IIC1253 Matemáticas Discretas

Sasha Kozachinskiy

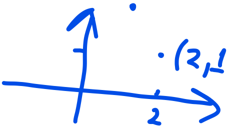
DCC UC

08.10.2025

Hoy...

Relaciones: pares ordenados, producto Cartesiano, relaciones, relaciones de equivalencia.

Par ordenado



$(2,1) \neq (1,2)$

Definición

Sean x, y *dos conjuntos. Entonces,* $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Par ordenado

Definición

Sean x, y dos conjuntos. Entonces, $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

$(1, 2) = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$

Par ordenado

Definición

Sean x, y dos conjuntos. Entonces, $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

$(1, 2) =$

$(\mathbb{Z}, \mathbb{N}) =$

Par ordenado

$$(x,y) = \{\{x\},\{y\},\{x,y\}\}$$

Definición

Sean x, y dos conjuntos. Entonces, $(x,y) = \{\{x\},\{x,y\}\}$.

$(1,2) = \{\{1\},\{1,2\}\}$

$(\mathbb{Z},\mathbb{N}) = \{\{\mathbb{Z}\},\{\mathbb{Z},\mathbb{N}\}\}$

$(2,2) = \{\{2\}\},$ $\quad \{x,y\} = \{2,2\} = \{2\}.$

Teorema

Sean x, y, a, b *cuatro conjuntos. Entonces,* $(x, y) = (a, b)$ *si y sólo si* $x = a$ *y* $y = b$.

Ejercicio...

producto Cartesiano

$(x,y)=\{\{x\},\{x,y\}\}$.

$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A, y\in B\}$

Definición

Sean A, B dos conjuntos. Su **producto Cartesiano** *es el conjunto $A\times B$ de todos los pares ordenados (x,y), donde $x\in A, y\in B$.*

$A=\{1,2\}$, $B=\{7\}$, $A\times B=\{(1,7),(2,7)\}$

producto Cartesiano

$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$

Definición

Sean A, B dos conjuntos. Su **producto Cartesiano** *es el conjunto $A \times B$ de todos los pares ordenados (x, y), donde $x \in A, y \in B$.*

Teorema

Para todos los conjuntos A, B el conjunto $A \times B$ existe.

Idea: axioma + axioma de conjunto potencia (2 veces).

producto Cartesiano

$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Definición

Sean A, B dos conjuntos. Su **producto Cartesiano** *es el conjunto $A \times B$ de todos los pares ordenados (x, y), donde $x \in A, y \in B$.*

Teorema

Para todos los conjuntos A, B el conjunto $A \times B$ existe.

- $A \times B = \{(1, 3), (7, 4), (7, 3), (1, 4)\}$.

  $A = \{1, 7\}$ $B = \{3, 4\}$

producto Cartesiano

$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Definición

Sean A, B dos conjuntos. Su **producto Cartesiano** *es el conjunto $A \times B$ de todos los pares ordenados (x, y), donde $x \in A, y \in B$.*

Teorema

Para todos los conjuntos A, B el conjunto $A \times B$ existe.

- $A \times B = \{(1, 3), (7, 4), (7, 3), (1, 4)\}$.

  $A = \{1, 7\}$ $B = \{3, 4\}$
- $\{(1, 2), (7, 3), (7, 2)\} = A \times B$? no! $A = \{1, 7\}, B = \{2, 3\}$

$A \times B$ contiene $(1, 3)$ – una contradicción

producto Cartesiano

$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Definición

Sean A, B dos conjuntos. Su **producto Cartesiano** *es el conjunto $A \times B$ de todos los pares ordenados (x, y), donde $x \in A, y \in B$.*

Teorema

Para todos los conjuntos A, B el conjunto $A \times B$ existe.

- $A \times B = \{(1,3), (7,4), (7,3), (1,4)\}$.

  $A =$ $B =$

- $\{(1,2), (7,3), (7,2)\} = A \times B$?

- ¿es el plano un producto Cartesiano? $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$(\sqrt{2}, \pi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ...

Relaciones binarias

Definición

Sean A, B *dos conjuntos. Una* **relación binaria** *de* A *en* B *es un subconjunto* $R \subseteq A \times B$.

Relaciones binarias

Ejemplos de relaciones $A = B = \mathbb{N}$

$=$ $\quad a = b$, $\neg(a = b)$

$<$ $\quad a < b$

Definición

Sean A, B dos conjuntos. Una **relación binaria** *de A en B es un subconjunto $R \subseteq A \times B$.*

- Notación: $(a, b) \in R \iff R(a, b) \iff aRb$; $\quad a \in A$, $b \in B$

Relaciones binarias

Definición

Sean A, B dos conjuntos. Una **relación binaria** *de A en B es un subconjunto $R \subseteq A \times B$.*

- Notación: $(a, b) \in R \iff R(a, b) \iff aRb$;
- Cuando $A = B$, se dice: *R es una relación binaria sobre A.*

$R \subseteq A \times A$.

Relaciones binarias

Definición

Sean A, B dos conjuntos. Una **relación binaria** *de A en B es un subconjunto $R \subseteq A \times B$.*

- Notación: $(a, b) \in R \iff R(a, b) \iff aRb$;
- Cuando $A = B$, se dice: *R es una relación binaria sobre A.*
- Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y R una relación sobre A "tener el mismo resto módulo 3". Definir todos los pares ordenados en R:

$$R = \left\{ \begin{array}{l} (1,4), (2,5), (3,6), (4,1), \\ (5,2), (6,3), (1,1), (2,2), \ldots (6,6) \end{array} \right\} \subseteq A \times A$$

Relación de $=$ $= \{(1,1), (2,2), \ldots, (6,6)\}$

Relaciones como grafos dirigidos

$$x \mid y \iff \underset{x}{\bullet} \longrightarrow \underset{y}{\bullet}$$

Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Retratar la relación $\mid$ ("divide") sobre A como un grafo dirigido:

$$(a, b) \in R$$
$$\Updownarrow$$
$$aRb$$
$$\Updownarrow$$
$$\underset{a}{\bullet} \xrightarrow{R} b$$

$$xRx \qquad \underset{x}{\bullet}$$

Propiedades de relaciones

$a_2 R a_1$

	a_1	a_2		
a_1	1			
a_2	1	1		
			1	
a_n				1

Definición

Sea R una relación binaria sobre el conjunto A. Entonces, R se llama...

- **refleja** *si aRa para todo $a \in A$.*

a

Propiedades de relaciones

Definición

Sea R una relación binaria sobre el conjunto A. Entonces, R se llama...

- **refleja** *si aRa para todo $a \in A$.*
- **antirefleja** *si $\neg aRa$ para todo $a \in A$;*

Propiedades de relaciones

Definición

Sea R una relación binaria sobre el conjunto A. Entonces, R se llama...

- **refleja** *si aRa para todo $a \in A$.*
- **antirefleja** *si $\neg aRa$ para todo $a \in A$;*
- **simétrica** *si $aRb \to bRa$ para todos $a, b \in A$;*

Propiedades de relaciones

Definición

Sea R una relación binaria sobre el conjunto A. Entonces, R se llama...

- **refleja** *si* aRa *para todo* $a \in A$.
- **antirefleja** *si* $\neg aRa$ *para todo* $a \in A$;
- **simétrica** *si* $aRb \to bRa$ *para todos* $a, b \in A$;
- **transitiva** *si* $(aRb \wedge bRc) \to aRc$ *para todos* $a, b, c \in A$;

Propiedades de relaciones

Definición

Sea R una relación binaria sobre el conjunto A. Entonces, R se llama...

- **refleja** *si aRa para todo $a \in A$.*
- **antirefleja** *si $\neg aRa$ para todo $a \in A$;*
- **simétrica** *si $aRb \to bRa$ para todos $a, b \in A$;*
- **transitiva** *si $(aRb \land bRc) \to aRc$ para todos $a, b, c \in A$;*
- **asimétrica** *si $aRb \to \neg bRa$ para todos $a, b \in A$;* $\neg aRa$
- **antisimétrica** *si $(aRb \land bRA) \to a = b$ para todos $a, b \in A$;*

$aRb \land bRa \to a = b.$

Ejemplos

$\neg\, a < a$

$a \leq b \Rightarrow b \leq a$

$1 \leq 2 \quad 2 \not\leq 1$

$1 < 2 \quad \neg (2 < 1)$

Sobre $\mathbb{N}$:

	$=$	$<$	$\leq$	$\neq$
refleja?	✓	✗	✓	✗
antirefleja?	✗	✓	✗	✓
simétrica?	✓	✗	✗	✓
transitiva?	✓	✓	✓	✗
1. asimétrica?	✗	✓	✗	✗
antisimétrica	✓	✓	✓	✗

$a \neq b,\ b \neq c \rightarrow a \neq c$?

$a = 1$

$1 \neq 2,\ 2 \neq 1 \rightarrow 1 = 1$

$1 = 1$

$a = b,\ b = a \rightarrow a = b$ ✓

Relaciones de equivalencia

$aRa \quad \forall a \in A$ $\quad aRb \to bRa \quad \forall a,b \in A$

$aRb, bRc \to aRc$
$\forall a,b,c \in A$

Definición

Sea A un conjunto. Una relación binaria R sobre A se llama una **relación de equivalencia** *si R es refleja, simétrica y transitiva.*

Relaciones de equivalencia

Definición

Sea A un conjunto. Una relación binaria R sobre A se llama una **relación de equivalencia** *si R es refleja, simétrica y transitiva.*

Ejemplos:

Relaciones de equivalencia

Definición

Sea A un conjunto. Una relación binaria R sobre A se llama una **relación de equivalencia** *si R es refleja, simétrica y transitiva.*

Ejemplos:

- $=$

Relaciones de equivalencia

Definición

Sea A un conjunto. Una relación binaria R sobre A se llama una **relación de equivalencia** *si R es refleja, simétrica y transitiva.*

Ejemplos:

- $=$
- equivalencias de las fórmulas proposicionales

Ejercicio

$(1,2) \not\sim (2,1)$ $(1,2) \sim (3,4)$ $(1,2) \sim (1,2)$

para un $c \in \mathbb{Z}$

Ejercicio

Verificar que las siguentes relaciones son equivalencias:

a) $\equiv_k$ *sobre* $\mathbb{Z}$*, donde* $x \equiv_k y$ *si y sólo si* k *divide* $x - y$. $= c \cdot k$

b) $\sim$ *sobre* $\mathbb{N}_{>0} \times \mathbb{N}_{>0}$*, donde* $(a, b) \sim (c, d)$ *si y sólo si* $ad = bc$.

c) $\sim$ *sobre* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$*, donde* $A \sim B$ *si y sólo si* $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ *es finito.*

Solución

a) $\equiv_k$ es refleja p.q. que $k \mid x - x \ \forall x \in \mathbb{Z}$

$\equiv_k$ es simétrica. Sean $x, y \in \mathbb{Z}$ $x \equiv_k y$

$k \mid (x-y) \to k \mid y - x \Rightarrow y \equiv_k x$

$x - y = c \cdot k$ $y - x = (-c) \cdot k$

$\equiv_k$ es transitiva. Sean $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tal que $x \equiv_k y$, $y \equiv_k z$

$y - z$, $\Rightarrow$ $x - y$ es un multiplo de k $\Rightarrow x - y + (y - z)$ es un multiplo de k $x - z \Rightarrow x \equiv_k z$.

$A = \mathbb{N}_{>0} \times \mathbb{N}_{>0}$ $\quad (a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$

1) $\sim$ es reflexiva porque $(a,b) \sim (a,b)$ ya que $ab = ba$.

2) $\sim$ es simétrica $(a,b) \sim (c,d) \Rightarrow (c,d) \sim (a,b)$

$ad = bc \Rightarrow cb = da$ ✓

3) $\sim$ es transitiva

$(a,b) \sim (c,d), (c,d) \sim (x,y) \Rightarrow (a,b) \sim (x,y)$

$ad = bc \qquad cy = dx \qquad ay = bx$

$a\cancel{dc}y = b\cancel{cd}x$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \frac{c}{d} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{x}{y} \Rightarrow ay = bx.$

Clases de equivalencia

Definición

Sea $\sim$ *una relación de equivalencia sobre el conjunto* A*. La* **clase de equivalencia** *de* $a \in A$ *con respeto de* $\sim$ *es el conjunto*

$$[a]_\sim = \{b \in A \mid a \sim b\}.$$

Clases de equivalencia

$\forall a, b, c \in A$

$a \sim a$

$a \sim b \to b \sim a$

$a \sim b,\ b \sim c \to a \sim c$.

Definición

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre el conjunto A. La **clase de equivalencia** *de $a \in A$ con respeto de $\sim$ es el conjunto*

$$[a]_{\sim} = \{b \in A \mid a \sim b\}.$$

$a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$

Definir $[13]_{\equiv_3}$ (sobre $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$):

$[13]_{\equiv_3} = \{b \in \{1,2,3,\ldots,20\} \mid 13 \equiv_3 b\} =$

$= \{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19\}$

Obs. $\forall a \in A$, $a \in [a]_{\sim}$ $\quad (a \sim a)$

Clases de equivalencia

$$[a]_\sim = \{b \in A \mid a \sim b\}$$

Lemma

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto A. Sean $x_1, x_2 \in A$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

a) $x_1 \sim x_2$

b) $[x_1]_\sim = [x_2]_\sim$

Demostración $b) \Rightarrow a)$ Tenemos $[x_1]_\sim = [x_2]_\sim$. Hay que ver que $x_1 \sim x_2$. Notamos $x_1 \in [x_1]_\sim = [x_2]_\sim$. Por definición de una clase equivalencia, $x_2 \sim x_1 \Leftrightarrow x_1 \sim x_2$

$a) \Rightarrow b)$ Tenemos $x_1 \sim x_2$. Hay que mostrar $[x_1]_\sim = [x_2]_\sim$. Entonces, tomamos $y \in [x_1]_\sim$ arbitrario y mostramos $y \in [x_2]_\sim$ (el mismo argumento va a funcionar en otro dirección).

$y \in [x_1]_\sim \Rightarrow x_1 \sim y \Rightarrow y \sim x_1$

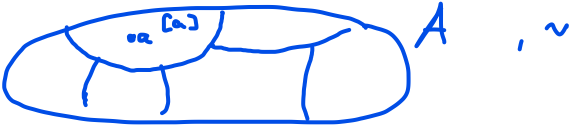
$x_1 \sim x_2$.

Por transitividad, $y \sim x_1, x_1 \sim x_2 \rightarrow y \sim x_2$. $\rightarrow$

$\rightarrow \underline{x_2 \sim y}$

$\rightarrow y \in [x_2]_\sim$ $\square$

$\forall y \quad y \in [x_1]_\sim \rightarrow y \in [x_2]_\sim$



Teorema

Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre el conjunto A. Para todos $a, b \in A$, tenemos $[a]_\sim = [b]_\sim$ o $[a]_\sim \cap [b]_\sim = \varnothing$.

<u>Demostración</u> por el lema,

$a \sim b \Rightarrow [a]_\sim = [b]_\sim$.

Basta ver $\neg(a \sim b) \Leftrightarrow a \not\sim b \longrightarrow [a]_\sim \cap [b]_\sim = \varnothing$.

En efecto, asumimos por contradicción que existe $x \in [a]_\sim \cap [b]_\sim$. $\longrightarrow x \in [a]_\sim, x \in [b]_\sim \longrightarrow$

$\rightarrow a \sim x,\ b \sim x \longrightarrow a \sim x,\ x \sim b \longrightarrow a \sim b$, una contradicción. $\square$

$\sim$ simétrica

~~por~~ $\sim$ es transitiva

Conjunto cociente

Definición

Sea $\sim$ *una relación de equivalencia sobre el conjunto* A*. El* **conjunto cociente** *de* $\sim$ *es el conjunto* $(A/\sim) = \{[a]_\sim \mid a \in A\}$

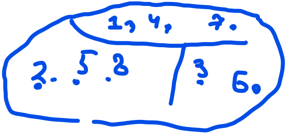
Conjunto cociente

Definición

Sea $\sim$ *una relación de equivalencia sobre el conjunto* A*. El* **conjunto cociente** *de* $\sim$ *es el conjunto* $(A/\sim) = \{[a]_\sim \mid a \in A\}$

- Definir $(\{1, 2, \ldots, 8\}/\equiv_3)$: $= \{ [1]_{\equiv 3}, [2]_{\equiv 3}, [3]_{\equiv 3}, [4]_{\equiv 3}, [5]_{\equiv 3}, [6]_{\equiv 3}, [7]_{\equiv 3}, [8]_{\equiv 3} \}$

$$= \{ \{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 6\} \}$$



Conjunto cociente

Definición

Sea $\sim$ *una relación de equivalencia sobre el conjunto* A. *El* **conjunto cociente** *de* $\sim$ *es el conjunto* $(A/\sim) = \{[a]_\sim \mid a \in A\}$

- Definir $\{1, 2, \ldots, 8\}/\equiv_3$:
- Sea $\sim$ una relación sobre $\mathbb{N}_{>0} \times \mathbb{N}_{>0}$, donde $(a, b) \sim (c, d)$ si y sólo si $ad = bc$. Definir el conjunto cociente correspondiente.

$[(1,2)]_\sim = \{(c,d) \in \mathbb{N}_{>0} \times \mathbb{N}_{>0} \mid (c,d) \sim (1,2)\}$

$(c,d) \sim (1,2)$

$2c = d$

$= \{(1,2), (2,4), (3,6), (4,8) \ldots\}$

$k > 0$

Operaciones y equivalencia

Definición

Sea A un conjunto y $*$ una "operación binaria" sobre A (dados $a, b \in A$, la operación devuelve $a * b \in A$). Decimos que $*$ **respete** *una relación de equivalencia $\sim$ sobre A si $a_1 \sim a_2, b_1 \sim b_2 \implies a_1 * b_1 \sim a_2 * b_2$ para todos $a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$.*

Operaciones y equivalencia

Definición

Sea A un conjunto y $*$ una "operación binaria" sobre A (dados $a, b \in A$, la operación devuelve $a * b \in A$). Decimos que $*$ **respete** *una relación de equivalencia $\sim$ sobre A si*
$a_1 \sim a_2, b_1 \sim b_2 \implies a_1 * b_1 \sim a_2 * b_2$ para todos $a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$.

Cuando $*$ respete $\sim$, se puede ver $*$ como una operación sobre el conjunto cociente $A/\sim$.

$[a_1]_\sim * [b_1]_\sim = [a_1 * b_1]_\sim$

$a_1 \sim a_2, \; b_1 \sim b_2 \Rightarrow [a_2]_\sim * [b_2] = [a_2 * b_2]_\sim = [a_1 * b_1]_\sim$

Ejercicios

Ejercicio

Verificar que

a) *la suma y el producto respete $\equiv_k$ sobre $\mathbb{Z}$;*

b) *la operación $(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd)$ respete la relación de equivalencia $\sim$:*

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc$$

sobre $\mathbb{N}_{>0} \times \mathbb{N}_{>0}$.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

a) $\mathbb{Z}$, $x+y$, $x \cdot y$

$x_1 \equiv_k x_2$

$y_1 \equiv_k y_2$ $\Rightarrow$ $x_1 + y_1 \equiv_k x_2 + y_2$

$x_1 \cdot y_1 \equiv_k x_2 \cdot y_2$

$\exists\, a, b \in \mathbb{Z}$

$x_1 - x_2 = k \cdot a$

$y_1 - y_2 = k \cdot b.$

$(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)$

$= k \cdot a + k \cdot b = k(a + b) \Rightarrow$

$x_1 + y_1 \equiv_k x_2 + y_2.$

$$\underbrace{x_1y_1 - x_2y_2} = \underbrace{x_1y_1 - x_1y_2} + \underbrace{x_1y_2 - x_2y_2} =$$

$$= x_1(y_1 - y_2) + y_2(x_1 - x_2) = x_1 \cdot kb + y_2 \cdot ka =$$

$$= (x_1 b + y_2 a)k \Rightarrow x_1 \cdot y_1 \equiv_k x_2 y_2 .$$

$$[7]_{13} \cdot [2]_{13} = [14]_{13}$$

$$[-6]_{13} \cdot [2]_{13} = [-12]_{13}$$

$$7 - (-6) = 13$$

$$\underline{(a_1, b_1)} \sim \underline{(a_2, b_2)} \to a_1 b_2 = b_1 a_2$$

$$(c_1, d_1) \sim (c_2, d_2) \leftrightarrow c_1 d_2 = d_1 c_2$$

$$\Rightarrow (a_1, b_1) + (c_1, d_1) = (a_1 d_1 + b_1 c_1, b_1 d_1) \sim$$

$$\sim (a_2, b_2) + (c_2, d_2) = (\underline{a_2 d_2 + b_2 c_2, b_2 d_2})$$

$$(a_1 d_1 + b_1 c_1) b_2 d_2 = b_1 d_1 (a_2 d_2 + b_2 c_2).$$

$$a_1 b_2 d_1 d_2 + b_1 b_2 c_1 d_2 \qquad a_2 b_1 d_1 d_2 + b_1 b_2 c_2 d_1$$

$$a_1 b_2 = a_2 b_1 \qquad c_1 d_2 = c_2 d_1.$$

¡Gracias!