IIC1253 Matemáticas Discretas

Sasha Kozachinskiy

DCC UC

27.08.2025

Hoy...

Lógica de predicados: equivalencias, teorías y modelos (satisfacibilidad), tautologías y consecuencias.

Equivalencias

Definición

Dos fórmulas ϕ *y* ψ *de la lógica de predicados son equivalentes si* $[\![\phi]\!]_{\mathcal{I}} = [\![\psi]\!]_{\mathcal{I}}$ *para cualquier interpretación* $\mathcal{I}$.

Equivalencias

Definición

Dos fórmulas ϕ y ψ de la lógica de predicados son equivalentes si $[\![\phi]\!]_{\mathcal{I}} = [\![\psi]\!]_{\mathcal{I}}$ para cualquier interpretación $\mathcal{I}$.

Nota: equivalencias de la lógica proposicional son caso particular de las equivalencias de la lógica de predicados.

$\underline{A \to B}$ es equivalente $\underline{\neg A \vee B}$

Ejemplo de equivalencia

$\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_k)$

Proposición

Fórmulas

$$\phi = \exists x \Big(A(x,\bar{y}) \vee B(x,\bar{y}) \Big), \qquad \psi = (\exists x A(x,\bar{y})) \vee (\exists x B(x,\bar{y}))$$

son equivalentes.

$\exists x \, (A(x) \vee B(x))$, $(\exists x A(x)) \vee (\exists x B(x))$

	x_1	x_2	x_3		
A	0	1	0		
B	1	0	0	0	1

~~Jor~~ Ambas fórmulas dicen que en la tabla hay por lo menos un $\underline{1}$.

Ejemplo de equivalencia

Proposición

Fórmulas

$$\phi = \exists x \Big(A(x,\bar{y}) \vee B(x,\bar{y}) \Big), \qquad \psi = (\exists x A(x,\bar{y})) \vee (\exists x B(x,\bar{y}))$$

son equivalentes.

$= I \models (D = \{1,3,5,7,8,11\},$

	1	3	5	7	8	11
A	1	0	0	0	1	0
B	1	1	0	1	1	1

$D = \{a_1, a_2, a_3 \dots\}$

	a_1	a_2	a_3
A	1	0	
B	0	1	

¿Son equivalentes? — no.

$$\phi = \forall x \Big(A(x) \vee B(x) \Big), \qquad \psi = (\forall x A(x)) \vee (\forall x B(x))$$

$[[\varphi]]_I = 1$

A	0	1	1	1	1	1
B	1	0	0	0	0	0

$= I$

$[[\psi]]_I = 0$

Ejemplo de equivalencia

Proposición

Fórmulas

$$\phi = \forall x A(x, \bar{y}), \qquad \psi = \neg \exists x \Big(\neg A(x, \bar{y}) \Big)$$

son equivalentes.

$$\neg \exists x \neg A(x) = \forall x A(x)$$

$$\neg \exists x \underbrace{\neg \neg A(x)} = \forall x \underbrace{\neg A(x)}$$

$$\exists x A(x) = \neg \forall x \neg A(x).$$

$$\neg \exists x A(x) = \forall x \neg A(x)$$

$$\exists x A(x) = \neg \forall x \neg A(x).$$

¿Cual fórmula con $\forall$ es equivalente a $\exists x A(x, \bar{y})$?

Teorías y modelos

Repaso: fórmulas de la lógica de predicados que calculan proposiciones (predicados 0-arios) se llaman **oraciones**. En particular, las fórmulas de la lógica proposicional son oraciones.

Teorías y modelos

Repaso: fórmulas de la lógica de predicados que calculan proposiciones (predicados 0-arios) se llaman **oraciones**. En particular, las fórmulas de la lógica proposicional son oraciones.

Definición

Un conjunto de oraciones de la lógica de predicados se llama una **teoría**.

Teorías y modelos

Repaso: fórmulas de la lógica de predicados que calculan proposiciones (predicados 0-arios) se llaman **oraciones**. En particular, las fórmulas de la lógica proposicional son oraciones.

Definición

Un conjunto de oraciones de la lógica de predicados se llama una **teoría**.

Definición

Sea T una teoría. Su **modelo** *es una interpretación $\mathcal{M}$ tal que $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M}} = 1$ para todas $\phi \in T$.*

Teorías y modelos

Repaso: fórmulas de la lógica de predicados que calculan proposiciones (predicados 0-arios) se llaman **oraciones**. En particular, las fórmulas de la lógica proposicional son oraciones.

Definición

Un conjunto de oraciones de la lógica de predicados se llama una **teoría***.*

Definición

Sea T una teoría. Su **modelo** *es una interpretación $\mathcal{M}$ tal que $[\![\phi]\!]_{\mathcal{M}} = 1$ para todas $\phi \in T$.*

En la lógica proposicional, modelo $=$ asignación satisfactoria (recuerden z3-solver).

Ejemplo: teoría de orden parcial

$$\forall x A(x,x) \tag{1}$$

$$\forall x \forall y \Big((A(x,y) \wedge A(y,x)) \rightarrow x = y \Big) \tag{2}$$

$$\forall x \forall y \forall z \Big((A(x,y) \wedge A(y,z)) \rightarrow A(x,z) \Big) \tag{3}$$

Ejemplo: teoría de orden parcial

$D = \mathbb{N}$

$A(x,y) =$ "$x \leq y$"

$$\forall x A(x,x) \tag{1}$$

"$x \leq y$", "$y \leq x$" $\Rightarrow x = y$

$$\forall x \forall y \Big((A(x,y) \wedge A(y,x)) \rightarrow x = y \Big) \tag{2}$$

$$\forall x \forall y \forall z \Big((A(x,y) \wedge A(y,z)) \rightarrow A(x,z) \Big) \tag{3}$$

$x \leq y,\ y \leq z \rightarrow x \leq z.$

Ojo: a partir de ahora, solo consideramos interpretaciones donde el símbolo $=$ se interpreta como igualdad (*interpretaciones normales*).

Ejemplo: teoría de orden parcial

$$\forall x A(x, x) \tag{1}$$

$$\forall x \forall y \Big((A(x, y) \wedge A(y, x)) \rightarrow x = y \Big) \tag{2}$$

$$\forall x \forall y \forall z \Big((A(x, y) \wedge A(y, z)) \rightarrow A(x, z) \Big) \tag{3}$$

Ojo: a partir de ahora, solo consideramos interpretaciones donde el símbolo $=$ se interpreta como igualdad (*interpretaciones normales*).

Modelo? – si

$D = \{2, 3, 5, 7\}$

y

x

A	2	3	5	7
2	1	0	0	0
3	0	1	0	0
5	0	0	1	0
7	0	0	0	1

A(3,7)

Ejemplo: teoría de orden parcial

$$\forall x A(x, x) \tag{1}$$

$$\forall x \forall y \Big((A(x, y) \wedge A(y, x)) \rightarrow x = y \Big) \tag{2}$$

$$\forall x \forall y \forall z \Big((A(x, y) \wedge A(y, z)) \rightarrow A(x, z) \Big) \tag{3}$$

Ojo: a partir de ahora, solo consideramos interpretaciones donde el símbolo $=$ se interpreta como igualdad (*interpretaciones normales*).

Modelo?

A	2	3	5	7
2	1	1	1	1
3	0	1	1	1
5	0	0	1	1
7	0	0	0	1

Ejemplo: teoría de orden parcial

$$\forall x A(x,x) \tag{1}$$

$$\forall x \forall y \Big((A(x,y) \wedge A(y,x)) \rightarrow x = y \Big) \tag{2}$$

$$\forall x \forall y \forall z \Big((A(x,y) \wedge A(y,z)) \rightarrow A(x,z) \Big) \tag{3}$$

Ojo: a partir de ahora, solo consideramos interpretaciones donde el símbolo $=$ se interpreta como igualdad (*interpretaciones normales*).

Modelo?

A	2	3	5	7
2	1	1	1	0
3	0	1	1	0
5	0	0	1	0
7	0	0	0	1

Ejemplo: teoría de orden parcial

$x=5,\ y=3$

$$\forall x A(x,x) \tag{1}$$

$$\forall x \forall y \Big(\underbrace{(A(x,y) \wedge A(y,x)) \rightarrow x = y}\Big) \tag{2}$$

$$\forall x \forall y \forall z \Big((A(x,y) \wedge A(y,z)) \rightarrow A(x,z)\Big) \tag{3}$$

Ojo: a partir de ahora, solo consideramos interpretaciones donde el símbolo $=$ se interpreta como igualdad (*interpretaciones normales*).

$x=2,\ y=3,\ z=5$

Modelo? – No! $A(2,3)=1$, $A(3,5)=1$, $A(2,5)=0$

$I = (D=\{2,3,5,7\},$

A	2	3	5	7
2	1	1	0	0
3	0	1	1	0
5	0	0	1	0
7	0	0	0	1

$, =)$

(3) es falsa

Satisfacibilidad y consecuencias

Definición

Sea T una teoría.

Satisfacibilidad y consecuencias

Definición

Sea T una teoría.

- *T se llama* **satisfacible** *si posee por lo menos un modelo.*

Satisfacibilidad y consecuencias

Definición

Sea T una teoría.

- *T se llama* **satisfacible** *si posee por lo menos un modelo.*
- *Sea ψ una oración. Entonces, $T \models \psi$ si $[\![\psi]\!]_{\mathcal{M}} = 1$ para todos los modelos $\mathcal{M}$ de T.*

Satisfacibilidad y consecuencias

Definición

Sea T una teoría.

- *T se llama* **satisfacible** *si posee por lo menos un modelo.*
- *Sea ψ una oración. Entonces, $T \models \psi$ si $[\![\psi]\!]_{\mathcal{M}} = 1$ para todos los modelos $\mathcal{M}$ de T.*

Proposición

Sea T una teoría y ψ una oración. Entonces, $T \models \psi$ si y sólo si $T \cup \{\neg\psi\}$ no es satisfacible.

Dem. $T \models \psi$. Hay que mostrar. $T \cup \{\neg\psi\}$ no posee un modelo M. Por contradicción, $T \cup \{\neg\psi\}$ posee un modelo M. Pero M es un modelo de T ~~tal~~ en que ψ es falso ($\neg\psi$ es verdadero en M).

$T \cup \{\neg\psi\}$ no es satisf.

Ejemplo: teoría de orden parcial

$T_{op} = \{(1\text{–}3)\}$

$$\forall x A(x, x) \tag{1}$$

$$\forall x \forall y \Big((A(x, y) \wedge A(y, x)) \rightarrow x = y \Big) \tag{2}$$

$$\forall x \forall y \forall z \Big((A(x, y) \wedge A(y, z)) \rightarrow A(x, z) \Big) \tag{3}$$

✓ no

¿$T_{op} \models \forall x \forall y \Big(A(x, y) \vee A(y, x) \Big)$?

$x = 2 \quad y = 3$

A	2	3	5	7
2	1	0	0	0
3	0	1	0	0
5	0	0	1	0
7	0	0	0	1

$D = \{2, 3, 5, 7\}$

$= I$

Ejemplo: teoría de orden parcial

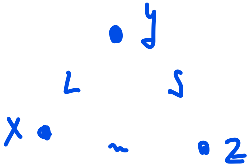
$x \leq y$

$$T_{op} = \{(1\text{–}3)\}$$

$$\forall x A(x, x) \tag{1}$$

$$\forall x \forall y \Big((A(x, y) \wedge A(y, x)) \to x = y \Big) \tag{2}$$

$$\forall x \forall y \forall z \Big((A(x, y) \wedge A(y, z)) \to A(x, z) \Big) \tag{3}$$



¿ $T_{op} \models \forall x \forall y \Big(A(x, y) \vee A(y, x) \Big)$?

¿ $T_{op} \models \forall x \forall y \forall z \Big((C(x, y) \wedge C(y, z)) \to C(x, z) \Big)$? donde $C(x, y) = A(x, y) \vee A(y, x)$.

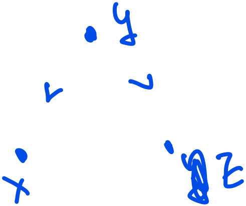
Espacio

9. $\text{Top} \models \forall x \forall y \forall z \big((A(x,y) \vee A(y,x)) \wedge (A(y,z) \vee A(z,y)) \rightarrow (A(x,z) \vee A(z,x)) \big)$

$$I = (D, A, =)$$

$$(A(x,y) \vee A(y,x)) \wedge (A(y,z) \vee A(z,y)) = \text{verdad}$$

$$\Rightarrow A(x,z) = \text{verdad}$$



	x	y	z
x	1	1	0
y	0	1	0
z	0	1	1

Ejemplo más dificil

$T_{op} = \{(1–3)\}$

$$\forall x A(x,x) \tag{1}$$

$$\forall x \forall y \Big((A(x,y) \wedge A(y,x)) \rightarrow x = y \Big) \tag{2}$$

$$\forall x \forall y \forall z \Big((A(x,y) \wedge A(y,z)) \rightarrow A(x,z) \Big) \tag{3}$$

Teorema (Dilworth)

Para cada orden parcial, lo siguiente es cierto. El máximo número de elementos incomparables es a lo más 2 si y sólo si existen 2 elementos tal que cada elemento es comparable con uno de ellos.

Ejemplo más dificil

$T_{op} = \{(1\text{–}3)\}$

$$\forall x A(x, x) \tag{1}$$

$$\forall x \forall y \Big((A(x, y) \wedge A(y, x)) \rightarrow x = y \Big) \tag{2}$$

$$\forall x \forall y \forall z \Big((A(x, y) \wedge A(y, z)) \rightarrow A(x, z) \Big) \tag{3}$$

Teorema (Dilworth)

Para cada orden parcial, lo siguiente es cierto. El máximo número de elementos incomparables es a lo más 2 si y sólo si existen 2 elementos tal que cada elemento es comparable con uno de ellos.

Formular el teorema de Dilworth cómo una consecuencia de T_{op}.

Espacio

Tautologías

Definición

Una oración ϕ *de la lógica de predicados se llama una* **tautología** *si* $[\![\phi]\!]_{\mathcal{I}} = 1$ *para cualquier interpretación* $\mathcal{I}$.

Tautologías

Definición

Una oración ϕ *de la lógica de predicados se llama una* **tautología** *si* $[\![\phi]\!]_{\mathcal{I}} = 1$ *para cualquier interpretación* $\mathcal{I}$.

Ejemplos:

- $\Big((\forall x(A(x) \to B(x))) \land (\forall x(B(x) \to C(x)))\Big) \to (\forall x(A(x) \to C(x)))$

Tautologías

Definición

Una oración ϕ de la lógica de predicados se llama una **tautología** *si $[\![\phi]\!]_{\mathcal{I}} = 1$ para cualquier interpretación $\mathcal{I}$.*

Ejemplos:

- $\big((\forall x(A(x) \to B(x))) \wedge (\forall x(B(x) \to C(x)))\big) \to (\forall x(A(x) \to C(x)))$
- $\neg\exists x \forall y \big(B(x,y) \leftrightarrow \neg B(y,y)\big)$. paradoja del barbero

Tautologías y consecuencias

Proposición

Sea $T = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ *una teoría finita y* ψ *una oración. Entonces,* $T \models \psi$ *si y sólo si* $(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n) \rightarrow \psi$ *es una tautología.*

Tautologías y consecuencias

Proposición

Sea $T = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ *una teoría finita y* ψ *una oración. Entonces,* $T \models \psi$ *si y sólo si* $(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n) \to \psi$ *es una tautología.*

Teorema (Compacidad)

Sea T *una teoría y* ψ *una oración tal que* $T \models \psi$*. Entonces, existe un subteoría finita* $T' \subseteq T$ *tal que* $T' \models \psi$*.*

Teorema de completitud de Gödel

Definición

Sistema de demostraciones es un algoritmo S que toma una oración ϕ de la lógica de predicados y una palabra binaria p, y devuelve 0 o 1.

Teorema de completitud de Gödel

Definición

Sistema de demostraciones es un algoritmo S que toma una oración ϕ de la lógica de predicados y una palabra binaria p, y devuelve 0 o 1.

- *El sistema de demostraciones S es correcto si $S(\phi, p) = 0$ para cada palabra binaria p y cada oración ϕ que no es una tautología.*
- *El sistema de demostraciones S es completo si para cada tautología ϕ existe una palabra binaria p tal que $S(\phi, p) = 1$.*

Teorema de completitud de Gödel

Definición

Sistema de demostraciones es un algoritmo S que toma una oración ϕ de la lógica de predicados y una palabra binaria p, y devuelve 0 o 1.

- *El sistema de demostraciones S es correcto si $S(\phi, p) = 0$ para cada palabra binaria p y cada oración ϕ que no es una tautología.*
- *El sistema de demostraciones S es completo si para cada tautología ϕ existe una palabra binaria p tal que $S(\phi, p) = 1$.*

Teorema (Gödel, 1929)

Existe un sistema de demostraciones correcto y completo.

Conclusion

Conclusion

- se puede formalizar demostraciones matemáticas y automatizar su *verificación*...

Conclusion

- se puede formalizar demostraciones matemáticas y automatizar su *verificación*...
- pero no se puede automatizar *búsqueda* de las demostraciones (Church–Turing)

Conclusion

- se puede formalizar demostraciones matemáticas y automatizar su *verificación*...
- pero no se puede automatizar *búsqueda* de las demostraciones (Church–Turing)
- La próxima vez, empezamos a ver una teoría que expresa todas las matemáticas (teoría de conjuntos Zermelo-Frenkel).

Conclusion

- se puede formalizar demostraciones matemáticas y automatizar su *verificación*...
- pero no se puede automatizar *búsqueda* de las demostraciones (Church–Turing)
- La próxima vez, empezamos a ver una teoría que expresa todas las matemáticas (teoría de conjuntos Zermelo-Frenkel).

¡Gracias!