IIC1253 Matemáticas Discretas

Sasha Kozachinskiy

DCC UC

~~18~~.08.2025
20.

Hoy...

Lógica de predicados: predicados y operaciones sobre ellos.

Lógica proposicional no es siempre suficiente

Lógica proposicional no es siempre suficiente

- “Cada número racional es algebráico. Cada número algebráico es computable. Por lo tanto, cada número racional es computable ”

Lógica proposicional no es siempre suficiente

- "Cada número racional es algebráico. Cada número algebráico es computable. Por lo tanto, cada número racional es computable "
- Es verdadera (¡y no necesitamos entender nada!)

Lógica proposicional no es siempre suficiente

- "Cada número racional es algebráico. Cada número algebráico es computable. Por lo tanto, cada número racional es computable "
- Es verdadera (¡y no necesitamos entender nada!)
- ¿Tautología de la lógica proposicional?

Lógica proposicional no es siempre suficiente

- "Cada número racional es algebráico. Cada número algebráico es computable. Por lo tanto, cada número racional es computable "
- Es verdadera (¡y no necesitamos entender nada!)
- ¿Tautología de la lógica proposicional?
- $(A \land B) \to C$ – no!

Lógica proposicional no es siempre suficiente

- "Cada número racional es algebráico. Cada número algebráico es computable. Por lo tanto, cada número racional es computable "
- Es verdadera (¡y no necesitamos entender nada!)
- ¿Tautología de la lógica proposicional?
- $(A \wedge B) \to C$ – no!
- intuición: en la lógica proposicional, proposiciones atómicas son completamente independientes.

Lógica proposicional no es siempre suficiente

- "Cada número racional es algebráico. Cada número algebráico es computable. Por lo tanto, cada número racional es computable "
- Es verdadera (¡y no necesitamos entender nada!)
- ¿Tautología de la lógica proposicional?
- $(A \wedge B) \rightarrow C$ – no!
- intuición: en la lógica proposicional, proposiciones atómicas son completamente independientes.
- necesitamos algo con conecciones más intrincadas entre proposiciones atómicas

Los predicados

(informal): un predicado sobre el conjunto D es una proposición, parametrizado por elementos de conjunto D.

Los predicados

(informal): un predicado sobre el conjunto D es una proposición, parametrizado por elementos de conjunto D.

Ejemplos para $D = \mathbb{N}$:

Los predicados

(informal): un predicado sobre el conjunto D es una proposición, parametrizado por elementos de conjunto D.

Ejemplos para $D = \mathbb{N}$:

- "x es impar" (1 parámetro);

Los predicados

(informal): un predicado sobre el conjunto D es una proposición, parametrizado por elementos de conjunto D.

Ejemplos para $D = \mathbb{N}$:

- "x es impar" (1 parámetro);
- $x < y$ (2 parámetros);

$x = \underline{1}$, $y = \underline{1}$ – falsa

$x = 0$, $y = \underline{1}0$ – verdadera

Los predicados

(informal): un predicado sobre el conjunto D es una proposición, parametrizado por elementos de conjunto D.

Ejemplos para $D = \mathbb{N}$:

- "x es impar" (1 parámetro);
- $x < y$ (2 parámetros);
- $x | y$ (2 parámetros);

$x=3 \quad y=2$ - falso

$x=2 \quad y=4$ - verdadero

Los predicados

(informal): un predicado sobre el conjunto D es una proposición, parametrizado por elementos de conjunto D.

Ejemplos para $D = \mathbb{N}$:

- "x es impar" (1 parámetro);
- $x < y$ (2 parámetros);
- $x | y$ (2 parámetros);
- $x + y = z$ (3 parámetros);

$x = 1$ $y = 2$ $z = 1000$ - falso

$x = 1$ $y = 2$ $z = 3$ - verd.

Los predicados

(informal): un predicado sobre el conjunto D es una proposición, parametrizado por elementos de conjunto D.

Ejemplos para $D = \mathbb{N}$:

- "x es impar" (1 parámetro);
- $x < y$ (2 parámetros);
- $x | y$ (2 parámetros);
- $x + y = z$ (3 parámetros);
- 0, 1 (0 parámetros). – proposiciones

Los predicados

(informal): un predicado sobre el conjunto D es una proposición, parametrizado por elementos de conjunto D.

Ejemplos para $D = \mathbb{N}$:

- "x es impar" (1 parámetro);
- $x < y$ (2 parámetros);
- $x|y$ (2 parámetros);
- $x + y = z$ (3 parámetros);
- 0, 1 (0 parámetros).
- $x + y$ – no es un predicado.

Predicados – definición

Convenio: para nombres de los parámetros usamos alfabeto latino (letras minusculas, posiblemente con indices).

Definición

Un **predicado** *P con parametros $x_1, \ldots, x_n$ sobre un conjunto D (llamado el* **dominio** *de P) es una función que devuelve 0 o 1 para cada asignación de $x_1, \ldots, x_n$ a elementos de D.*

Predicados – definición

Convenio: para nombres de los parámetros usamos alfabeto latino (letras minusculas, posiblemente con indices).

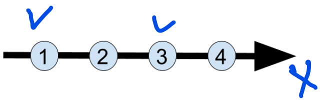
Definición

Un **predicado** *P con parametros $x_1, \ldots, x_n$ sobre un conjunto D (llamado el* **dominio** *de P) es una función que devuelve 0 o 1 para cada asignación de $x_1, \ldots, x_n$ a elementos de D.*
La aridad *de P es el número de parametros de P.*

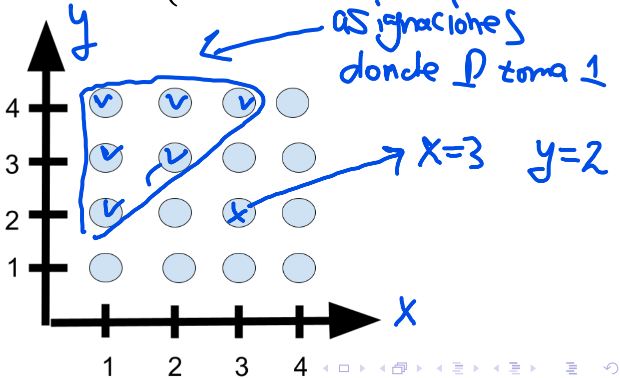
unarios – aridad = 1
binarios – aridad = 2
ternarios – aridad = 3

Presentación gráfica de los predicados

$D = \{1, 2, 3, 4\}, \qquad P(x) = \text{“}x \text{ es impar”}.$



$$D = \{1, 2, 3, 4\}, \qquad P(x, y) = \begin{cases} 1 & x < y, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$



Soporte

Definición

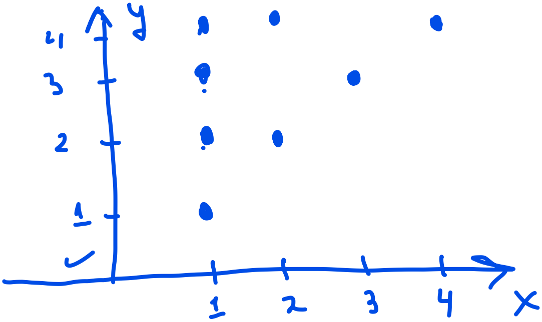
Sea $P(x_1, \ldots, x_n)$ *un predicado n-ario sobre el conjunto* D. **Su soporte** *es el conjunto de todas las asignaciones de* $x_1, \ldots, x_n$ *a elementos de* D *donde* P *toma valor 1.*

Soporte

Definición

Sea $P(x_1, \ldots, x_n)$ un predicado n-ario sobre el conjunto D. **Su soporte** *es el conjunto de todas las asignaciones de $x_1, \ldots, x_n$ a elementos de D donde P toma valor 1.*

Retratar el soporte del predicado $x|y$ sobre $D = \{1, 2, 3, 4\}$.



Soporte

Definición

Sea $P(x_1, \ldots, x_n)$ un predicado n-ario sobre el conjunto D. **Su soporte** *es el conjunto de todas las asignaciones de $x_1, \ldots, x_n$ a elementos de D donde P toma valor 1.*

Retratar el soporte del predicado $x|y$ sobre $D = \{1, 2, 3, 4\}$.

4 4

$3+2+1=6$

¿Cuál es el tamaño del soporte de $x + y = z$ sobre $D = \{1, 2, 3, 4\}$?

16

$x=1$ - 3

$x=3$ - 1

$x=2$ - 2

$x=4$ - 0

Operaciones sobre predicados

- conectivos lógicos;
- identificación de los parámetros;
- cuantificadores.

Operaciones sobre predicados

- conectivos lógicos;
- identificación de los parámetros;
- cuantificadores.

Conectivos

Al igual que las proposiciones, se puede componer predicados a través de conectivos lógicos.

Conectivos

Al igual que las proposiciones, se puede componer predicados a través de conectivos lógicos.

Definición

Sean P, Q dos predicados con parametros $x_1, \ldots, x_n$ sobre un conjunto D. Entonces, $\neg P, P \wedge Q, P \vee Q, P \to Q$ son los siguientes predicados:

$$(\neg P)(x_1, \ldots, x_n) = \neg(P(x_1, \ldots, x_n)),$$

$$(P \wedge Q)(x_1, \ldots, x_n) = (P(x_1, \ldots, x_n)) \wedge (Q(x_1, \ldots, x_n)),$$
$$(P \vee Q)(x_1, \ldots, x_n) = (P(x_1, \ldots, x_n)) \vee (Q(x_1, \ldots, x_n)),$$
$$(P \to Q)(x_1, \ldots, x_n) = (P(x_1, \ldots, x_n)) \to (Q(x_1, \ldots, x_n)).$$

$P(x,y) \wedge Q(y,z)$

Preguntas

$$D = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Preguntas

$A \to B = \neg A \vee B$

$D = \{1, 2, 3, \ldots\}$

¿Qué es este predicado? $P(x, y) = (\neg(x < y)) \to (y < x)$? $=$

Si $x = y$ - es ~~falso~~. $1 \to 0$ $= (x<y) \vee (y<x)$

$x \neq y$ $x<y$ - $0 \to \ldots = \underline{1}$ $= \neg(x=y)$.

$x>y$ $\ldots \to \underline{1} = \underline{1}$

Preguntas

$D = \{1, 2, 3, \dots\}$

¿Qué es este predicado? $P(x, y) = (\neg(x < y)) \to (y < x))$

$\neg\big((x<y) \vee (y<z) \vee (z<x)\big) =$

¿Como expresar $= (\neg(x<y) \wedge \neg(y<z) \wedge \neg(z<x)) = (x \geq y) \wedge$

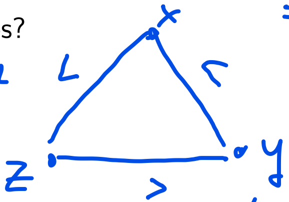
$$Q(x, y, z) = (x < y) \vee (y < z) \vee (z < x)$$

$(y \geq z) \wedge (z \geq x)$

$= (x=y) \wedge (y=z)$

a través de $=$ y conectivos lógicos?

$x=1$, $y=2$, $z=2$ - vez



$x=2$, $y=2$, $z=10$

$x=5$ $y=5$ $z=5$

$Q(x,y,z) = \neg\big((x=y) \wedge (y=z)\big)$

Preguntas

$D = \{1, 2, 3, \ldots\}$

¿Qué es este predicado? $P(x, y) = (\neg(x < y)) \to (y < x))$

¿Como expresar

$$Q(x, y, z) = (x < y) \vee (y < z) \vee (z < x)$$

a través de $=$ y conectivos lógicos?

¿Como expresar el predicado $x = y$ a través de $x|y$ y conectivos lógicos?

$(x|y) \wedge (y|x) = (x = y)$

Conectivos y soportes

Proposición

Sean P, Q dos predicados n-arios sobre el conjunto A. Entonces,

- $sop(P \wedge Q) =$
- $sop(P \vee Q) =$
- $sop(\neg P) =$

Dibujos

Operaciones sobre predicados

- conectivos lógicos;
- identificación de los parámetros;
- cuantificadores.

Identificación (y cambio de nombres) de los parámetros

Ddominio $\mathbb{R}$:

Identificación (y cambio de nombres) de los parámetros

Ddominio $\mathbb{R}$:

- $\underbrace{x + y = z}_{\text{ternario}} \rightsquigarrow \underbrace{x + x = y}_{\text{binario}}.$

Identificación (y cambio de nombres) de los parámetros

Ddominio $\mathbb{R}$:

- $x + y = z \rightsquigarrow x + x = y$.
- $x + y = z \rightsquigarrow z + x = z$.

Identificación (y cambio de nombres) de los parámetros

Ddominio $\mathbb{R}$:

- $x + y = z \rightsquigarrow x + x = y$.
- $x + y = z \rightsquigarrow z + x = z$.
- ¿Cómo obtener $x = y$ a partir de $a + b = c + d$?

$x \quad \cancel{a} \quad y \quad d \quad y$

$ x$

Identificación (y cambio de nombres) de los parámetros

Ddominio $\mathbb{R}$:

- $x + y = z \rightsquigarrow x + x = y$.
- $x + y = z \rightsquigarrow z + x = z$.
- ¿Cómo obtener $x = y$ a partir de $a + b = c + d$?

Definición

Sea $P(x_1, \ldots, x_n)$ un predicado n-ario sobre un conjunto D. Sea $\alpha : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, k\}$ una función. Entonces, el siguiente predicado k-ario sobre D:

$$R(y_1, \ldots, y_k) = P(y_{\alpha(1)}, \ldots, y_{\alpha(n)}),$$

es el resultado de identificación de los parámetros, dada por α.

Operaciones sobre predicados

- conectivos lógicos;
- identificación de los parámetros;
- cuantificadores.

Cuantificador existencial

- “existe” $= \exists$.

Cuantificador existencial

- "existe" $= \exists$.
- $x|y$ a través de $\underbrace{x \cdot y = z}$ sobre $D = \mathbb{Z}$;

$$(\exists k \quad x \cdot k = y) = (x|y)$$

Cuantificador existencial

- "existe" $= \exists$.
- $x|y$ a través de $x \cdot y = z$ sobre $D = \mathbb{Z}$;
- "x es par" a través de $\underbrace{a + b = c}$ sobre $D = \mathbb{Z}$;

$\exists k \quad k + k = x$

Cuantificador existencial

- “existe” $= \exists$.
- $x|y$ a través de $x \cdot y = z$ sobre $D = \mathbb{Z}$;

- “x es par” a través de $a + b = c$ sobre $D = \mathbb{Z}$;

Definición

Sea P un predicado n-ario sobre un conjunto D con parametres $x_1, \ldots, x_n$. Entonces, $\exists x_i P$ es el siguiente predicado $(n-1)$-ario sobre D:

$$(\exists x_i P)(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \bigvee_{a \in \cancel{A}\, D} P(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

Ejemplos cuantificador existencial

$x=3 \quad x<y$

Define los siguientes predicados

$$P(y) = \exists x \; x < y, \qquad Q(x) = \exists y \; x < y$$

$y=3$

sobre $D = \{0, 3, 4, 5\}$.

$P(0)=0, \quad P(3)=P(4)=P(5)=1$

$Q(0) = 1 \quad 0<5$

$Q(3) = 1 \quad 3<5$

$Q(4) = 1 \quad 4<5$

$Q(5) = 0$

Ejemplos cuantificador existencial

Define los siguientes predicados

$$P(y) = \exists x \; x < y, \qquad Q(x) = \exists y \; x < y$$

sobre $D = \{0, 3, 4, 5\}$.

$3+1+1=5$

$1+1+1=3$

$3+3+1=7$

Define el siguiente predicado

$x=5$ $y=1$ $z=1$

$$\exists x \exists y \exists z \; (x + y + z = a) = R(a)$$

sobre $D = \{1, 3, 5, 6, 7\}$.

$x=1$ $y=1$, $z=3$

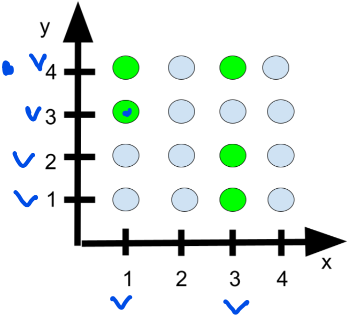
$R(1)=0$ $R(3)=1$ $R(5)=1$

$R(6)=$ $R(7)=1$

Interpretación geométrica de $\exists$

Para el siguiente predicado $A(x, y)$:

$\mathcal{D} = \{1, 2, 3, 4\}$



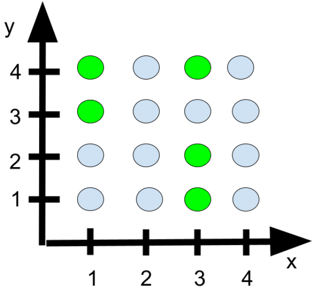
$A(1, 3) = \underline{1}$

$A(4, 1) = 0$

dibujar $\underbrace{\exists x A(x, y)}_{P(y)}$, $\underbrace{\exists y A(x, y)}_{Q(x)}$.

Interpretación geométrica de $\exists$

Para el siguiente predicado $A(x, y)$:



dibujar $\exists x A(x, y)$, $\exists y A(x, y)$.

Proposición

Sea P un predicado sobre un conjunto A. Entonces, $sop(\exists x_i P)$ es la proyección del $sop(P)$ paralelo a la dirección del eje x_i.

Cuantificador universal

Para uso conveniente, se usan también el cuantificador $\forall$ (para todos)...

Definición

Sea P un predicado n-ario sobre un conjunto D con parametres $x_1, \ldots, x_n$. Entonces, $\forall x_i P$ es el siguiente predicado $(n-1)$-ario:

$$(\forall x_i P)(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) =$$

$$\bigwedge_{a \in \cancel{A}\, D} \underbrace{P(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_n)}$$

Cuantificador universal

Para uso conveniente, se usan también el cuantificador $\forall$ (para todos)...

Definición

Sea P un predicado n-ario sobre un conjunto D con parametres $x_1, \ldots, x_n$. Entonces, $\forall x_i P$ es el siguiente predicado $(n-1)$-ario:

$$(\forall x_i P)(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \bigwedge_{a \in A} P(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

... aunque se expresa a través de $\neg, \exists$

Proposición

Sea P un predicado sobre un conjunto D y x_i uno de sus parámetros. Entonces, $\forall x_i P = \neg(\exists x_i(\neg P))$

Proposición

Sea P un predicado sobre un conjunto D y x_i uno de sus parámetros. Entonces, $\forall x_i P = \neg(\exists x_i(\neg P))$

Demostración.

$\overline{P(x_i)}$ - unario $P(x_i, \bar{y})$

$\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots,)_k$

1	1	1	1	1	1	1	1	1
d_1	d_2	d_3	...					

$\underbrace{\forall x_i P(x_i)}_{\text{es verdad}} \quad$ ¿= en la tabla hay solo 1-s

no existe en la tabla ningún 0

$\neg \underbrace{\exists x_i (\neg P(x_i))}_{\text{en la tabla hay por lo menos un 0.}}$

$\square$

Ejemplos

Sea $D = \mathbb{N}$. Expresar los siguientes predicados a través de predicados $x = y, x + y = z, x \cdot y = z$, conectivos lógicos, identificación de los parámetros y $\exists, \forall$:

- $\mathbb{I}\{x = 0\}$ $\quad x + x = x$

  $x = 0$
- $\mathbb{I}\{x = 1\}$

  $(x \cdot x = x) \wedge \neg(x + x = x)$
- $\mathbb{I}\{x = 2\}$

  $\exists y \; (y = 1) \wedge (y + y = x)$
- $x | y$ $\quad \exists k \; x \cdot k = y$
- "x es par" $\quad \exists y \; y + y = x$

  $\exists a \; \exists b \; (b = 2) \wedge (a \cdot b = x)$
- "x es primo" $\quad \neg(x = 0) \wedge \neg(x = 1) \wedge (\neg \exists y (y | x) \wedge \neg(y = x) \wedge \neg(y = 1)))$
- "x es una potencia de 2".

Espacio

¡Gracias!