IIC1253 Matemáticas Discretas

Sasha Kozachinskiy

DCC UC

15.10.2025

Hoy...

Relaciones: órdenes parciales y totales.

Órdenes

$(\mathbb{N}, \leq)$

Definición

Sea A un conjunto y R una relación sobre A. Entonces, R es un **órden** *si R es refleja, antisimétrica y transitiva, es decir:*

a) aRa *para todo* $a \in A$;

b) $(aRb \land bRa) \to a = b$ *para todos* $a, b \in A$;

c) $(aRB \land bRc) \to aRc$ *para todos* $a, b, c \in A$.

b

Órdenes

Definición

Sea A un conjunto y R una relación sobre A. Entonces, R es un **órden** *si R es refleja, antisimétrica y transitiva, es decir:*

a) aRa *para todo* $a \in A$;

b) $(aRb \wedge bRa) \to a = b$ *para todos* $a, b \in A$;

c) $(aRB \wedge bRc) \to aRc$ *para todos* $a, b, c \in A$.

Def Una relación R sobre un conjunto A se llama conexa si $aRb \vee bRa$ $\forall a, b \in A$.

Definición

Sea R un orden sobre un conjunto A. Entonces, R es un orden total (o lineal) si $aRb \vee bRa$ para todos $a, b \in A$.

Ejemplos

Ejercicio

Verifique que las siguientes relaciones son órdenes

a) $\subseteq$ *sobre* $\mathcal{P}(A)$ *para un conjunto* A (**orden de inclusión**)

b) $|$ *sobre* $\mathbb{N}$ | no es total porque $2 \nmid 3$, $3 \nmid 2$.

c) *la relación* $\preceq$ *sobre* $\mathbb{R}[x]$ *(conjunto de polinomios reales de una variable* x*), donde*

$$p \preceq q \iff \exists c \in \mathbb{R}\ p(x) \leq q(x) \text{ para todo } x \geq c.$$

¿Cuáles son lineales?

a) $A = \{1,2,3\}$, $\mathcal{P}(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

· $x, y \in \mathcal{P}(A)$ $\quad x \subseteq y$? $\quad \{1\} \subseteq \{1,3\}$ $\quad \{1,2\} \not\subseteq \{2,3\}$ $\quad \{2,3\} \not\subseteq \{1,2\}$

Porque ~~es~~

$\subseteq$ es refleja $\quad x \subseteq x \quad \forall x$

$\subseteq$ antisimetrica? $a \subseteq b$, $b \subseteq a \to a = b$

$x \subseteq y$, $y \subseteq z \to x \subseteq z$. $\Rightarrow$ para todos x, y, z

$\subseteq$ es transitiva. $\subseteq$ es un orden. ¿es total?

$\subseteq$ no es un orden total para $A = \{1, 2, 3\}$

¿Existe A tal que $\subseteq$ sobre $\mathcal{P}(A)$ es total?

Si. Digamos $A = \emptyset$, $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$

$A = \{x\}$, $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{x\}\}$

Si $A = \{x, y, \dots\}$

$\{x\} \not\subseteq \{y\}$

$\{y\} \not\subseteq \{x\}$

b) $\mathbb{N}$ $= \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ $\quad |$ $\quad x | y$

$\exists k \in \mathbb{N}$ $\quad y = k \cdot x$ $\quad 0|0$, $1|0$, $2|0$, ..

$0 = 0 \cdot 0$ $\quad 0 = 0 \cdot 1 \dots$

$|$ es un orden. En efecto,

1. $|$ es refleja porque $x|x$ para todo $x \in \mathbb{N}$

$x = 1 \cdot x$

2. $|$ es antisimétrica

$x|y \wedge y|x \to x = y$. para todos $x, y \in \mathbb{N}$

$(\mathbb{N}, \leq)$

$x = 0 \quad x|y \quad y = k \cdot x \Rightarrow y = 0$

$1|x$

$y = 0 \quad y|x \Rightarrow x = 0$

$2 \nmid 3, 3 \nmid 2.$

$x, y > 0 \quad x|y \to x = y \text{ o } x < y$

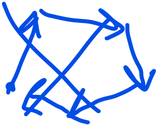
$y|x \to y = x \text{ o } y < x.$

Si por contradicción, $x \neq y$, $x < y$, $y < x$ — no puede ser.

3) $|$ es transitiva, porque

$x|y, y|z \Rightarrow \exists k, \ell \in \mathbb{N} \; y = k \cdot x, z = \ell \cdot y \Rightarrow z = \ell \cdot k \cdot x \Rightarrow x|z.$

Órdenes y DAGs



$\leq_G$ es un orden

Proposición

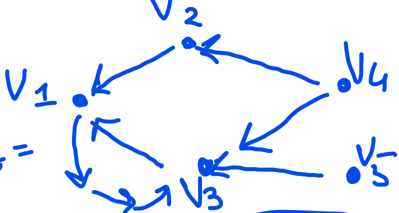
Sea G un grafo dirigido acíclico con el conjunto de los vértices V. Entonces, la relación

$$uRv \iff \text{existe un camino dirigido de } v \text{ a } u, \qquad u, v \in V$$

es un orden sobre V

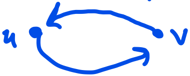
$A = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$G =$



$\leq_G$
- refleja
- x - obvio.
- antisimetrica

$v_1 \leq_G v_4$



$v_1 \leq_G v_5$

$v_2 \not\leq_G v_3$

$v_3 \not\leq_G v_2$

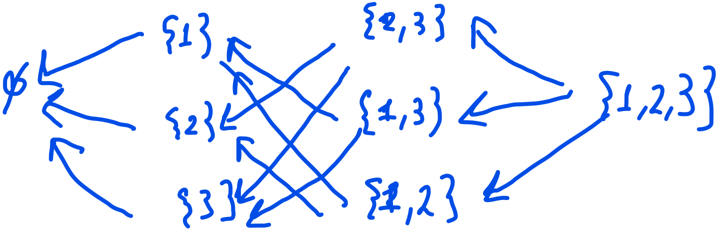
- transitiva

$u \leq_G v,\ v \leq_G w \Rightarrow u \leq_G w$

Ejercicios DAG

Ejercicio

Retratar el orden de inclusión sobre $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$ *como un DAG.*



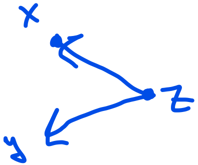
Ejercicios DAG

Ejercicio

Retratar el orden de inclusión sobre $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$ como un DAG.

Ejercicio

Dar un ejemplo de un orden en cual la relación "ser comparable" no es transitiva.



Universalidad del orden de inclusión

Cualquier orden ~~es~~

A, $B \subseteq \mathcal{P}(A)$

$(B, \subseteq)$

Proposición

Sea A un conjunto y $\preceq$ un orden sobre A. Define $S_a = \{b \in A \mid b \preceq a\}$. Entonces,

$$x \preceq y \iff S_x \subseteq S_y$$

para todos $x, y \in A$.

$S_a \subseteq A$

$\{S_a \mid a \in A\} \subseteq \mathcal{P}(A)$.

Demostración: $\Rightarrow$ $x \preceq y \Rightarrow S_x \subseteq S_y$. Hay que mostrar que si $z \in S_x$, también $z \in S_y$. $z \in S_x \Leftrightarrow z \preceq x$, $x \preceq y$ $\Rightarrow z \preceq y \Rightarrow z \in S_y$.

$S_x \subseteq S_y \Rightarrow x \preceq y$. ~~Vamos~~ Basta mostrar $x \in S_y$

$x \in S_x$ $x \preceq x$ $\Rightarrow x \in S_y$ porque $S_x \subseteq S_y$ $\square$

¿El orden de las palabras en un diccionario?

Agua $\leq_{lex}$ Barra

Barrio $\geq_{lex}$ Barra

Barraca $\geq_{lex}$ Barra

Orden lexicográfico

Notación:

Orden lexicográfico

Notación:

- Sea $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ un *alfabeto*;

Orden lexicográfico

Notación:

- Sea $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ un *alfabeto*;
- Sea u_i la letra número i de la palabra u sobre Σ;

$(\text{barrio})_1 = b,\ (\text{barrio})_6 = o,\ (\text{barrio})_2 = a.$

Orden lexicográfico

Notación:

- Sea $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ un *alfabeto*;
- Sea u_i la letra número i de la palabra u sobre Σ;
- (si i es mayor que el largo de u, ponemos $u_i = \sigma_0$)

$(agua)_6 = \sigma_0$ $(agua)_5 = \sigma_0$

Orden lexicográfico

Notación:

- Sea $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ un *alfabeto*;
- Sea u_i la letra número i de la palabra u sobre Σ;
- (si i es mayor que el largo de u, ponemos $u_i = \sigma_0$)

Definición (el orden lexicográfico)

Sean $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ un alfabeto y u, v dos palabras sobre Σ. Entonces, $u \leq_{lex} v$ si $u = v$ o si $u_k = \sigma_i$, $v_k = \sigma_j$ para algunos $i, j \in \{0, \ldots, m\}, i < j$, donde k es el mínimo numero natural tal que $u_k \neq v_k$.

$u =$ barra

$v =$ barraca

$u_1 = v_1, \ldots \quad u_5 = v_5$

$u_6 = \sigma_0, \; v_6 = \sigma_3$

Orden lexicográfico

Notación:

- Sea $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ un *alfabeto*;
- Sea u_i la letra número i de la palabra u sobre Σ;
- (si i es mayor que el largo de u, ponemos $u_i = \sigma_0$)

Definición (el orden lexicográfico)

Sean $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ un alfabeto y u, v dos palabras sobre Σ. Entonces, $u \leq_{lex} v$ si $u = v$ o si $u_k = \sigma_i$, $v_k = \sigma_j$ para algunos $i, j \in \{0, \ldots, m\}, i < j$, donde k es el mínimo numero natural tal que $u_k \neq v_k$.

Proposición

$\leq_{lex}$ es un orden lineal sobre Σ^*

= el conjunto de todas las palabras sobre Σ

Proposición

$\leq_{lex}$ *es un orden lineal sobre* Σ^*.

$\leq_{lex}$ refleja, antisimetrica, conexa - ejercicio.

Vamos a mostrar que $\leq_{lex}$ es transitiva.

$u \leq_{lex} v$, $v \leq_{lex} w \Rightarrow u \leq_{lex} w$.

Nos queda el caso $u \neq v$, $v \neq w$.

Sea k el mínimo número natural $u_k \neq v_k$

$u = v \Rightarrow u \leq_{lex} w$

$v = w \Rightarrow u \leq_{lex} w$

Sea ℓ el mínimo número natural tal que $v_\ell \neq w_\ell$

Ya que $u \leq_{lex} v$ $u_k < v_k$ (en el orden de letras en Σ)

$v \leq_{lex} w$ $v_\ell < w_\ell$

Hay que mostrar $u \leq_{lex} w$

$u_1 = v_1, \ldots, u_{k-1} = v_{k-1}$

$v_1 = w_1, \ldots, v_{\ell-1} = w_{\ell-1}$.

$t = \min\{k, \ell\}$.

Al principio, voy a mostrar $u_1 = w_1, \ldots, u_{t-1} = w_{t-1}$

$i = 1, \ldots, t-1$ $i < \min\{k, \ell\}$ $i < k$, $i < \ell$ $\Rightarrow u_i = w_i$.

$u_i = v_i$ $v_i = w_i$.

Nos falta mostrar $u_t < w_t$ en el orden de Σ.

1) $u_t \leq v_t \leq w_t$

2) $\underline{u_t < v_t}$ o $\underline{v_t < w_t}$

Mostraremos 1) $u_1 = v_1 \ldots u_{k-1} = v_{k-1}$, $u_k < v_k$.

$\Rightarrow$ j Si $j \leq k \Rightarrow u_j \leq v_j$. En particular para $t = \min\{k, l\} \leq$

$\leq k$

$u_t \leq v_t$.

Asimismo se puede mostrar $v_t \leq w_t$.

2) Mostraremos 2) $t = \min\{k, l\}$

$t = k$, $u_k < v_k$

$t = l$ $v_l < w_l$

$\square$

Elemento mínimo y elemento minimal

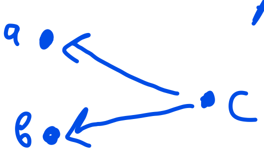
Definición

Sea $\preceq$ un orden sobre un conjunto A. Entonces, $a \in A$ se llama

- **el elemento mínimo** *(bajo $\preceq$) si $a \preceq b$ para todo $b \in A$;*
- **un elemento minimal** *(bajo $\preceq$) si no existe $b \in A$ tal que $b \neq a, b \preceq a$.*

Elemento mínimo y elemento minimal

$A = \{a, b, c\}$



$\preceq = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,c), (b,c)\}.$

Definición

Sea $\preceq$ un orden sobre un conjunto A. Entonces, $a \in A$ se llama

- **el elemento mínimo** *(bajo $\preceq$) si $a \preceq b$ para todo $b \in A$;*
- **un elemento minimal** *(bajo $\preceq$) si no existe $b \in A$ tal que $b \neq a, b \preceq a$.*

Así mismo se definen el elemento máximo y un elemento maximal.

Proposición

Si un orden $\preceq$ tiene el elemento mínimo, entonces ese elemento es un elemento minimal, y no hay otros elementos minimales.

Sea x el elemento mínimo. No existe $b \in A$ $b \neq x$, $b \preceq x$, porque $x \preceq b$, $x = b$. $\Rightarrow x$ un elemento minimal.

Y si y es un elemento minimal, $x \preceq y$. y q que x es el mínimo. $x = y$ ya que y es minimal.

Proposición

Los elementos minimales de un orden son incomparables entre sí.

Ejercicio mínimo/minimal

Ejercicio

a) *¿Todos los órdenes totales poseen el elemento mínimo o el elemento máximo?* $(0,1)$ $\mathbb{Z}$,

b) *¿Cuales son elementos mínimos/minimales y máximos/maximales de* $|$ *sobre* $\mathbb{N}$*?* $x|y$ $\exists k$ $y=k\cdot x$.

c) *¿Y sobre* $\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$*?*

el elemento mínimo es 1 ya que $1|x$ $\forall x\in\mathbb{N}$

el elemento maximo es 0 ya que $x|0$ $\forall x\in\mathbb{N}$

$0=0\cdot x$.

elementos minimales x tal que

no existe $y \in \{2, 3, \dots\}$ $y \mid x$ $y \neq x$.

¡Gracias!

Cadenas e anticadeneas

Definición

Sea $\preceq$ un orden sobre un conjunto A. Entonces, un subconjunto $S \subseteq A$ se llama

- *una* **cadena** *(bajo $\preceq$) si $x \preceq y$ o $y \preceq x$ para todos $x, y \in S$;*
- *una* **anticadena** *(bajo $\preceq$) si $x \not\preceq y$ y $y \not\preceq x$ para todos $x, y \in S, x \neq y$;*

Teorema (Dilworth)

Sea $\preceq$ un orden sobre un conjunto finito A. Entonces, el mayor tamaño de una anticadena bajo $\preceq$ es igual al menor número de cadenas en una partición de A en cadenas disjuntas.