IIC1253 Matemáticas Discretas

Sasha Kozachinskiy

DCC UC

22.09.2025

Hoy...

inducción matemática: números naturales, inducción, orden.

Operación sucesor

Definición

Sea a un conjunto. Su **sucesor** *es el conjunto* $S(a) = a \cup \{a\}$.

Operación sucesor

Definición

Sea a un conjunto. Su **sucesor** *es el conjunto* $S(a) = a \cup \{a\}$.

Ejercicio: escribir una fórmula que expresa "$b = S(a)$":

$$\forall x \quad x \in b \leftrightarrow (x \in a \vee x = a)$$

$$S(\{x, y\}) = \{x, y, \{x, y\}\}$$

Operación sucesor

Definición

Sea a un conjunto. Su **sucesor** *es el conjunto* $S(a) = a \cup \{a\}$.

Ejercicio: escribir una fórmula que expresa "$b = S(a)$":

Primeros números naturales:

$10 =$

$= \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$

$$0 = \varnothing$$

$$1 = S(\varnothing) = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\} = \{0\}$$

$$2 = S(1) = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\}$$

$$3 = S(2) = \{0, 1, 2\}$$

Conjuntos inductivos y infinitud

Definición

Un conjunto I se llama **inductivo** *si*

a) $\varnothing \in I$;

b) *para cada* $x \in I$, *tenemos* $S(x) \in I$.

Conjuntos inductivos y infinitud

Definición

Un conjunto I se llama **inductivo** *si*

a) $\varnothing \in I$;

b) *para cada $x \in I$, tenemos $S(x) \in I$.*

Axioma (de infinitud)

Existe un conjunto inductivo.

$\exists I \quad \emptyset \in I \wedge \forall x \quad x \in I \rightarrow$

$\exists y \in I \quad \text{"} y = S(x) \text{"}$

Números naturales

Definición

Un conjunto n se llama un **número natural** *si $n \in I$ para todos los conjuntos inductivos I.*

0 es un número natural porque $0 \in I$ para todos los conjuntos inductivos I, por definición.

Números naturales

Definición

Un conjunto n se llama un **número natural** *si $n \in I$ para todos los conjuntos inductivos I.*

Ejercicio: escribir una fórmula "n es un número natural".

$\forall I$ "I es conjunto inductivo" $\rightarrow n \in I$.

"n es natural".

Números naturales

Definición

Un conjunto n se llama un **número natural** *si $n \in I$ para todos los conjuntos inductivos I.*

Ejercicio: escribir una fórmula "n es un número natural".

Proposición

$0 = \varnothing$ es un número natural, y si n es un número natural, entonces $S(n)$ tambíen es un número natural.

Sea n un número natural. Hay que mostrar que $S(n) \in I$ para todos los conj. ind. I.
Tomamos cualq. conj ind. I. $n \in I$. ya que n es un número nat. Así que $S(n) \in I$ por def
D.

Conjunto de números naturales y principio de inducción

Teorema

Existe un conjunto $\mathbb{N}$ *de todos los números naturales.*

Conjunto de números naturales y principio de inducción

Teorema

Existe un conjunto $\mathbb{N}$ de todos los números naturales.

Demostración.

$\mathbb{N} = \{n \in I \mid n \text{ es un número natural}\}$ para cualquier conjunto inductivo I. $\square$

Conjunto de números naturales y principio de inducción

Teorema

Existe un conjunto $\mathbb{N}$ de todos los números naturales.

Demostración.

$\mathbb{N} = \{n \in I \mid n \text{ es un número natural}\}$ para cualquier conjunto inductivo I. $\square$

Teorema (Principio de inducción)

Sea A un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que

a) $0 \in A$;

b) *para cada $n \in A$, tenemos $S(n) = n + 1 \in A$.*

Entonces, $A = \mathbb{N}$.

Conjunto de números naturales y principio de inducción

Teorema

Existe un conjunto $\mathbb{N}$ de todos los números naturales.

Demostración.

$\mathbb{N} = \{n \in I \mid n \text{ es un número natural}\}$ para cualquier conjunto inductivo I. □

Teorema (Principio de inducción)

Sea A un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que

a) $0 \in A$;

b) *para cada $n \in A$, tenemos $S(n) = n + 1 \in A$.*

Entonces, $A = \mathbb{N}$.

Demostración.

A es inductivo, por lo tanto $\mathbb{N} \subseteq A$. Ya que $A \subseteq \mathbb{N}$, obtenemos $A = \mathbb{N}$. □

Orden

$0 = \emptyset \quad 1 = \{0\},\ 2 = \{0,1\},\ 3 = \{0,1,2\}$

$S(x) = x \cup \{x\} \qquad x \in S(x)$

Definición

Sean n, m dos números naturales. Entonces, $n < m$ si $n \in m$.

Teorema (Propiedades de orden)

a) $\neg(n < n)$ *para todos los números naturales n;* $\neg(n \in n)$
b) $n < S(n)$ *para todos los números naturales n;* $n \in S(n)$
c) $0 < n$ *o* $0 = n$ *para todos los números naturales n;* ✓
d) $((n < m) \wedge (m < k)) \rightarrow (n < k)$ *para todos los números naturales n, m, k;*
e) $(n < m) \vee (m < n) \vee (n = m)$ *para todos los números naturales n, m;*
f) *no existen dos números naturales n, m tal que $n < m < S(n)$.*

Proposición

$0 < n$ *o* $0 = n$ *para todos los números naturales* n.

$A = \{ n \in \mathbb{N} \mid 0 < n \vee 0 = n \}$

$A = \mathbb{N}$

Por principio de ind. basta

a) $0 \in A$

b) $n \in A \to S(n) \in A$ para todos n.

a) hecho.

b) Tomamos $n \in A$.

b1) $0 < n \Leftrightarrow 0 \in n$. $0 \in n \cup \{n\} = S(n)$

$0 < S(n) \Rightarrow S(n) \in A$

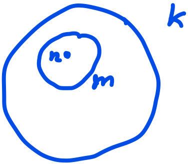
b2) $0 = n$. $S(0) = 1 = \{0\}$ $0 < S(0)$ $\square$

$n < m \iff n \in m$ en números naturales.

Proposición

$((n < m) \wedge (m < k)) \to (n < k)$ *para todos los números naturales* n, m, k;

$n \in m \in k \Rightarrow n \in k$.



Proposición

$((n < m) \wedge (m < k)) \rightarrow (n < k)$ para todos los números naturales n, m, k;

Definición

Un conjunto a se llama **transitivo** *si $c \in b \in a \implies c \in a$ para todos los conjuntos b, c.*

$S(0) = S(\emptyset) = \{\emptyset\}$

Proposición

$((n < m) \wedge (m < k)) \to (n < k)$ *para todos los números naturales* n, m, k;

$S(\{\emptyset\}) =$

$= \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Definición

Un conjunto a se llama **transitivo** *si* $\underbrace{c \in b}_{0} \in a \implies c \in a$ *para todos los conjuntos* b, c.

$\emptyset = 0$

$= \{\emptyset\}$

Proposición

Todos los números naturales son transitivos.

$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ es transitivo}\}$. $A = \mathbb{N}$

hay que mostrar?

a) $0 \in A$ notamos $\emptyset$ es transitivo.

b) $n \in A \to S(n) \in A \quad \forall n$.

n es transitivo $\Rightarrow S(n) = n \cup \{n\}$ es transitivo.

Tomamos b, c $\quad \underline{c \in b \in S(n)}$. Hay que mostrar $c \in S(n)$.

$b \in n \cup \{n\}$

$b \in n \vee b = n$

Caso 1 $b \in n$. Pero n es transitivo $\Rightarrow c \in n \subseteq S(n) \Rightarrow c \in S(n)$ $\square$

Caso 2 $b = n$. $\quad c \in b = n \subseteq S(n) \Rightarrow c \in S(n)$ $\square$

¡Gracias!