IIC1253 Matemáticas Discretas

Sasha Kozachinskiy

DCC UC

01.09.2025

Hoy...

Teoría de conjuntos: números naturales, inducción, orden.

¿Conjuntos infinitos?

¿Conjuntos infinitos?

- Nada garantiza existencia de conjuntos infinitos.

¿Conjuntos infinitos?

- Nada garantiza existencia de conjuntos infinitos.
- Plan: definir números naturales...

¿Conjuntos infinitos?

- Nada garantiza existencia de conjuntos infinitos.
- Plan: definir números naturales...
- ...y *conjunto* de los números naturales...

¿Conjuntos infinitos?

- Nada garantiza existencia de conjuntos infinitos.
- Plan: definir números naturales...
- ...y *conjunto* de los números naturales...
- ...tal que el principio de inducción es cierto.

Operación sucesor

Definición

Sea a un conjunto. Su **sucesor** *es el conjunto* $S(a) = a \cup \{a\}$.

Operación sucesor

Definición

Sea a un conjunto. Su **sucesor** *es el conjunto $S(a) = a \cup \{a\}$.*

Ejercicio: escribir una fórmula que expresa "$b = S(a)$":

Operación sucesor

Definición

Sea a un conjunto. Su **sucesor** *es el conjunto* $S(a) = a \cup \{a\}$.

Ejercicio: escribir una fórmula que expresa "$b = S(a)$":

Primeros números naturales:

$$0 = \varnothing$$

$$1 = S(\varnothing) =$$

$$2 = S(1) =$$

$$3 = S(2) =$$

Conjuntos inductivos y infinitud

Definición

Un conjunto a se llama **inductivo** *si $\varnothing \in a$ y para cada $x \in a$, tenemos $S(x) \in a$.*

Conjuntos inductivos y infinitud

Definición

Un conjunto a se llama **inductivo** *si $\varnothing \in a$ y para cada $x \in a$, tenemos $S(x) \in a$.*

Axioma (de infinitud)

Existe un conjunto inductivo.

Números naturales

Definición

Un conjunto n se llama un **número natural** *si $n \in a$ para todos los conjuntos inductivos a.*

Números naturales

Definición

Un conjunto n se llama un **número natural** *si $n \in a$ para todos los conjuntos inductivos a.*

Ejercicio: escribir una fórmula que expresa "n es un número natural".

Números naturales

Definición

Un conjunto n se llama un **número natural** *si $n \in a$ para todos los conjuntos inductivos a.*

Ejercicio: escribir una fórmula que expresa "n es un número natural".

Proposición

$0 = \varnothing$ es un número natural, y si n es un número natural, entonces $S(n)$ tambíen es un número natural.

Conjunto de números naturales y principio de inducción

Teorema

Existe un conjunto $\mathbb{N}$ *de todos los números naturales.*

Conjunto de números naturales y principio de inducción

Teorema

Existe un conjunto $\mathbb{N}$ de todos los números naturales.

Demostración.

$\mathbb{N} = \{n \in a \mid n \text{ es un número natural}\}$ para cualquier conjunto inductivo a. $\square$

Conjunto de números naturales y principio de inducción

Teorema

Existe un conjunto $\mathbb{N}$ de todos los números naturales.

Demostración.

$\mathbb{N} = \{n \in a \mid n \text{ es un número natural}\}$ para cualquier conjunto inductivo a. $\square$

Teorema (Principio de inducción)

Sea A un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que $0 \in A$ y tal que para cada $n \in A$, tenemos $S(n) \in A$. Entonces, $A = \mathbb{N}$.

Conjunto de números naturales y principio de inducción

Teorema

Existe un conjunto $\mathbb{N}$ de todos los números naturales.

Demostración.

$\mathbb{N} = \{n \in a \mid n$ es un número natural$\}$ para cualquier conjunto inductivo a. $\square$

Teorema (Principio de inducción)

Sea A un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que $0 \in A$ y tal que para cada $n \in A$, tenemos $S(n) \in A$. Entonces, $A = \mathbb{N}$.

Demostración.

A es inductivo, por lo tanto $\mathbb{N} \subseteq A$. Ya que $A \subseteq \mathbb{N}$, obtenemos $A = \mathbb{N}$. $\square$

Orden

Definición

Sean n, m dos números naturales. Entonces, $n < m$ si $n \in m$.

Teorema (Propiedades de orden)

a) $\neg(n < n)$ *para todos los números naturales* n*;*

b) $n < S(n)$ *para todos los números naturales* n*;*

c) $0 < n$ *o* $0 = n$ *para todos los números naturales* n*;*

d) $((n < m) \wedge (m < k)) \rightarrow (n < k)$ *para todos los números naturales* n, m, k*;*

e) $(n < m) \vee (m < n) \vee (n = m)$ *para todos los números naturales* n, m*;*

f) *no existem dos números naturales* n, m *tal que* $n < m < S(n)$*.*

Proposición

$0 < n$ *o* $0 = n$ *para todos los números naturales* n*.*

Proposición

$((n < m) \wedge (m < k)) \rightarrow (n < k)$ *para todos los números naturales* n, m, k;

Proposición

$((n < m) \wedge (m < k)) \to (n < k)$ *para todos los números naturales* n, m, k*;*

Definición

Un conjunto a *se llama* **transitivo** *si para todos los conjuntos* b, c *tal que* $b \in a, c \in b$*, tenemos* $c \in a$*.*

Proposición

$((n < m) \wedge (m < k)) \rightarrow (n < k)$ *para todos los números naturales* n, m, k*;*

Definición

Un conjunto a *se llama* **transitivo** *si para todos los conjuntos* b, c *tal que* $b \in a, c \in b$*, tenemos* $c \in a$*.*

Proposición

Todos los números naturales son transitivos.

Conclusión

Se puede definir la suma y el producto cómo subconjuntos de $\mathbb{N}^3$, números racionales cómo pares, números reales cómo *funciones* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, etc...

Conclusión

Se puede definir la suma y el producto cómo subconjuntos de $\mathbb{N}^3$, números racionales cómo pares, números reales cómo *funciones* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, etc...

¡Gracias!