

$$II = k : M_k(f) - m_k(f) \geq \delta$$

1. $k \in I$. Тогда воспользуемся леммой $(\sup - \inf)$, $f(\xi') - f(\xi'') < \delta; \quad \xi'$, по равномерно непрерывной $\varphi : \xi'' \in [x_{k-1}, x_k]$
   $\implies |\varphi(f(\xi')) - \varphi(f(\xi''))| < \epsilon \implies$ по этой же лемме
   $M_k(\varphi(f)) - m_k(\varphi(f)) < \epsilon$,
   $\sum\limits_{k \in I}(M_k(\varphi(f)) - m_k(\varphi(f)))\Delta x_k < \epsilon(b-a)$
2. $k \in II$. Рассмотрим $\overline{S_\tau}(f) - \underline{S_\tau}(f) < \delta^2$.
   $\sum\limits_{k \in II}(M_k(f) - m_k(f))\Delta x_k \leq \overline{S_\tau}(f) - \underline{S_\tau}(f) < \delta^2$. $\sum\limits_{k \in II}\Delta x_k < \delta^2$.
   $\sum\limits_{k \in II}(M_k(\varphi(f)) - m_k(\varphi(f)))\Delta x_k \leq 2l \cdot \sum\limits_{k \in II}\Delta x_k \leq 2l \cdot \epsilon$, где l - ограничение по т. Вейерштрасса.

   Следствие

   f инт. на $[a, b] \implies |f|, f^k, k > 0$ - инт. на $f^k, k \leq 0$ - интегриуруема, если $f = 0$ в конечном числа точек.

Теорема об интегрируемости произведения функций

Теорема

Пуссть f, g - инт. на $[a, b]$. Тогда $f \cdot g$ инт. на $[a, b]$.

Доказательство

$(f-g)^2 = f^2 - 2fg + g^2$

1. Разность интегрируема
2. f^2, g^2 - по следствию предыдущей теоремы интегируемы.
   $f \cdot g = \dfrac{f^2 - g^2 - (f-g)^2}{2}$ - сумма интегрируемых функций.

Интеграл с переменным верхним пределом

Интеграл с переменным верхним пределом

Пусть f инт. на $[a,b]$. ($\implies \forall x \in (a,b) \quad \int\limits_a^x f(t)\,dt$ - существует.) Тогда $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ - интеграл с переменным верхним пределом.

Теорема об ограниченности Φ

Теорема

Пусть f ограничена на $[a,b]$. Тогда Φ непрерывна и выполняется оценка $\exists C : |\Phi(x) - \Phi(y)| \le C \cdot |x-y|, \ \forall x, y \in [a,b]$. - липшицевость.

Доказательство

Заметим, что из липшицевости следует непрерывность Φ (по определению непрерывности). Докажем только липшицевость.

Рассмотрим $|\Phi(x) - \Phi(y)| = |\int\limits_a^x f(t)\,dt - \int\limits_a^y f(t)\,dt| = |\int\limits_y^x f(t)\,dt|$.

Рассмотрим $|\sum f(\xi_k)\Delta x)k| \le \sum |f(\xi_k)|\Delta x_k \implies |\int f| \le \int |f|$. Тогда выражение сверху можно оценить:

$$|\int\limits_y^x f(t)\,dt| \le \int\limits_x^y |f(t)|\,dt \le \{|f| \le B\} \le B \cdot \left|\int\limits_x^y dt\right| = B(x-y)$$

Теорема о дифференцируемости Φ

Теорема

Пусть f непрерывна на $[a,b]$. Тогда $\forall x_0 \in (a,b) \quad \Phi'(x_0) = f(x_0)$

Доказательство

$\Phi'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)}{h}$

$$\frac{\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)}{h} = \frac{x_0}{h} \pm \frac{f(x_0)}{h} \cdot h =$$

$$= \frac{\int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - f(x_0) \cdot h}{h} + f(x_0) = \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))\,dt}{h} + f(x_0)$$

$$\left| \frac{|phi(x_0+h) - \Phi(x_0)}{h} - f(x_0) \right| = \left| \frac{\int\limits_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))\,dt}{h} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{h} \cdot \int\limits_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|\,dt \leq \{|t - x_0| \leq h\}$$

f непрерывна: $\forall \epsilon > 0 \exists \delta : (|t - x_0| < \delta \implies |f(t) - f(x_0)| < \epsilon))$.
Возьмём произв. $epsilon$ и найдём по нему δ. Возьмём $h < \delta$:

$$\frac{1}{h} \cdot \int\limits_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|\,dt \leq \{|t - x_0| \leq h\} \leq \frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} \epsilon\,dt = \epsilon$$

Теорема: формула Ньютона-Лейбница

Теорема

Пусть f интегрируема (в смысле определённого интеграла) на $[a, b]$ и имеет первообразную на этом отрезке на $[a, b]$ ($F' f$). Тогда
$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$

> Tip
>
> Первообразная может быть и у неинтегрируемой по Риману функции:
> $F(x) = x^2 \sin(\dfrac{1}{x^2}), x \in (0, 1].$

$$F'(x) = 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + x^2 \cdot \cos(\frac{1}{x^2}) \cdot \left(\frac{2}{x^3}\right) = 2x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x}$$

Доказательство

Рассмотрим равномерное разбиение $[a, b]$ (на n равных частей), $\dfrac{b-a}{n}$ - длина отрезка разбиения. Рассмотрим разность

$$F(b) - F(a) = \sum_1^n (F(x_k) - F(x_{k-1})) =$$

$$= \{F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \text{ - т. Лагранжа}\} =$$

$$= \sum_1^n f(\xi_k)\Delta x_k =$$

$$= \sum_1^n f(\xi_k) \cdot \frac{(b-a)}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} (F(b) - F(a)) = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n f(\xi_k) \frac{(b-a)}{n} = \int_a^b f(x)\, dx$$

Теорема - формула интегрирования по частям

Теорема

Пусть u и v - непрерывны и кусочно непрерывно дифференцируемы.

$\int uv'\, dx = uv\Big|_a^b - \int_a^b vu'\, dx$

Доказательство

По условиям теоремы, оба интеграла существуют как интегралы от кусочно-непрерывной функции.

$(uv)' = u'v + uv'$ - за исключением конечного числа точек.

$$\int_a^b (uv)' = \int_a^b u'v + \int_a^b uv'$$

Теорема: замена переменной

Теорема
Пусть функция f непрерына на отрезке $[x_1, x_2]$, а функция g - непрерывно дифференцируема на $[t_1, t_2]$, и $g(t_1) = x_1$, $g(t_2) = x_2$ и $g(t) \in [x_1, x_2], t \in [t_1, t_2]$. Тогда $\int\limits_{t1}^{t2} f(g(t))g'(t)\,dt = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$.

Доказательство
По условию f - непрерывна. Тогда существует F - первообразная f - по теореме о дифференцируемости интеграла с переменным верхним пределом. (рассмотрим $|Phi(x) = \int\limits_{x_1}^{x} f(t)\,dt$ и $\Phi'(x) = f(x)$). Тогда по формуле Ньютона-Лейбница $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = F(x_2) - F(x_1)$. Рассмотрим функцию $F(g(t))$. Тогда $(F(g(t)))' = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t)$. Тогда $F(g(t))$ - первообразная для $f(g(t))g'(t)$. Тогда по формуле Ньютона-Лейбница $\int\limits_{t_1}^{t_2} f(g(t))g'(t) = F(g(t_2)) - F(g(t_1)) = F(x_2) - F(x_1)$.

Теоремы о среднем

Среднее значение функции на отрезке

Предположим, что f интегрируема на $[a, b]$. Предположим, что нужно посчитать её среднее значение на отрезке. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)}{n}$, где ξ_k - точки с отрезков разбиения. Домножим и поделим на $(b-a)$. Тогда под пределом получается интегральная сумма для равномерного разбиения, делённая на $(b-a)$. Тогда получается $\frac{\int\limits_a^b f(x)\,dx}{b-a}$ - среднее значение функции на отрезке.

Среднее взвешенное функции на отрезке

Пусть $\varphi(x)$ - весовая функция, т.е. $\varphi(x) \geq 0$ на $[a,b]$ и интегрируема.

Тогда $\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi(\xi_k) f(\xi_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n}} \cdot \dfrac{(b-a)\cdot b}{(b-a)\cdot n} = \dfrac{\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx}{\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx}$ называется

средним взвешенным функции на отрезке.

Замечание

Если f непрерывна, то f достигает $\min = m$ и $\max = M$, и по т. Коши о промежуточном значении $\exists \mu \in [m,M] : \exists x_0 \in [a,b] : \mu = f(x_0)$

Первая теорема о среднем

Теорема

Пусть f интегрируема на $[a,b]$, φ - весовая функция (≥ 0 и интегрируема), и $m \leq f \leq M$ на $[a,b]$. Тогда $\exists \mu \in [m,M]$, $\mu \cdot \int\limits_a^b \varphi = \int\limits_a^b f \cdot \varphi$. (отношение вот этого на вот это это среднее взвешенное)

Доказательство

1. $\int\limits_a^b \varphi = 0$. Тогда $m \int\limits_a^b \leq \int\limits_a^b f\varphi \leq M \int\limits_a^b f \cdot \varphi \quad (*)$. Тогда $0 = 0$.
2. $\int\limits_a^b \varphi \neq 0$. В $(*)$ поделим на $\int\limits_a^b \varphi$. Тогда $m \leq \dfrac{\int_a^b f \cdot \phi}{\int\limits_a^b \varphi} \leq M$

   ### Пример

   Важно, чтобы φ сохраняла знак. Положим $f = x, \varphi = \operatorname{sign} x$ на отрезке $[-1,1]$. Тогда $\int\limits_{-1}^{1} x \operatorname{sign} x\,dx = 1$. Применим теорему.

   $\int\limits_{-1}^{1} x \operatorname{sign} x = \mu \int\limits_{-1}^{1} \operatorname{sign} x = 0$, поэтому теорема не работает.

Вторая теорема о среднем

Теорема
Пусть на $[a, b]$ функция f монотонно убывает (или возрастает), и φ интегрируема. Тогда $\exists \xi in [a, b] : \int\limits_a^b f \cdot \varphi = f(a) \int\limits_a^\xi \varphi(x)\, dx + f(b) \int\limits_\xi^b \varphi(x)\, dx$

Без доказательства.

Геометрические приложения интеграла

Площадь под графиком

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [t_1, t_2]$. Посчитаем $\int\limits_{x_1}^{x_2} y(x)$.

$\int\limits_{x_1}^{x_2} y(x)\, dx = \left\{ \begin{aligned} x = x(t) \\ dx = x'(t)\, dt \end{aligned} \right\} = \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t)\, dt.$

1. x - непрерывно дифференцируема на $[t_1, t_2]$.
2. y - непрерывно дифференцируема на $[x_1, x_2]$
3. Для $x(t)$ существует обратная функция $t(x)$ на $[t_1, t_2]$. Тогда $y(t) = y(t(x)) = y(x)$

Длина дуги кривой

Кривая

Кривой называется непрерывное отображение отрезка $[\alpha, \beta]$ на плоскость.

Спрямляемая кривая

Кривая L называется спрямляемой, если множество длин вписанных в неё ломаных l ограничено сверху.

При добавлении к разбиению отрезка $[\alpha, \beta]$ новых точек ломаная становится длиннее, и её длина приближается к длине кривой. Тогда спрямляемость равносильна наличию длины у кривой.

Тогда длина ломаной равна сумме длин её отрезков. Тогда её можно посчитать по формуле $|l| = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k+1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k+1}))^2}$.
Пусть x и y непрерывно дифференцируемы. Тогда x' и y' - скорости, (x', y') - вектор скорости. По теореме лагранжа:
$|l| = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{(x'(\xi_k)\Delta t_k)^2 + (y'(\xi_k)\Delta t_k)^2} = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\eta_k))^2}\Delta t_k$.
$|l| = \int\limits_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$.

Теорема о длине кривой

Теорема

Пусть $x(t)$ и $y(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[\alpha, \beta]$. Тогда кривая $L = (x(t), y(t))$ - спрямляемая, и $|L| = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$

Доказательство

$(*)\ |l| = \{\text{по т. Лагранжа}\} = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\eta_k))^2}\Delta t_k$. Пусть $\sigma = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\xi_k))^2}\Delta t_k$. Тогда σ - интегральная сумма. Оценим $||L| - \sigma| = |\sum\limits_{k=1}^{n}(\sqrt{} - \sqrt{})\Delta t_k| \leq$ В каждом из выражений координата x одинаковая. Тогда расстояние между ними равно разности координат y.
$\{\text{по нер-ву труегольника}\} \leq \sum\limits_{k=1}^{n}(y'(\xi_k) - y'(\eta_k))\Delta t_k$
$\leq \sum\limits_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta t_k = \overline{S}(y', \tau) = \underline{S}(y', \tau) \leq \varepsilon$, тогда y' интегрируема, т.к. непрерывна.

Мы показали, что длина ломаной близка к интегральной сумме, то есть $||l| - \sigma| < \varepsilon$ при мелких τ. Тогда $(*) \leq B \cdot \sum\limits_1^n \Delta t_k$. Поэтому кривая спрямляема. Тогда $|l| \approx \sigma$ \approx \int\limits_a^b \dots. (интеграл из формулировки теоремы). Тогда $|l| \approx |L|$ (опр. $\sup$).

Покажем теперь, что $||L| - \int_\alpha^\beta| \leq |L| - |l||_{(1)} + ||l| - \int_\alpha^\beta|_{(2)}$ (первый интеграл из условия теоремы.). Оценим (1) и (2) по отдельности.
$(1)\ \forall \epsilon > 0 \exists l_e \quad |L| - |l_\epsilon| < \epsilon$. Если ломаная l меньше, чем l_ϵ, то мы вычтем

больше $|L| - |l| < \epsilon$ю
(2) $||l| - \sigma| + |\sigma - \int_\alpha^\beta| \leq 2\varepsilon$ (выше показано, что первое слагаемое при мелких τ меньше ϵ и второе меньше ε по по определению S). Тогда выполняется, что $\forall \epsilon > 0 \quad ||L| - \int_\alpha^\beta| \leq |L| - |l||_{(1)} + ||l| - \int_\alpha^\beta|_{(2)} < 3\varepsilon$. Но ε можно взять любой, а разность фиксирована, поэтому она равна нулю.

Численное интегрирование

Пусть известно k точек, в которых известны $f(x_k)$. Можно применить интерполяционный многочлен Лагранжа, построив многочлен $p(x)$. Тогда можно интегрировать $p(x)$.

Разделённая разность

Разделённой разностью первого порядка в узлах x_1, x_2 называется выражение $f(x_1, x_2) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Разделённой разностью k-го порядка в узлах $x_1, \ldots, x_{k+1}$ называется $\dfrac{f(x_2, \ldots, x_{k+1}) - f(x_1, \ldots, x_k)}{x_{k+1} - x_1}$.

Пример: разделённая разность 2-го порядка. Возьмём узлы x_1, x_2, x_3. $\dfrac{f(x_2, x_3) - f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1}$.

Интерполяционный многочлен в форме Ньютона

$$N(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + \cdots + f(x_0, \ldots, x_n)(x - x_0) \ldots ($$

Методы прямоугольников (многочлен 1-й степени)

1. Метод левых прямоугольников - взять функции в левом конце отрезка, и посчитать площадь получившегося прямоугольника.
2. Метод средних прямоугольников - взять среднее значение левого и правого конца отрезков.
3. Метод правых прямоугольников.

Метод трапеций

Многочлен первой степени. Посчитать площадь трапеции, построенной на точках $x_1, x_n, p(x_1), p(x_n)$. Тогда формула многочлена -

$$N(x) = f(x_1) + f(x_1, x_2)(x - x_1) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Проинтегрируем от $a = x_1$ до $b = x_2$: $f(a)b + \frac{f(b) - f(a)}{2}(b + a) - f(b)a$

.