IIC1253 Matemáticas Discretas

Sasha Kozachinskiy

DCC UC

24.09.2025

Hoy...

inducción matemática: el método de inducción, inducción fuerte, principio del número mínimo.

El método de inducción

Teorema (Principio de inducción)

Sea A un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que

a) $0 \in A$;

b) *para cada* $n \in A$, *tenemos* $n + 1 \in A$.

Entonces, $A = \mathbb{N}$.

El método de inducción

Teorema (Principio de inducción)

Sea A un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que

a) $0 \in A$;

b) *para cada* $n \in A$, *tenemos* $n + 1 \in A$.

Entonces, $A = \mathbb{N}$.

Método (de inducción)

Sea $\Phi(n)$ *una propiedad de números naturales. Para mostrar que* $\Phi(n)$ *para todos* $n \in \mathbb{N}$, *basta*

- *(base de inducción) mostrar* $\Phi(0)$.
- *(paso inductivo) mostrar* $\Phi(n) \to \Phi(n+1)$ *para todos* $n \in \mathbb{N}$

hipotesis ind.

$A = \{ n \in \mathbb{N} \mid \Phi(n) \}$ - ax. de separación.

Ejemplo

Proposición

$2^n \geq n$ para todos $n \in \mathbb{N}$.

Dem (base) $n=0$, $2^0 = 1 > 0$ ~ listo

(paso inductivo)

$2^n \geq n \Longrightarrow 2^{n+1} \geq n+1$.

Suponemos que ya tenemos $2^n \geq n$

$2^{n+1} = 2^n + 2^n \geq n + 2^0 = n+1$

– usamos la hipotesis inductiva

Ejemplo 2

$F_0 = 1,\ F_1 = 1,\ F_2 = 2,\ F_3 = 3,\ F_4 = 5, \ldots$

Proposición

Sea $F_0 = F_1 = 1, F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ *la sequencia de los números de Fibonacci. Mostrar:*

$$F_0 + F_1 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1.$$

para todos los números naturales n.

Dem por inducción (sobre n)

(base) $n = 0$ $\quad F_0 = F_2 - 1$ - es cierto

$F_0 = 1$ y $F_2 = 2$

(paso inductivo) $F_0 + F_1 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$

$\Rightarrow \underbrace{F_0 + \ldots + F_n}_{\text{H-Ripotes}} + F_{n+1} \stackrel{?}{=} F_{n+3} - 1$ - por definición de números de Fib.

$F_{n+2} - 1 + F_{n+1}$

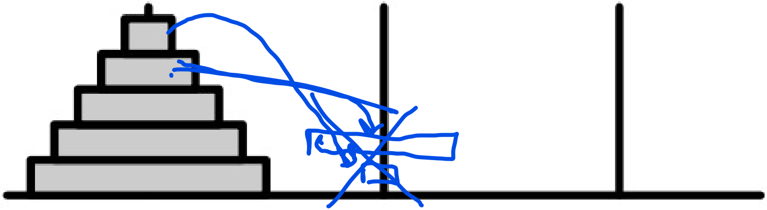
Torres de Hanói

$P(n) =$ "es posible trasladar n aros, respetando las reglas".

Proposición

El juguete ("Torres de Hanó") tiene tres varillas. En una de ellas se encuentra una pirámide formada por varios aros (que disminuyen de tamaño de abajo hacia arriba). Esta pirámide debe trasladarse a otra varilla respetando las reglas del juego: no se pueden mover varios aros a la vez y no se puede colocar un aro más grande sobre uno más pequeño.

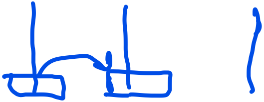
Demostrar que es posible trasladar a otra varilla una pirámide de cualquier número de aros, respetando las reglas del juego



Base $n=0$ – no hay aros, así que no hay que hacer nada.

Ejemplos

$n=1$

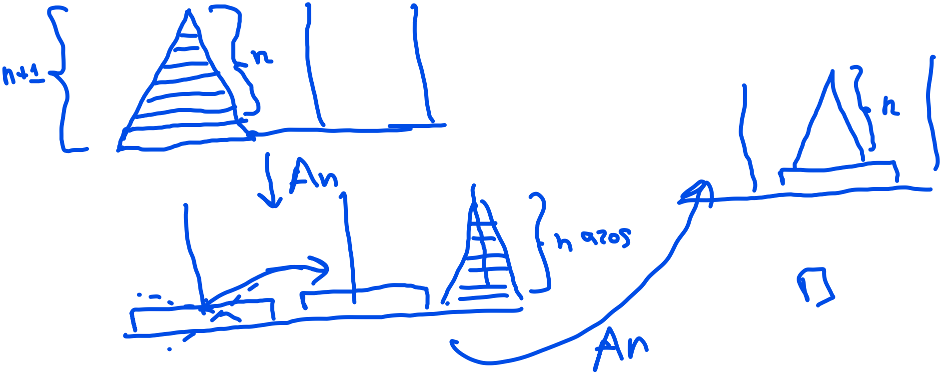


$n=2$

$n=3$

Paso inductivo $\Phi(n) \to \Phi(n+1)$

~~Hay~~ Entonces, suponemos que hay un Algoritmo A_n para trasladar una piramida de n aros.



Empezar no con 0 (Base) $n=0$ $\Psi(0)=1$ porque $0<n_0$

(paso inductivo) $\Psi(n)=(n<n_0)\vee\Phi(n)$ asumimos que eso es cierto

Proposición Hay que mostrar que $\Psi(n+1)$.

Sea $\Phi(n)$ una propiedad de números naturales y $n_0 \in \mathbb{N}$ un número natural tal que 1) $n<n_0$. $\Rightarrow n+1<n_0 \vee n+1=n_0$.
$\Psi(n+1)$ $\Psi(n+1)$

a) $\Phi(n_0)$; ✓

b) $\Phi(n) \to \Phi(n+1)$ *para todos* $n \geq n_0$. 2) $n\geq n_0$. $\Psi(n)=1$
$\Rightarrow \Phi(n)=1 \Rightarrow \Phi(n+1)=1 \Rightarrow \Psi(n+1)=1$

Entonces, $\Phi(n)$ *para todos* $n \geq n_0$.

Dem Voy a usar el metodo de inducción estandarte $\Psi(n)=(n<n_0)\vee\Phi(n)$.

Voy a probar que $\Psi(n)$ para ~~de~~ todos los números naturales n.

En particular, si $n\geq n_0$, entonces $\Psi(n)=1=$
$= 0 \vee \Phi(n) = \Phi(n)$.

Ejemplo

$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ – no es una solución

$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ $\quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

Proposición

Para todos los números naturales $n \geq 3$, el número 1 se puede representar cómo una suma de n distintas fracciones unitarias.

Dem. Caso base $n = 3$ $\quad 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$

– hecho

Paso inductivo Sea $n \geq 3$.

Asumimos $1 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}$, donde $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$

La idea es representar $\frac{1}{a_n}$ como una suma de 2 fracciones unitarias distintas.

$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$, $\quad \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$ $\quad \frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20}$ $\quad \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_n + 1} + \frac{1}{a_n(a_n+1)}$

Fortalecer la afirmación

$\Phi(n) \to \Phi(n+1)$

$1, \quad \underline{1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}}$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1\frac{7}{8}$

Proposición

Para todos los números naturales $n \geq 0$, tenemos:

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n} < 2$$

Vamos a mostrar una afirmación mas fuerte que $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$ para todos $n \geq 0$.

Caso base. $n = 0$, $\frac{1}{2^0} = 2 - \frac{1}{2^0}$ ← mostrado

Paso inductivo. $\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}\right) \to \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$

$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2 \cdot 2^n} = 2 - \frac{1}{2 \cdot 2^n} = 2 - \frac{1}{2^{n+1}}$ $\square$

Fortalecer la afirmación 2

$\underbrace{1+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{(n+1)^2}\leq 2-c_n+\frac{1}{(n+1)^2}\leq 2-c_{n+1} \iff \frac{1}{(n+1)^2}\leq c_n-c_{n+1}$?

$\leq \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

$=\frac{1}{n(n+1)}$

Proposición

Para todos los números naturales $n \geq 1$, tenemos:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2$$

Demo Vamos a fortalecer la afirmación así:

$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}\leq 2-\frac{1}{n}$ para todos $n\geq 1$.

$\leq 2-c_n$ $\qquad 1\leq 2-c_1$.

Base $n=1$ $\quad 1\leq 2-\frac{1}{1}$. $\qquad c_1\leq 1$, $\qquad c_1$

paso inductivo $\quad 1+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n^2}\leq 2-c_n \Rightarrow 1+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\leq 2-c_{n+1}$.

Problema de Basilea

$n=4$ $\quad 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\le \alpha-\frac{1}{4}$

$\frac{\pi^2}{6}\approx 1{,}64 \quad \alpha = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{4}$

Ejercicio: demostrar que

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1{,}75$$

para todos los números naturales $n\geq 1$. Después mostrar la cota con 1,7.

Quiero mostrar que $1+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n^2}\le 1{,}75-\frac{1}{n}$

~~paso~~ El problema – no es cierto para $n=1$.

Pero $n=2$, $1+\frac{1}{4}\le 1{,}75-\frac{1}{2}$ – es cierto.

l paso inductivo funciona igual.

$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\le 1{,}7-\frac{1}{3}$ $\quad 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{3}=\frac{36+9+4+12}{36}=\frac{36+13+12}{36}$ $\quad \frac{36+25}{36}\le 1{,}7$ $\quad \frac{25}{36}\le 0{,}7$.

Inducción fuertre – ejemplo

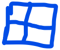
Proposición

Demuestre que un cuadrado se puede cortar en n cuadrados (no necesariamente iguales), para cada número natural $n \geq 6$.

Dem $\mathcal{P}(n) =$ "un cuadrado se puede cortar en n cuadrados". Mostramos por inducción fuerte, $\mathcal{P}(n)$ es cierta $n \in [6, +\infty) \cap \mathbb{N}$

Tomamos $n \geq 6$ arbitrario y mostamos $\mathcal{P}(n)$ asumiendo $\mathcal{P}(m)$ $m \in [6, n-1]$.

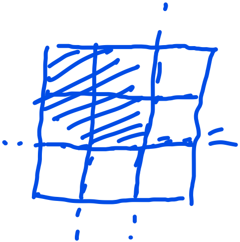
Usamos hipotesis para $m = n-3$. Tenemos un corte en $n-3$ cuadrados, tomamos

uno de estos $n-3$ cuadrados, cortamos así: 
obtenemos n cuadrados, listo. - casi.

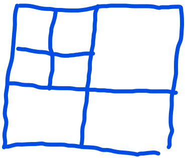
Ese argumento funciona para $n \geq 9$, porque para n así $m = n-3 \in [6, n-1]$.

Y para $n = 6, 7, 8$ se puede cortar así

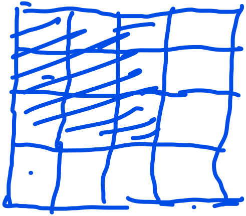
$n = 6$



$n = 7$



$n = 8$



$\square$

Inducción fuerte – formalización

Proposición

Sea $\Phi(n)$ una propiedad de números naturales y $n_0 \in \mathbb{N}$ un número natural tal que

a) $\Phi(n_0)$;

b) $\Phi(n_0) \wedge \ldots \wedge \Phi(n-1) \rightarrow \Phi(n)$ *para todos* $n > n_0$.

Entonces, $\Phi(n)$ *para todos* $n \geq n_0$.

En otros palabras, basta $\forall n \geq n_0$ probar $\Phi(n)$, asumiendo $\Phi(m)$ $m \in [n_0, n-1]$.

Ojo: no hay que usar hipótesis inductiva para $m \notin [n_0, n-1]$.

Palabras de paréntesis balanceadas

Definición

Una palabra w de paréntesis se llama **balanceada** *si se puede obtener w a partir de $()$ en finito número de pasos del siguiente tipo:*

$()$ $(())$

convenio: palabra vacía no es balanceada

a) *si x es balanceada, (x) es balanceada;*

b) *si x, y son balanceadas, xy es balanceada.*

$()(())$ $()(())$

Palabras de paréntesis balanceadas

Definición

Una palabra w de paréntesis se llama **balanceada** *si se puede obtener w a partir de $()$ en finito número de pasos del siguiente tipo:*

a) *si x es balanceada, (x) es balanceada;*
b) *si x, y son balanceadas, xy es balanceada.*

$balance()( ) = 0$

$balance(\overbrace{()(}^{w}\ ) = 1$

balance$(w) =$ número de ('s ménos número de)'s en w.

Palabras de paréntesis balanceadas

Definición

Una palabra w de paréntesis se llama **balanceada** *si se puede obtener w a partir de $()$ en finito número de pasos del siguiente tipo:*

a) *si x es balanceada, (x) es balanceada;*

b) *si x, y son balanceadas, xy es balanceada.*

$balance(w) =$ número de ('s ménos número de)'s en w.

Teorema

Una palabra de parentesis w no vacía es balanceada si i sólo si $balance(w) = 0$ y $balance(p) \geq 0$ para cada prefije de w.

$\underbrace{)(}_{w}$

$Balance(p) = -1$

$p =)$

w no es balanceada.

Teorema

Una palabra de parentesis w no vacía es balanceada si i sólo si balance$(w) = 0$ y balance$(p) \geq 0$ para cada prefije de w.

Vamos a mostrar $\Rightarrow$ dirección

$\Phi(n)$ = " ~~a~~ para todas las palabras balanceadas w del largo n, tenemos balance$(w)=0$, balance$(p) \geq 0$ $\forall p$ - prefije w ".

Voy a mostrar por inducción fuerte $\Phi(n)$ $n \in [1, +\infty)$ "~~posit~~ inducción por el largo de w".

Tomamos ~~con~~ $n \in [1, +\infty)$ arbitrario y mostramos $\Phi(n)$, asumiendo $\Phi(m)$, $m \in [1, n-1]$

Notamos, que $\forall$ palabras balanceadas tienen largo ≥ 2.

Tomamos una palabra w balanceada arbitraria del largo n.

Caso 1 $w = ()$ $\quad Balance(()) = 0 \quad Balance(() = 1.$

Caso 2 $w = (w_1)$, donde w_1 es una palabra balanceada.

Voy a usar hipotesis induct para $m = |w_1|$ $m \in [1, n-1]$, $n = |w|$. Eso es cierto porque $2 \leq |w_1| < |w|$. Podemos asumir que la proposicion "balanceada $\Rightarrow$ P" es cierta para w_1.

$$Balance(w) = Balance((w_1)) = Balance(w_1) = 0$$

hipotesis

$w = (w_1)$. Cualquier prefijo propio de w es de la forma $p = (p_1$, donde p_1 es un prefije de w_1

$$Balance(p) = Balance((p_1) = 1 + Balance(p_1) \geq 0$$

Caso 3 $w = xy$, donde x, y son balanceadas
$2 \leq |x|, |y| < |w|$. Usaré hipotesis
$m = |x|, |y| \in [1, n-1]$.

$$\text{Balance}(w) = \text{Balance}(x) + \text{Balance}(y) = 0$$

Sea p un prefije de w. Puede ser p es un prefije de x, en ese caso $\text{Balance}(p) \geq 0$ por hipótesis para x. Si no,

$p = x\, p_1$, donde p_1 es un prefije de y.

$$\text{Balance}(p) = \text{Balance}(x) + \text{Balance}(p_1) \geq 0 \quad \square$$

El principio del número mínimo – ejemplo

Ser numero primo = tener exactamente 2 divisores en $\mathbb{N}$.

Proposición

Cada número natural $n \geq 2$ es un producto de números primos.

Por contradicción. Imagina que existe $n \geq 2$ que no es un producto de números primos. Sea n_{min} el número mínimo así.

n_{min} no puede ser primo. Entonces, ya que $n_{min} \geq 2$, tiene un divisor $1 < d < n_{min}$.

$n_{min} = d \cdot \frac{n_{min}}{d}$ $\qquad$ $\frac{n_{min}}{d}$ - entero $\qquad$ $1 < \frac{n_{min}}{d} < n_{min}$

$d = p_1 \cdot \ldots \cdot p_a$, $\frac{n_{min}}{d} = q_1 \cdot \ldots \cdot q_b$ $\qquad$ $n_{min} = p_1 \cdot \ldots \cdot p_a \cdot q_1 \cdot \ldots \cdot q_b$.

El principio del número mínimo – formalización

Teorema

Sea $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \varnothing$. Entonces, A tiene el **elemento mínimo**, *es decir, existe $m \in A$ tal que $m \leq n$ para todos $n \in A$.*

Demostracion Si A no tiene elemento mínimo, entonces $A = \varnothing$.

$P(n) =$ "$n \notin A$". Voy a mostrar eso para todos $n \in [0, +\infty)$ por induccion fuerte.

Tomo $n \in [0, +\infty)$, y muestro $n \notin A$, asumiendo $m \notin A$ $m \in [0, n-1]$. Si $n \in A$, sería el mínimo de A por la hipotesis, no hay en A números menor que n.

El principio del número mínimo – ejemplo

$$\mathbb{N}_{>0} = \{1, 2, \ldots\}$$

Proposición

El número $\sqrt{2}$ es irracional.

$$A = \{ b \in \mathbb{N}_{>0} \mid \exists a \in \mathbb{N}_{>0} \ \sqrt{2} = \frac{a}{b} \}$$

A no es vacio, tiene $b_{min} \in A$.

$$\sqrt{2} = \frac{a_{min}}{b_{min}}, \quad 2 b_{min}^2 = a_{min}^2$$

$$a_{min} = 2v,$$

$$2 b_{min}^2 = 4v^2 \qquad \frac{b_{min}^2}{v^2} = 2, \quad \frac{b_{min}}{v} = \sqrt{2}$$

¡Gracias!