IIC1253 Matemáticas Discretas

Sasha Kozachinskiy

DCC UC

01.09.2025

Hoy...

Teoría de conjuntos: principio de axiomática, notación $\{\}$, paradoja de Russell, regularidad.

¿Axiomatizar todas las matemáticas?

- Una teoría (de primer orden) – todas las matemáticas.

¿Axiomatizar todas las matemáticas?

- Una teoría (de primer orden) – todas las matemáticas.
- todas teoremas – consecuencias.

¿Axiomatizar todas las matemáticas?

- Una teoría (de primer orden) – todas las matemáticas.
- todas teoremas – consecuencias.
- Zermelo, Frenkel;

¿Axiomatizar todas las matemáticas?

- Una teoría (de primer orden) – todas las matemáticas.
- todas teoremas – consecuencias.
- Zermelo, Frenkel;
- todos objetos son conjuntos.

¿Axiomatizar todas las matemáticas?

- Una teoría (de primer orden) – todas las matemáticas.
- todas teoremas – consecuencias.
- Zermelo, Frenkel;
- todos objetos son conjuntos.

Nociones indefinibles:

¿Axiomatizar todas las matemáticas?

- Una teoría (de primer orden) – todas las matemáticas.
- todas teoremas – consecuencias.
- Zermelo, Frenkel;
- todos objetos son conjuntos.

Nociones indefinibles:

Conjunto Predicado $\in$ (ser elemento)

Conjunto vacío

Axioma (de conjunto vació)

- *Existe un conjunto sin elementos.*

Conjunto vacío

$x \in y =$

$x \backslash y$	$\emptyset$
	0
	0
	0
	0
	0

$a = \emptyset$

Axioma (de conjunto vació)

- *Existe un conjunto sin elementos.*
- $\exists a \; \forall b \; \neg(b \in a)$

Conjunto vacío

Axioma (de conjunto vació)

- *Existe un conjunto sin elementos.*
-

Axioma (de extensionalidad)

- *Si dos conjuntos tienen los mismos elementos, entonces son iguales.*

Conjunto vacío

$x \in y =$

a	b
1	1
0	0
0	0
1	1

Axioma (de conjunto vació)

- *Existe un conjunto sin elementos.*
-

Axioma (de extensionalidad)

- *Si dos conjuntos tienen los mismos elementos, entonces son iguales.*
- $\forall a \, \forall b \, \underbrace{(\forall c \quad c \in a \leftrightarrow c \in b)}_{} \rightarrow a = b.$

Corolario

El conjunto vacío es único.

Nuevos conjuntos

Axioma (de emparejamiento) $c = \{a, b\}$, $\{a\}$

- *Sean a, b dos conjuntos. Entonces, existe un conjunto c cuyos elementos son exactamente a, b.*

$$\forall a \forall b \ \exists c \left(\forall x \ (x \in c) \leftrightarrow (x = a \vee x = b) \right)$$

$$" \{a, b\}$$

Nuevos conjuntos

Axioma (de emparejamiento)

- *Sean* a, b *dos conjuntos. Entonces, existe un conjunto* c *cuyos elementos son exactamente* a, b*.*
-

Nuevos conjuntos

$\{x, y\}$ $\quad a = \{1, 2, 3\}$ $\quad c = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3\}\}$

$b = \{2, 3\}$ $\quad a \cup b = \{1, 2, 3\}$

Axioma (de emparejamiento)

- *Sean a, b dos conjuntos. Entonces, existe un conjunto c cuyos elementos son exactamente a, b.*
- $\phi, \quad \{\phi\}, \quad \{\{\phi\}\}, \quad \{\{\phi\}, \{\{\phi\}\}\}$

Teorema

Para cualquier k conjuntos $a_1, \ldots, a_k$ existe un conjunto b cuyos elementos son exactamente $a_1, \ldots, a_k$. $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$

$$\forall a_1 \forall a_2 \ldots \forall a_k \; \exists b \left(\forall x \, (x \in b) \leftrightarrow (x = a_1 \vee x = a_2 \vee \ldots \vee x = a_k) \right)$$

Elementos y subconjuntos

Definición

- *Un conjunto a es un subconjunto de un conjunto b si todos los elementos de a son elementos de b;*

Elementos y subconjuntos

Definición

- *Un conjunto a es un subconjunto de un conjunto b si todos los elementos de a son elementos de b;*
- $a \subseteq b = \forall x \, (x \in a) \to (x \in b)$

Elementos y subconjuntos

Definición

- *Un conjunto a es un subconjunto de un conjunto b si todos los elementos de a son elementos de b;*
- $a \subseteq b =$ $\forall x \; (x \in a) \to (x \in b)$.

Proposición

$\varnothing \subseteq a$ *para cualquier conjunto a.*

$$\forall x \; \underbrace{\underbrace{(x \in \varnothing)}_{0} \to (x \in a)}$$

Ejemplos 1

Lista los elementos y los subconjuntos:

- $\varnothing$;

Elementos: no hay

Subconjuntos: ϕ

Ejemplos 1

Lista los elementos y los subconjuntos:

- $\varnothing$;

- $\{x\}$;

Elementos: x
Subconjuntos: $\{x\}$, $\varnothing$

Ejemplos 1

Lista los elementos y los subconjuntos:

- $\varnothing$;
- $\{x\}$;
- $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

$\{a, b\}$

Element

a, b

Subconj

$\{a, b\}, \phi,$

$\{a\}, \{b\}$

$a \quad \phi$

Elemenos: $\phi, \{\phi\} = b$

Subconjuntos: $\{\phi, \{\phi\}\},$

$: \phi, \quad \{\phi\}, \{\{\phi\}\}$

Ejemplos 2

- $a \notin b, \qquad a \not\subseteq b$

Ejemplos 2

- $a \notin b, \qquad a \not\subseteq b$

- $a \in b, \qquad a \not\subseteq b$

Ejemplos 2

- $a \notin b, \qquad a \not\subseteq b$

- $a \in b, \qquad a \not\subseteq b$

- $a \notin b, \qquad a \subseteq b$

Ejemplos 2

- $a \notin b, \qquad a \not\subseteq b$

$a = \{\emptyset\}$ $\qquad$ $b = \emptyset$

- $a \in b, \qquad a \not\subseteq b$

$a = \{\emptyset\}$, $b = \{\underbrace{\{\emptyset\}}_{a}\}$

$a \notin b$

$\emptyset \in a$ $\qquad$ $\emptyset \notin b$

$\emptyset \neq \underbrace{\{\emptyset\}}$

- $a \notin b, \qquad a \subseteq b$

$a = \emptyset$, $b = \{\{\emptyset\}\}$ ✓ $\qquad$ $b = \emptyset$ ✓

- $a \in b, \qquad a \subseteq b$

$a = \emptyset$ $\qquad$ $b = \{\emptyset\}$

Subconjuntos e igualdad

$\{a, b\}$

$\{a, a\} = \{a\}$

Ejemplo $\{x, x\} = \{x\}$.

Proposición

Sean a, b dos conjuntos. Entonces $a = b$ si y sólo si $a \subseteq b$ y $b \subseteq a$.

Reformulación de axioma de ~~x~~ extensionalidad.

Paradoja de Russel

$\neg \exists z\ \forall a\ B(a,z) \leftrightarrow \neg B(a,a)$

taut.

$$\neg \exists z \left(\forall a\ (a \in z) \leftrightarrow \neg (a \in a) \right)$$

Teorema (Russell)

No existe un conjunto r tal que sus elementos son exactamente todos los conjuntos a tal que $a \notin a$.

$z = \{ a \mid a \notin a \}$

¡no existe!

Demostración.

Asumimos que z así existe

$\forall a,\quad a \in z \leftrightarrow \neg(a \in a)$

$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{1} \\ 1 & 1 & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

En particular $x \in y =$

$a = z$

$z \in z \leftrightarrow \neg(z \in z)$

$x \backslash y$	a	b	z
a	0		1
⋮			
b		1	0

Paradoja de Russel

Teorema (Russell)

No existe un conjunto r tal que sus elementos son exactamente todos los conjuntos a tal que $a \notin a$.

- En teoría de conjuntos *informal* (1870-1900, Cantor) eso había considerado como una paradoja.

Paradoja de Russel

Teorema (Russell)

No existe un conjunto r tal que sus elementos son exactamente todos los conjuntos a tal que $a \notin a$.

- En teoría de conjuntos *informal* (1870-1900, Cantor) eso había considerado como una paradoja.
- En teoría formal: no se puede juntar conjuntos según cualquier propiedad.

$r = \{a \mid a \notin a\}$ - contradicción.

Regularidad

- No queremos tener $x \in x$ (círculo vicioso);

Regularidad

- No queremos tener $x \in x$ (círculo vicioso);
- Igual, no queremos cadenas $x_1 = x_k \in \ldots \in x_2 \in x_1$.

Regularidad

- No queremos tener $x \in x$ (círculo vicioso);
- Igual, no queremos cadenas $x_1 = x_k \in \ldots \in x_2 \in x_1$.
- Mas encima, tomar un elemento de un conjunto se puede hacer solo finito número de veces, a partir de cualquier conjunto.

Regularidad

- No queremos tener $x \in x$ (círculo vicioso);
- Igual, no queremos cadenas $x_1 = x_k \in \ldots \in x_2 \in x_1$.
- Mas encima, tomar un elemento de un conjunto se puede hacer solo finito número de veces, a partir de cualquier conjunto.

$x = \{\phi\}$ $\quad x = \{\phi, \underbrace{\{\phi\}}, \underbrace{\{\{\phi\}\}}\}$

Axioma (de regularidad)

Cada conjunto $x \neq \varnothing$ tiene un elemento que no tiene elementos en común con x.

$\forall x \quad x \neq \phi \to (\exists e\, (e \in x) \wedge (\neg \exists z\ z \in e \wedge z \in x))$

Corolario

No existe conjunto x tal qué $x \in x$.

Demostración: Asumimos, que existe x t.q. $x \in x$.

Obtenemos contradicción con AR

$a = \{x\}$ $\quad a$ y x tienen un elemento en común $- x$ $\square$

Corolarios de regularidad

Corolario AR

No existe un conjunto universo u tal que todos los conjuntos son sus elementos.

$$\neg \cancel{\forall} \quad \neg \exists u \, (\forall x \; x \in u)$$

Dem. u así satisface $u \in u$ $\square$

$$r = \{ a \mid \underbrace{a \notin a} \}$$ Corolario de T.R.

Corolarios de regularidad

Corolario

No existe un conjunto universo u tal que todos los conjuntos son sus elementos.

Un conjunto b se llama *singleton* si $b = \{a\}$ para algún conjunto a.

Corolario

No existe un conjunto de todos los singletones.

$\{\{x\} \mid x\}$ no existe

¡Gracias!