IIC1253 Matemáticas Discretas

Sasha Kozachinskiy

DCC UC

25.08.2025

Hoy...

Lógica de predicados: fórmulas de la lógica de predicados, sus evaluaciones, interpretaciones.

Fórmulas de la lógica de predicados

Operaciones sobre predicados:

$$\wedge, \vee, \neg, \rightarrow \tag{1}$$

$$\text{identificación y cambio de nombres de los parámetros;} \tag{2}$$

$$\exists x_i, \qquad \forall x_i \tag{3}$$

Fórmulas de la lógica de predicados

Operaciones sobre predicados:

$$\wedge, \vee, \neg, \to \tag{1}$$

$$\text{identificación y cambio de nombres de los parámetros;} \tag{2}$$

$$\exists x_i, \qquad \forall x_i \tag{3}$$

Definición

Fórmulas de la lógica de predicados *(a.k.a.* **fórmulas de primer orden***) se construyen de*

- *símbolos de predicados y nombres de los parámetros;*
- *conectivos lógicos y cuantificadores.*

Fórmulas de la lógica de predicados

Operaciones sobre predicados:

$$\wedge, \vee, \neg, \rightarrow \tag{1}$$

$$\text{identificación y cambio de nombres de los parámetros;} \tag{2}$$

$$\exists x_i, \qquad \forall x_i \tag{3}$$

Definición

Fórmulas de la lógica de predicados *(a.k.a.* **fórmulas de primer orden**) *se construyen de*

- *símbolos de predicados y nombres de los parámetros;*
- *conectivos lógicos y cuantificadores.*

Si sustituimos *símbolos* de predicados por predicados particulares (sobre un dominio particular), la fórmula nos calcula, según (1–3), un predicado resultante.

Lógica de proposiciones $\subseteq$ lógica de predicados

Operaciones sobre predicados:

$$\wedge, \vee, \neg, \rightarrow \tag{1}$$

identificación y cambio de nombres de los parámetros; (2)

$$\exists x_i, \qquad \forall x_i \tag{3}$$

Lógica de proposiciones $\subseteq$ lógica de predicados

Operaciones sobre predicados:

$$\wedge, \vee, \neg, \rightarrow \tag{1}$$

$$\text{identificación y cambio de nombres de los parámetros;} \tag{2}$$

$$\exists x_i, \qquad \forall x_i \tag{3}$$

- Fórmulas de la lógica proposicional son caso particular de las fórmulas cuando todos símbolos de predicados son 0-arios.
- En ese caso (2–3) no son aplicables.
- Podemos sustituir cada símbolo de predicado 0-ario por 0 o 1. Dominio D no es importante en ese caso.

Ejemplos evaluaciones de f.p.o.

La fórmula:

$$\exists x A(x, y) \tag{4}$$

usa un símbolo de predicado *binario* $A(\cdot, \cdot)$.

Ejemplos evaluaciones de f.p.o.

La fórmula:

$$\exists x A(x,y) \tag{4}$$

usa un símbolo de predicado *binario* $A(\cdot,\cdot)$.

Si $D = [0,+\infty)$ y $A(x,y) = \begin{cases} 1 & x < y \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$, ¿qué predicado $P(y)$

obtenemos en (4)? es cierto para $y>0$, y falso para $y=0$

Ejemplos evaluaciones de f.p.o.

La fórmula:

$$\exists x A(x, y) \tag{4}$$

usa un símbolo de predicado *binario* $A(\cdot, \cdot)$.

Si $D = [0, +\infty)$ y $A(x, y) = \begin{cases} 1 & x < y \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$, ¿qué predicado obtenemos en (4)?

Si $D = \mathbb{N}$ y $A(x, y) = \begin{cases} 1 & 2x = y \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$, ¿qué predicado obtenemos en (4)?

Ejemplos evaluaciones de f.p.o.

La fórmula:

$$\exists x \exists y \exists z B(x, y, z, n) \tag{5}$$

usa un símbolo de predicado 4-ario $B(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$.

Ejemplos evaluaciones de f.p.o.

La fórmula:

$$\exists x \exists y \exists z B(x, y, z, n) \quad = \Phi(n) \qquad (5)$$

usa un símbolo de predicado 4-ario $B(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$.

Si $D = \{1, 2, 3, \ldots\}$ y $B(x, y, z, n) = \begin{cases} 1 & x^n + y^n = z^n \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$, ¿qué predicado obtenemos en (5)?

$\Phi(1) = \exists x \exists y \exists z \; B(x, y, z, 1)$

$= \exists x \exists y \exists z \; x^1 + y^1 = z^1 . = 1$

$x = 1 \quad y = 2, z = 3$

$\Phi(2) = \exists x \exists y \exists z$

$x^2 + y^2 = z^2$

$x = 3, y = 4, z = 5$

$\Phi(3) = \Phi(4) = \Phi(5) = .$

No existe $n \geq 3$, $x, y, z \in \{1, 2, 3 \ldots\}$

$x^n + y^n = z^n$.

Ejemplos evaluaciones de f.p.o.

La fórmula:

$$\exists x \exists y \exists z B(x, y, z, n) \tag{5}$$

usa un símbolo de predicado 4-ario $B(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$.

Si $D = \{1, 2, 3, \ldots\}$ y $B(x, y, z, n) = \begin{cases} 1 & x^n + y^n = z^n \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$, ¿qué predicado obtenemos en (5)?

$\Phi(6) = 1$

Se puede notar $\Phi(p) = 0$, si p es primo

Si $D = \{1, 2, 3, \ldots\}$ y $B(x, y, z, n) = \begin{cases} 1 & (x+1)(y+1)z = n \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$,

¿qué predicado obtenemos en (5)?

$n = 4$

$\Phi(4) = 1$

Para que n $\exists x \exists y \exists z \ (x+1)\cdot(y+1)\cdot z = n$

$\Phi(1) = \Phi(2) = \Phi(3) = 0$

Ejemplos evaluaciones de f.p.o.

La fórmula:

$$\forall y \Big((\exists x A(x,y)) \vee (\neg A(y,y)) \Big) \tag{6}$$

usa un símbolo de predicado *binario* $A(\cdot,\cdot)$.

Ejemplos evaluaciones de f.p.o.

La fórmula:

$$\forall y \Big((\exists x A(x,y)) \vee (\neg A(y,y)) \Big) \tag{6}$$

usa un símbolo de predicado *binario* $A(\cdot,\cdot)$.

Si $D = \{1,2,3,\ldots\}$ y $A(x,y) = \begin{cases} 1 & x \cdot y = 29371982 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$, ¿qué predicado obtenemos en (6)?

Ejemplos evaluaciones de f.p.o.

$\mathcal{D} = \mathbb{N}$

$A(x,y) = $ "$x = y$"

$y = 3$

La fórmula:

$$\forall y \Big(\underbrace{(\exists x A(x,y)) \vee (\neg A(y,y))} \Big) \tag{6}$$

usa un símbolo de predicado *binario* $A(\cdot,\cdot)$.

$A(3,3) = 0$

Si $D = \{1,2,3,\ldots\}$ y $A(x,y) = \begin{cases} 1 & x \cdot y = \underline{29371982} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$, ¿qué predicado obtenemos en (6)?

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$\boxed{1\ 4\ 9\ 6\ 5\ 6\ 9\ 4\ 1}$

Definición

Fórmulas de la lógica de predicados que calculan proposiciones (predicados 0-arios) se llaman **oraciones** *de la lógica de predicados.*

$\mathcal{D} =$ $\quad y \in \mathcal{D} \; (\exists x\, A(x,y)) \vee (\neg A(y,y))$

$\exists x\, A(x,y)$ es cierto para mi $y \Rightarrow$ hecho. Si no, $A(y,y) = 0$.

Ejemplos evaluaciones de f.p.o.

La fórmula:

$$\exists u \exists v \, ((\neg A(u, v)) \wedge B(x, u, v) \wedge B(y, u, v) \wedge B(z, u, v)) \tag{7}$$

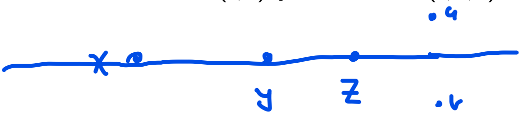
usa dos símbolos de predicados, *binario* $A(\cdot, \cdot)$ y ternario $B(\cdot, \cdot, \cdot)$.

Ejemplos evaluaciones de f.p.o.

La fórmula: $\neg(u=v) \wedge (\|x-u\| = \|x-v\|) \wedge \ldots$

$$\exists u \exists v\, ((\neg A(u,v)) \wedge B(x,u,v) \wedge B(y,u,v) \wedge B(z,u,v)) \qquad (7)$$

usa dos símbolos de predicados, *binario* $A(\cdot,\cdot)$ y ternario $B(\cdot,\cdot,\cdot)$.

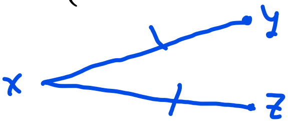


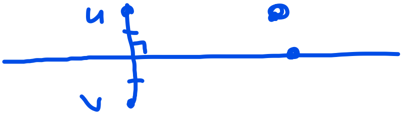
Si $D = \mathbb{R}^2$

$$A(x,y) = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & \text{si no} \end{cases},$$

$d(x,y) = d(x,z)$ $\quad I = (\mathbb{R}^2, x=y, \|x-y\| = \|x-z\|)$

$$B(x,y,z) = \begin{cases} 1 & \|x-y\| = \|x-z\| \\ 0 & \text{si no} \end{cases},$$ ¿qué predicado obtenemos en (7)?





Interpretaciones

Definición

Sea ϕ una fórmula de la lógica de predicados con símbolos de predicados $S_1, \ldots, S_n$ de aridades $a_1, \ldots, a_n$, respectivamente. Una **interpretación** *$\mathcal{I}$ de ϕ consiste de un conjunto dominio D y n predicados $P_1, \ldots, P_n$ sobre D con aridades $a_1, \ldots, a_n$, respectivamente.*

Interpretaciones

Definición

Sea ϕ una fórmula de la lógica de predicados con símbolos de predicados $S_1, \ldots, S_n$ de aridades $a_1, \ldots, a_n$, respectivamente. Una **interpretación** *$\mathcal{I}$ de ϕ consiste de un conjunto dominio D y n predicados $P_1, \ldots, P_n$ sobre D con aridades $a_1, \ldots, a_n$, respectivamente.*

$$\mathcal{I} = (D, P_1, P_2, \ldots, P_n)$$

$[\![\phi]\!]_{\mathcal{I}}$ denota el predicado sobre D que obtenemos si sustituimos S_1 por P_1, ..., S_n por P_n.

Ejemplo notación de interpretaciones

- $\phi = \forall a \exists b \ A(b, b, a)$

Ejemplo notación de interpretaciones

- $\phi = \forall a \exists b\ A(b, b, a)$

$$\mathcal{I}_1 = (\mathbb{N}, x + y = z) \qquad \mathcal{I}_2 = (\mathbb{Q}, x + y = z)$$

$$\mathcal{I}_3 = (\mathbb{Q} \cap (0,1), x \cdot y = z) \qquad \mathcal{I}_4 = ((0,1), x \cdot y = z)$$

Ejemplo notación de interpretaciones

- $\phi = \forall a \exists b \; A(b, b, a)$

$$\mathcal{I}_1 = (\mathbb{N}, x + y = z) \qquad \mathcal{I}_2 = (\mathbb{Q}, x + y = z)$$

$$\mathcal{I}_3 = (\underbrace{\mathbb{Q} \cap (0,1)}, \underbrace{x \cdot y = z}_{A(x,y,z)}) \qquad \mathcal{I}_4 = (\underbrace{(0,1)}, x \cdot y = z)$$

$$[\![\phi]\!]_{\mathcal{I}_1} = 0 \qquad [\![\phi]\!]_{\mathcal{I}_2} = 1$$

$$[\![\phi]\!]_{\mathcal{I}_3} = 0 \qquad [\![\phi]\!]_{\mathcal{I}_4} = 1$$

$\mathbb{N}$: $\forall a \; \exists b \; b + b = a$

$\mathbb{Q} \cap (0,1)$ $\quad \forall a \; \exists b \; b \cdot b = a \qquad \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$

Ejemplo notación de interpretaciones

- $\phi = \forall a \exists b\ A(b, b, a)$

$$\mathcal{I}_1 = (\mathbb{N}, x + y = z) \qquad \mathcal{I}_2 = (\mathbb{Q}, x + y = z)$$
$$\mathcal{I}_3 = (\mathbb{Q} \cap (0,1), x \cdot y = z) \qquad \mathcal{I}_4 = ((0,1), x \cdot y = z)$$

$$[\![\phi]\!]_{\mathcal{I}_1} = \qquad [\![\phi]\!]_{\mathcal{I}_2} =$$
$$[\![\phi]\!]_{\mathcal{I}_3} = \qquad [\![\phi]\!]_{\mathcal{I}_4} =$$

- ¿$[\![\exists b\ A(b, b, a)]\!]_{\mathcal{I}_1}$?

¡Gracias!