IIC1253 Matemáticas Discretas

Sasha Kozachinskiy

DCC UC

~~01.09.2025~~

10.09.2025

Hoy...

Teoría de conjuntos: construcciones básicas: separación, unión, conjunto potencia.

Propiedades

Definición

Una **propiedad de conjuntos** *P está dada por una fórmula $\phi(x, y_1, \ldots, y_k)$ de la lógica predicados sobre $\in$ y k conjuntos $b_1, \ldots, b_k$. Un conjunto a* **satisface** *P si $\phi(a, b_1, \ldots, b_k)$ es verdad.*

Propiedades

Definición

Una **propiedad de conjuntos** *P está dada por una fórmula $\phi(x, y_1, \ldots, y_k)$ de la lógica predicados sobre $\in$ y k conjuntos $b_1, \ldots, b_k$. Un conjunto a* **satisface** *P si $\phi(a, b_1, \ldots, b_k)$ es verdad.*

Ejemplos:

Propiedades

Definición

Una **propiedad de conjuntos** *P está dada por una fórmula $\phi(x, y_1, \ldots, y_k)$ de la lógica predicados sobre $\in$ y k conjuntos $b_1, \ldots, b_k$. Un conjunto a* **satisface** *P si $\phi(a, b_1, \ldots, b_k)$ es verdad.*

Ejemplos:

- $x \notin x$;

$\varphi(x) = \neg(x \in x)$.

AR ⇒ todos los conjuntos satisfacen esa prop.

Propiedades

Definición

Una **propiedad de conjuntos** *P está dada por una fórmula $\phi(x, y_1, \ldots, y_k)$ de la lógica predicados sobre $\in$ y k conjuntos $b_1, \ldots, b_k$. Un conjunto a* **satisface** *P si $\phi(a, b_1, \ldots, b_k)$ es verdad.*

Ejemplos:

- $x \notin x$;
- $\varnothing \in x$;

$\varphi(x, y) = y \in x$ $\quad \cancel{b = \emptyset}$ $\quad \varphi(x, \emptyset)$ $\quad b = \emptyset$

Propiedades

Definición

Una **propiedad de conjuntos** *P está dada por una fórmula $\phi(x, y_1, \ldots, y_k)$ de la lógica predicados sobre $\in$ y k conjuntos $b_1, \ldots, b_k$. Un conjunto a* **satisface** *P si $\phi(a, b_1, \ldots, b_k)$ es verdad.*

Ejemplos:

- $x \notin x$;
- $\varnothing \in x$;
- $\mathbb{N} \subseteq x$.

$\forall a \ (a \in \mathbb{N}) \to (a \in x)$

Separación

- No siempre existe el conjunto de todos los conjuntos que satisfacen una propiedad P;

$\underline{P} = x \notin x$ – paradoja de Russell

Separación

- No siempre existe el conjunto de todos los conjuntos que satisfacen una propiedad P;
- Ejercicio: dar una propiedad P tal que el conjunto de todos los conjuntos que satisfacen P existe.

P "$x = \emptyset$"

$\{\emptyset\}$

Separación

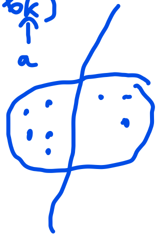
- No siempre existe el conjunto de todos los conjuntos que satisfacen una propiedad P;
- Ejercicio: dar una propiedad P tal que el conjunto de todos los conjuntos que satisfacen P existe.

Axioma (de separación)

Sea P una propiedad. Entonces, para cada conjunto a existe el conjunto de todos los elementos de a que satisfacen P.

$P : \varphi(x, b_1, \dots, b_k)$ $\qquad \neg P$

a



a

$\forall a \; \exists \hat{a}$

$\forall x \; (x \in \hat{a}) \leftrightarrow (x \in a) \wedge x$ satisface P.

$\varphi(x, b_1, \dots, b_k)$

Separación

- No siempre existe el conjunto de todos los conjuntos que satisfacen una propiedad P;
- Ejercicio: dar una propiedad P tal que el conjunto de todos los conjuntos que satisfacen P existe.

Axioma (de separación)

Sea P una propiedad. Entonces, para cada conjunto a existe el conjunto de todos los elementos de a que satisfacen P.

Ejercicio: escribir "axiomas" de separación en la lógica de predicados.

Intersección y diferencia

Intersección y diferencia

a, b, c

$a \cap (b \setminus c) \ldots$

$a \cap b$ – puedo obtener como el conjunto de todos los elementos de a, que satisfacen $\varphi = $ "$x \in b$"

Corolario

Sean a, b dos conjuntos. Entonces,

- *existe el conjunto $a \cap b$ qué consiste exactamente de todos los conjuntos x tal que $x \in a$ y $x \in b$.*
- *existe el conjunto $a \setminus b$ qué consiste exactamente de todos los conjuntos x tal que $x \in a$ y $x \notin b$.*

$$\forall a \, \forall b \, \exists \underset{= a \cap b}{c} \, \forall x \, (x \in c) \leftrightarrow (\underline{x \in a} \wedge \underline{x \in b})$$

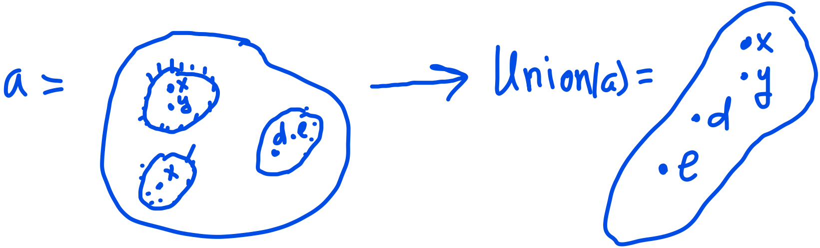
$$\forall a \, \forall b \, \exists \underset{= a \setminus b}{c} \, \forall x \, x \in c \leftrightarrow ((x \in a) \wedge \neg (x \in b))$$

Unión generalizada

$$\forall a \; \exists \overset{=\,\text{Union}(a)}{b} \; \forall x \; \left((x \in b) \leftrightarrow (\exists y \, ((y \in a) \wedge (x \in y)))\right)$$

Axioma (de unión)

Para cada conjunto a existe el conjunto $Union(a)$ de todos los elementos de elementos de a.



Unión generalizada

Axioma (de unión)

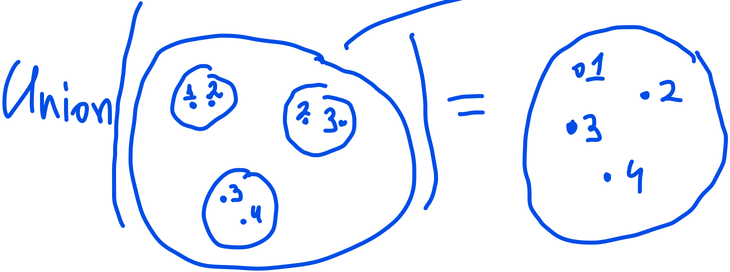
Para cada conjunto a existe el conjunto $Union(a)$ de todos los elementos de elementos de a.

Ejercicio: escribir eso formalmente...

Preguntas unión

$$Union(\{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\}\}) = \{1,2,3,4\}$$

$$Union(\{\underbrace{\{x,y,z\}},\underbrace{\{z,a,b\}}\}) = \{x,y,z,a,b\}$$



Preguntas unión

$\{\emptyset\} \neq \{\,\}$

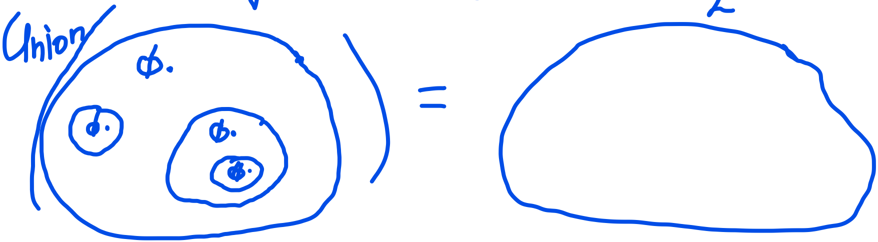
$$Union(\{\{x, y, z\}, \{z, a, b\}\}) =$$

3

Union(3) = 2

$\bigcup$ "$\emptyset$"

$$Union(\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}) = \underbrace{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}}_{2}$$



Preguntas unión

$$Union(\left\{\{x, y, z\}, \{z, a, b\}\right\}) =$$

$$Union(\left\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\right\}) =$$

$$Union(\{\{1\},\{2\},\{3\}\})$$

$$¿Union(a) = Union(b) \implies a = b?$$

$$Union(\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}) = \{1,2,3\}$$

Corolarios de unión generalizada

Corolario

Sean a, b dos conjuntos. Entonces, existe el conjunto $a \cup b$ qué consiste exactamente de todos los conjuntos x tal que $x \in a$ o $x \in b$.

$$\forall a \forall b \exists c^{=a \cup b} \forall x \, (x \in c) \longleftrightarrow$$
$$\longleftrightarrow ((x \in a) \vee (x \in b))$$

$$a \cup b = \mathrm{Union}(\{a, b\}) \quad \text{A.E.}$$

Corolarios de unión generalizada

Corolario

Sean a, b dos conjuntos. Entonces, existe el conjunto $a \cup b$ qué consiste exactamente de todos los conjuntos x tal que $x \in a$ o $x \in b$.

$\forall a \, \forall b \quad \exists c = \{a, b\}$ – A.E.

Corolario

Para cualquier k conjuntos $a_1, \ldots, a_k$ existe un conjunto b cuyos elementos son exactamente $a_1, \ldots, a_k$.

$\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$

$\{a_1\}, \{a_2\}, \ldots \{a_k\}$ – existen

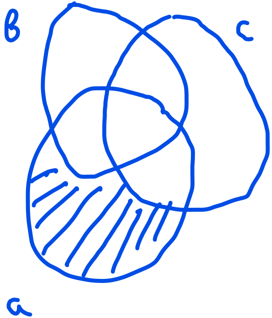
$\{a_1\} \cup \{a_2\} = \{a_1, a_2\} \quad \{a_1, a_2\} \cup \{a_3\} = \{a_1, a_2, a_3\}$

Igualdades de conjuntos e equivalencia lógica

$$a \setminus (b \cup c) = (a \setminus b) \cap (a \setminus c)$$

Ax extens:

basta $\forall x$



$$x \in a \setminus (b \cup c) \longleftrightarrow x \in (a \setminus b) \cap (a \setminus c)$$

$$\updownarrow$$

$$(x \in a) \wedge \neg (x \in b \cup c)$$

$$\updownarrow$$

$$\underbrace{(x \in a)}_{A} \wedge \neg \Big(\underbrace{(x \in b)}_{B} \vee \underbrace{(x \in c)}_{C} \Big)$$

$$A \wedge \neg B \wedge \neg C = A \wedge \underline{\neg (B \vee C)}$$

$$\updownarrow$$

$$(x \in a \setminus b) \wedge (x \in a \setminus c)$$

$$\updownarrow$$

$$(x \in a) \wedge \neg (x \in b)$$

$$(A \wedge \neg B) \wedge (A \wedge \neg C)$$

$$\parallel$$

$$A \wedge \neg B \wedge \neg C$$

Conjunto potencia

Axioma (de conjunto potencia)

Para cada conjunto a existe el conjunto $\mathcal{P}(a)$ de todos los subconjuntos de a.

$$\forall a \ \exists b = \mathcal{P}(a) \ \forall x \quad x \in b \leftrightarrow \text{“} x \subseteq a \text{”}$$

$$\|$$

$$\forall y \ \ y \in x \rightarrow y \in a.$$

Conjunto potencia

Axioma (de conjunto potencia)

Para cada conjunto a existe el conjunto $\mathcal{P}(a)$ de todos los subconjuntos de a.

¿Puede ser $\mathcal{P}(a) = \varnothing$? $\leftarrow$ no!

$\emptyset \in \mathcal{P}(a)$

ya que $\emptyset \subseteq a$.

Conjunto potencia

Axioma (de conjunto potencia)

Para cada conjunto a existe el conjunto $\mathcal{P}(a)$ de todos los subconjuntos de a.

¿Puede ser $\mathcal{P}(a) = \varnothing$?

$\varnothing \subseteq a \Rightarrow \varnothing \in \mathcal{P}(a)$ $\quad a \subseteq a \quad a \in \mathcal{P}(a)$

$\mathcal{P}(a) = \{\varnothing, \underbrace{\{\{\varnothing\}\}}_{a}\}.$ $\qquad a = \{\{\varnothing\}\}$

Conjunto potencia

Axioma (de conjunto potencia)

Para cada conjunto a existe el conjunto $\mathcal{P}(a)$ de todos los subconjuntos de a.

¿Puede ser $\mathcal{P}(a) = \varnothing$?

$\mathcal{P}(a) = \{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}$. $\qquad a =$

¿$\mathcal{P}(a) = \mathcal{P}(b) \implies a = b$? — Sí

$a \subseteq a \qquad a \in \mathcal{P}(a)$

$b \subseteq b \qquad b \in \mathcal{P}(b)$

$\mathcal{P}(a) = \mathcal{P}(b) \Rightarrow a \in \mathcal{P}(b) \Rightarrow a \subseteq b$

$\Rightarrow b \in \mathcal{P}(a) \Rightarrow b \subseteq a \Rightarrow a = b$

¡Gracias!

Par ordenado

Propósito: definir (x, y) tal que $(x, y) = (a, b)$ si y sólo si $x = a \wedge y = b$.

Par ordenado

Propósito: definir (x, y) tal que $(x, y) = (a, b)$ si y sólo si $x = a \wedge y = b$.

Definición

Sean x, y dos conjuntos. Entonces, $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Par ordenado

Propósito: definir (x, y) tal que $(x, y) = (a, b)$ si y sólo si $x = a \wedge y = b$.

Definición

Sean x, y dos conjuntos. Entonces, $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Teorema

Sean x, y, a, b cuatro conjuntos. Entonces, $(x, y) = (a, b)$ si y sólo si $x = a$ y $y = b$.

Demostración.

Tuplas ordenadas

$$(a_1, a_2, a_3) = ((a_1, a_2), a_3)$$

Tuplas ordenadas

$$(a_1, a_2, a_3) = ((a_1, a_2), a_3)$$

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = ((a_1, a_2, a_3), a_4)$$

Tuplas ordenadas

$$(a_1, a_2, a_3) = ((a_1, a_2), a_3)$$

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = ((a_1, a_2, a_3), a_4)$$

$$\vdots$$

Tuplas ordenadas

$$(a_1, a_2, a_3) = ((a_1, a_2), a_3)$$

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = ((a_1, a_2, a_3), a_4)$$

$$\vdots$$

Teorema

Para todos los conjuntos $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, *tenemos* $(a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_3)$ *si y sólo si* $a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$.

Ejercicios pares ordenadas

$(\varnothing, \varnothing) =$

Ejercicios pares ordenadas

$$(\varnothing, \varnothing) =$$

$$(\{\varnothing\}, \varnothing) =$$

Ejercicios pares ordenadas

$$(\varnothing, \varnothing) =$$

$$(\{\varnothing\}, \varnothing) =$$

$$(x, y) = \{\{\{\varnothing\}\}\}, \qquad x = \qquad , \qquad\qquad y =$$

producto Cartesiano

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Teorema

Sean a, b dos conjuntos. Entonces, existe el conjunto $a \times b$ tal que para todos los conjuntos p, tenemos $p \in a \times b$ si y sólo si existe $x \in a, y \in b$ tal que $p = (x, y)$.

Notación producto cartesiano

$$a \times b \times c = (a \times b) \times c$$

$$a \times a = a^2$$

$$a \times a \times a = a^3$$