# Алгем один кусок

# Определители

## Перестановки и подстановки

### Перестановки и число инверсий

**Перестановка**

Перестановкой множества числе $1, 2, \ldots, n$ называется любая последовательность длины $n$, в которой каждое число от $1$ до $n$ входит в точности один раз.

**Число инверсий**

Числом инверсий перестановки называется количество пар вида $(i, j)$, $i < j$ таких, что в перестановке $g$ элемент $j$ имеет меньший номер, чем элемент $i$.

**Пример:** в перестановке $(1, 2, 4, 3)$ одна инверсия, а в перестановке $(4, 2, 1, 3)$ - $4$ инверсии.

**Чётная перестановка**

Перестановка называется чётной, если в ней чётное число инверсий, и нечётной, если в ней нечётное число инверсий.

### Теорема о чётности перестановки

**Теорема**

Пусть $g$ - перестановка. Тогда при перестановке любой пары элементов чётность подстановки меняется.

Доказательство

Пусть $g$ имеет $m$ инверсий.

1. Рассмотрим случай, когда переставляются соседние элементы. $g = (i_1, \ldots, i_k, i_{k+1}, \ldots, i_n)$. Если $i_k < i_{k+1}$, то образуется ровно одна новая инверсия.
2. $(i_1, \ldots, i_k, i_{k+1}, \ldots, i_{s-1}, i_s, \ldots, i_n)$. Мы переставляем $i_k$ и $i_s$.
   - $(i_1, \ldots, i_k, i_{k+1}, , i_{k+2} \ldots, i_k, i_s, \ldots, i_n)$. Мы сделаем $s - 1 - k$ перестановок соседних элементов, тогда чётность поменяется $ s - 1 - k$ раз.
   - Просто переставляем $i_k$ и $i_s$. $(i_1, \ldots, i_{k+1}, \ldots, i_{k+2}, \ldots, i_s, i_k, \ldots, i_n)$. Чётность меняется на $1$.
   - Ведём $i_s$ назад на то место, где сейчас находится $i_{k+1}$, на которой вначале стоял $i_k$. Снова после $s - 1 - k$ перестановок чётность поменяется.
     Осталось заметить, что чётность поменялась нечётное количество раз.

## Подстановки

### Подстановка

Подстановка на множестве чисел от $1$ до $n$ - биекция на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$. Подстановку можно записать в следующем виде: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$. Верхний ряд не обязательно записывать по порядку.

### Note

Подстановка состоит из двух перестановок (из перестановки в верхнем ряду и перестановки в нижнем ряду).

### Число инверсий

Числом инверсий подстановки называется сумма чисел инверсии её перестановок.

> **Чётность подстановки**
>
> Подстановка называется чётной, если её число инверсий чётно.

# Теорема о чётности подстановок

### Теорема

1. Любая подстановка может быть представлена в каноническом виде
2. Чётность подстановки не зависит от упорядочения верхнего ряда

### Доказательство

1. Просто записываем подстановку по порядку. Очевидно, что ей соответствует то же самое отображение
2. $\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_i & \dots & a_k & \dots & a_n \\ b_1 & \dots & b_i & \dots & b_k & \dots & b_n \end{pmatrix}$. Переставим в этой подстановке $i$-й и $k$-й элементы. При этом сама подстановка не изменится. При этом по предыдущей теореме чётность не изменилась, т.к. одновременно изменились чётности верхнего и нижнего ряда.

# Единичные и обратные подстановки

> **Единичная подстановка**
>
> Подстановка вида $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ называется единичной.

Для каждой подстановки $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ есть обратная $g^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$

> **Чётность обратной подстановки**
>
> Обратная подстановка имеет такую же чётность, как исходная.

# Определители

## Определители малых порядков

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

1. В каждом слагаемом нет элеметнов, лежащих в одной строке или столбце
2. Каждому слагаемому соответствует подстановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix}$, где верхний ряд - номера столбцов, нижний ряд - номера строк соответствуюшщих элементов.

## Определитель в общем случае

Пусть $S_n$ - множество всех подстановок $\{1, 2, \ldots, n\}$. Тогда $|S_n| = n!$

**Определитель**

Пусть $a$ - матрица $n \times n$: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Определителем такой матрицы называется число $|A| = \det A = \sum\limits_{g \in S_n} (-1)^g a_{1g(1)}a_{2g(2)}\ldots a_{ng(n)}$. Под $g$ в $(-1)^g$ имеется в виду чётность подстановки $g$.

## Транспонирование матриц

**Транспонированная матрица**

Матрица $A^T$, полученная из $A$ заменой строк на столбцы и столбцов на строки, или симметрией относитеьно главной диагонали $A$, называется транспонированной к $A$.

## Теорема об определителе транспонированной матрицы

### Теорема

$|A| = |A^T|$

### Доказательство

$$|A| = \sum_{g \in S_n} (-1)^g a_{1g(1)} a_{2g(2)} \ldots a_{ng(n)} \quad (*)$$

. Поскольку строки транспонированной матрицы меняются на столбцы (можно сказать, что местами меняются верхняя и нижняя строка каждой перестановки), то

$$|A^T| = \sum_{g \in S_n} (-1)^{g^{-1}} a_{g(1)1} a_{g(2)2} \ldots a_{g(n)n} \quad (**)$$

.

Заметим, что в $(*)$ и в $(**)$ одинаковоке количество слагаемых, и что для каждой подстановки $g$ в $|A|$ эта подстановка есть и в $|A^T|$. Слагаемому $a_{1g(1)} a_{2g(2)} \ldots a_{ng(n)}$ соответствует слагаемое $a_{g(1)1} a_{g(2)2} \ldots a_{g(n)n}$ (в транспонированной матрице). То есть слагаемые не изменились, то задаются обратными подстановками. Но для обратной подстановки чётность сохраняется, поэтому знаки слагаемых сохраняются.

## Теоремы о свойствах определителя

### Минор

Минор матрицы $M_{ij}$ для элемента a_{ijполучается вычёркиванием $i$-й строки и $j$-го столбца из $a_{ij}$

### Алгебраическое дополнение

Алгебраическим дополнением элемента $a_{ij}$ называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$

Теорема

1. $|A| = |A^T|$
2. При умножении строки определителя на число, весь определитель умножается на это число
3. Если определитель содержит нулевую строку, то он равен нулю.
4. Если в определителе поменять местами две строки, то он поменяет знак.
5. Если в определителе есть одинаковые строки, то он равен нулю.
6. Если в определите есть пропорциональные строки, то он равен нулю.
7. Разложение определителя в сумму определителей.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k-1} & b_{1k} + c_{1k} & a_{1k+1} & \dots & a_{tn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk-1} & b_{mk} + c_{mk} & a_{mk+1} & \dots & a_{tn} \\ dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk-1} & b_{nk} + c_{nk} & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
8. Если к одной строке определителя прибавить другую строку, умноженную на число, то значение определителя не изменится.
9. Разложение по строке: $|A| = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \dots + a_{kn}A_{kn}$
10. Сумма произведений алегбраических дополнений элементов одной строки на алгебраические дополнения другой строки равна нулю
11. Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов
12. Любой определитель можно вычислить приведением к треугольному виду.

Все свойства определителя, справедливые для строк, остаются справедливыми для столбцов, и наоборот.

Доказательство

2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ta_{k1} & ta_{k2} & \dots & t_akn \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum\limits_{g\in S_n} (-1)^g a_{1g(1)} \dots t(a_{kg(k)}) \dots a_{ng(n)}$. По свойству определителя каждое слагаемое умножится на $t$, поэтому значение определителя уможится на $t$

3) Следует из 2).

4) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ta_{k1} & ta_{k2} & \dots & t_akn \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum\limits_{g\in S_n} (-1)^g a_{1g(1)} \dots t(a_{kg(k)}) \dots a_{ng(n)}$. Если переставить местами строки, в каждом слагаемом поменяется чётность подстановки, то есть слагаемому будет соответствовать оно же со знаком $-$.

5) Следует из свойства 4, т.к. если переставить эти строки местами, то он должен поменять знак, но сам определитель не изменится, поэтому он равен нулю.

6) Из свойств 2) и 5)

7)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k-1} & b_{1k}+c_{1k} & a_{1k+1} & \dots & a_{tn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk-1} & b_{mk}+c_{mk} & a_{mk+1} & \dots & a_{tn} \\ dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk-1} & b_{nk}+c_{nk} & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{g\in S_n} (-1)^g a_{1g(1)} (b_{g(k)k} + c_{g(k)k}) \dots a_{g(n)n} +$$

8) Добавим к $m$-й строке $k$-ю, умноженную на $t$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+ta_{k1} & a_{m2}+ta_{k2} & \dots & a_{mn}+ta_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ta_{k1} & ta_{k2} & \dots & ta_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Во втором определителе имеем пропорциональные строки, т.е. он равен нулю, т.е. исходный определитель не изменился.
9) Достаточно доказать для разложения по первой строке. Рассмотрим определение определителя.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{g\in S_n} (-1)^g a_{1g(1)}a_{2g(2)}\dots a_{ng(n)} = a_{11}R_1 + a_{12}R_2 + \cdots$$

. $R_i$ - все слагаемые, куда входит $a_{1i}$. Покажем, что $R_i = (-1)^{1+i}M_{1i}$. Очевидно, что слагаемые в $R_i$ и $(-1)^{1+i}M_{1i}$ одни и те же, поскольку при раскрытии определителя мы выбираем по одному слагаемому в каждой строке и в каждом столбце. Осталось показать, что слагаемые входят с правильным знаком. Возьмём элемент $a_{1k}a_{2g(2)}\dots a_{ng(n)}$. Ему соответствует подстановка $g' = \begin{pmatrix} 2 & \dots & n \\ g(2) & \dots & g(n) \end{pmatrix}$, где $g(i) \neq k$. Пусть чётность этой подстановки равна $i(g')$. В $g$ $k$ стоит на первом месте и вносит дополнительно $kg'((k-1))$, поэтому $i(g) = k - 1 + i(g')$, поэтому каждому слагаемому из $M_{1k}a_{2g}\dots ang(n)$ соответствует слагаемое $a_{1k}a_{2g(2)}\dots a_{ng(n)}$, которое в $A$ различается на

$(-1)^{k-1} = (-1) = (-1)^{k+1}(i(g')$ - число инверсий для исходного слагаемого. Поэтому все элементы из $M_{1k}$ нужно умножить на $(-1)^{k+1}$, из чего получается формула разложения по строке.

10) $a_{k1}A_{m1} + ak2A_{m2} + \dots + a_{kn}A_{mn} =$ В алгебраических дополнениях $A_{ms}$ нет $m$-й строки, т.е. получить такую сумму - то же самое, что взять определитель матрицы, у которой $m$-я строка совпадает с $k$-й и разложить по $m$-й строке.

11) $\begin{vmatrix} a_{11} & a12 & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$. Необходимо разложить определитель по первому столбцу. Получаем $a_{11}$ на такой же определитель, кроме первой строки. Повторим этот шаг $n$ раз. Очевидно, что определитель разложится в произведение диагональных элементов.

12) Следствие св-в 8) и 11)

# Полураспавшаяся матрица

**Полураспавшаяся матрица**

Матрица вида $\begin{pmatrix} A & N \\ O & B \end{pmatrix}$, где матрицы $A$ и $B$ - квадратные, $O$ - нулевая матрица называется полураспавшейся.

## Теорема об определителе полураспавшейся матрицы

### Теорема

$$\begin{vmatrix} A & N \\ O & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$$

### Доказательство

Докажем индукцией по порядку матрицы $A$

1. $p = 1$. $\begin{vmatrix} a_{11} & N \\ O & B \end{vmatrix}$. Таким образом, $O$ - столбец из нулей.
   Раскладываем матрицу $M$ по первому столбцу и получаем $|M| = a_{11}|B| = |A| \cdot |B|$

2. Пусть доказано для матриц порядка меньшего, чем $p$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} & ** & \dots & ** \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} & ** & \dots & ** \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{s1} & \dots & b_{ss} \end{vmatrix} = \{\text{разложим по первому столбцу}\}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} M_{11} & * \\ O & B \end{vmatrix} + \dots + a_{k1}(-1)^{k+1}\begin{vmatrix} M_{1k} & ** \\ O & B \end{vmatrix} + a_{p1}(-1)^{p+1}\begin{vmatrix} M_{p} \\ O \end{vmatrix}$$

$$= |A| \cdot |B|$$

# Теорема об определителе прозведения матриц

### Теорема

Если $A, B$ - квадратные матрицы размера $n \times n$, то $|AB| = |A| \cdot |B|$

### Доказательство

Построим специальную матрицу $D = \begin{vmatrix} A & O \\ -E & B \end{vmatrix}$, где $-E$ - единичная матрица размера $n \times n$, у которой на главной диагонали стоят $-1$, а остальные элементы - нули. Очевидно, что $D$ - транспонированная к полураспавшейся, и её определитель $|D| = |A| \cdot |B|$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{2n} & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & \dots & -1 & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Начнём обнулять позиции, где есть элементы $b_{ij}$. Далее к $n+1$-му столбцу прибавим второй столбец, умноженный на $b_{21}$. Далее к $n+1$-му столбцу прибавим $n$-ый, умноженный на $b_{n1}$. Таким образом, в первых $n$ строках получившейся матрицы расположен первый столбец матрицы $A \cdot B$. Проделывая аналогичные действия со $n+2$-м столбцом, далее - с $2n$ столбцом, получим следующую матрицу: $\begin{vmatrix} A & C \\ -E & 0 \end{vmatrix}$. Переставим $n+1$-й столбец с $1$-м, $n+2$-й -

со 2-м, и так далее. Получим определитель следующего вида: $(-1)^n \begin{vmatrix} C & A \\ O & -E \end{vmatrix}$

---

# Обратная матрица и система линейных уравнений

> **Обратная матрица**
>
> Матрица $B$ называется обратной к матрице $A$, если $AB = BA = E$

## Теорема: критерий обратимости квадратной матрицы

**Теорема**

Квадратная матрица обратима $\iff$ её определитель отличен от нуля

**Доказательство**

1. Пусть $A$ - обратима. Посчитаем

$$\det AA^{-1} = \det A \cdot \det A^{-1} = 1 \implies$$
$$\implies \det A \neq 0, \ \det A^{-1} = (\det A)^{-1}$$

2. Умножим присоединённую к $A$ матрицу $(A^{\#})^T$ - матрицу алгебраических дополнений к каждому элементу матрицы $A$ на матрицу $A$, получится матрица, на главной диагонали которой стоят $\det A$ . Рассмотрим матрицу, полученную из матрицы $A$ заменой второй строки на первую. Её определитель будет равен нулю Продолжим этот шаг и найдём матрицу

$$A(A^{\#})^T = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix} = \det A \cdot E$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A^{\#})^T$$

$(A^{\#})^T A$ - аналогично, т.к. вместо разложения по строке будет разложение по столбцу.

## Крамерова система линейных уравнений

**Крамерова система линейных уравнений**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Эта система называется Крамеровой, если $m = n$ и $\det A = 0$, где $A$ - главная матрица системы.

## Теорема о единственности решения Крамеровой системы

**Теорема**

Крамерова система уравнений имеет решение, и притом только одно.

**Доказательство**

Поскольку $\det A \neq 0$, то $\exists A^{-1}$.

$$Ax = A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = Eb = b$$

Пусть $x = A^{-1}b$

Предположим, что решение не единственно, то есть $Ay = b$. Тогда $A^{-1}(A_y) = A^{-1}b = (A^{-1}A)y = Ey = y$.

## Формула Крамера

$$A^{-1}b = \frac{1}{\det A}(A^{\#})^T b =$$

$$= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det A_1 \\ \det A_2 \\ \dots \\ \det A_n \end{pmatrix}$$

где $\det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

> Tip
>
> Таким образом, формула $x = \dfrac{\det A_i}{\det A}$ называется формулой Крамера.

## Общее решение систем линейных уравнений

> Минор
>
> Выберем в матрице $k$ строк и $k$ столбцов. Возьмём элементы, которые стоят на пересечении этих строк и столбцов. Определитель, стоящий на пересечении этих $k$ строк и $k$ столбцов называется минором $k$-го порядка.

> Минорный ранг матрицы
>
> Рангом матрицы по минорам называется наивысший порядок отличных от нуля миноров.

## Теорема: ранг по минорам совпадает с рангом матрицы

### Доказательство

A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1

\

Дайте

Пацаны зашлите пожалуйста теоремку \ \

Общее решение системы

Оставим в левой части только переменные $x_1, \dots, x_k$, а остальные перенесём в правую часть. Тогда система примет вид $\begin{cases} a_{1j_1}x_{j_1} + a_{1j_2} + \dots + a_{1j_k}x_n = b_1 - a_{11}x_1 - \dots - a_{xadf}x_1 \\ \dots \\ a_{kj_1}x_{j_1} + a_{kj_2}x_{j_2} + \dots + a_{kj_k}x_k = b_k - \dots \end{cases}$. Левые переменные называются зависимыми, а в правой части - свободными. Тогда каждая зависимая переменная - линейная комбинация свободных. Множество всех решений этой системы называется её общим решением.

Фундаментальная система решений

Общее решение однородной (базис) системы называется фундаментальной системой решений.

## Определитель Вандермонда

Abstract

Пусть даны

$$n$$

чисел: $x_1, x_2, \dots, x_n$. Определителем Вандермонда называется определитель, в котором в $k$-й строке записаны степени числа $x_k$ от $0$ до $n-1$.

### Теорема: определитель Вандермонда

Теорема

$$W(x_1,\dots,x_n)=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\Pi_{1\le i<j\le k}(x_j-x_i)$$

Доказательство

Б.И. - $n=1$, $W(x_1)=1$. При $n=2$:

$$W(x_1,x_2)=\begin{vmatrix}1 & x_1\\ 1 & x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1$$

Ш.И. Пусть для определителей порядка менее $n-1$. Из каждого столбца вычтем предыдущий, умноженный на $x_1$

$$W(x_1,\dots,x_n)=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 1 & x_2-x_1 & x_2^2-x_2x_1 & \dots & x_2^{n-1}-x_1x_2^{n-2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & x_n-x_1 & x_n^2-x_nx_1 & \dots & x_n^{n-1}-x_1x_n^{n-2}\end{vmatrix}$$

Разложим этот определитель по первой строке:

$$\begin{vmatrix}x_2-x_1 & x_2^2-x_2x_1 & \dots & x_2^{n-1}-x_1x_2^{n-2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ x_n-x_1 & x_n^2-x_nx_1 & \dots & x_n^{n-1}-x_1x_n^{n-2}\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}x_2-x_1 & x_2(x_2-x_1) & \dots & x_2^{n-2}(x_2-x_1)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ x_n-x_1 & x_n(x_n-x)_1 & \dots & x_n^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix}=$$

$$=(x_2-x_1)\dots(x_n-x_1)=\begin{vmatrix}1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2}\end{vmatrix}=$$

Что является определителем Вандермонда порядка $n-1$. Воспользуемся формулой:

$$=(x_n-x_1)\cdot\dots(x_2-x_1)W(x_1,\dots,x_{n-1})=$$

$$= (x_n - x_1)\dots(x_2 - x_1)\Pi_{1\le i<j\le n-1}(x_j - x_i)$$

# Многочлены

## Определение многочлена

**Многочлен**

Многочленом над полем $F$ называется выражение вида $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, где $a_i \in F$, а $x$ - переменная.

**Степень многочлена**

Наибольшее $n$ такое, что $a_n \neq 0$ называется степенью многочлена. При этом степень нулевого многочлена по определению равна $-\infty$. Степень многочлена обозначается $\deg f$.

## Операции над многочленами

1. Сложение
2. Умножение на число
3. Умножение многочленов

**Свойство умножения**

$$\deg(f(x)\cdot g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$$

**Множество многочленов над полем $F$**

Множество многочленов переменной $x$ над полем $F$ обозначается $F[x]$

**Обратимые многочлены**

Для множества многочленов над полем $F$ обратимы являются только многочлены нулевой степени

## Замечание: $F[x]$ является коммутативным кольцом с 1

Доказательство: есть две операции, + и ·. Очевидно, что + - ассоциативно и коммутативно. Умножение также ассоциативно и коммутативно. При этом по сложению и по умножению есть нейтральные элементы.

**$F[x]$ является коммутативным кольцом с 1**

Доказательство: есть две операции, $+$ и $\cdot$. Очевидно, что $+$ - ассоциативно и коммутативно. Умножение также ассоциативно и коммутативно. При этом по сложению и по умножению есть нейтральные элементы.

# Ассоциированные многочлены

**Ассоциированные многочлены**

Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ называются ассоциированными $(f(x) \sim g(x))$, если $f(x) = cg(x)$, где $c$ = некоторое постоянное число (или многочлен степени 0). Они часто имеют схожие свойства.

**Все многочлены нулевой степени ассоциированы с e(x)=1**

**Пример ассоциированных многочленов**

$2x^2 + x + 1 \sim x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

# Отношение делимости на множестве многочленов

**Делимость многочленов**

Многочлен $f(x)$ делится на многочлен $g(x)$, если существует многочлен $h(x)$ такой, что $f(x) = g(x) \cdot h(x)$. Обозначается $g(x) \mid f(x)$ или $f(x) \vdots g(x)$

**Пример делимости многочленов**

$f(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$
$(x-2) \mid f(x)$
$(x-1) \mid f(x)$

## Свойства отношения делимости для многочленов

Пусть $f(x), g(x) \neq 0$

1. Рефлексивность $f(x)|f(x)$
2. Транзитивность $f(x)|g(x)$ и $g(x)|h(x) \implies f(x)|h(x)$

Антисимметричность отсутствует, из-за наличия ассоциированных многочленов.

Другие свойства:

1. Если $f(x) \mid g(x)$, то имеет место $f(x) \mid (g(x) \cdot h(x))$
2. Если $f(x) \mid g(x)$ и $f(x) \mid h(x)$, то $f(x) \mid (g(x) + h(x))$

## Теорема о делении с остатком

**Теорема**

Пусть $F$ - поле и $f(x), g(x) \in F[x]$ и $g(x) \neq 0$. Тогда $\exists!\ q(x), r(x) : f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$, при этом $\deg r(x) < \deg g(x)$.

$q(x)$ - частное
$r(x)$ - остаток

Доказательство

$$f(x) = a_k x^k + \dots + a_0$$
$$g(x) = b_m x^m + \dots + b_0$$

1. Докажем существование. В случае $k < m$ $q(x) = 0$, а $r(x) = f(x)$. В случае $k \geq m$ докажем по индукции по $k - m$:
    1. База индукции: $k - m = 0$. Тогда $r(x) = f(x) - \frac{a_k}{b_k} g(x)$ и $q(x) = \frac{a_k}{b_k}$
    2. Шаг индукции: $k - m > 0$. Предположим, что теорема доказана для всех значений, меньших, чем $k - m$. Тогда возьмём $q(x) = \frac{a_k}{b_k} x^{k-m}$ и $h(x) = f(x) - \frac{a_k}{b_k} x^{k-m} g(x)$. Тогда $\deg h(x) < k$. Тогда для $h(x)$ воспользуемся предположением индукции. Тогда

$$f(x) = h(x) + \frac{a_k}{b_k} x^{k-m} g(x) =$$
$$= \frac{a_k}{b_m} x^{k-m} g(x) + q_1(x) g(x) + r_1(x) =$$
$$= (\frac{a_k}{b_m} x^{k-m} + q_1(x)) g(x) + r_1(x)$$

2. Единственность. Предположим, что есть два разложения: $f(x) = q_1(x) g(x) + r_1(x) = q_2(x) g(x) + r_2(x)$. Тогда

$$q_1(x) g(x) + r_1(x) = q_2(x) g(x) + r_2(x)$$
$$q_1(x) g(x) - q_2(x) g(x) = r_2(x) - r_1(x)$$
$$(q_1(x) - q_2(x)) g(x) = r_2(x) - r_1(x)) \quad *$$

   Если мы умножаем на $g(x) \neq 0$, то степень многочлена не уменьшается. Тогда если $q_1(x) \neq q_2(x)$, то в $(*)$ степени равных многочленов отличаются. Поэтому $(*)$ выполняется только если $q_1(x) = q_2(x) \implies r_1(x) = r_2(x)$.

# Наибольший общий делитель

**Наибольший общий делитель**

Пусть $f(x), g(x)$ - многочлены над $F$. Тогда многочлен $d(x)$ называется их наибольшим общим делителем, если $f(x) = 0$ и $d(x) = 0$ или $f(x) \neq$ и $g(x) \neq 0$ и
$\forall c(x) : c(x) \mid f(x) \wedge c(x) \mid g(x) \quad c(x) \mid d(x)$

## Алгоритм Евклида поиска НОД

Пусть $f(x), g(x) \in F[x], g(x) \neq 0$ и
$f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x), g(x) = q_2(x)r_1(x) + r_2(x)$.

Поделим с остатком $f(x)$ на $g(x)$. Пусть $r_1$ - остаток. Тогда поделим $g(x)$ на $r_1$ с остатком $r_2$. Теперь поделим $r_1$ на $r_2$ с остатком $r_3$, и так далее. Алгоритм продолжается, пока мы не получим нулевой остаток. Последний ненулевой остаток $r_k$ - и есть НОД $f(x)$ и $g(x)$.

То, что алгоритм завершится за конечное число шагов следует из того, что на каждом шаге степени остатков уменьшаются $\Longrightarrow$ на каком-то шаге получится нулевой остаток.

## Теорема о наибольшем общем делителе

### Теорема

Для любой пары $f(x), g(x) \in F[x]$, если $d(x)$ = $\text{НОД}(f(x), g(x))$ существуют многочлены $u(x)$ и $v(x)$ такие, что
$f(x)u(x) + g(x)v(x) = d(x)$

### Доказательство

$f(x) = r_{-1}(x)$
$g(x) = r_0(x)$

1. Случай $f(x) = g(x) = 0$. Тогда $d(x) = 0$ и $u(x), v(x)$ - любые
2. Случай $f(x) = 0,\ g(x) \neq 0$. Тогда $d(x) = g(x)$, $u(x)$ - любой, $v(x) = 1$
3. Случай $f(x) \neq 0,\ g(x) \neq 0$. Из равенств, которые возникают в алгоритме Евклида, можно получить рекуррентные формулы для $u(x)$ и $v(x)$.

   Покажем, что для любого остатка, возникающего в алгоритме Евклида, существуют многочлены $u_k(x)$ и $v_k(x)$ такие, что

$r_k(x) = f(x)u_k(x) + g(x)v_k(x)$.

По алгоритму Евклида:
Пусть $f(x) = r_{-1}(x)$ и $g(x) = r_0(x)$

$$f(x) = 1 \cdot f(x) + 0 \cdot g(x), u_{-1}(x) = 1 \implies v_{-1}(x) = 0$$

$$g(x) = 0 \cdot f(x) + 1 \cdot g(x) \implies u_0(x) = 0, v_0(x) = 1$$

$$r_1(x) = f(x) - q_1(x)g(x)$$

$$r_1(x) = r_{-1}(x) - q_1(x)r_0(x) =$$

$$= (u_{-1}(x)f(x) + v_{-1}(x)g(x)) + q_1(x)(u_0(x)f(x) + v_0(x)g(x)) =$$

$$= (u_{-1}(x) - q_1(x)u_0(x))f(x) + (v_{-1}(x) - q_1(x)v_0(x))$$

Если $r_{i-1}(x) = u_{i-1}(x)f(x) + v_{i-1}(x)g(x)$, а
$r_i(x) = u_i(x)f(x) + v_i(x)g(x)$, то

$$r_{i+1}(x) = r_{i-1}(x) - q_i(x)r_i(x) =$$

$$= u_{i-1}(x)f(x) + v_{i-1}(x)g(x) - q_i(x)(u_i(x)f(x) + v_i(x)g(x)) =$$

$$= (u_{i-1}(x) - q_i(x)u_i(x))f(x) + (v_{i-1}(x) = q_i(x)v_i(x))v(x)$$

Тогда $u_{i+1}(x) = u_{i-1}(x) - q_1(x)u_i(x)$ и
$u_i + 1(x) = v_{i-1}(x) - q_i(x)v_i(x)$

Таким образом, мы видим, что для всех $i \geq 1$ мы имеем разложение $r_i(x) = u_i(x)f(x) + v_i(x)g(x)$. Итак, поскольку $d(x)$ является одним из остатков в алгоритме евклида, то на каком-то шаге мы найдём разложение $d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$

# Взаимно простые многочлены

**Взаимно простые многочлены**

Многочлены называются взаимно простыми, если их наибольшим общим делителем является многочлен нулевой степени.

## Теорема: критерий взаимной простоты многочленов

**Теорема**

Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ являются взаимно простыми
$\iff \exists u(x), v(x) \in F[x]$ такие, что $f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1$.

### Доказательство

1. $\implies$ - очевидено, следует из предыдущей теоремы.
2. $\impliedby$ . От противного. Пусть $d(x) = \text{НОД}(f(x),\ g(x))$ и $\deg(d(x)) \geq 1$. Тогда, поскольку $d(x)$ делит левую часть равенства, то $d(x) \mid 1$, но это невозможно, т.к. $\deg d(x) > 1$. Противоречие.

## Свойства взаимно простых многочленов

### Теорема

1. Если $f(x) \mid h(x)$ и $g(x) \mid h(x)$, то $(f(x)g(x)) \mid h(x)$
2. Если $f(x) \mid (g(x)h(x))$, то $f(x) \mid h(x)$

### Доказательство

Пусть $f(x) = a(x)h(x)$, $g(x) = b(x)h(x)$. По критерию взаимной простоты $\exists u(x), g(x) : f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1$. Домножим на $h(x)$:

$$f(x)h(x)u(x) + g(x)h(x)v(x) = h(x)$$

$$f(x)b(x)g(x)u(x) + g(x)a(x)f(x)v(x) = h(x)$$

$$(f(x)g(x))(b(x)u(x) + a(x)v(x)) = h(x)$$

$\implies (f(x)g(x)) \mid h(x)$

# Неприводимые (неразложимые) многочлены

### Неприводимый многочлен

Многочлен $f(x) \in F[x]$ называется неприводимым над полем $F$, если его нельзя разложить в произведение многочленов меньшей степени, то есть если $\forall f(x) = g(x)h(x)$ либо $\deg g(x) = \deg f(x)$, либо $h(x) = \deg f(x)$

### Разложимый многочлем

Многочлен $f(x) \in F[x]$ приводим (разложим) над полем $F$, если существует $f(x) = g(x)h(x)$, где $g(x), h(x) \in F[x]$

## Предложение

### Теорема

Пусть $g$ неприводим над полем $F$ и $g \mid (h_1(x)h_2(x)\dots h_m(x))$. Тогда существует число $i$ такое, что $g \mid h_i(x)$

### Доказательство

Б.И. - для $m = 1$ - очевидно

Ш.И. Предположим, что утверждение доказано для случая, когда менее $m$ сомножителей.
Рассмотрим случай $m$ сомножителей. Пусть $d(x) = \text{НОД}(g(x), h_m(x))$. Тогда $\exists q(x) : g(x) = q(x)d(x)$. По условию теоремы $g$ - неприводим, поэтому возможны два случая:

1. $\deg d(x) = \deg g$, тогда $g(x)$ и $g(x)$ - ассоциированы.
2. Если $d(x) = 1$, тогда $g(x)$ и $h_m(x)$ - взаимно просты, и, по доказанной лемме, $g(x) \mid h_1(x) \cdot \dots \cdot h_{m-1}(x)$. Тогда по предположению индукции получаем, что найдётся $i$ такое, что $g(x) \mid h_i(x)$

## Теорема о разложении многочлена в произведение неприводимых многочленов

### Теорема

Каждый многочлен однозначно раскладывается в произведение неприводимых многочленов, с точностью до перестановки сомножителей и ассоциированности.

### Доказательство существования

Докажем индукцией по степени многочлена.

1. Если $f(x)$ - неприводим, то $f(x) = f(x)$
2. Пусть доказано для многочленов степени меньше $m$. При этом, если $f(x)$ разложим, то $f(x) = g(x)h(x)$. При этом $\deg g(x),\ \deg h(x) < \deg f(x)$, т.к. по предположению индукции $g(x)$ и $h(x)$ раскладываются в произведение неприводимых многочленов.

### Доказательство единственности

Предположим, что есть два разложения для $f(x)$:

$$f(x) = g_1(x)\dots g_k(x) = h_1(x)\dots h_m(x)$$

Так как $g_1(x)$ неприводим и $g_1(x) \mid h_1(x)\dots h_m(x)$, то по доказанному выше предложению существует $j$ такое, что $g_1(x) \mid h_j(x)$. Перенумеруем $h(x)$ и будем считать $j = 1$. Тогда $g_1(x) \mid h_1(x)$. Так как $h_1(x) = q(x)g_1(x)$ и $h_1(x)$ неприводим, то $\deg h_1(x) = \deg g_1(x)$, то есть $h_1(x)$ и $g_1(x)$ ассоциированы.

$$g_1(x)g_2(x)\ldots g_k(x) = cg_1(x)h_2(x)\ldots h_m(x)$$

Получаем

$$g_2(x)\ldots g_k(x) = ch_2(x)\ldots h_m(x)$$

И продолжаем аналогичный процесс. Мы найдём для $g_2(x)$ ассоциированный многочлен $h_2(x)$, далее для $g_3(x)$, и т.д.

# Корни многочленов

## Теорема Безу

### Теоерма

Если $f(x) \in F[x]$ и $c \in F$, то остаток от деления $f(x)$ на $(x - c)$ равен $f(c)$

### Доказательство

$f(x) = q(x)(x - c) + r$. Остаток имеет степерь меньше, чем $\deg q(x)$. Подставим вместо $x$ $c$: $f(c) = q(c)(c - c) + r = r$

> **Корень многочлена**
>
> Число $c \in F$ называется корнем многочлена $f(x) \in F[x]$, если $f(x) = 0$

## Основная теорема алгебры

### Теорема

Любой многочлен $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ степени не меньше, чем 1, имеет корень.

> **Следствие из основной теоремы алгебры**
>
> Если $f(x) \in F[x]$ имеет степень $n$, то $f(x)$ имеет ровно $n$ корней над полем $\mathbb{C}$ (с учетом кратности).

# Неприводимость над $\mathbb{R}$

## Лемма о сопряжённых с корнями

### Лемма

Пусть $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. Если $z \in \mathbb{C}$ является корнем $f(x)$, то и $\bar{z}$ тоже является корнем $f(x)$.

### Доказательство

$f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$, $(a_i \in \mathbb{R})$. $z$ - корень $\implies f(z) = 0$.
Рассмотрим $f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 = 0$. Возьмём сопряжённое обеих частей равенства:

$$\overline{f(z)} = \overline{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0} = \bar{0}$$

$$\bar{a}_n(\bar{z}^n) + (\bar{a}_{n-1})(\bar{z}^{n-1}) + \dots + \bar{a}_1 \bar{z} = 0$$

Так как все числа $a_i$ - вещественные, то $\bar{a}_i = a_i$. Тогда $f(\bar{z})_{=}0$.

## Теорема о неразложимости над $\mathbb{R}$

### Теорема

Над $R$ неразложимыми являются только многочлены первой степени и второй с отрицательным дискриминантом.

### Доказательство

Так как $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, то $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ имеет в точности $n$ корней над полем $\mathbb{C}$. Множество корней можно разбить на два типа: вещественные и комплексные. Но по предыдущей лемме если у $f(x)$ есть комплексный корень, сопряжённый с ним также является корнем. Рассмотрим $(x - z)(x - \bar{z})$. Заметим, что этот квадратный трёхчлен неразложим над $\mathbb{R}$, но имеет коэффициенты из $\mathbb{R}$.

Рассмотрим многочлен $f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. Возможны два случая: либо один кореньб действительный и два комплексных, либо все корни действительные. Если два корня комплексные, то он раскладывается на две неразложимые над $\mathbb{R}$. Ситуации, когда три корня комплексные, а коэффициенты действительные быть не может в силу предыдущей леммы. По индукции - многочлены более высоких степеней раскладываются аналогично.

# Разложение многочленов над $\mathbb{Q}$ и над $\mathbb{Z}$

> **Примитивные многочлены**
>
> Многочлен $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ называется примитивным, если НОД его коэффициентов равен $1$.

## Лемма Гаусса

### Лемма

Произведение примитивных многочленов $g(x) \cdot h(x) = f(x)$ является примитивным.

### Доказательство

$g(x) = b_k x^k + \dots + b_1 x + b_0$. При этом $\text{НОД}(b_k, \dots, b_0) = 1$ и $h(x) = c_k x^k + \dots + c_1 x + c_0$, $\text{НОД}(c_k, \dots, c_0) = 1$. $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, то есть $a_n = c_m b_{n-m}$, $a_{n-1} = c_{m-1} b_m + c_{m-1} b_{n-m}$, $a_i = c_0 b_i + c_1 b_{i-1} + \dots + c_i b_{k-i}$. Пусть $f(x)$ - не примитивный. Тогда $\exists d \neq 1$ такое, что $d$ делит любой коэффициент $f(x)$. Будем считать, что $d$ - простое. Возьмём наименьший индекс $i_0$ такой, что $c_{i_0}$ не делится на $d$ (если все коэффициенты $h(x)$ делятся на $d$, то $h(x)$ - не примитивный). По аналогии возьмём $j_0$ такой,что $b_{j_0}$ не делится на $d$. Рассмотрим коэффициент $a_{i_0+j_0}$ при степени $x^{i_0+j_0}$.

$$a_{i_0+j_0} = c_0 b_{i_0+j_0} + c_1 b_{i_0-1} + \dots + c_{i_0} b_{j_0} + c_{i_0+1} b_{j_0-1} + \dots + c_{i_0+j_0} b_0$$

. Тогда $c_{i_0} b_{j_0}$ не делится на $d$, то есть пришли к противоречию.

## Теорема о разложимости над $Q$

### Теорема

Пусть $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$. $f(x)$ разложим над $\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда он разложим над $\mathbb{Q}$.

### Доказательство

От противного. Пусть $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ разложим над $Q$, то есть $f(x) = g(x) h(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Тогда $g(x) = \dfrac{c_1}{b_1} g_1(x)$ и $h\left(x\right) = \dfrac{c_2}{b_2} h_1(x)$. При этом $g_1(x)$ и $h_1(x)$ - примитивные. Тогда

$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = g(x)h(x) = \dfrac{c_1 c_2}{b_1 b_2} g_1(x) h_1(x)$. По лемме Гаусса $g_1(x)h_1(x)$ - примитивный. Если $\dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{p}{q}$, то это означает, что $\dfrac{p}{q} f_1(x)$ - многочлен, то при $q \neq 1$ хотя бы один из коэффициентов которого - рациональная дробь.

## Теорема: признак Эйзенштейна

### Теорема

Пусть $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ и $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ и существует такое простое число $p$, что:

1. $p$ не делит $a_n$
2. $p$ делит все остальные $a_i$ $(i = 0, 1, \dots, n-1)$
3. $p^2$ не делит $a_0$

Тогда $f(x)$ неприводим над $\mathbb{Q}$./

### Доказательство

Пусть $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ и пусть выполняется условие признака. Тогда предположим, что $f(x)$ - разложим, то есть $f(x) = g(x)h(x)$, где $g(x) = b_k x^k + \dots + b_1 x + b_0$ и $h(x) = c_m x^m + \dots + c_1 x + c_0$.
Тогда $p^2$ не делит $c_0 \implies$ либо $p \mid c_0$ и $p$ не делит $b_0$, либо наоборот. Пусть $p \mid c_0$ и $p$ не делит $b_0$. Тогда $a_1 = b_1 c_0 + c_1 b_0$, отсюда, т.к. $p \mid a_1$, то $p \mid c_1$, далее, $a_2 = b_2 c_0 + c_1 b_1 + c_2 b_0$, отсюда $p \mid c_2$. Продолжая эти рассуждения, получаем что $a_m = b_m c_0 + c_m b_1 + \dots + c_m b_0$, то есть $p | c_m$, то есть $p \mid a_n$ - противоречие.

## Теорема о виде рациональных корней

### Теорема

Число $\dfrac{p}{q}$ является корнем многочлена $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, если $q \mid a_n$ и $p \mid a_0$

### Доказательство

Пусть $\dfrac{p}{q}$ является корнем ($p$ и $q$ - взаимно просты). Подставим $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = a_n (\dfrac{p}{q})^n + \dots + a_1 \left(\dfrac{p}{q}\right) + a_0 = 0$. Заметим, что правая часть делится на $p \implies a_0$ делится на $p$. Домножим на $q^n$, $a_n$ аналогично делится на $q$.

# Производная многочлена

**Производная многочлена**

Производной многочлена $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ называется многочлен $f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-1} + \dots + 2a_2 x + a_1$

## Свойства производной многочлена

1. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) + g'(x)$
2. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
3. $(Cf(x))' = cf'(x)$

### Доказательство

Можно вывести из определения производной.

## Кратные корни

**Кратный корень**

Число $c$ является корнем многочлена $f(x)$ кратности $k$, если множитель $(x - c)$ входит в разложение $f(x)$ в точности $k$ раз.

## Теорема о кратности корня производной

### Теорема

Пусть число $c$ является корнем многочлена $f(x)$ кратности $k \geq 1$, тогда число $c$ является корнем многочлена $f'(x)$ кратности $k - 1$.

### Доказательство

$$f(x) = (x - c)^k g(x)\$, приэтом\$(x - c)\$неделит\$g(x)$$

$$f'(x) = k(x - c)^{k-1}g(x) + (x - c)^k g'(x)$$

В обратную сторону: пусть $c$ является корнем кратности $m$. По доказанному, $c$ - корень кратности $m - 1$ для $f'(x)$. Отсюда получаем, что $k = m$

## Теорема

### Теорема

Пусть $d(x) = \text{НОД}(f(x),\ f'(x))$. Тогда $d(x)$ содержит все кратные множители многочлена $f(x)$

### Доказательство

Разложим многочлен над полем $\mathbb{C}$. Очевидно, что кратные корни, и только она входят в $f(x)$ и $f'(x)$

## Теорема: интерполяционный многочлен Лагранжа

### Теорема

Многочлен $f(x)$ степени $n$ однозначно определяется своими значениями в $n+1$ попарно различных точках.

### Доказательство

Единственность: пусть $f(x)$ и $g(x)$ имеют степень $n$ и совпадают в точках $x_0, x_1, \dots, x_n$. Тогда если $f(x) = g(x)$, то $h(x) = f(x) - g(x)$ равен $0$ в этих точках. Но тогда это многочлен степени не выше $n$, и он имеет как минимум $n+1$ корень. Но т.к. ненулевой многочлен не может иметь корней больше, чем его степень, то $h(x) = 0 \implies f(x) = g(x)$

Существование: можно показать, что

$$f(x) = f(x_0) \cdot \left( \frac{(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\dots(x_0 - x_n)} \right) + f(x_1) \cdot \left( \frac{(x - x_0)(x}{(x_1 - x_0)(x_1} \right.$$

Найдём $f(x_0)$: в первом слагаемом все скобки сократятся и останется $f(x_0)$, а остальные слагаемые обнулятся из-за множителя $(x - x_0)$.
Когда подставляется $x = x_1$, остаётся только второе слагаемое, равное $f(x_1)$, остальные обнуляются.
Получаем многочлен, который в точках $x_0, x_1, \dots, x_n$ совпадает со значениями $f(x)$, и поэтому равен $f(x)$.

Многочлен, построенный в доказательстве теоремы, называется интерполяционным многочленом Лагранжа.

# Замена базиса

# Базисы. Матрицы линейного оператора. Матрица перехода.

**Напоминание**

Пусть заданы базисы в пространствах $P$ и $Q$, и $A: P \mapsto Q$ - линейный оператор. Матрица линейного оператора в базисе $P$: $p_1, \dots, p_n$ получается следующим образом: столбцами этой матрицы являются векторы $A(p_i)$. $A_{P,Q}$ - матрица оператора в базисах $P$ и $Q$. $[x]_p$ - вектор-столбец в базисе $P$. Тогда $[A(x)]_Q = A_{P,Q}[x]_P$

**Матрица перехода**

Дано линейное пространство $V$ и даны два его базиса: $P$ и $Q$. Матрица перехода от базиса $P$ к базису $Q$ получается следущим образом: координаты векторов базиса $Q$ записываются как столбцы в базисе $P$. На матрицу перехода можно смотреть, как на матрицу линейного оператора $A_{P,Q}$.

## Теорема: преобразование кординат при замене базиса

### Теорема

Пусть $P$ и $Q$ - базисы пространства $V$. Тогда для любого вектора $x \in V$ имеем следующую формулу: $[x]_P = T_{P,Q}[x]_Q$.

### Доказательство

Рассмотрим разложение вектора $x$ в базисах $P$ и $Q$. Так как это один и тот же вектор, получаем равенство $x = x_1 p_1 + \dots + x_n p_n = x_1 q_1 + \dots + x_n q_n$. Тогда по определению матрицы перехода $q_1 = t_{11} p_1 + t_{21} p_2 + \dots + t_{n1} p_n$, ..., $q_n = t_{1n} p_1 + t_{2n} p_2 + \dots + t_{nn} p_n$.

$$x_1 p_1 + \dots + x_n p_n = x_1 (t_{11} p_1 + t_{21} p_2 + \dots + t_{n1} p_n) + \dots +$$

$$+ x_n (t_{1n} p_1 + t_{2n} p_2 + \dots + t_{nn} p_n) =$$

$$= (x_1 t_{11} + \dots + x_n t_{1n}) p_1 + \dots + (x_1 t_{n1} + \dots + x_n t_{nn}) p_n$$

$$\begin{cases} x_1 = x_1 t_1 1 + \dots x_n t_{1n} \\ \dots \\ x_n = x_1 t_{n1} + \dots + x_n t_{nn} \end{cases}$$

Тогда $\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 1 & \dots & t_1 n \\ \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, тогда $[x]_P = T_{PQ}[x]_Q$.

Очевидно, что так же можно построить и матрицу обратного перехода $T_{QP}$, $T_{QP} = (T_{PQ})^{-1}$

# Теорема: преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса

### Теорема

Пусть в пространстве $V$ заданы два базиса $P$ и $Q$, $A$ - линейный оператор. $A_P$ - матрица оператора $A$ в базисе $P$. Тогда $A_Q = T_{QP} A_P T_{PQ}$.

### Доказательство

$$[Ax]_P = A_P[x]_P = A_P T_{PQ}[x]_Q$$

$$[Ax]_P = T_{PQ}[Ax]_Q = T_{PQ}[Ax]_P$$

Тогда

$$\forall x : A_P[x]_P = A_P T_{PQ}[x]_Q = T_{PQ}[Ax]_Q = T_{PQ}[Ax]_P$$

$$T_{PQ} A_Q = A_P T_{PQ}$$

$$A_Q = (T_{PQ})^{-1} A_P T_{PQ} = T_{QP} A_P T_{PQ}$$

# Подобные матрицы

> Подобные матрицы
>
> Матрицы $A$ и $B$ называются подобными, если существует невырожденная матрица $T$ такая, что $B = T^{-1}AT$

> Tip

Матрицы оператора в разных базисах являются подобными.

# Линейное отображение в пространстве

Алярма

С этого момента Расин читает лекции по презентациям *Гейна*, а не Волкова.

## Сопряжённое отображение

Сопряженное отображение

Пусть $L_1$ и $L_2$ - пространства со скалярным произведением. Пусть $f : L_1 \mapsto L_2$ - некоторая функция. Функция $g : L_2 \mapsto L_1$ сопряжена с функцией $f$, если для любой пары векторов $x$ и $y$ имеет место $(f(x), y) = (x, g(y))$. Сопряжённую к $f$ функцию принято обозначать $f^*$.

## Теорема о единственности сопряжённой функции

**Теорема**
Если для функции $f$ существует сопряжённая функция $g$, то $g$ - единственна.

**Доказательство**
От противного. Пусть сопряжённых функций две: $g_1$ и $g_2$. Тогда $\forall x, y : (f(x), y) = (x, g_1(y)),\ (f(x), y) = (x, g_2(y))$. Тогда $(x, g_1(y)) = (x, g_2(y)) \implies (x, g_1(y)) - (x, g_2(y)) = 0$. Тогда $(x, g_1(y) - g_2(y)) = 0$. Но так как это выполняется для всех $x$, то значения $g_1$ и $g_2$ совпадают на всей области определения.

## Теорема о линейности сопряжённой функции

**Теорема**

Если у функции $f$ существует сопряжённая $g$, то $g$ - линейная

**Доказательство**

$\forall x, y: (f(x), y) = (x, g(y))$. Проверяем свойства линейности:

1. $\forall y_1, y_2 \in L_2$ покажем, что $g(y_1 + y_2) = g(y_1) + g(y_2)$.
   $f \forall x \in L_1 (f(x), y_1 + y_2) = (x, g(y_1 + y_2))$. Тогда
   $(f(x), y_1 + y_2) = (f(x), y_1 + y_2) = (f(x), y_1) + (f(x), y_2) = (x, g(y_1)) +$
   . Поскольку это имеет место для любого $x$, то
   $g(y_1 + y_2) = g(y_1) + g(y_2)$
2. Расин сказал проверить самостоятельно. Я услышал: "киньте в меня пулл реквестом".

## Теорема о повторном взятии сопряжённой функции

**Теорема**

Если $f$ имеет сопряжённую $f^*$, то $f^{**} = f$.

**Доказатесьтво**

Надо проверить, что $\forall (x, y) : (f * (y), x) = (y, f(x))$.

$$(f^*(y), x) = \overline{(x, f * (y))} = \overline{(f(x), y)} = \overline{\overline{(y, f(x))}} = (y, f(x))$$

**Следствие**

Если для функции $f$ существует сопряжённая функция, то $f$ - линейная.

## Теорема о сопряжённом отображении в пространстве со скалярным произведением

**Теорема**

Если $f$ - линейное отображение из конечномерного пространства $L_1$ в пространство $L_2$ со скалярным произведением, то для $f$ существует сопряжённое отображение.

**Доказательство**

Пусть $u_1, \dots, u_n$ - ортонормированный базис в $L_1$, $v_1, \dots, v_n$ - ОНБ в $L_2$. Тогда $\forall x, y : (f(x), y) = [f(x)^T]\overline{[y]} = [f \cdot x]^T \overline{[y]} = [x]^T [f]^T \overline{[y]}$ $= [x]^T [f]^T \overline{[y]} = [x]^T \overline{\overline{[f]^T}} [y] = (x, \overline{[f]^T} [y])$- по формуле скалярного произведения в ОНБ. Тогда $(a, b) = a_1 \overline{b}_1 + a_2 \overline{b}_2 + \dots + a_n \overline{b}_n$

$= (a_1, \ldots, a_n)\overline{\begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}}$. Мы получили, что линейный оператор с матрицей $f$ имеет сопряжённый оператор, причём, если базисы ортонормированные, матрица сопряжённого оператора является сопряжённо-транспонированной к исходной.

## Теорема: свойства сопряжения

**Теорема**

Пусть $f, g, h$ - линейные операторы из конечномерного пространства $L_1$ в $L_2$, и $\alpha$ - скаляр. Тогда

1. $(f+g)^* = f^* + g^*$
2. $(\alpha f)^* = \overline{\alpha} f^*$
3. $(fh)^* = h^* f^*$

**Доказательство**

3) $(fh(x), y) = (h(x), f^*(y)) = (x, h^* f^*(y))$

# Изометрические отображения

> **Изометрическое отображение**
>
> Линейное отображение $f : L_1 \mapsto L_2$ называется изометрическим, если $\forall x, y : (x, y) = (f(x), f(y))$

> **Пример**
>
> Изометрическое отображение в $\mathbb{R}^2$ или в $\mathbb{R}^3$ сохраняет углы между векторами и отношения их длин. Пример такого отображения: поворот плоскости на угол $\alpha$ в $\mathbb{R}^2$, или отражение относительно оси $Ox$.

## Теорема: критерий изометричности отображения

**Теорема**

Линейное отображение $f : L_1 \mapsto L_2$ изометрично $\iff \forall x \in L_1 : |f(x)| = |x|$.

### Доказательство

$\Longrightarrow$ . $(x, x) = (f(x), f(x)) \iff |x|^2 = |f(x)|^2 \iff |x| = |f(x)|$.

$\Longleftarrow$ . Пусть $\forall x \in L_1 : |f(x)| = |x|$, то есть $(f(x), f(x)) = (x, x)$. Подставим вместо $x$ вектор $x + y$. Получим, что
$(f(x+y), f(x+y)) = (x+y, x+y)$. Воспользуемся свойством линейности: $(f(x)+f(y), f(x)+f(y)) = (x+y, x+y)$.
$(f(x), f(x)) + (f(x), f(y)) + (f(y), f(x)) + (f(y), f(y))$
$= (x, x) + (x, y_+(y, x) + (y, y)$. Приводим подобные:
$(f(x), f(y)) + (f(y), f(x)) = (x, y) + (y, x)$. Рассмотрим два случая:

1. Пространство евклидово. Тогда $(a, b) = (b, a)$. Получаем $2(f(x), f(y)) = 2(x, y)$, что фактически является определением изометричности.
2. Пространство унитарно. Вместо $x$ подставим вектор $ix$. Получим $(f(ix), f(y)) + (f(y), f(ix)) = (ix, y) + (y, ix)$.
   $i(f(x), f(y)) - \overline{i}(f(y), f(x)) = i(x, y) + \overline{i}(y, x)$.
   $(f(x), f(y)) - (f(y), f(x)) = (x, y) - (y, x)$. Получаем систему уравнений $$\begin{cases} (f(x), f(y)) - (f(y), f(x)) = (x, y) - (y, x) \ (f(x), f(y)) - (f(y), f(x)) = (x, y) + (y, x)\end{cases}

$$Тогда\$2(f(x), f(y)) = 2(x, y) \Longrightarrow (f(x), f(y)) = (x, y)\$$$

## Теорема: второй критерий изометричности

### Теорема

Линейное отображение $f : L_1 \mapsto L_2$ изометрично $f^* \cdot f : L_1 \mapsto L_1$ - тождественное отображение.

### Доказательство

$\Longrightarrow$ . $\forall x, y : (x, y) = (f(x), f(y)) = (x, f^* f(y)) \Longrightarrow f^* f = y$, т.е. отображение тождественно.

## Теорема

### Теорема

1. Если $f$ - изометрическое отображение из $L_1$ в $L_2$, то любую ортонормированную систему векторов пространства $L_1$ отображение $f$ переводит в ортонормированную систему в $L_2$.
2. Если $f$ - линейное отображение из $L_1$ в $L_2$ и оно переводит некоторый ОНБ в ОНБ, то оно изометрично.

Доказательство

1. Следует из определения изометричности. $(x,y)=(f(x),f(y))=0$
2. $u_1,u_2,\dots,u_n$ - ОНБ в $L_1$. $v_1=f(u_1),v_2=f(u_2),\dots,v_n=f(u_n)$ - ОНБ в $L_2$. Возьмём вектор $x=a_1u_1+\dots+a_nu_n$.
   $|x|=\sqrt{a_1^2+\dots+a_n^2}$ (так как $u_1,\dots,u_n$ - ОНБ). В силу линейности $f(x)=f(a_1u_1+\dots+a_nu_n)=$
   $=a_1f(u_1)+\dots+a_nf(u_n)=a_1v_1+\dots+a_nv_n$.
   $|f(x)|=\sqrt{a_1^2+\dots+a_n^2}$, т.к. $v_1,\dots,v_n$ - ОНБ. Получаем, что $|x|=|f(x)|$, что является условием изометричности.

# Самосопряжённые операторы

### Самосопряжённое преобразование

Линейное преобразование называется самосопряжённым, если $f=f^*$

### Собственный вектор

Пусть $f$ - лин. преобразование лин. пространства $L$ над полем $F$. Вектор $x\in L$, $x\neq 0$ называется собственным, если $\exists a\in F: f(x)=ax$, при этом число $a$ называется собственным значением оператора $f$.

## Нахождение собственных векторов

$$[f]=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Перейдём к системе уравнений $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n = ay_1 \\ a_{21}y_1 + \dots + a_{2n}y_n = ay_2 \\ \dots \\ a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n = ay_n \end{cases}$$

Построим матрицу системы:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} - a & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - a & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - a \end{pmatrix}$$

Матрица $C : [f] - aE$ называется характеристической матрицей оператора. Поскольку собственный вектор $y \neq 0$, то система с матрицей имеет ненулевое решение, то есть её определитель навен $0$. В противном случае по правилу Крамера система имеет единственное нулевое решение. Таким образом, число $a$ является собственным значением линейного оператора $\iff |[f] - aE| = 0$.

> **Характеристический многочлен**
>
> Определитель характеристической матрицы называетсфя характеристическим многочленом.

## Теорема о собственных числах

### Теорема

Собственные значения линейного оператора являются корнями его характеристического многочлена. Каждый корень характеристического многочлена - собственное число линейного преобразования $f$.

### Доказательство

$\implies$. См. выше - сведение к матрице системы?
$\impliedby$. Пусть $A$ - корень характеристического многочлена. Тогда $|[f] - aE| = 0$. Тогда ранг характеристической матрицы меньше числа неизвестных $n$. Таким образом, размерность пространства решений равна $n - r$, то есть существует ненулевое решение $y = (y_1, \dots, y_n)$. Это означает, что $f[y] = a[y]$.

## Пример нахождения собственных значений и собственных векторов

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Составляем характеристическое уравнение. $\begin{vmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1-a \end{vmatrix} = (1-a)^2 - 1 = 0$. Тогда $a_1 = 0, a_2 = 2$.
2. Для каждого собственного значения находим собственный вектор. $(A - a_1 E) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тогда $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   Решаем систему, получаем собственнй вектор.

## Теорема о независимости хар. многочлена от выбора базиса

#### Теорема

Характеристический многочлен не зависит от выбора базиса.

#### Доказательство

$P$ и $Q$ - базисы. Тогда $[f]_Q = T_{QP}[f]_P T_{PQ} = T^{-1}[f]_P T$.

$$|[f]_Q - aE| = |T^{-1}[f]_P T - aE| = |T^{-1}[f]_P T - aT^{-1}T| = |[f]_P - aE$$

#### Следствие

Собственные значения и собственне векторы не зависят от выбора базиса, то есть однозначно определяются линейным оператором.

## Теорема о корнях характеристического многочлена самосопряжённого оператора

#### Теорема

Все корни характеристического многочлена самосопряжённого линейного оператора - действительные числа.

#### Доказательство

Пусть $a$ - собственное значение, соответствующее вектору $y$. Тогда $f(y) = ay$.
$a(y, y) = (ay, y) = (f(y), y) = (y, f^*(y)) = (y, f(y)) = (y, ay) = \bar{a}(y, y)$.
Тогда $a = \bar{a}$, то есть $a \in \mathbb{R}$.

# Теорема: критерий самосопряжённости

### Теорема

Линейное преобразование конечномерного пространства со скалярным произведением самосопряжённое $\iff$ существует ОНБ из собственных векторов, собственные числа которых действительны.

### Доказательство

$\implies$. Индукция по размерности пространства. Б.и.: $\dim L = 1$. Возьмём базисный вектор $u$. Тогда этот базисный вектор - собственный с некторым собственным значением $a$. Ш.и.: пусть утверждение доказано для размерности $\dim L = n-1$. Докажем для пространства размерности $n$. По предыдущей теореме все корни хар. многочлена действительны, значит есть собственное значение $a_1$, которому соответствует собственный вектор $u_1$. Рассмотрим подпространство $[u_1]^\perp$ - ортогональное дополнение. По теореме об ортогональном дополнении, $L =< u_1 > \oplus < u_1 >^\perp$. Пусть $x \in [u_1]^\perp$. Тогда $(f(x), u_1) = (x, f^*(u_1)) = (x, f(u_1)) = (x, au_1) = a(x, u_1) = 0$ - т.к. $x$ из ортогонального дополнения. Мы показали, что если $x \in [u_1]^\perp$, то $f(x)$ остаётся в том же пространстве. Таким образом, $f$ на $[u_1]^\perp$ является самосопряжённым линейным оператором. Поскольку $\dim [u_1]^\perp = n-1$, то по предположению индукции в $[u_1]^\perp$ есть ОНБ $u-2, \dots, u_n$. Тогда $u_1, \dots, u_n$ - ОНБ в $L$.

$\impliedby$. Пусть $u_1, u_2, \dots, u_n$ - ОНБ собственных вектором и $a_1, \dots, a_n$ - собственные значения.
$f(u_1) = a_1 u_1, f(u_2) = au_2, \dots, f(u_n) = a_n u_n$. Тогда
$f(u_1) = a_1 u_1 = a_1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \dots + 0 \cdot u_n$. Очевидно, что матрица оператора $f$ равна сопряжённо-транспонированной, так как она диагональная и все элементы на главной диагонали действительные. Тогда $f$ - самосопряжённый оператор.

# Несовместные СЛУ

## Решение несовместной системы

Пусть дана несовместная система линейных уравнений.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Будем смотреть на матрицу системы как на матрицу линейного оператора. Пусть задан некоторый базис $e_1, \ldots, e_n$. Столбцы матрицы $A$ - координаты образов векторов базиса.
$u_1 = Ae_1, u_2 = Ae_2, \ldots, u_n = Ae_n$.

Вектор $Ax$ лежит в образе оператора $A$, то есть систему можно переписать следующим образом: $Ax = b \implies$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Система несовместна $\iff$ $b$ не является линейной комбинацией векторов $u_1, \ldots, u_n$, и, следовательно $b \notin \operatorname{Im} A$. Тогда (псевдо)решением несовместной системы можно считать такой вектор $x^*$, что $|Ax^* - b|$ имеет минимальное значение.

**(Псевдо)решение системы**

Псевдорешением несовместной системы уравнений является такой вектор $x^*$, что $|Ax^* - b|$ имеет наименьшее значение. ($A$ - матрица системы, $b$ - столбец свободных членов)

Геометрически понятно, что

$$\begin{cases} (u_1, b - y^*) = 0 \\ (u_2, b - y^*) = 0 \\ \ldots \\ (u_n, b - y^*) = 0 \end{cases}$$

эта система однородна, поэтому она всегда имеет решение.
Раскроем скобки:

$$\begin{cases} (u_1, y^*) = (u_1, b) \\ (u_2, y^*) = (u_2, b) \\ \ldots \\ (u_m, y^*) = (u_m, b) \end{cases}$$

Тогда по свойствам скалярного произведения

$$\begin{cases} u_1^T y^* = u_1^T b \\ \ldots \\ u_m^T y^* = u_m^T b \end{cases}$$

$$\begin{cases} (Ae_1)^T Ax^* = (Ae_1)^T b \\ \dots \\ (Ae_m)^T Ax^* = (Ae_m)^T b \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_1^T A^T Ax^* = e_1^T A^T b \\ \dots \\ e_m^T A^T Ax^* = e_m^T A^T b \end{cases}$$

Первое уравнение означает, что векторы $A^T Ax^*$ и $A^T b$ имеют одинаковые координаты. Второе уравнение означает, что векторы $A^T Ax^*$ и $A^T b$ имеют одинаковые координаты. .... $m$-е уравнение означает, что векторы $A^T Ax^*$ и $A^T b$ имеют одинаковые координаты. Следовательно векторы $A^T Ax^*$ и $A^T b$ равны. Мы получили систему уравнений $A^T Ax^* = A^T b$. Она совместна, т.к. кратчайшее расстояние между векторами существует. Решение этой системы - $x^*$ - является её псевдорешением.

При этом была также решена задача поиска вектора $x^*$, который минимизирует расстояние до вектора $b$.

## Метод наименьших квадратов

### нет блин квадрат наименьших методов

Пусть дано множество точек плоскости $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Нужно найти прямую, которая минимизирует сумму квадратов расстояний от этой прямой до каждой из этих точек.

Пусть $y = kx + b$ - уравнение данной прямой.

$S = \min \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - (kx + b))^2$. Нам неизвестны коэффициенты $k$ и $b$.

Тогда можно составить систему $\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial k} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0 \end{cases}$

Если случай не двумерный, нужно найти приближённое решение в виде $y = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$. $(x_{11}, \dots, x_{1n}\ ;\ y_1)$, ..., $(x_{m1}, \dots, x_{1n}\ ;\ y)$.

Тогда нужно решить систему

$$\begin{cases} y_1 = a_1 x_{11} + \dots + a_n x_{1n} \\ y_2 = a_1 x_{21} + \dots + a_n x_{2n} \\ \dots \\ y_m = a_1 x_{m1} + \dots + a_n x_{mn} \end{cases}$$

Тогда нужно решить несовместную систему с $A = \begin{pmatrix} x_11 & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$ и $b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}$

# Сингулярное разложение

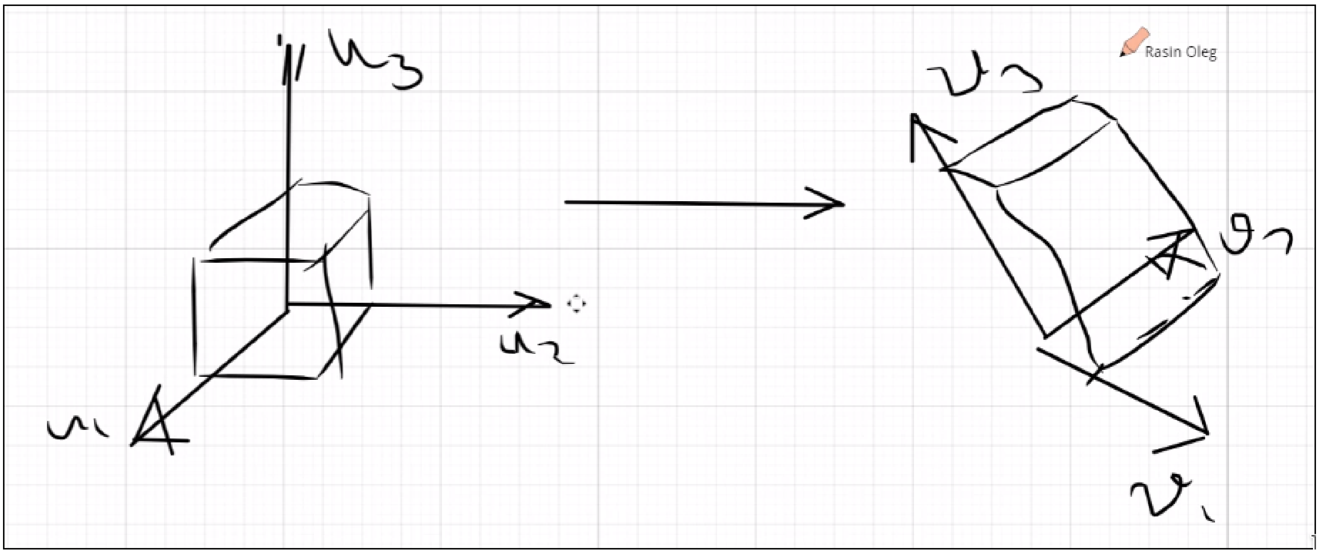
## Сингулярное представление линейного отображения

### Введение

Ранее было показано, что изометрическое отображение переводит любой ОНБ в ОНБ. Очевидно, что для произвольного линейного оператора такое не обязательно выполняется.

Можно ли для данного отображения $f : L_1 \mapsto L_2$ в $L_1$ подобрать такой ОНБ, который переводится в ортогональную систему векторов $L_2$?

Пусть существует такой базис $u_1, u_2, u_3$. Тогда $b_1 = f(u_1), b_2 = f(u_2), b_3 = f(u_3)$, $b_1, b_2, b_3$ - ортогональны. Если теперь поделить $b_1, b_2, b_3$ на длины, то получим ортонормированную систему векторов $v_1, v_2, v_3$. Тогда получим числа $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ такие, что $f(u_1) = \sigma_1 v_1$, $f(u_2) = \sigma_2 v_2$, $f(u_3) = \sigma_3 v_3$. Это похоже на самосопряжённый оператор.




Для каждого отображения $f$ можно рассмотреть отображение $f \circ f^*$. Это отображение самосопряжённое.

## Лемма

### Лемма

Бро, понимаешь, есть два пространства $L_1$ и $L_2$, они конечномерные и со скалярным произведением. И есть еще одно отображение $f$, которое линейное и переводит векторы из $L_1$ в $L_2$. Тогда $\ker f \circ f^* = \ker f$

### Доказательство

$\implies$. Пусть $x \in \ker f$, то есть $f(x) = 0$. Тогда $(f \circ f^{)}(x) = f^*(f(x)) = f^*(0) = 0 \implies x \in \ker f^*$.

$\impliedby$. Пусть $x \in \ker f \circ f^*$. Тогда рассмотрим $(f(x), f(x)) = (x, f^*(f(x)) = (x, (f \circ f^*)(x)) = (x, 0) = 0$

### Следствие

$\mathrm{r}(f)$ - ранг оператора $f$.
Тогда $\mathrm{r}\ (f) = \mathrm{r}(f^*)$.

### Доказательство следствия

По теореме о размерности ядра и образа (о ранге и дефекте) линейного оператора,
$\mathrm{r}(f) + \dim \ker f = r(f \circ f^*) + \dim \ker(f \circ f^*) = \dim L_1$. Тогда размерности образов этих преобразований равны.

## Теорема о сингулярном разложении

### Теорема

Пусть $L_1$, $L_2$ - конечномерные пространства со скалярным произведением, $f : L_1 \mapsto L_2$, $f$ ненулевое. Пусть $m = \dim L_1$, $n = \dim L_2$, $r$ - ранг отображения $f$. Тогда существуют ОНБ $u_1, u_2, \dots, u_n$ в $L_1$ и ОНБ $v_1, \dots, v_n$ в $L_2$ такие, что $\begin{cases} f(u_i) = \sigma_i v_i & | 1 \le i \le r \\ f(u_i) = 0 & | r < i \le m \end{cases}$. При этом числа $\sigma_i$ определены однозначно и не зависят от выбора базиса $u_1, \dots, u_m$. При этом числа $\sigma_i$ называются сингулярными числами оператора.

### Доказательство

$f \circ f^* : L_1 \mapsto L_1$ - самосопряжённый оператор, так как $(f \circ f^*)^* = (f^*)^* \circ (f^*) = f \circ f^*$. Поэтому в $L_1$ существует ОНБ $u_1, u_2, \dots, u_n$ из собственных векторов оператора $f \circ f^*$. Тогда по доказанному выше следствию $r(f \circ f^*) = r(f) = r$. При этом только $r$ собственных чисел отличны от нуля. Пусть $a_1, \dots, a_m$ - собственные числа данных собственных векторов. Пусть $f(u_i) = z_i$ $(i = 1 \dots m)$. Тогда
$(z_i, z_j) = (f(u_i), f(u_j) = (u_i, f^*(f(u_j))) =$
$(u_i, (f \circ f^*)(u_j)) = (u_j, \bar{a}_j u_j) = \bar{a}_j(u_i, u_j)) = 0$. Тогда
$(z_i, z_j) \neq 0 \implies z_i \neq 0$.
При $i = j$ $(z_i, z_j) = a_i(u_i, u_i) = a_i$. $a_i = (z_i, z_i) = |z_i|^2$. Тогда
$\sigma_i = \sqrt{a_i} = |z_i|$. Тогда $v_i = \dfrac{z_i}{|z_i|} \implies v_i = \dfrac{1}{\sigma_i} z_i$. Получили, что
$v_1, \dots, v_r$ - ортонормированная система и
$f(u_i) = z_i = \sigma_i v_i$ $(i = 1, \dots, r)$, $f(u_i) = 0,\ (i = r+1, \dots, m)$

Теперь докажем единственность чисел $\sigma_1, \dots, \sigma_m$. Рассмотрим матрицу отображения $F$ в базисах $u_i$ и $v_i$.

$[f] \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r^2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $[f^*] = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r^2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. При этом первая матрица размера $m \times n$, а вторая - $n \times m$. Поэтому

$$[f \circ f^*] = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r^2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ - матрица $n \times n$. При этом $\sigma_1^2, \dots, \sigma_r^2$. Осталось заметить, что собственные числа определяются однозначно, так как мы по условию брали их положительными. При этом $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ называются сингулярными числами. Для определённости можно упорядочить их по убыванию.

## Теорема о свойствах наибольшего сингулярного числа.

### Теорема

Пусть $L_1, L_2$ - конечномерные пространства со скалярным произведением. Пусть $f : L_1 \mapsto L_2$ - ненулевое отображение. Тогда $\forall x \in L_1 : |f(x)| \leq \sigma_1 |x$, где $\sigma_1$ - наибольшее сингулярное число.

### Доказательство

Возьмём $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r$ - сингулярные числа. Тогда $u_1, u_2, \dots, u_m$ - соответствующий ОНБ из собственных векторов. Пусть $x = a_1 u_1 + \dots + a_m u_m$. Тогда $f(x) = a_1 f(u_1) + \dots + a_m f(u_m) = a_1 \sigma_1 v_1 + \dots + a_r \sigma_r v_r =$ $= a_1 \sigma_1 v_1 + \dots + a_r \sigma_r v_r$. Так как $v_1, \dots, v_r$ - ортонормированная система, то $|f(x)|^2 = (f(x), f(x)) = (a_1 \sigma_1 v_1 + \dots + a_r \sigma_r v_r) =$ Ребятки, записать не успел, наблюдайте скриншот Расина.

Док – во :

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r$ – сингулярные числа

$u_1, u_2, \ldots, u_m$ – соответствующий ОНБ собственных векторов оператора $f \circ f^*\ (m \geq r)$

$x = a_1 u_1 + \ldots + a_m u_m$

$f(x) = a_1 f(u_1) + \ldots + a_m f(u_m) = a_1 \sigma_1 v_1 + \ldots + a_r \sigma_r v_r = a_1 \sigma_1 v_1 + \ldots + a_r \sigma_r v_r$

$v_1, \ldots, v_r$ – ОНС

$$|f(x)|^2 = (f(x), f(x)) = (a_1\sigma_1 v_1 + \ldots + a_r \sigma_r v_r, a_1 \sigma_1 v_1 + \ldots + a_r \sigma_r v_r) =$$
$$= a_1 \bar{a}_1 \sigma_1^2 (v_1, v_1) + \ldots + a_1 \bar{a}_1 \sigma_r^2 (v_r, v_r) = |a_1|^2 \sigma_1^2 + \ldots + |a_r^2| \sigma_r^2 \leq |a_1|^2 \sigma_1^2 + \ldots + |a_r^2| \sigma_r^2 =$$

$$= \sigma_1^2 \left(|a_1|^2 + \ldots + |a_r|^2\right) = \sigma_1^2 |x|^2$$

(пояснение : $x = a_1 u_1 + \ldots + a_m u_m$
$u_1, \ldots, u_m$ – ОНБ
$|x|^2 = (x, x) = \ldots$)

## Следствие

Наибольшее сингулярное значение $\sigma$ это $\max\limits_{|x|=1} |f(x)|$.

# ??Что??

---

В соответствующих ОНБ матрица оператора $f$ имеет вид

$$[f] \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & \sigma_r^2 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$. Продолжение с этого момента:

возьмем произвольные ОНБ пространств $L_1$ и $L_2$

$(a_1, \ldots, a_m)$ базис в $L_1$ и $(b_1, \ldots, b_n)$ базис в $L_2$

Пусть $U_{AU}$ – матрица перехода от вектров $a$ к веторам $u$

$V_{BV}$ – матрица перехода от $B$ к $V$

для любого вектора $x \in L_1$

$$[x]_A = U_{AU}[x]_u$$

$$[f(x)]_B = V_{BV}[f(x)]_V$$

Rasin Oleg

$$[f(x)]_V = [f][x]_v$$

$$[f(x)]_b = A[x]_a$$

Rasin Oleg

$A$ – матрица данного оператора в базиса $a_i$ и $b_j$

$$[f(x)]_B = V_{BV}[f(x)]_V = V_{BV}[f][x]_u$$

$$[f(x)]_b = A[x]_a = AU_{AU}[x]_u$$

поскольку это выполняется для любого $x$, то получаем

$$V_{BV}[f] = AU_{AU}$$

$$A = V_{BV}[f]U_{AU}^{-1}$$

# Теорема о сингулярном разложении матрицы

### Теорема

1. Пусть $A$ - матрица над $\mathbb{C}$. Тогда существуют положительные числа $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ и такие *унитарные матрицы* $U$ и $V$ такие, что $A = V \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r^2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} U$
2. Пусть $A$ - матрица над $\mathbb{C}$. Тогда существуют положительные числа $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ и такие *ортогональные матрицы* $U$ и $V$ такие, что $A = V \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r^2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} U$

### Доказательство

Следует из предыдущего.

# Псевдообратное отображение

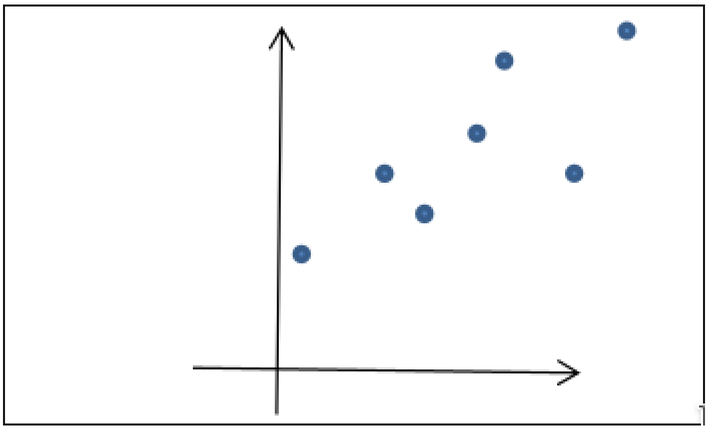
> Что это было?..
>
> Пусть $f : L_1 \mapsto L_2$ - линейное отображение в пространстве со скалярным произведением. Пусть $m = \dim L_1, n = \dim L_2$. По теореме о сингулярном разложении существуют ОНБ $u_1, \dots, u_m$ в $L_1$ и $v_1, \dots, v_n$ в $L_2$. При этом для некоторого $r$ для всех $i \in 1, \dots, r$ $f(u_i) = \sigma_i v_i$ и $f(u_i) = 0$, если $i = r + 1, \dots, m$. $\sigma_i$ - сингулярные числа, $\sigma_i > 0, 1 \leq i \leq r$. $f(u_i) = \sigma_i v_i$, $i = 1 \dots r$.
>
> Рассмотрим для $L_2$ отображение $g(v_i) = \dfrac{1}{\sigma_i} u_i$, при $i = 1, \dots, r$.
>
> Рассмотрим отображение $f^+(y) = \begin{cases} g(y) : y \in < v_1, \dots, v_r > \\ 0, y \in < v_{r+1}, \dots, v_n \end{cases}$

**Псевдообратное отображение**

Отображение $f^+(y) : L_2 \mapsto L_1$ (см. выше) называется псевдообратным к отображению $f$.

# Приложения сингулярного разложения

## Формулировка задачи



Пусть даны точки $M_1, \ldots, M_n$. Нужно провести прямую таким образом, чтобы сумма расстояний от точек до этой прямой была наименьшей.

**Abstract**

Пусть дано линейное пространство $L$, $M$ - его подпространство, $r$ - некоторый вектор. Множество векторов вида $r + M = \Pr + u : u \in M\}$ называется линейным многообразием в $L$. При этом $M$ называется направляющим подпространством для многообразия $r + M$.

## Лемма о линейных многообразиях

**Лемма**

$r + M = s + M \iff r - s \in M$.

**Доказательство**

$\implies$. $u \in r + M$, $s + M$. Тогда $u = r + m_1 = s + m_2$. Таким образом, $r - s \in M$

$\impliedby$. Расин сказал доказать самосотятельно.

# Теорема

## Теорема

Предположим, что для любых векторов $x_1, \ldots, x_n$ линейное многообразие $r + M$ имеет размерность $k$ и таково, что для любого многообразия $r' + M'$ размерности не более $k$ выполняется неравенство $\sum_{i=1}^{n} (d(x_i, r + M))^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (d(x_i, r' + M'))^2$. Тогда $r + M = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} + M$, где $d(x_i, r' + M')$ - длина ортогональное проекции вектора $x_i - r'$ на подпространство $M$.

## Ljrfpftkmcndj

Рассмотрим $s = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$. Пусть $w_i = x_i - s$ (ортогональная составляющая вектора $x_i - s$)

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - s) = (\bar{x}_1 + \cdots + \bar{x}_n - n\bar{s}) = \bar{x}_1 + \cdots + \bar{x}_n - (\bar{x}_1 + \cdots + \bar{x}_n) = 0$$

В частности $w_1 + \cdots + w_n = 0$, и, следовательно $w_n = -w_1 - \cdots - w_{n-1}$

Пусть $r$ - вектор как в условии теоремы. Рассмотрим ортогональную составляющую $t = s - r$ на подпространство $M$.

$x_i - r = (x_i - s) + (s - r) = w_i + t$.

$$\sum_{i=1}^{n} (d(x_i, r + M))^2 = \sum_{i=1}^{n} (d(x_i - r, M))^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |w_i + t|^2 = \sum_{i=1}^{n-1} |w_i + t|^2 + |w_n + t|^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} |w_i + t|^2 + |- w_1 - \cdots - w_{n-1} + t|^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} |w_i + t|^2 + |t - \sum_{i=1}^{n-1} w_i|^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} ((w_i, w_i) + (w_i, t) + (t, w_i) + (t_t)) + (t, t) -$$

$$- \left(t, \sum_{i=1}^{n-1} w_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n-1} w_i,\ t\right) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} w_i, \sum_{i=1}^{n-1} w_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} |w_i|^2 + \left(\sum_{i=1}^{n-1} w_i, t\right) + \left(t, \sum_{i=1}^{n-1} w_i\right) + (n-1)|t^2| + |t^2| -$$

$$- \left(t, \sum_{i=1}^{n-1} w_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n-1} w_i, t\right) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} w_i, \sum_{i=1}^{n-1} w_i\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} |w_i|^2 + n|t^2| + (w_n, w_n) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} |w_i|^2 + n|t^2| + |w_n|^2 = \sum_{i=1}^{b} |w_i|^2 + n|t^2|$$

Поскольку у ортогональной составоябщей вектора $r$ длина наименьшая по предположению, то

$$\sum_{i=1}^{n} |w_i|^2 + n|t^2| \geq \sum_{i=1}^{n} |w_i|^2 =$$
$$= \sum +i = 1^n d(x_i, s + M)^2 \geq \sum d(x_i, r + M)^2$$

Поскольку изначально раскладывалась правая часть неравенства и она совпадает с левой, то

$$\sum_{i=1}^{n} |w_i|^2 + n|t^2| = \sum_{i=1}^{n} |w_i|^2$$

> УРА
>
> ЭТА ШЛЯПА КОНЧИЛАСЬ
>
> ---

# Линейные и квадратичные функции и формы

## Билинейные функции

> Билинейная функция
>
> Пусть $L$ - линейное пространство над $F$. Тогда отображение $f : L \times L \mapsto F$ называется билинейным, если:
>
> 1. $f(\alpha x, y) = f(x, \alpha y) = \alpha f(x, y)$
> 2. $f(x_1 + x_2, y = f(x_1, y) + f(x_2, y)$

3. f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2)

Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ - базис $L$. Тогда $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n$ и $y = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n$

$f(x, y) = \alpha_1 \beta_1 f(a_1, a_1) + \alpha_1 \beta_2 (a_1, a_2) + \dots + \alpha_1 \beta_n f(a_1, a_n) +$
$+ \alpha_2 \beta_1 f(a_2, a_1) + \alpha_2 \beta_2 (a_2, a_2) + \dots + \alpha_2 \beta_n f(a_2, a_n) + \dots$
$+ \alpha_n \beta_1 f(a_n, a_1) + \alpha_n \beta_2 (a_n, a_2) + \dots + \alpha_n \beta_n f(a_n, a_n)$

Пусть $\gamma_{ij} = f(a_i, a_j)$. Тогда $[f] = (\gamma_{ij})$

$G = \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \dots & (a_1, a_n) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & \dots & (a_2, a_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_n, a_1) & (a_n, a_2) & \dots & (a_n, a_n) \end{pmatrix}$ - матрица Грамма

$f(x, y) = [x]^t [f] [y]$

## Билинейные формы

**Формы**

Формой называется однородный многочлен, то есть такой, что $f(nx) = n f(x)$

**Билинейная форма**

Многочлен от двух систем переменных, линейный по каждой из этих систем, называется билинейной формой.

## Теорема о линейном пространстве линейных функций

### Теорема

Линейные функции относительно операций сложения и умножения на элементы поля образуют линейное пространство.

### Доказательство

$$\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$$

$\alpha(f+g)(x,y)=\alpha(f(x,y)+g(x,y))=\alpha(f(x,y))+\alpha(g(x,y))=(\alpha f+\alpha g)($

При этом размерность пространства билинейных функций $n^2$, где $n$ - количество аргументов.

# Симметричные билинейные функции

**Симметричная билинейная функция**

Билинейная функция $f$ называется симметричной, если $\forall x,y: f(x,y)=f(y,x)$. Матрица такой функции симметрична.

# Квадратичные функции

**Квадратичная функция**

$f: L \mapsto F$ - квадратичная, если $\exists$ билинейная функция $g$ такая, что $f(x)=g(x,x)$. Тогда $f(x)=[x]^t[g][x]$

## Теорема:

**Теорема**

Для любой квадратичной функции существует единственная билинейная функция, из которой она получается

**Доказательство**

Доказательство. Пусть $g(x)$ – квадратичная функция на пространстве $L$, $f(x, y)$ – порождающая её билинейная функция. Ясно, что $f(y, x)$ – это тоже билинейная функция.

**?** Как связаны матрицы функций $f(x, y)$ и $f(y, x)$?

Рассмотрим билинейную функцию $h(x, y) = \frac{1}{2}(f(x, y) + f(y, x))$. Ясно, что функция $h(x, y)$ симметрична. Кроме того, $h(x, x) = \frac{1}{2}(f(x, x) + f(x, x)) = f(x, x) = g(x)$.

Пусть теперь $f(x, y)$ – симметрическая билинейная функция, порождающая квадратичную функцию $g(x)$, т.е. $g(x) = f(x, x)$.

**?** $g(x)$ – функция одной переменной, а получить мы хотим функцию $f(x, y)$ двух переменных. Как этого добиться?

$g(x + y) = f(x + y, x + y) = f(x, x) + f(x, y) + f(y, x) + f(y, y) = g(x) + 2f(x, y) + g(y)$. Значит,

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(g(x + y) - g(x) - g(y)),$$

т.е. функция $f(x, y)$ однозначно восстанавливается по функции $g(x)$. □

# Квадратичные формы

### Квадратичная форма

Однородный многочлен второй степени от одной системы переменных называется квадратичной формой. Матрица квадратичной формы - это матрица симметричной билинейной функции, из которой она получилась.

## Матричный вид

Легко проверить, что квадратичную форму $f(x_1, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{n-1\,n}x_{n-1}x_n$ можно записать в матричном виде

$$f = (x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

## Невыдрожденная замена переменных

Даны наборы переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Тогда, если $x_1 = b_{11}y_1 + \cdots + b_{1n}y_n$, $x_2 = b_{21}y_1 + \cdots + b_{2n}y_n$, $\ldots$, $x_n = b_{n1} + \cdots + b_{nn}y_n$. Тогда мы имеем невырожденную замену $x = By$.

## Замечание о невырожденной замене

### Замечание

Если к квадратичной форме $f = X^TAX$ применить невырожденную замену $x = By$, то получим квадратичную форму с матрицей $B^TAB$.

### Доказательство

$f = (BY)^TA(BY) = Y^TB^TABY$

## Конгруэнтные матрицы

> **Конгруэнтные матрицы**
>
> Матрицы $A$ и $B$ конгруэнтны, если существует невырожденная $C$ такая, что $A = C^TBC$. Очевидно, что отношение конгруэнтности является отношением эквивалентности. Таким образом, если одна квадратичная форма получается невырожденной заменой из другой, то их матрицы конгруэнтны.

## Замечание о конгруэнтных матрицах

### Замечание

Конгруэнтные матрицы либо имеют определители равные нулю, либо одинаковых знаков.

### Доказательство

$|B| = |C^TAC| = |C^T||A||C| = |C||A||C| = |C|^2|A|$

# Канонический вид

> **Канонический вид**
>
> Квадратичная форма имеет канонический вид, если её матрица диагональна (или в самой квадратичной форме есть только квадраты.)

# Тоеорема о приведении к квадратичной форме

### Теорема

Из любой квадратичной формы с помощью невырожденной замены переменных можно получить квадратичную форму в каноническом виде.

### Метод Лагранжа. Доказательство.

1 случай. $a_{11} \neq 0$. Тогда собираем всё с $x_1$и получаем
$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + \\ + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

Выделяем полный квадрат:
$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n + f'(x_2, \ldots$$

> **Я черешня**
>
> украдите у расина пожалуйста

2 случай. $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 0$. Тогда получаем квадрат перед $x_1$: делаем замену $x_1 = y_1 - y_2, x_2 = y_1 + y_2, x_3 = y_3, \ldots, x_n = y_n$. Получаем квадратичную форму, у которой первая переменная в квадрате. Приходим к случаю 1.

Указанная замена будет невырожденной, так как
$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$
. Её определитель равен двум.

# Замечание о последовательности невырожденных замен

### Замечание

Последовательность невырожденных замен является невырожденной заменой.

### Доказательство

$$X = BY,\ Y = CZ \implies X = BY = B(CZ) = (BC)Z$$

### Метод приведения к главным осям

Матрица квадратичной формы $A$ является симметричной $\implies$ у неё есть ОНБ из собственных векторов $\implies$ она диагонализирума. Тогда $A = T_{ES}DT_{SE}$. Матрица перехода невырождена, то есть замена невырожденная.

## Теорема: закон инерции квадратичных форм

### Теорема

Если квадратичная форма над $R$ приведена двумя различными невырожденными преобразованиями к каноническому виду, то полученные формы имеют одинаковое число положительных, отрицательных и нулевых коэффициентов при квадратах.

### Доказательство

Предположим, что мы привели квадратичную форму $f = X^TAX$ к каноническому виду $g = Y^TDY$. Пусть замена имеет вид $X = TY$, где матрица $T$ ортогональна (метод приведения к главным осям). В этом случае $f - Y^TT^TATY$, $g = Y^TDY$. Таким образом, $D = T^TAA^T$. Ранги матриц $A$ и $D$ совпадают, поэтому $r(AB) \leq \min r(A)\, r(B)$. Поэтому количество нулевых коэффициентов совпадает.

Предположим теперь, что форма $f$ приводится к каноническому виду невырожденной линейной заменой $x = Ty$:

$$f(y_1, \ldots, y_n) = t_1 y_1^2 + \cdots + t_k y_k^2 - t_{k+1} y_{k+1}^2 - \cdots - t_{k+1} y_{k+1}^2,$$
$$t_i > 0,\ i = 1, \ldots, k + l$$

Предположим теперь, что форма $f$ приводится к каноническому виду другой невырожденной линейной заменой $x = Sz$:

$$f(y_1, \ldots, y_n) = s_1 z_1^2 + \cdots + s_p z_p^2 - s_{p+1} z_{p+1}^2 - \cdots - s_{p+1} z_{p+1}^2,$$
$$s_i > 0,\ i = 1, \ldots, p + q$$

Таким образом, у нас $k + l = p + q$. Будем считать, что $k < p$. Замены переменных в общем виде:

$$x = Ty : \quad \begin{cases} x_1 = b_{11}y_1 + \cdots + b_{1n}y_n \\ \ldots \\ x_n = b_{n1}y_1 + \cdots + b_{nn}y_n \end{cases} \implies y = T^{-1}x$$

$$x = Sz: \quad \begin{cases} x_1 = c_{11}z_1 + \dots + c_{1n}z_n \\ \dots \\ x_n = c_{n1}z_1 + \dots + c_{nn}z_n \end{cases} \implies y = S^{-1}Y$$

$$\begin{cases} y_1 = d_{11}x_1 + \dots + d_{1n}x_n \\ \dots \\ y_n = d_{n1}x_1 + \dots + d_{nn}x_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1 = f_{11}x_1 + \dots + f_{1n}x_n \\ \dots \\ z_n = f_{n1}x_1 + \dots + f_{nn}x_n \end{cases}$$

Покажем, что существует ненулевой набор переменных $x_1, \dots, x_n$ такой, что $y_1 = y_2 = \dots = y_k = z_{p+1} = z_{p+2} = \dots = z_n = 0$.
Таким образом, получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} d_{11}x_1 + \dots + d_{1n}x_n = 0 \\ \dots \\ d_{k1}x_1 + \dots + d_{kn}x_n = 0 \\ f_{p+11}x_1 + \dots + f_{p+1n}x_n = 0 \\ \dots \\ f_{n1}x_1 + \dots + f_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

В этой системе $k + n - p < n$ уравнений, она однородна $\implies$ их бесконечно много, то есть существует ненулевое решение $x'_1, \dots, x'_n$. Такому решению однородной системы соответствуют решения

$$\begin{cases} x'_1 = c_{11}z_1 + \dots + c_{1n}z_n \\ \dots \\ x'_n = c_{n1}z_1 + \dots + c_{nn}z_n \end{cases} \implies y = S^{-1}Y$$

$$\begin{cases} x'_1 = b_{11}y_1 + \dots + b_{1n}y_n \\ \dots \\ x'_n = b_{n1}y_1 + \dots + b_{nn}y_n \end{cases} \implies y = T^{-1}x$$

По предположению выше:

$$y_1 = y_2 = \dots = y_k = z_{p+1} = z_{p+2} = \dots = z_n = 0$$

А значит

$$y'_1 = y'_2 = \dots = y'_k = z'_{p+1} = z'_{p+2} = \dots = z'_n = 0$$

Тогда

$$f(x'_1, \dots, x'_n) = f(y'_1, \dots, y'_n) = t_1(y_1)^2 + \dots + t_n(y_n)^2 =$$

$$= -t_{k+1}(y_1)^2 - \dots - t_{k+1}(y_n)^2$$

$$f(x'_1, \dots, x'_n) = f(z'_1, \dots, z'_n) = s_1(z_1)^2 + \dots - s_n(z_n)^2 =$$

$$= s_1(z_1)^2 + \dots + s_p(z_p)^2$$

Таким образом, мы получили противоречие: при одинаковом наборе переменных получились числа разных знаков, которые по предположению должны быть равны.

# Эквивалентность квадратичных форм

**Эквивалентные квадратичные формы**

Квадратичные формы $f$ и $g$ называются эквивалентными, если одна из них может быть получена из другой с помощью невырожденной линейной замены.

## Теорема об эквивалентности квадратичных форм

**Теорема**
Квадратичные формы эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый положительный и отрицательный индекс инерции.

**Доказательство**
$\Longrightarrow$ пусть $f \sim g$, т.е. существует невырожденная замена переменных $X = TY$, приводящая $f$ к $g$.
Пусть $Y = SZ$ - замена, приводящая $g$ к форме $h$, имеющей канонический вид.

$$X = TY = T(SZ) = (TS)Z$$

то есть $f$ приводится к $h$.
Таким образом, мы получаем, что $f$ и $g$ приводятся к одной и той же канонической форме, то есть положительные и отрицательные индексы у них совпадают.

$\Longleftarrow$ . Предположим, что $f$ и $g$ имеют одинаковые положительные и отрицательные индексы. Это означает, что $f$ приводится к форме $h_1$ заменой $X = TX'$, а $g$ приводится к форме $h_2$ заменой $Y = SY'$.
Переименовав коэффициенты, можно получить

$$h_1 = a_1 {x'_1}^2 + \dots + a_k {x'_k}^2 - a_{k+1} {x'_{k+1}}^2 - \dots - a_{k+1} {x'_{k+1}}^2$$

$$h_2 = b_1 {y'_1}^2 + \dots + b_k {y'_k}^2 - b_{k+1} {y'_{k+1}}^2 - \dots - b_{k+1} {y'_{k+1}}^2$$

Делаем замену:

$$x_1 = \sqrt{\frac{b_1}{a_1}} y_1$$

$$x_{k+1} = \sqrt{\frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}} y_{k+1}$$

$$X' = UY'$$

Переходим линейной заменой от $f$ к $g$

$$f \to^T h_1 \to^U h_2 \to^{S^{-1}} g$$

# Положительно определённые квадратичные формы

**Положительно определённая квадратичная форма**

Квадртичная форма называется положительно определённой, если на каждом ненулевом наборе значений она принимает положительное значение

## Теорема о каноническом виде положительно определённой формы

**Теорема**

Квадратичная форма $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ положительно определена $\iff$ в любом её каноническом виде $t_1 x_1^2 + \dots + t_n x_n^2$ $(t_1 > 0, \dots, t_n > 0)$

**Доказательство**

$\implies$. Если форма приводится к такому каноническому виду заменой $X = TY$

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n) = t_1 y_1^2 + \dots + t_n y_n^2$$

то получается положительно определённая квадратная форма

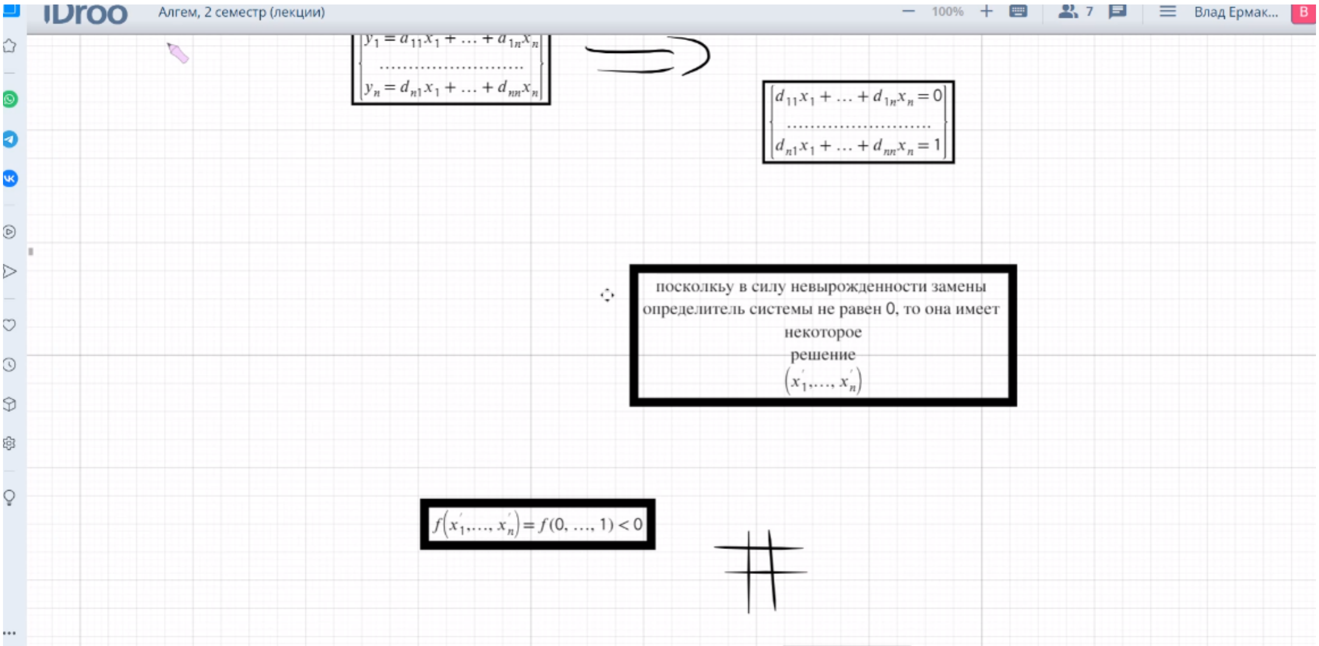
$\Longleftarrow f$ - положительна определена, но при этом получаем $t_n < 0$.

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n) = t_1 y_1^2 + \dots + t_n y_n^2$$

при наборе $y_1 = \dots = y_{n-1} = 0, y_n = 1$ положительно определена.

$$f(0, 0, \dots, 1) < 0$$

$$\begin{cases} y_1 = d_{11}x_1 + \dots + d_{1n}x_n \\ \dots \\ y_n = d_{n1}x_1 + \dots + d_{nn}x_n \end{cases} \Longrightarrow$$




$$\Longrightarrow \begin{cases} d_{11}x_1 + \dots + d_{1n}x_n = 0 \\ \dots \\ d_{n1}x_1 + \dots + d_{nn}x_n = 1 \end{cases}$$

## Теорема: критерий Сильвестра

**Угловые миноры**

Пусть $A$ - квадратная матрица, для каждого $k$ миноры, расположенные в первых $k$ столбцах, называются угловыми минорами.

**Теорема**

Квадратичная форма является положительно определённой $\iff$ все угловые миноры её матрицы положительны.

### Доказательство из википедии

Пусть $q(x)$ — положительно определённая квадратичная форма. Тогда $j$-й диагональный элемент положителен, так как $q(e_j) > 0$, где $e_j$ - вектор со всеми нулевыми координатами, кроме $j$-й При приведении матрицы к каноническому виду в силу невырожденности угловых миноров стро́ки не нужно будет переставлять, поэтому в итоге знаки главных миноров матрицы не изменятся. А в каноническом виде диагональные элементы положительны, а значит и миноры положительны; следовательно, (так как их знак не менялся при преобразованиях) у положительно определённой квадратичной формы в любом базисе главные миноры матрицы положительны.

$\Longleftarrow$ . Дана симметричная квадратичная форма, все угловые миноры которой положительны. Рассмотрим сначала первый диагональный элемент в каноническом виде: его знак определяется первым угловым минором. Далее, знак числа $\dfrac{\Delta_{i+1}}{\Delta_i}$ определяет знак $(i+1)$ -го элемента в диагональном виде. Получается, что в каноническом виде все элементы на диагонали положительные, то есть квадратичная форма определена положительно.

### Доказательство из более надёжного источника

> **Теорема (Сильвестр, 1852)**
>
> *Квадратичная форма над $\mathbb{R}$ положительно определена тогда и только тогда, когда все угловые миноры ее матрицы положительны.*
>
> *Доказательство. Необходимость.* Пусть форма $q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^T A X$ положительно определена. Тогда из нее невырожденной линейной заменой переменных можно получить форму
>
> $$\alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \cdots + \alpha_n y_n^2, \qquad (*)$$
>
> где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n > 0$. Матрица формы $(*)$ диагональна и ее определитель равен $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n > 0$. На прошлой лекции мы отмечали, что если форма $g$ получена из формы $q$ невырожденной линейной заменой переменных, то определители матриц форм $q$ и $g$ либо оба положительны, либо оба отрицательны, либо оба равны 0. В нашем случае определитель матрицы формы $(*)$ положителен, откуда и определитель $|A| = \Delta_n$ положителен.
>
> Осталось заметить, что если форма $q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ положительно определена, то такова и форма от $k$ переменных $q(x_1, x_2, \ldots, x_k, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-k})$.
>
> Матрица этой формы есть $A_k$, откуда $|A_k| = \Delta_k > 0$.

*Достаточность.* Предположим, что $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n > 0$. По следствию о LDU-разложении симметрической матрицы $A = U^T DU$ для некоторых верхней унитреугольной матрицы $U$ и матрицы $D = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \delta_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \delta_n \end{pmatrix}$.

Тогда $q = X^T AX = X^T U^T DUX = (UX)^T DUX = Y^T DY$, где $Y := UX$.
Итак, замена $Y = UX$ приводит форму $q = X^T AX$ к каноническому виду

$$\delta_1 y_1^2 + \delta_2 y_2^2 + \cdots + \delta_n y_n^2.$$

Поскольку $A_k = U_k^T D_k U_k$ и определители унитреугольных матриц равны 1, имеем $\Delta_k = |A_k| = |D_k| = \delta_1 \delta_2 \cdots \delta_k$.
Отсюда $\delta_1 = \Delta_1 > 0$ и $\delta_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} > 0$ для всех $i = 2, \ldots, n$. Поэтому форма $q$ положительно определена. $\square$

Доказательство Расина

ТАМ $n \to \infty^{\infty^{\infty^{\infty}}}$ страниц, вы чего

# Квадрики на плоскости

## Эллипс

### Эллипс

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют каноническому уравнению эллипса вида $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ a, b > 0$. Система координат, для которой справедливо это уравнение, называется канонической

### Вершины эллипса

Точки $(-a, 0)$, $(a, 0)$, $(0, -b)$, $(0, b)$ называются вершинами эллипса

### Фокусы эллипса

Число $c > 0$ такое, что $c^2 = a^2 + b^2$, называется фокусным расстоянием эллипса, точки $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ называются фокусами эллипса

### Фокальный радиус

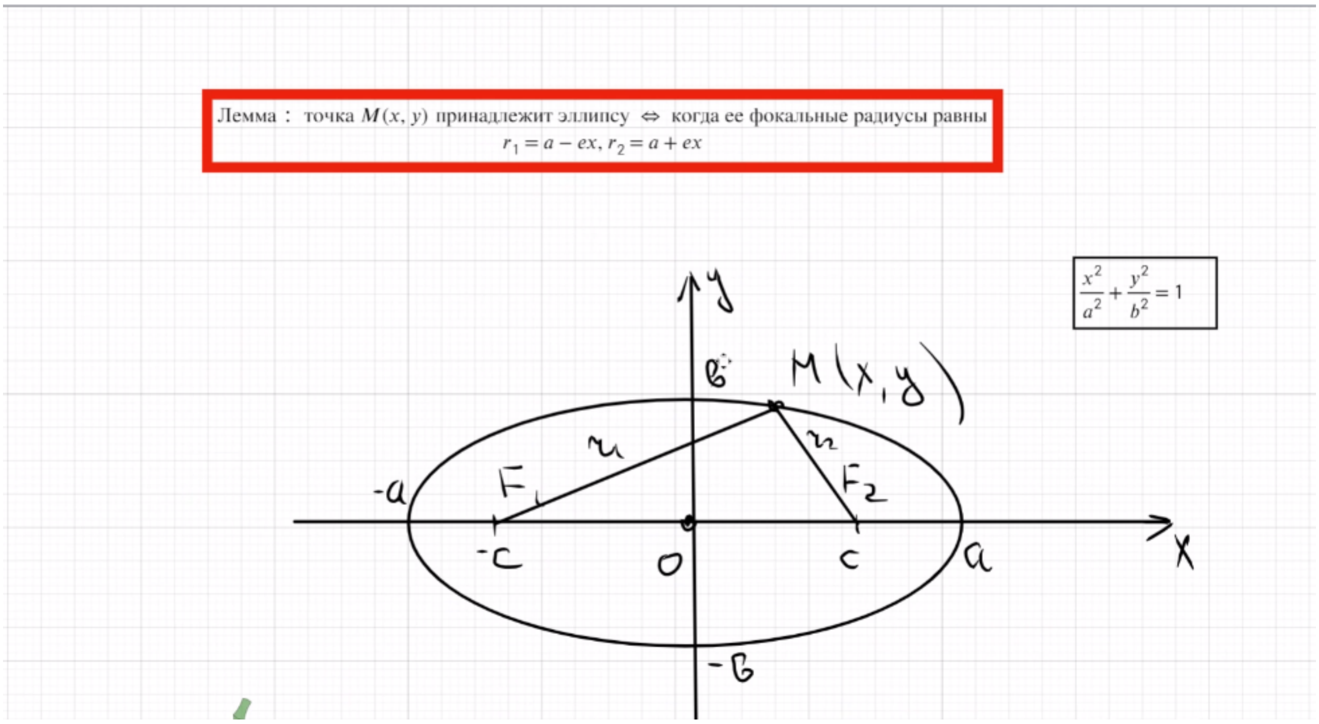
Для любой точки эллипса $M$ длины отрезков $|MF_1|$ и $MF_2|$ называются фокальными радиусами точки $M$.

### Эксцентриситет эллипса

Число $e = \dfrac{c}{a}$ называется эксцентриситетом эллипса.

### Директрисы эллипса

Прямые с уравнениями $x = \pm\dfrac{a}{e}$ называются директрисами эллипса.




## Лемма

#### Лемма

Точка $M(x, y)$ принадлежит эллипсу $\iff$ её фокальные радиусы равны $r_1 = a - ex$, $r_2 = a + ex$

#### Доказательство

Из уравнения эллипса получаем $y^2 = b^2 - \dfrac{b^2}{a^2}x^2$

$$r_2 = |F_2M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} =$$

$$= \sqrt{x^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) - 2cx + (c^2 + b^2)} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = e^2$$

Аналогично для $r_2$

## Теорема: фокальное свойство

#### Теорема

Точка $M$ принадлежит эллипсу $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \iff r_1 + r_2 = 2a$

#### Доказательство

$\implies$. $r_1 + r_2 = |F_1M| + |F_2M| = (a + ex) + (a - ex) = 2a$

$\impliedby$. Пусть теперь $M(x, y)$ для которой $|MF_1| + |MF_2| = 2a$.

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y2$$

$$-2cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 2cx$$

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx \implies$$

$$\implies a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$b^2x + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

То есть $M$ принадлежит эллипсу.

## Теорема: директориальное свойство эллипса

### Теорема

Точка $M$ принадлежит эллипсу $\iff$ отношение расстояния от $M$ до фокуса к отношению расстояния до соответствующей директрисы равно эксцентриситету

### Доказательство

$\implies$ . Возьмём правый фокус и правую директрису. $d = \dfrac{a}{e}$

$$d = |MD| = \left|\frac{a}{e} - x\right| = \left|\frac{a - ex}{e}\right|$$

$$\frac{|F_2M|}{d} = \frac{|a - ex|}{\left|\dfrac{a - ex}{e}\right|} = e$$

$\impliedby$ . Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка плоскости такая, что $\dfrac{|F_2M|}{d(M, l)} = e$.

$$\frac{\sqrt{(x - c)^2 + y^2}}{\left|x - \dfrac{a}{e}\right|} = e$$

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = e\left|x - \frac{a}{e}\right|$$

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = |ex - a|$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = e^2x^2 - 2eax + a^2$$

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 = a^2 - c^2$$

После преобразований получаем уравнение эллипса, что и требовалось доказать.

# Гипербола

### Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, которые в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

### Фокусное расстояние гиперболы

Число $c > 0$ такое, что $c^2 = a^2 + b^2$, называется фокусным расстоянием гиперболы.

### Эксцентриситет гиперболы

Число $e = \frac{c}{a}$ называется эксцентриситетом гиперболы, $e > 1$

### Асимптоты гиперболы

Прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ - асимптоты гиперболы

### Вершины гиперболы

Точки $(\pm a, 0)$ - вершины гиперболы

## Доказательство формулы асимптот

покажем, что $y = \pm\frac{b}{a}x$ асимптоты

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1$$

$$y = \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{b}{a}x}{b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{a\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 - (a^2)}} =$$

## Лемма: Свойства фокальных радиусов

Лемма : если точка $M(x, y)$ принадлежит гиперболе, то

$$r_{1\text{пр.}} = ex + a,\ r_{2\text{пр.}} = ex - a,$$

$$r_{1\text{лев.}} = -ex - a,\ r_{2\text{лев.}} = -ex + a,$$

Док – во : аналогично доказательству для эллипса, просто здесь отдельно рассматриваем случай, когда точка лежит на правой ветви и когда на левой

## Теорема: фокальное свойство гиперболы

### Теорема

Точка $M(x, y)$ принадлежит гиперболе $\iff |r_1 - r_2| = a$

### Доказательство

Доказательство тоже аналогичное вполне, и мы его с вами пропустим.

## Теорема: директориальное свойство гиперболы

### Теорема

Точка $M(x, y)$ принадлежит гиперболе $\iff$ отношение расстояния от точки $M$ до соответствующей директрисы равно эксцентриситету

### Доказательство

кто?

# Парабола

> **Парабола**
>
> Парабола - множество всех точек плоскости, которые в подходящей системе координат имеют уравнение $y^2 = 2px$

## Теорема: директориальное свойство параболы

### Теорема

Точка $M(x, y)$ принадлежит параболе $\iff$ расстояние до фокуса равно расстоянию до директрисы

### Доказательство

$y^2 = 2px$. $F(\frac{p}{2}, 0)$.

$$|MF| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + 2px} =$$

$$= \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px} = \sqrt{x^2 + px + \frac{p^2}{4}} = \left|x + \frac{p}{2}\right|$$

# Классификация квадрик на плоскости

> **Квадрика на плоскости**
>
> Квадрикой на плоскости, или кривой второго порядка называется множество всех точек плоскости, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют

уравнению второго порядка с двумя неизвестными. Уравнение имеет вид:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Fy + G = 0$$

## Теорема о классификации квадрик

### Теорема

Любая квадрика на плоскости является либо эллипсом, либо гиперболой, либо параболой, либо парой прямых (пересекающиеся, параллельные, совпадающие), либо точкой, либо пустым множеством.

### Доказательство

Половину доказательства Расина я не услышал, поэтому вот.

⚠ Сюда смотри

Здесь нормальное доказательство

# Квадрики в пространстве

ϟ ВНИМАНИЕ

Расин читал эту тему максимально неподробно (а писал я ещё менее подробно), поэтому я её УДАЛИЛ. Рекомендую отправиться прямиком сюда:
http://kadm.kmath.ru/files/alggeom45.pdf
http://kadm.kmath.ru/files/alggeom46.pdf
http://kadm.kmath.ru/files/alggeom47.pdf