Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencias de Compputación
Matemáticas Discretas- IIC1253

Guía 4 – relaciones

Problema 1 Sean $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = (X \times X) \setminus \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.

a) Demuestre que no existen conjuntos A, B tal que $Y = A \times B$.

b) ¿Existen conjuntos A_1, B_1, A_2, B_2 tales que $Y = (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2)$?

Problema 2 Sean $x \in A, y \in B$. Demuestre que $(x, y) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$.

Problema 3 Sea $A = \{1, 2, 3\}$. ¿Es $R \subseteq A \times A$ una relación de equivalencia sobre A si

a) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$?

b) $R = \{(2, 2), (3, 3)\}$?

c) $R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2)\}$?

d) $R = A \times A$?

Problema 4 En un torneo, cada equipo jugó una vez contra cada uno de los demás, sin empates, y cada equipo perdió al menos un partido. Demuestre que existen tres equipos A, B y C que rompen la transitividad: A ganó a B, B ganó a C y C ganó a A.

Problema 5 Demuestre que una relación R sobre un conjunto A es refleja, simétrica y antisimétrica si y sólo si R es la relación de igualdad.

Problema 6 Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto A tal que la relación $\not\sim$ es transitiva. Demuestre que $x \sim y$ para todos $x, y \in A$.

Problema 7 Sea R una relación sobre $(0, +\infty)$ tal que

$$xRy \iff \frac{x}{y} \in \mathbb{Q} \qquad \forall x, y \in (0, +\infty).$$

a) demuestre que R es una relación de equivalencia.

b) demuestre que $[x]_R \cap (10, 11) \neq \varnothing$ para todo $x \in (0, +\infty)$.

c) demuestre que el producto $\cdot$ respete R pero la suma $+$ no respete R.

Problema 8 Sea $\preceq$ la siguiente relación sobre $\mathbb{R}[x]$ (conjunto de polinomios reales de una variable x):

$$p \preceq q \iff \exists c \in \mathbb{R}\ p(x) \leq q(x) \text{ para todo } x \geq c.$$

Demuestre que $\preceq$ es un orden lineal (*hint: use el hecho de que todo polinomio no cero tiene un número finito de raíces*).

Problema 9 ?Verdadero o falso? Sean R_1, R_2 dos órdenes sobre un conjunto A. Entonces, $R_1 \cap R_2$ es un orden sobre A.

Problema 10 Sea R un orden sobre $\{1, 2, 3, 4\}$. ¿Cuál es el tamaño máximo posible de R?

Problema 11 Sean $\preceq_1$ y $\preceq_2$ dos órdenes sobre los conjuntos A_1 y A_2, respectivamente. Definimos el "producto Cartesiano" de $\preceq_1$ y $\preceq_2$ como la siguiente relación sobre $A_1 \times A_2$:

$$(x, y)(\preceq_1 \times \preceq_2)(u, v) \iff (x \preceq_1 u) \wedge (y \preceq_2 v),$$

para todos $x, u \in A, y, v \in B$. Demuestre que $\preceq_1 \times \preceq_2$ es un orden.

Problema 12 Sea $\preceq$ un orden sobre un conjunto de tamaño $mn+1$. Demuestre que existen $m+1$ elementos comparables entre sí o existen $n+1$ elementos, no comparables entre sí.

Problema 13 Sean $A = \{1, 2, 3\}, B = \{-1, 0, 1\}$.
a) ¿$\{(1, 0), (3, 0), (2, 0)\} \colon A \to B$?
b) ¿$\{(1, 0), (3, 0), (3, 1)\} \colon A \to B$?
c) ¿$\{(1, 0)\} \colon A \to B$?

Problema 14 Sea $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ donde $f(x)$ es la mínima potencia de 3 mayor que x^2 para todo $x \in \mathbb{N}$. Definir $f(\mathbb{N})$.

Problema 15 Sean $f \colon A \to B$ sobreyectiva y $Y \subseteq B$. Demuestre que $f(f^{-1}(Y)) = Y$.

Problema 16 Sea $f \colon A \to B$. Demuestre que
a) f es inyectiva si y sólo si existe $g \colon B \to A$ tal que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in A$;
b) f es sobreyectiva si y sólo si existe $g \colon A \to B$ tal que $f(g(y)) = y$ para todo $y \in B$.

Problema 17 Sean $f \colon A \to B, g \colon B \to C$ tal que $f \circ g$ es inyectiva. Demuestre que f es inyectiva, pero g puede ser no inyectiva.
(recuerde que usamos la notación $(f \circ g)(x) = g(f(x))$.)

Problema 18 ¿Bajo qué condiciones sobre los números $a, b, c \in \mathbb{R}$ la función $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ es inyectiva, bajo cuáles es sobreyectiva y bajo cuáles es biyectiva?