IIC1253 Matemáticas Discretas

Sasha Kozachinskiy

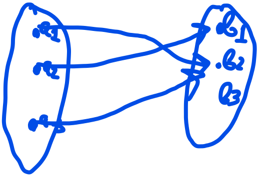
DCC UC

20.10.2025

Hoy...

Funciones: imagen y preimagen, inyectivas, sobreyectivas, biyectivas, composición, función inversa.

Definición



$(a,b) \in$ $\quad f \subseteq A \times B$

Definición

Una relación f de A en B es una función si para todo $a \in A$ existe un único elemento $b \in B$ tal que $(a,b) \in f$.

Definición

Definición

Una relación f de A en B us una función si para todo $a \in A$ existe un único elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

Terminología:

- $f : A \to B \iff$ "f una función de A en B"
- $(a, b) \in f \iff afb \iff b = f(a)$
- b es el valor o el imágen de a en f.
- $id_A = \{(a, a) \mid a \in A\} : A \to A$ la función identidad.

Ejemplos

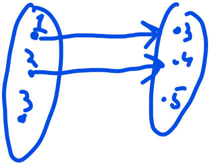
Sean $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4, 5\}$.

Ejemplos

Sean $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4, 5\}$.

- $\{(1, 3), (2, 4)\} \colon A \to B$?

$(3, \cdot)$? — no.



Ejemplos

Sean $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4, 5\}$.

- $\{(1, 3), (2, 4)\}\colon A \to B$?

- $\{(1, 3), (2, \underline{4}), (3, 3), (2, \underline{5})\}\colon A \to B$?

  $\neg$ no.

Ejemplos

Sean $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4, 5\}$.

- $\{(1, 3), (2, 4)\} \colon A \to B$?
- $\{(1, 3), (2, 4), (3, 3), (2, 5)\} \colon A \to B$?
- $\{(\underline{1}, 4), (\underline{2}, 4), (\underline{3}, 4)\} \colon A \to B$? – Sí

Ejemplos

Sean $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4, 5\}$.

- $\{(1, 3), (2, 4)\}: A \to B$?

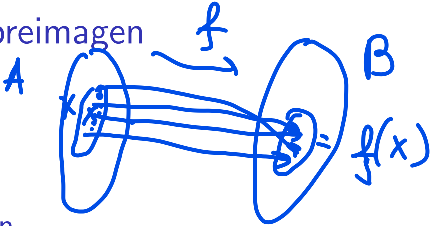
- $\{(1, 3), (2, 4), (3, 3), (2, 5)\}: A \to B$?

- $\{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}: A \to B$?

- $\{(1, 4), (2, 3), (3, \underline{2})\}: A \to B$? ¡no!

  $\notin \mathbb{B}$

Imagen y preimagen



Definición

Sean A y B dos conjuntos y $f : A \to B$. Entonces,

- *si $X \subseteq A$, él imagen de X es el conjunto* $f(X) = \{b \in \cancel{A}\, B \mid \exists x \in X \ b = f(x)\}$
- *si $Y \subseteq B$, él preimagen de Y es el conjunto* $f^{-1}(Y) = \{a \in A \mid f(a) \in Y\}$.
- *si $b \in B$, denotamos $f^{-1}(b) = f^{-1}(\{b\})$.*

Ejercicios con imagen y preimagen

Ejercicio

Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{Z}$. Definir $f(\{1,2,3,4\})$ y $f^{-1}(\{1,2,3,4\})$.

$f(\{1,2,3,4\}) = \{1,4,9,16\} = \{f(1), f(2), f(3), f(4)\}$

$f^{-1}(\{1,2,3,4\}) = \{1,-1,2,-2\} = f^{-1}(\{1,4\})$

Ejercicio

Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(x)$ es el mínimo número primo mayor que x^2, para todo $x \in \mathbb{N}$.

¿$19 \in f(\mathbb{N})$?

$f(3) = 11$

$f(4) = 17$ $\quad f(5) = 29$

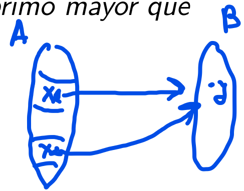


Imagen y $\cap, \cup$

$f: A \to B$ $\quad f(x),\ x \in A$

$X \subseteq A$ $\quad f(X) = \{y \in B \mid \exists\, x \in X\ \ y = f(x)\}$ imagen de X

Ejercicio

Nota: $X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow f(X_1) \subseteq f(X_2)$ - obvio

Sea $f : A \to B$ y $X_1, X_2 \subseteq A$. ¿Verdadero o falso?

a) $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$ - si

b) $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$

$X_1 \cap X_2 \subseteq X_1, X_2$

$f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1)$,

$f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_2)$

$f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$

a) $\cancel{f(X_1)}$ $X_1 \subseteq X_1 \cup X_2,\ X_2 \subseteq X_1 \cup X_2$ ye

$\Rightarrow f(X_1) \subseteq f(X_1 \cup X_2),\ f(X_2) \subseteq f(X_1 \cup X_2) \Rightarrow f(X_1) \cup f(X_2) \subseteq$

$\subseteq f(X_1 \cup X_2)$

$y \in f(X_1 \cup X_2)$ $\quad$ ¿$y \in f(X_1) \cup f(X_2)$?

$\Downarrow$ $\exists\, x \in X_1 \cup X_2\ \ y = f(x)$. Si $x \in X_1 \Rightarrow y \in f(X_1)$ y si $x \in X_2$

$\Rightarrow y \in f(X_2)$

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $\quad f(x) = x^2$ $\quad X_1 = \{1\},\ X_2 = \{-1\}$

$f(X_1) = \{1\} = f(X_2)$ $\quad f(X_1) \cap f(X_2) = \{1\}$ $\quad f(X_1 \cap X_2) = \emptyset$

Preimagen y $\cap, \cup$

$f: A \to B$ $\quad Y \subseteq B$ $\quad f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\}$

Sea $x \in A$

a) $x \in f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) \Leftrightarrow f(x) \in Y_1 \cup Y_2 \Leftrightarrow f(x) \in Y_1 \lor f(x) \in Y_2$
$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(Y_1) \lor x \in f^{-1}(Y_2) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$

Ejercicio

Sea $f: A \to B$ y $Y_1, Y_2 \subseteq B$. ¿Verdadero o falso?

a) $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$ – sí

b) $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$ – sí

$\ni x$ $\quad \ni x$

$f(x) \in Y_1 \cap Y_2 \Leftrightarrow f(x) \in Y_1 \land f(x) \in Y_2 \Leftrightarrow x \in f^{-1}(Y_1) \land x \in f^{-1}(Y_2)$

Funciones inyectivas y sobreyectivas

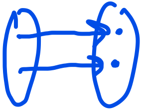
· inyectiva $|f^{-1}(b)| \le 1 \quad \forall b \in B$

Sobreyectiva $|f^{-1}(b)| \ge 1 \quad \forall b \in B$

Definición

Una función $f : A \to B$ se llama

- **inyectiva** *si no existen* $a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2$ *tal que* $f(a_1) = f(a_2)$
- **sobreyectiva** *si* $f(A) = B$.
- **biyectiva** *si es inyectiva y sobreyectiva.*



$\forall y \in \mathbb{N} \ \exists a, b \in \mathbb{N} \quad y = a \cdot b \qquad a = y \qquad b = 1$

		¿inyectiva?	¿sobreyectiva?
a)	$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) = x + 1$	✓	✗
b)	$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f((x, y)) = xy$	✗	✓

a) $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ - es inyectiva

Por el otro lado $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{N}$

$f((3,4)) = 12 \qquad f((0,0)) = 0 = f((1,0))$ - no es inyectiva

Composición

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $f(x) = x$

x	0	1	2	3	4	5 ....
$f(x)$	1	0	3	2	5	4

Biyección, porque cada número natural aparece exactamente 1 vez

Definición

Sean $f: A \to B$, $g: B \to C$. Entonces, la composición de f y g es la función

¡=!

$$f \circ g: A \to C, \qquad (f \circ g)(a) = g(f(a)) \; \forall a \in A.$$

Nota más habitual usar $g \circ f$

Composición

Definición

Sean $f: A \to B$, $g: B \to C$. Entonces, la composición de f y g es la función

$$f \circ g : A \to C, \qquad (f \circ g)(a) = g(f(a)) \ \forall a \in A.$$

Ejemplo: $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5, 6\}, C = \{7, 8\}$

$$f = \{(1,5),(2,5),(3,4)\}, \qquad g = \{(4,8),(5,7),(6,7)\}$$

$: A \to B$ $\qquad$ $: B \to C$

$$f \circ g = \{ (1,7), (2,7), (3,8) \}$$

$: A \to C$

Composición de funciones inyectivas

$$h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Proposición

Sean $f : A \to B, g : B \to C$ dos funciones inyectivas. Entonces, $f \circ g$ es inyectiva.

Demostrasión. $(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
$\forall\, x_1, x_2 \in A$.

$$(f \circ g)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (f \circ g)(x_2)$$

$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ porque g es inyectiva $\Rightarrow x_1 = x_2$
porque f es inyectiva. $\square$

Composición de funciones sobreyectivas

Proposición

Sean $f : A \to B, g : B \to C$ dos funciones sobreyectivas. Entonces, $f \circ g$ es sobreyectiva.

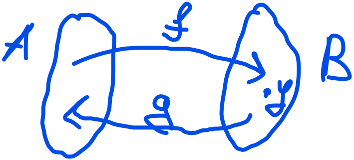
Demostración. $f \circ g : A \to C$. Hay que mostrar que para cada $z \in C$ $\exists\, x \in A$ tal que $z = (f \circ g)(x) = g(f(x))$.

$\exists\, y \in B$ tal que $z = g(y)$ ya que g es sobreyectiva.

Para ese y existe $x \in A$ $y = f(x)$ (f es sobreyectiva)

$g(f(x)) = g(y) = z$.

Función inversa



Definición

Sea $f : A \to B$. Entonces, $g : B \to A$ es la **función inversa** *de f si $f \circ g = id_A$ y $g \circ f = id_B$.*

$\forall x \in A \; g(f(x)) = x$

$g \circ f \qquad f(g(y)) = y \qquad \forall y \in B \; f(g(y)) = y$

Teorema

a) *Una función $f : A \to B$ es biyectiva si y sólo si tiene una función inversa;*

b) *Si una función $f : A \to B$ es biyectiva, entonces su función inversa es única y también es biyectiva.*

Parte a) $f: A \to B$ es biyectiva $\Rightarrow$ tiene una función inversa.

$g: B \to A$. Por definición, $\forall y \in B$ $f^{-1}(y)$ tiene exactamente un elemento x. $g(y) = x$

Vamos a verificar, que esa g es la función inversa de f.

$g(f(x)) = x$, $f(g(y)) = y$ $\forall x \in A, y \in B$.

$g(f(x))$ ~~g deve~~ = el único pre-imagen de $f(x)$, y por el otro lado un preimagen de $f(x)$ es x.

$f(g(y))$ $g(y)$ es un preimagen de y. Por definición, $f(g(y)) = y$.

Si $f: A \to B$ posee una función inversa $g: B \to A$, entonces, f es biyectiva. Para mostrar que f es inyectiva, mostramos $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ $\forall x_1, x_2 \in A$. Si $f(x_1) = f(x_2)$ $\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_1 = x_2$.

Para mostrar que f es sobreyectiva, mostramos $\forall y \in B$ $\exists x \in A$ $y = f(x)$

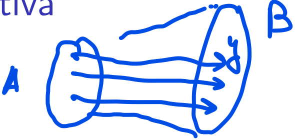
Vamos a definir $x = g(y)$ $\quad f(x) = f(g(y)) = y$,

ya g es la función inversa de f.

Parte b) Sea $f: A \to B$ biyectiva. Sea $g: B \to A$ la ~~alguna~~ función inversa de f. Dado $y \in B$, se puede notar que $g(y)$ tiene que satisfacer $f(g(y)) = y$. Ya que f es una biyección, existe un sólo $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Entonces, $g(y)$ tiene que ser igual a ese x.

Por definición, si g es la función inversa de f, f es la función inversa de g. Por el parte a) g posee la función inversa, por lo tanto es biyectiva. $\square$

Inyectiva vs. sobreyectiva



Proposición

Sean A, B dos conjuntos no vacios. Entonces, existe una función $f : A \to B$ inyectiva si y sólo si existe una función $g : B \to A$ sobreyectiva.

Demostración Sea $f: A \to B$ inyectiva.

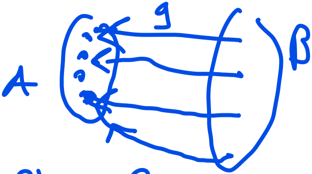
Sea $y \in B$. Si existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$ (en ese caso, ese x es único), voy a definir $g(y) = x$.

Si no existe, $g(y) = a_0$, donde $a_0 \in A$.

Se puede ver que g es sobreyectiva. Para cada $x \in A$ hay que mostrar $x = g(y)$ para algún $y \in B$.

Eso es cierto para $y = f(x)$, porque x es el único elemento de A tal que $f(x) = y$.

Sea $g: B \to A$ sobreyectiva.



Dado $x \in A$, existe por lo menos un $y \in B$ $x = g(y)$. Vamos a definir $f(x)$ como algún y así. Por definición, $g(f(x)) = x$, ya $f(x)$ devuelve algún elemento de B que va en x bajo g.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_1 = x_2 \quad \square$$

Por lo tanto, f es inyectiva.

Principio de palomar

Informalmente: si $n+1$ palomas se distribuyen en n palomares, entonces al menos habrá un palomar con más de una paloma.

Teorema (Principio de palomar)

Para todo $n \in \mathbb{N}$, *no existe una* $f : \{0, 1, \ldots, n\} \to \{0, 1, \ldots, n-1\}$ *inyectiva*

Ejemplo principio palomar

Ejercicio

Demuestra que en cualquier grupo de personas siempre habrá dos personas que hayan dado el mismo número de apretones de mano dentro del grupo.

¡Gracias!