mnum3

Michał Satała 318717

December 2023

Metoda Rungego–Kutty-Fehlberga drugiego rzedu przy zmiennym kroku z szacowaniem błedu technika pary metod włożonych (RKF23)

1 Metoda RKF23

1.1 Opis

Metoda RKF23 (Runge-Kutta-Fehlberg 2-3) to adaptacyjna metoda numerycznego rozwiazywania układów równań różniczkowych zwyczajnych (ODE). Jest oparta na rodzinie metod Rungego-Kutty, ale z możliwościa dostosowania kroku czasowego w trakcie rozwiazywania równań w celu osiagniecia zadanej dokładności.

1.2 Kroki algorytmu

1. **Kroki Rungego-Kutty:**

   k1 : Krok poczatkowy
   k2 : Krok obliczony z wartości k1
   k3 : Krok obliczony z wartości k1 i k2

2. **Współczynniki metody:**

   c : Współczynniki czasowe
   a : Współczynniki macierzy wag
   w* : Wagi do estymacji błedu
   w : Wagi do kontrolowania długości kroku

3. **Inicjalizacja:**

   t : Poczatkowy czas
   y : Wartości poczatkowe
   h : Aktualny krok czasowy

4. **Iteracja:**

    Dopóki $t < t_{koniec}$, wykonuj:
    Oblicz k1, k2, k3
    Oblicz estymowany błąd error_est
    Jeśli $error\_est - err < 0.5$, to:
    $t = t + err$
    $y = y + c(1) \cdot k1 + c(2) \cdot k2 + c(3) \cdot k3$
    W przeciwnym razie:
    $h = 0.9 \cdot h \cdot \left(\frac{err}{error\_est}\right)^{1/5}$

1.3 Implementacja solvera

```
function [t, y1, y2, step_lengths, error_estimates] = RKF23(ode, t_span, y0, h0, err)
  % Parametry metody RKF23 z podanymi wartościami
  c = [0, 1/2, 1];
  a = [
      0, 0;
      1/2, 0;
      1/256, 255/256
  ];
  w_star = [1/256, 0, 255/256, 0];
  w = [1/512, 255/256, 1/512];

  % Inicjalizacja
  t = t_span(1);
  y = y0;
  h = h0;
  results = [];
  step_lengths = [];
  error_estimates = [];
```

```
    % Metoda Rungego-Kutty-Fehlberga
    while t < t_span(2)
        h = min(h, t_span(2) - t);

        k1 = h * ode(t, y);
        k2 = h * ode(t + a(2,1)*h, y + a(2,1)*k1);
        k3 = h * ode(t + a(3,1)*h, y + a(3,1)*k1 + a(3,2)*k2);

        error_est = norm(w_star(1)*k1 + w_star(2)*k2 + w_star(3)*k3);

        step_lengths = [step_lengths; h];
        error_estimates = [error_estimates; error_est];

        if abs(error_est - err) < 0.5
            t = t + err;
            y = y + c(1)*k1 + c(2)*k2 + c(3)*k3;
            results = [results; [t, y']];
        else
            h = 0.9 * h * (err / error_est)^(1/5);
        end
    end

    t = results(:, 1);
    y1 = results(:, 2);
    y2 = results(:, 3);
    step_lengths = step_lengths(1:end-1);
    error_estimates = error_estimates(1:end-1);
end
```

2 Metoda ode45

2.1 Opis

Metoda ode45 w MATLAB to solwer adaptacyjny dla równań różniczkowych, który wykorzystuje kroki czasowe dostosowywane dynamicznie do zmienności rozwiazania. Bazuje na czwartym rzedzie metody Rungego-Kutty (RK4) i dokładnie kontroluje bład obliczeń, co pozwala na efektywne rozwiazywanie różnorodnych problemów.

3 Wyniki

3.1 Porównanie trajektorii punktu

Rozwiazanie równań różniczkowych zostało zilustrowane za pomoca wykresów trajektorii ruchu punktu w przestrzeni fazowej. Na pierwszym wykresie przedstawiono trajektorie ruchu wzdłuż współrzednej y_1, na drugim wzdłuż współrzednej y_2, a na trzecim wykresie obie współrzedne y_1 i y_2 naraz.

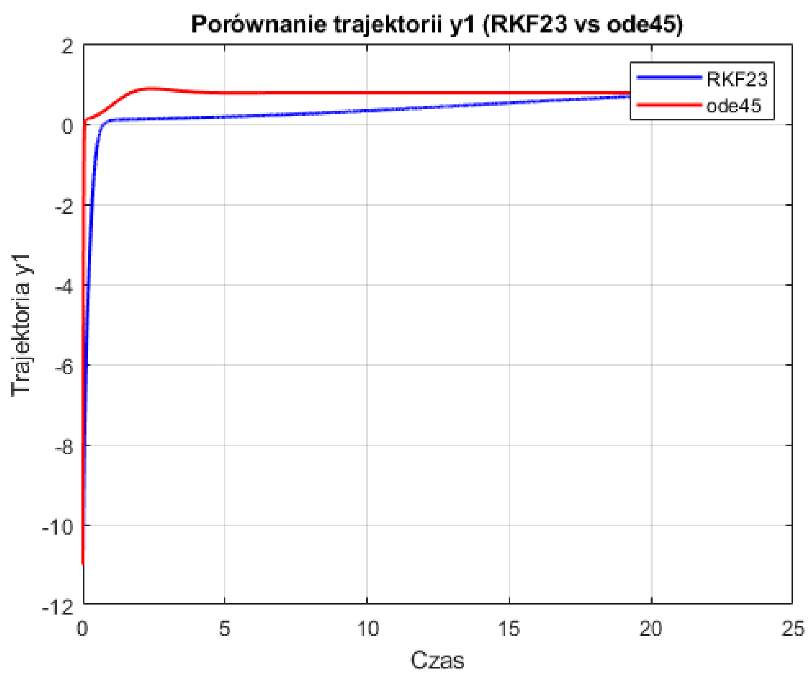


Figure 1: Trajektoria y1

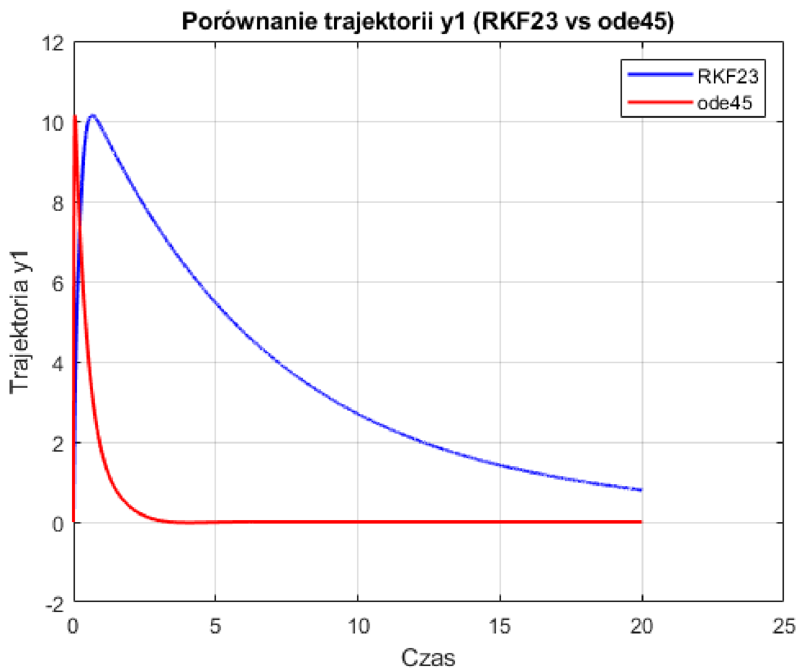


Figure 2: Trajektoria y2

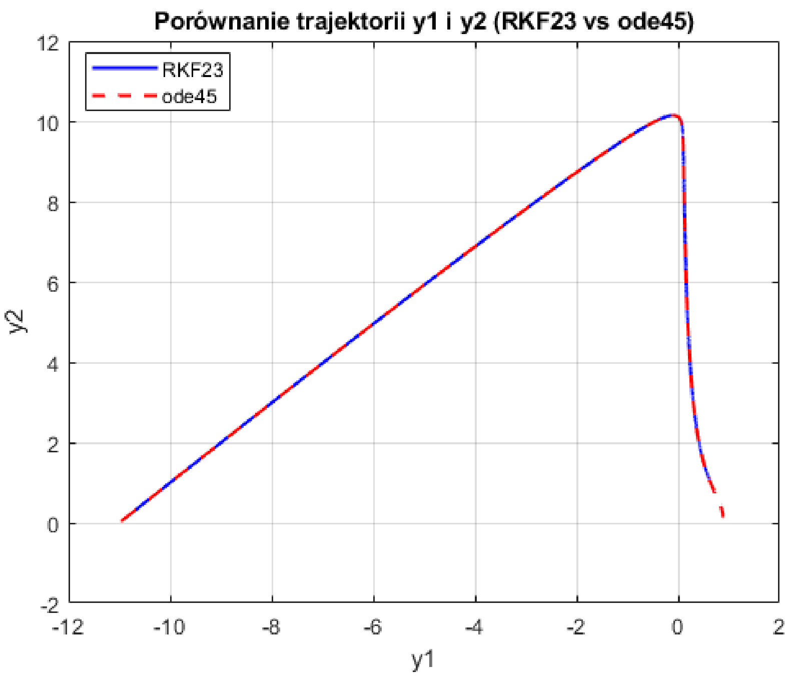
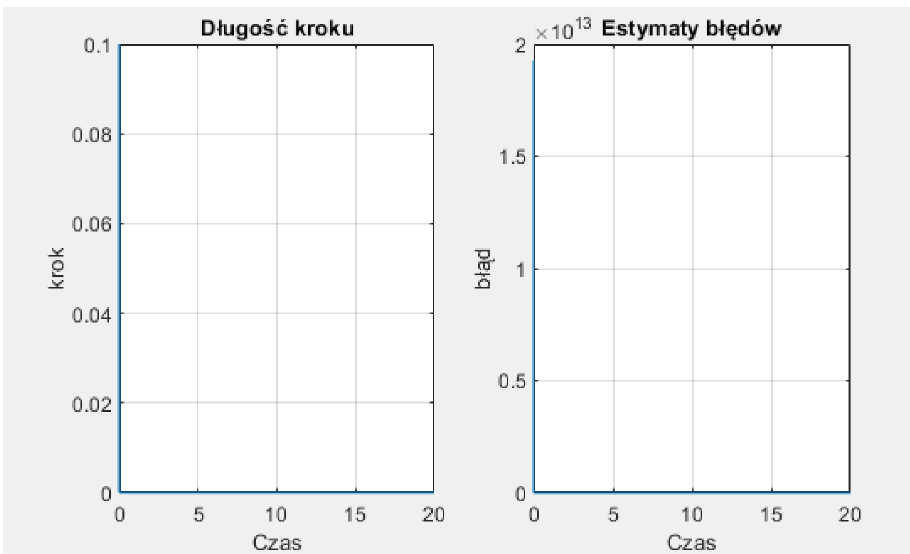


Figure 3: Trajektoria obu współrzednych

Metoda RKF23, choć dostarcza dokładne i stabilne rozwiazania równań różniczkowych, wydaje sie być mniej efektywna w zbliżaniu sie do docelowego punktu w porównaniu do funkcji ode45 z MATLAB. W praktyce obie metody oferuja skuteczne narzedzia do rozwiazywania równań różniczkowych, jednak funkcja ode45 wykazuje sie wieksza szybkościa zbieżności do rozwiazania końcowego. Możliwe jest to zwiazane z różnicami w implementacji algorytmów adaptacyjnych oraz strategiach dostosowywania kroków czasowych. W zastosowaniach, gdzie efektywność obliczeń ma kluczowe znaczenie, warto rozważyć użycie wbudowanej funkcji ode45 ze wzgledu na jej zdolność do szybkiego zbliżania sie do oczekiwanego rezultatu. Jednakże, wybór miedzy tymi metodami może zależeć od specyfiki problemu, wymagań dokładnościowych oraz złożoności obliczeniowej.

3.2 Krok i estymata błedu w RKF23



W analizie wyników metody RKF23 zauważamy, że długość kroku utrzymuje sie na stosunkowo stałym poziomie, około $5 * 10^{-5}$, co sugeruje skuteczne dostosowywanie kroku czasowego. Poczatkowy poziom estymaty błedu rzedu 10^{13} może wynikać z procesu poczatkowego dostosowywania, ale szybko zbiega do zera, co potwierdza efektywność metody w minimalizowaniu błedów numerycznych. Te obserwacje podkreślaja adaptacyjny charakter metody RKF23, umożliwiajacy precyzyjne i efektywne rozwiazywanie równań różniczkowych.