Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencias de Compputación
Matemáticas Discretas- IIC1253

Guía 1 – Lógica proposicional

Problema 1 Define si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas (o que no se puede definir): :

a) (18.09.25 lloverá) $\rightarrow$ ((19.09.25 nevará) $\rightarrow$ (18.09.25 lloverá))

b) $\bigwedge_{i=1}^{990} \bigvee_{j=i}^{i+9} (j \text{ es primo})$.

c) ((Hipótesis de Riemann) $\rightarrow$ (P = NP))$\wedge$((P=NP) $\rightarrow$ (Hipótesis de Riemann))

d) ((Hipótesis de Riemann) $\rightarrow$ (P = NP))$\vee$((P=NP) $\rightarrow$ (Hipótesis de Riemann))

Problema 2 ¿Son las siguientes fórmulas equivalentes?

a) $\phi = (A \wedge B) \vee C, \qquad \psi = A \wedge (B \vee C)$

b) $\phi = (A \rightarrow B) \rightarrow C, \qquad \psi = A \rightarrow (B \rightarrow C)$

c) $\phi = A \rightarrow (B \rightarrow C), \qquad \psi = B \rightarrow (A \rightarrow C)$

d) $\phi = A \rightarrow B, \qquad \psi = (\neg A) \rightarrow (\neg B)$

e) $\phi = (x \vee a) \wedge (x \vee \neg a) \wedge (\neg x \vee y), \qquad \psi = x \wedge y.$

Problema 3 ¿Verdadero o falso? La siguiente DNF siempre toma valor 1, independiente del valor de verdad de sus variables:

a) $(x \wedge a) \vee (x \wedge \neg a) \vee (\neg x \wedge \neg y)$

b) $(x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y) \vee (y \wedge z) \vee (\neg y \wedge \neg z) \vee (z \wedge x) \vee (\neg z \wedge \neg x)$

Problema 4 Define la funcíón booleana de 3 variables

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 1 & x+y+z \text{ es impar,} \\ 0 & x+y+z \text{ es par.} \end{cases}$$

a) Construye una DNF para f.
b) Demuestre que no existe una DNF para f con menor que 4 cláusulas.

Problema 5 Muestre que no existe una fórmula proposicional que usa solo $\wedge, \vee$ y es equivalente a $A \rightarrow B$.

Problema 6 Construye la tabla de verdad y una CNF para la función:

$$f(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} 1 & x_1 \geq x_2 \geq x_3, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Problema 7 Demuestre que cualquier función Booleana de n variables tiene una DNF con no más que 2^{n-1} cláusulas o una CNF con no más que 2^{n-1} cláusulas.

Problema 8 Demuestre que:

a) $\{1, \oplus, \wedge\}$, $\{\neg(x \vee y)\}$ son funcionalmente completos;

b) $\{\neg(x \to y)\}$ no son funcionalmente completos.

Problema 9 ¿Para que n la CNF

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{n-1} (x_i \vee x_{i+1}) \wedge (\neg x_i \vee \neg x_{i+1})\right) \wedge (x_n \vee x_1) \wedge (\neg x_n \vee \neg x_1)$$

es satisfacible?

Problema 10 Una CNF se llama Horn-CNF si cada cláusula incluye no más que una variable sin negación. Encuentre un algoritmo polinomial (por lo menos, un algoritmo más rápido que probar todas las asignaciones) para el problema de satisfacibilidad para Horn-CNFs (*hint: ¿qué sucede si cada cláusula incluye por lo menos una variable negada? ¿Y si no?*)

Problema 11 El principio de palomar dice que no se puede distribuir n palomas en $n-1$ palomares tal que cada palomar contiene no más que 1 paloma. Construye una CNF insatisfacible que codifica este principio. Más precisamente, hay que usar variables:

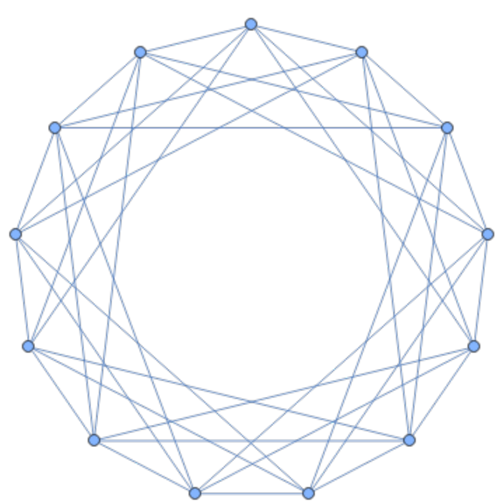
$$x_{i,j}, \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad j = 1, \ldots, n-1,$$

donde $x_{i,j}$ se interpreta como "la paloma i está colocada en palomar j".

Agregue cláusulas que dicen que cada paloma tiene que ser colocada por lo menos en un palomar, y cada palomar no puede contener 2 palomas distintas.

Después, corra este CNF resultante en z3-solver para $n = 9, 10, 11, 12$. ¿Qué conclusión se puede sacar?

Problema 12 ¿Se puede colorear vértices de este grafo usando 3 colores tal que vértices adyacentes tengan colores distintos? Si se necesita, use SAT solver.



Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencias de Compputación
Matemáticas Discretas- IIC1253

Problema 13 Verificar que estas fórmulas son tautologías:

$$A \to (B \to A) \quad (1)$$
$$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \quad (2)$$
$$(A \wedge B) \to A \quad (3)$$
$$(A \wedge B) \to B \quad (4)$$
$$A \to (B \to (A \wedge B)) \quad (5)$$
$$A \to (A \vee B) \quad (6)$$
$$B \to (A \vee B) \quad (7)$$
$$(A \to B) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C)) \quad (8)$$
$$(\neg A) \to (A \to B) \quad (9)$$
$$(A \to B) \to ((A \to (\neg B)) \to (\neg A)) \quad (10)$$
$$A \vee \neg A \quad (11)$$

Problema 14 ¿Es una tautología?

a) $\left(\bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} x_{ij}\right) \to \left(\bigwedge_{j=1}^{n} \bigvee_{i=1}^{n} x_{ij}\right)$

b) $\left(\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{n} y_{ij}\right) \to \left(\bigvee_{j=1}^{n} \bigwedge_{i=1}^{n} y_{ij}\right)$

Problema 15 Contexto. *Sistema Frege* es un sistema de demostraciones formales para tautologías de la lógica proposicional. En este sistema, tautologías (1–11) están dadas cómo axiomas. También, hay 2 *reglas de inferencia*:

- (*sustitución*) se puede inferir cualquier fórmula ϕ que puede ser obtenida de (1–11) al reemplazar A, B, C por fórmulas proposicionales. Por ejemplo, se puede inferir

$$\phi = (x \wedge \neg y) \to ((x \vee z)) \to (x \wedge \neg y))$$

de (1), reemplazando $A = x \wedge \neg y, B = x \vee y$.

- (*modus ponens*) se puede inferir ψ si ya hemos inferido formulas ϕ y $\phi \to \psi$. Por ejemplo, eso es una demostración de la formula $(X \vee Y) \to (A \vee \neg A)$ en sistema Frege:
  - $(A \vee \neg A) \to ((X \vee Y) \to (A \vee \neg A))$ (sustitución $A = A \vee \neg A$, $B = X \vee Y$ en (1)).
  - $(X \vee Y) \to (A \vee \neg A)$ (aplicamos modus ponens a (11) y la fórmula anterior).

Tarea. Inferir la fórmula $A \to A$ en sistema Frege de (1–2).

Problema 16 ¿Es una consecuencia lógica?

a) $\{A \to B, B \to C\} \models A \to C$

b) $\{A_1 \to B, \ldots, A_n \to B,\ A_1 \vee \ldots \vee A_n\} \models B$

A	B	C	A→B	A→C	B→C	
0	0	0	1	1	1	V
0	0	1	1	1	1	V
0	1	0	1	1	0	
0	1	1	1	1	1	V
1	0	0	0	0	1	
1	0	1	0	1	1	
1	1	0	1	0	0	
1	1	1	1	1	1	V

Se puede ver que en todas las filas donde $A \to B = B \to C = 1$, tenemos también que $A \to C = 1$. Entonces, sí, es consecuencia lógica.

Por contradicción
Asumimos que existe asignación
$A \to B = 1$
$B \to C = 1$, $A \to C = 0$

$A = 1$, $C = 0$,
$A \to B = 1 \to B = 1$
$\Rightarrow B = 1$, $B \to 0 = 1$ $B = 0$

$\Sigma \models \varphi$
Para cada asignación tal que todas las formulas en Σ toman valor 1, φ también toma valor 1.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencias de Compputación
Matemáticas Discretas- IIC1253

No es consecuencia $\Rightarrow$ existe asignación $B \to A_1 = 1, \ldots, B \to A_n = 1$

$A_1 \vee \ldots \vee A_n = 0$

$A_1 = \ldots = A_n = 0$, Puede ser $B \to 0 = 1$?

$B = 0$

no porque

$B = A_1 = \ldots = A_n = 0$

$B \to A_1 = \ldots B \to A_n = 1$

pero $A_1 \vee \ldots \vee A_n = 0$

c) $\{B \to A_1, \ldots, B \to A_n\} \models A_1 \vee \ldots \vee A_n$

d) $\{\bigvee_{i=1}^{n-1} x_{1i},\ \bigvee_{i=1}^{n-1} x_{2i}, \ldots, \bigvee_{i=1}^{n-1} x_{ni}\} \models \bigvee_{i=1}^{n-1} \bigvee_{a=1}^{n} \bigvee_{b=a+1}^{n} (x_{ai} \wedge x_{bi})$

¿Cuál "principio" está codificado en d)?

Problema 17 Dar ejemplos de demostraciones matemáticas que usan estas consecuencias lógicas.

$$\{\neg A \to B, \neg A \to \neg B\} \models A$$

$$\{A \to B, \neg A \to B\} \models B$$

$$\{\neg B \to \neg A\} \models A \to B$$