Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencias de Compputación
Matemáticas Discretas- IIC1253

Guía 2 – Lógica de predicados

Problema 1 Retratar predicados $x|y$ y $x > y$ sobre el conjunto $D = \{1, 2, 3, 6\}$ (usando coordenadas cartesianas con ejes x y y). ¿Qué se puede notar? ¿Cómo se expresan estos predicados entre sí?

Problema 2 ¿Cuál es el tamaño de soporte del predicado $(x < y) \wedge (y < z)$ sobre el conjunto $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$? (si es necesario, escriba un programa).

Problema 3 ¿Cómo obtener un predicado que siempre toma valor 1 usando conectivos lógicos y identificación y cambio de nombres de los parámetros, a partir del predicado $x < y$ (digamos, sobre $D = \mathbb{R}$)?

Problema 4 ¿Qué predicado $R(x, y)$ sobre $D = \{0, 1, \dots, 9\}$ calcula el siguiente código en Python?

```
def R(x,y):
  res = 0
  for i in range(10):
    if x == y + i:
      res = 1
  return res
```

Problema 5 Considere este predicado sobre $\mathbb{Z}$

$$Q(x) = \exists a \exists b \exists u \exists v\ (b \cdot u = x) \wedge (a \cdot v = b) \wedge (\neg(b = x)) \wedge (\neg(a = b)) \wedge (\neg(a = x)).$$

a) Definir la valor de verdad de $Q(0), Q(4), Q(-3)$.
b) Definit todos los $a \in \mathbb{Z}$ tal que $Q(a) = 0$.

Problema 6 Expresar los siguientes predicados sobre el dominio $D = \mathbb{Z}$ a través de conectivos lógicos y cuantificadores, a partir de predicados $x = y$, $x + y = z$, $x \cdot y = z$ (también, si es necesario, se puede identificar y cambiar nombres de los parámetros):
a) $x = 0$;
b) $x = 1$;
c) $x = 2$;
d) x es par;
e) $x + y + z = t$;
f) x es un cuadrado;
g) $x \geq 0$ (*pista: use este teorema* ***https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_los_cuatro_cuadrados***)

h) $x|y$
i) x es primo;
j) x es una potencia de dos;
k) x es una potencia de 6.

Problema 7 Expresar los siguientes predicados sobre el dominio $D = \mathbb{R}^2$ a través de conectivos lógicos y cuantificadores, a partir de predicados $x = y$ y

$$C(x, y, z) = \begin{cases} 1 & d(x, z) = d(y, z) \\ 0 & d(x, z) \neq d(y, z) \end{cases},$$

donde $d(a, b)$ denota la distancia entre puntos $a, b \in \mathbb{R}^2$. (también, si es necesario, se puede identificar y cambiar nombres de los parámetros):
a) puntos a, b, c pertenecen a la misma recta;
b) $a \neq b, c \neq d$ y las rectas que pasan por a, b y por c, d son paralelos;
c) a, b, c, d forman un paralelogramo;
d) $d(a, b) = d(c, d)$;
e) $d(x, a) \leq d(x, b)$
f) puntos a, b, c pertenecen a la misma recta y b está entre a y b.
Contexto: una de las axiomatizaciones modernas de la geometría euclidiana (desarollada por Alfred Tarski, `https://en.wikipedia.org/wiki/Tarski%27s_axioms`) está basada en dos predicados, d) y f). Este problema muestra que los dos pueden ser expresados a partir de $C(x, y, z)$.

Problema 8
a) expresar el predicado $x = y$ sobre $\mathbb{Z}$ a través de una fórmula de la lógica de predicados, a partir del predicado $x = y + 1$;
b) expresar el predicado $x = y + 1$ sobre $\mathbb{Z}$ a través de una fórmula de la lógica de predicados, a partir del predicados $x = y + 3$, $x = y + 5$.

Problema 9 Expresar el predicado $x = y + 2^{1000}$ sobre $D = \mathbb{N}$ a través de una fórmula de la lógica de predicados con menor qué 1000000 símbolos, a partir del predicado $x = y + 1$.

Problema 10 Considere la siguiente fórmula de la lógica de predicados:

$$\exists x \exists y \exists z B(x, y, z, n).$$

¿Qué predicado calcula esa fórmula si el dominio es el conjunto de números enteros positivos, y

$$B(x, y, z, n) = \begin{cases} 1 & x^n + y^n = z^n, \\ 0 & x^n + y^n \neq z^n. \end{cases}$$

Problema 11 Considere la siguiente fórmula de la lógica de predicados:

$$\exists x \exists y (A(x, z) \vee \neg A(y, z)).$$

Mostrar que esa fórmula siempre da un predicado que toma valor 1 para todos los posibles valores de z.

Problema 12 Considere la siguiente oración de la lógica de predicados:

$$\phi = \forall x \forall y \forall z \Big((A(x,y) \wedge A(y,z)) \to A(x,z) \Big).$$

Definir $[\![\phi]\!]_{\mathcal{I}}$ para las siguientes interpretaciones:
a) $\mathcal{I} = (\{1,2,3,\ldots\}, x|y)$
b) $\mathcal{I} = (\{1,2,3,4\}, x+1=y)$
c) $\mathcal{I} = (\{1,2,5,7\}, x+1=y)$
d) $\mathcal{I} = (\mathbb{R}^2, x \neq y)$

Problema 13 ¿Son equivalentes las fórmulas

$$\phi = \exists x \forall y A(x,y), \qquad \psi = \forall y \exists x A(x,y)?$$

Problema 14 Sea A un símbolo de predicado binario. Consideremos 3 oraciónes que establecen propiedades de un orden parcial (donde $A(x,y)$ entendemos informalmente cómo "x es menor o igual a y"):

$$\forall x A(x,x) \tag{1}$$

$$\forall x \forall y \Big((A(x,y) \wedge A(y,x)) \to x = y \Big) \tag{2}$$

$$\forall x \forall y \forall z \Big((A(x,y) \wedge A(y,z)) \to A(x,z) \Big) \tag{3}$$

(recuerde que tenemos un convenio que el símbolo $=$ siempre se interpreta cómo el predicado de igualdad).

a) Definimos:

$$C(x,y) = A(x,y) \vee A(y,x)$$

(informalmente, $C(x,y)$ significa que x, y son comparables).

Mostrar que $\{(1-3)\} \not\models \forall x \forall y\ C(x,y)$.

b) Mostrar que Mostrar que $\{(1-3)\} \not\models \forall x \forall y \forall z\ (C(x,y) \wedge C(y,z)) \to C(x,z)$.

c) Para cada k, consideremos la fórmula:

$$SUP_k(x_1,\ldots,x_k,y) = \Big(\bigwedge_{i=1}^{k} A(x_i,y) \Big) \wedge \Big(\forall z ((\bigwedge_{i=1}^{k} A(x_i,z)) \to A(z,y)) \Big)$$

Mostrar que para cada k, tenemos:

$$\{(1-3), \forall x_1 \forall x_2 \exists y\ SUP_2(x_1,x_2,y)\} \models \forall x_1 \ldots \forall x_k \exists y\ SUP_k(x_1,\ldots,x_k,y).$$