



Guía 3 – teoría de conjuntos

Problema 1 Dar ejemplos de conjuntos a, b tal que

- a) $a \notin b, a \not\subseteq b$
- b) $a \notin b, a \subseteq b$
- c) $a \in b, a \not\subseteq b$
- d) $a \in b, a \subseteq b$

Problema 2 Mostrar que $a \subseteq b, b \subseteq c \implies a \subseteq c$ para todos los conjuntos a, b, c , pero $a \in b, b \in c \implies a \in c$ no es cierto siempre.

Problema 3 ¿Es cierto que para todos los conjuntos a, b, c , tenemos

- a) $a \in b, b \subseteq c \implies a \in c$?
 - b) $a \subseteq b, b \in c \implies a \in c$
- Handwritten notes: Tomamos que $x \neq \emptyset$, $a = \emptyset$, $c = \{x\}$, $b = x$*

Problema 4 Muestre que no existe un conjunto x tal que

$$\forall y (y \in x) \leftrightarrow \neg(x \in y).$$

Problema 5 Usando la axioma de regularidad:

$$AR = \forall x ((\exists y y \in x) \rightarrow (\exists z (z \in x) \wedge \neg(\exists w w \in x \wedge w \in z))).$$

demuestre que no existe un conjunto x de todos los conjuntos de la forma $\{y\}$.

Problema 6 Sean a_1, a_2, a_3 3 conjuntos, y b el conjunto de todos los x 's que pertenecen por lo menos a dos conjuntos entre a_1, a_2, a_3 . Expresar b a través de a_1, a_2, a_3 y \cap, \cup .

Problema 7 Mostrar la igualdad

$$(a \setminus b) \setminus c = (a \setminus c) \setminus b.$$

Handwritten notes: $z \in x$, $z \in Union(y) \leftrightarrow \exists a a \in y z \in a. - y = \{x\}$

Problema 8 Muestre que para cada conjunto x existe un conjunto y tal que $x = Union(y)$.

Handwritten notes: $y = \{\dots\}$, $x = Union(\{x\})$

Problema 9 A través del axioma de separación, demuestre que para cada conjunto A existe su subconjunto B que consiste en todos los elementos de A con no más de un elemento.

Problema 10 Sean a, b, c 3 conjuntos tal que $a \in \mathcal{P}(b), b \in \mathcal{P}(c), c \in \mathcal{P}(a)$. Mostrar que $a = b = c$.

Handwritten note: $a \subseteq b \subseteq c \subseteq a$

Problema 11 Mostrar que $\{a\} \notin \mathcal{P}(a)$ para todos los conjuntos a .

Handwritten notes: $\{a\} \subseteq a$, $a \in a$

Problema 12 Hemos mostrado que el conjunto de los números naturales satisface el principio de inducción: para cada $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que

- a) $0 \in A$;
- b) si $n \in A$, entonces $S(n) \in A$ para todos los números naturales n ;



tenemos $A = \mathbb{N}$.

Ahora, definimos el orden en los números naturales: $n < m$ para dos números naturales n, m si y sólo si $n \in m$. Mostrar las siguientes propiedades de orden, usando (si necesario), el principio de inducción:

- a) $\neg(n < n)$ para todos los números naturales n ;
- b) $n < S(n)$ para todos los números naturales n ;
- c) $0 < n$ o $0 = n$ para todos los números naturales n ;
- d) $((n < m) \wedge (m < k)) \rightarrow (n < k)$ para todos los números naturales n, m, k ;
- e) $(n < m) \vee (m < n) \vee (n = m)$ para todos los números naturales n, m ;
- f) no existen dos números naturales n, m tales $n < m < S(n)$.