



Guía 3 – inducción

Problema 1 Demuestre que $2^n \geq n^2$ para todos los números naturales $n \geq 4$.

Problema 2 Sea $F_0 = F_1 = 1, F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ la secuencia de los números de Fibonacci.

- a) Demuestre que $1, 5^n \leq F_n \leq 2^n$ para todo $n \geq 5$.
- b) Demuestre que no existen 2 números consecutivos en esta secuencia tal que los dos sean divisibles por 7.

Problema 3 Definimos:

$$x_n = \underbrace{\log_2(5 + \log_2(5 + \log_2(\dots + \log_2(5))))}_n$$

(hay n símbolos \log_2 en la expresión).

- a) Demuestre que $x_n < 3$ para todo $n \geq 1$.
- b) Demuestre que la secuencia x_1, x_2, x_3, \dots crece.

Problema 4 Demuestre que

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1,65$$

para todos los números naturales $n \geq 1$.

Problema 5

- a) Demuestre que en el juego “Torres de Hanói”, se puede trasladar una pirámide de n aros a otra varilla en $2^n - 1$ pasos.
- b) Demuestre que no lo se puede hacer en $2^n - 2$ pasos.

Problema 6 En un polígono convexo de n lados se han trazado d diagonales de modo que diagonales distintas no se cruzan, salvo en los vértices. Demuestre que $d \leq n - 3$.

Problema 7 Se dispone de masas con 1, 3, 9, 27, 81, ... gramos (cada una es tres veces más pesada que la anterior). Demuestre que para cada $n \geq 0$ entero, con ellas se puede equilibrar cualquier objeto cuyo peso sea n gramos, siempre que se permita colocar las masas en ambos platillos de la balanza.

Problema 8 En una carretera circular hay cierta cantidad de autos. La cantidad total de gasolina en sus depósitos es suficiente para que un auto pueda dar una vuelta completa. Demuestre que existe un auto que, comenzando a moverse en sentido antihorario y recogiendo gasolina en su recorrido de los autos estacionados en la carretera, podrá dar una vuelta completa.

Problema 9 Un negociante hizo el siguiente trato con el diablo: puede cambiar con él cualquier billete que tenga por cualquier conjunto de billetes de menor denominación (a su elección, sin restricción en la suma total). También puede gastar plata, pero no puede obtenerla de ningún otro lugar (salvo del diablo). Cada día necesita 10 mil pesos para la comida. ¿Podrá vivir el negociante de esta manera infinitamente?