IIC1253 Matemáticas Discretas

Sasha Kozachinskiy

DCC UC

22.10.2025

Hoy...

Enumerabilidad: conjuntos equinumerosos, menor o igual cardinalidad.

Equinumerabilidad

Definición

Dos conjuntos A, B *son* **equinumerosos** *(o* **tienen la misma cardinalidad***) si existe una función* $f : A \to B$ *biyectiva.*

Equinumerabilidad

Definición

Dos conjuntos A, B son **equinumerosos** *(o* **tienen la misma cardinalidad***) si existe una función $f : A \to B$ biyectiva.*

Notación: $A \approx B$

Equinumerabilidad

Definición

Dos conjuntos A, B son **equinumerosos** *(o* **tienen la misma cardinalidad***) si existe una función $f : A \to B$ biyectiva.*

Notación: $A \approx B$

Proposición

Sean A, B, C 3 conjuntos. $A \approx A$.

a) *si $A \approx B$, entonces $B \approx A$;* por el teorema de función inversa.

b) *si $A \approx B, B \approx C$, entonces $A \approx C$*

Si $A \approx B$ $\exists f : A \to B$ Biyectiva

$B \approx C$ $\exists g : B \to C$ Biyectiva. Entonces,

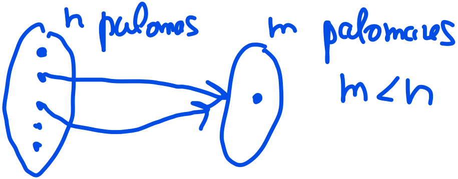
$f \circ g : A \to B$ es Biyectiva.

Conjuntos finitos

Definición

Un conjunto A es finito si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \approx \{0, 1, \ldots, n-1\}$. En ese caso, $|A| = n$.

Conjuntos finitos



Definición

Un conjunto A es finito si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \approx \{0, 1, \ldots, n-1\}$. En ese caso, $|A| = n$.

Proposición

Para todo conjunto A, B finito:

a) *si A es finito y $B \subseteq A$, entonces B es finito;*

b) *si A, B son finitos y disjuntos, $|A \cup B| = |A| + |B|$;*

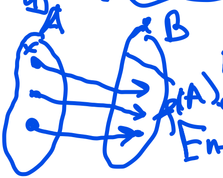
c) *si A, B son finitos y $|A| > |B|$, entonces, no existe una inyección de A en B (el principio de palomar)*

Ejercicio finito 1

Ejercicio

Si A, B son conjuntos finitos, $|A| = |B|$ y $f : A \to B$ es una función inyectiva o sobreyectiva, entonces f es biyectiva.

Demostración: Sea $f: A \to B$ inyectiva.



Por contradicción, suponemos que f no es sobreyectiva. Entonces $f(A)$ es un propio subconjunto de B. Entonces, $|f(A)| < |B| = |A|$. Eso es una contradicción con el principio de palomas porque $f: A \to f(A)$ es inyectiva.

Sea $f: A \to B$ sobreyectiva.
Suponemos por contradicción que $\exists x_1, x_2$ tal $x_1 \neq x_2$ y $f(x_1) = f(x_2)$
$\Rightarrow f(A \setminus \{x_1\}) = B$. Existe una función sobreyectiva

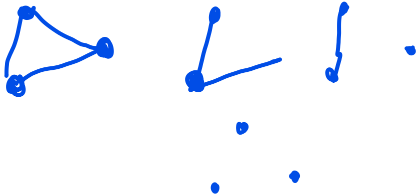
Ejercicio finito 2 (palomar)

de $A\setminus\{x_1\}$ en B. Entonces, existe una función inyectiva de B en $A\setminus\{x_1\}$, pero $|B| > |A\setminus\{x_1\}|$ $\square$

Ejercicio

n

Demuestra que en cualquier grupo finito de personas siempre habrá dos personas que hayan dado el mismo número de apretones de mano dentro del grupo. biyectiva.



Sea A el conjunto de personas. $|A| = n$

$$f : A \to \{0, 1, \dots, n-1\}$$

$f(a)$ es el número de apretones de mano dentro ~~de~~ de A

Supongamos que no existe dos personas distintas con el mismo valor de f. En otras palabras, f es inyectiva. Por lo tanto es sobreyectiva. Entonces $\exists\, a$ $f(a)=0$ $\exists\, b$ $f(b)=n-1$. Pero a no ha hecho ningun apretón de mano, y b ha hecho con todos - una contradicción

“Paradoja” de infinitud

Un conjunto infinito puede tener la misma cardinalidad como su propio subconjunto (Galileo).

"Paradoja" de infinitud

Un conjunto infinito puede tener la misma cardinalidad como su propio subconjunto (Galileo).

Ejercicio

$\mathbb{N} \approx \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$0, 1, 2, 3, 4, \ldots$

$1, 2, 3, 4, \ldots$

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$f(x) = x + 1$

f es una función inyectiva

$f(x_1) = f(x_2) = x_1 + 1 = x_2 + 1$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

es sobreyectiva porque

$\forall x \geq 1 \quad f(x-1) = x$

Ejercicio

$\mathbb{N} \approx \{m \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ m = n^2\}$

$f : \mathbb{N} \nearrow \quad f(n) = n^2.$

Intervalo sin un punto

Ejercicio

$[0,1] \approx (0,1] \approx (0,1)$

Un lema útil

Lema

Supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos dos conjuntos A_n, B_n tal que:

1. $A_n \approx B_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$;
2. $A_n \cap A_m = \varnothing$, $B_n \cap B_m = \varnothing$ *para todo* $n, m \in \mathbb{N}, n \neq m$.

Entonces,

$$\bigcup_n A_n \approx \bigcup_n B_n.$$

Naturales y enteros

Proposición

$\mathbb{N} \approx \mathbb{Z}$

Naturales y enteros

Proposición

$\mathbb{N} \approx \mathbb{Z}$

Demostración.

$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	$\ldots$
$\mathbb{Z}$	0	-1	1	-2	2	$\ldots$

$\square$

Intervalos y reales

Ejercicio

a) $(0,1) \approx (1,+\infty)$;

b) $(1,+\infty) \approx (0,+\infty)$;

c) $(0,1) \approx \mathbb{R}$.

$\mathbb{N}$ y $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Theorem

$\mathbb{N} \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

$\approx$ y $\times$

Lemma

Sean $A \approx B, X \approx Y$. *Entonces,* $A \times X \approx B \times Y$.

$\approx$ y $\times$

Lemma

Sean $A \approx B, X \approx Y$. Entonces, $A \times X \approx B \times Y$.

Demostración.

Si $f : A \to B, g : X \to Y$ son biyectivas, verifique que:

$$(f \times g) \colon A \times X \to B \times Y, \qquad (f \times g)(a, x) = (f(a), g(x)) \; a \in A, x \in X,$$

es biyectiva... $\square$

$\approx$ y $\times$

Lemma

Sean $A \approx B, X \approx Y$. Entonces, $A \times X \approx B \times Y$.

Demostración.

Si $f : A \to B, g : X \to Y$ son biyectivas, verifique que:

$$(f \times g) : A \times X \to B \times Y, \qquad (f \times g)(a, x) = (f(a), g(x)) \ a \in A, x \in X,$$

es biyectiva... $\square$

Corolario

$\mathbb{N} \approx \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \approx (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N}$...

$\preceq$

Definición

Sean A, B dos conjuntos. Entonces, **la cardinalidad de A es menor o igual que la cardinalidad** *de B si existe $f : A \to B$ inyectiva.*

$\preceq$

Definición

Sean A, B *dos conjuntos. Entonces,* **la cardinalidad de** A **es menor o igual que la cardinalidad** *de* B *si existe* $f : A \to B$ *inyectiva.*

Notación: $A \preceq B$

Proposición

Sean A, B, C *3 conjuntos. Si* $A \preceq B, B \preceq C$*, entonces* $A \preceq C$*.*

$\preceq$

Definición

Sean A, B dos conjuntos. Entonces, **la cardinalidad de A es menor o igual que la cardinalidad** *de B si existe $f : A \to B$ inyectiva.*

Notación: $A \preceq B$

Proposición

Sean A, B, C 3 conjuntos. Si $A \preceq B, B \preceq C$, entonces $A \preceq C$.

Ejercicio

$\mathbb{N} \preceq \mathbb{R}, \mathbb{Q} \preceq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$\preceq$ y $\approx$

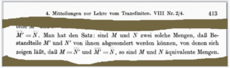
Teorema (Schröder–Bernstein)

Sean A, B dos conjuntos. Entonces, $A \approx B$ si y sólo si $A \preceq B, B \preceq A$.

$\preceq$ y $\approx$

Teorema (Schröder–Bernstein)

Sean A, B dos conjuntos. Entonces, $A \approx B$ si y sólo si $A \preceq B, B \preceq A$.


4. Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten. VIII Nr. 2/4. 413

$\overline{M'} = \overline{N}$. Man hat den Satz: sind M und N zwei solche Mengen, daß Bestandteile M' und N' von ihnen abgesondert werden können, von denen sich zeigen läßt, daß $\overline{M} = \overline{N'}$ und $\overline{M'} = \overline{N}$, so sind M und N äquivalente Mengen.

Cantor's first statement of the theorem (1887)[3]

- **1887 Cantor** publishes the theorem, however without proof.[3][2]
- **1887** On July 11, **Dedekind** proves the theorem (not relying on the axiom of choice)[4] but neither publishes his proof nor tells Cantor about it. Ernst Zermelo discovered Dedekind's proof and in 1908[5] he publishes his own proof based on the *chain theory* from Dedekind's paper *Was sind und was sollen die Zahlen?*[2][6]
- **1895 Cantor** states the theorem in his first paper on set theory and transfinite numbers. He obtains it as an easy consequence of the linear order of cardinal numbers.[7][8][9] However, he could not prove the latter theorem, which is shown in 1915 to be equivalent to the axiom of choice by Friedrich Moritz Hartogs.[2][10]
- **1896 Schröder** announces a proof (as a corollary of a theorem by Jevons).[11]
- **1897 Bernstein**, a 19-year-old student in Cantor's Seminar, presents his proof.[12][13]
- **1897** Almost simultaneously, but independently, **Schröder** finds a proof.[12][13]
- **1897** After a visit by Bernstein, **Dedekind** independently proves the theorem a second time.
- **1898 Bernstein**'s proof (not relying on the axiom of choice) is published by Émile Borel in his book on functions.[14] (Communicated by Cantor at the 1897 International Congress of Mathematicians in Zürich.) In the same year, the proof also appears in **Bernstein's** dissertation.[15][2]

Aplicaciones de Schröder–Bernstein

Proposición

$\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$.

Aplicaciones de Schröder–Bernstein

Proposición

$\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$.

Demostración.

$\mathbb{N} \preceq \mathbb{Q} \preceq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \preceq \mathbb{N}$. $\square$

Proposición

$\mathbb{N} \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Aplicaciones de Schröder–Bernstein

Proposición

$\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$.

Demostración.

$\mathbb{N} \preceq \mathbb{Q} \preceq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \preceq \mathbb{N}$. □

Proposición

$\mathbb{N} \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Demostración.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \preceq \mathbb{N}$ ya que la siguiente función:

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad f((a,b)) = 2^a \cdot 3^b$$

es inyectiva. □

¡Gracias!