IIC1253 Matemáticas Discretas

Sasha Kozachinskiy

DCC UC

18.08.2025

Hoy...

Lógica proposicional: tautologías, consecuencias lógicas.

Tautologías

Definición

Una fórmula proposicional ϕ se llama **tautología** *si para cada posible asignación de sus variables a 0s y 1s, el valor de ϕ es 1.*

Tautologías

Definición

Una fórmula proposicional ϕ se llama **tautología** *si para cada posible asignación de sus variables a 0s y 1s, el valor de ϕ es 1.*

Lema (relación con equivalencias)

$x \vee y, y \vee x$

- *Dos fórmulas proposicionales ϕ y ψ son equivalentes si y sólo si*

Tautologías

Definición

Una fórmula proposicional ϕ se llama **tautología** *si para cada posible asignación de sus variables a 0s y 1s, el valor de ϕ es 1.*

Lema (relación con equivalencias)

- *Dos fórmulas proposicionales ϕ y ψ son equivalentes si y sólo si $(\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$ es una tautología.*

φ, ψ son equivalentes $\Rightarrow$ Cada posible caso asign $\varphi = \psi = 1$, o $\varphi = \psi = 0$ $\Rightarrow$ en los dos

$(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi) = 1$

$(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ es taut. Por contradicción. Si φ y ψ no son equivalentes $\Rightarrow$ existe asign. t.q $\varphi = 1, \psi = 0$, o $\varphi = 0, \psi = 1$

Tautologías

Definición

Una fórmula proposicional ϕ *se llama* **tautología** *si para cada posible asignación de sus variables a 0s y 1s, el valor de* ϕ *es 1.*

Lema (relación con equivalencias)

- *Dos fórmulas proposicionales* ϕ *y* ψ *son equivalentes si y sólo si* $(\phi \to \psi) \land (\psi \to \phi)$ *es una tautología.*
- *Una fórmula proposicional* ϕ *es una tautología si y sólo si*

Tautologías

Definición

Una fórmula proposicional ϕ se llama **tautología** *si para cada posible asignación de sus variables a 0s y 1s, el valor de ϕ es 1.*

Lema (relación con equivalencias)

- *Dos fórmulas proposicionales ϕ y ψ son equivalentes si y sólo si $(\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$ es una tautología.*
- *Una fórmula proposicional ϕ es una tautología si y sólo si ϕ y 1 son equivalentes.*

tautol - siempre 1

φ satisfacible - por lo menos 1 caso, cuando φ es 1

φ es una tautol.

$\Updownarrow$

$\neg\varphi$ no es satisfacible.

Pregunta tautología

¿Es una tautología?

$$\underbrace{(A \lor B)}_{1} \to ((\underbrace{A \land B}_{0}) \lor \underbrace{A)}_{0} \quad 0$$

$A=0,\ B=1$

La fórmula toma valor $\underline{1}$

$\Rightarrow$ no es una taut.

Pregunta tautología

¿Es una tautología?

$$(A \vee B) \to ((A \wedge B) \vee A)$$

$$(\neg Y \vee X) \vee (\neg X \vee Y) =$$

$$/\!/ \quad \underbrace{X \vee \neg X} \vee Y \vee \neg Y$$

¿Es una tautología?

$$(Y \to X) \vee (X \to Y)$$

Digamos, existe asign. cuando $(Y \to X) \vee (X \to Y) = 0$

$\Rightarrow Y \to X = 0,\ X \to Y = 0 \Rightarrow Y = 1, X = 0,\ X = 1, Y = 0$ - contrad.

La formula es una taut.

Ejemplos

$A \to (B \to A) = 0 \Rightarrow A=1,\ B \to A = 0$
$\Rightarrow A=1,\ B=1,\ A=0$

Las formulas

$$A \to (B \to A) \tag{1}$$

$$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \tag{2}$$

$$(A \land B) \to A \tag{3}$$

$$(A \land B) \to B \tag{4}$$

$$A \to (B \to (A \land B)) \tag{5}$$

$$A \to (A \lor B) \tag{6}$$

$$B \to (A \lor B) \tag{7}$$

$$(A \to B) \to ((B \to C) \to ((A \lor B) \to C)) \tag{8}$$

$$(\neg A) \to (A \to B) \tag{9}$$

$$(A \to B) \to ((A \to (\neg B)) \to (\neg A)) \tag{10}$$

$$A \lor \neg A \tag{11}$$

son tautologías que se llaman *axiomas del sistema de Frege*.

¿Cómo generar más tautologías? – Sustitución

Lema (Sustitución)

Si ϕ *es una tautología,* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *son sus variables, y* $\psi_1, \ldots, \psi_n$ *son fórmulas proposicionales, entonces la fórmula, donde en* ϕ*, para cada* $i = 1, \ldots, n$*, sustituimos cada ocurrencia de* X_i *por* ψ_i*, también es una tautología.*

¿Cómo generar más tautologías? – Sustitución

Lema (Sustitución)

Si ϕ es una tautología, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son sus variables, y $\psi_1, \ldots, \psi_n$ son fórmulas proposicionales, entonces la fórmula, donde en ϕ, para cada $i = 1, \ldots, n$, sustituimos cada ocurrencia de X_i por ψ_i, también es una tautología.

Ejemplo:

$$A \to (B \to A) \implies (x \wedge \neg y) \to ((x \vee z)) \to (x \wedge \neg y))$$

¿Cómo generar más tautologías? – Modus ponens

Lema (Modus ponens)

Si ϕ *y* ψ *son dos fórmulas proposicionales tal que* ϕ *y* $\phi \to \psi$ *son tautologías, entonces* ψ *también es una tautología.*

¿Cómo generar más tautologías? – Modus ponens

Lema (Modus ponens)

Si ϕ *y* ψ *son dos fórmulas proposicionales tal que* ϕ *y* $\phi \rightarrow \psi$ *son tautologías, entonces* ψ *también es una tautología.*

Ejemplo:

- $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ (axioma 1)

¿Cómo generar más tautologías? – Modus ponens

Lema (Modus ponens)

Si ϕ y ψ son dos fórmulas proposicionales tal que ϕ y $\phi \to \psi$ son tautologías, entonces ψ también es una tautología.

Ejemplo:

- $A \to (B \to A)$ (axioma 1)
- $A \vee \neg A$ (axioma 11)

¿Cómo generar más tautologías? – Modus ponens

Lema (Modus ponens)

Si ϕ y ψ son dos fórmulas proposicionales tal que ϕ y $\phi \to \psi$ son tautologías, entonces ψ también es una tautología.

Ejemplo:

- $A \to (B \to A)$ (axioma 1)
- $A \vee \neg A$ (axioma 11)
- $(A \vee \neg A) \to (\psi \to (A \vee \neg A))$ (sustitución)

¿Cómo generar más tautologías? – Modus ponens

Lema (Modus ponens)

Si ϕ y ψ son dos fórmulas proposicionales tal que ϕ y $\phi \to \psi$ son tautologías, entonces ψ también es una tautología.

Ejemplo:

- $A \to (B \to A)$ (axioma 1)
- $A \vee \neg A$ (axioma 11)
- $(A \vee \neg A) \to (\psi \to (A \vee \neg A))$ (sustitución)
- $\psi \to (A \vee \neg A)$ (modus ponens)

completitud del sistema Frege

Teorema

Cada tautología ϕ se puede obtener a partir de

$$A \rightarrow (B \rightarrow A) \tag{1}$$

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \tag{2}$$

$$(A \wedge B) \rightarrow A \tag{3}$$

$$(A \wedge B) \rightarrow B \tag{4}$$

$$A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)) \tag{5}$$

$$A \rightarrow (A \vee B) \tag{6}$$

$$B \rightarrow (A \vee B) \tag{7}$$

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)) \tag{8}$$

$$(\neg A) \rightarrow (A \rightarrow B) \tag{9}$$

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (\neg B)) \rightarrow (\neg A)) \tag{10}$$

$$A \vee \neg A \tag{11}$$

a través de un finito número de aplicaciones de sustitución y modus ponens.

Ejemplo Frege

Cómo mostrar $A \rightarrow A$ en sistema Frege?

$$A \rightarrow (B \rightarrow A) \tag{1}$$
$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \tag{2}$$
$$(A \land B) \rightarrow A \tag{3}$$
$$(A \land B) \rightarrow B \tag{4}$$
$$A \rightarrow (B \rightarrow (A \land B)) \tag{5}$$
$$A \rightarrow (A \lor B) \tag{6}$$
$$B \rightarrow (A \lor B) \tag{7}$$
$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \lor B) \rightarrow C)) \tag{8}$$
$$(\neg A) \rightarrow (A \rightarrow B) \tag{9}$$
$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (\neg B)) \rightarrow (\neg A)) \tag{10}$$
$$A \lor \neg A \tag{11}$$

Ejemplo Frege

Cómo mostrar $A \to A$ en sistema Frege?

$$A \to (B \to A) \tag{1}$$

$$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \tag{2}$$

Demostración de tautologías

¿Cómo probar que una fórmula es tautología?

Demostración de tautologías

¿Cómo probar que una fórmula es tautología?

- Probar todas las asignaciones...

Demostración de tautologías

¿Cómo probar que una fórmula es tautología?

- Probar todas las asignaciones... *método exponencial*

Demostración de tautologías

¿Cómo probar que una fórmula es tautología?

- Probar todas las asignaciones... *método exponencial*
- ¿Sistema Frege?

Problema

¿Existe una constante $C > 0$ tal que cada tautología ϕ puede ser mostrada en sistema Frege en no más que m^C pasos, donde m es el largo de ϕ?

Demostración de tautologías

¿Cómo probar que una fórmula es tautología?

- Probar todas las asignaciones... *método exponencial*
- ¿Sistema Frege?

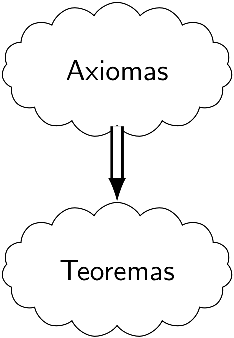
Problema

¿Existe una constante $C > 0$ tal que cada tautología ϕ puede ser mostrada en sistema Frege en no más que m^C pasos, donde m es el largo de ϕ?

¿Tienen todas las leyes lógicas demostraciones cortas? (NP $=$ coNP).

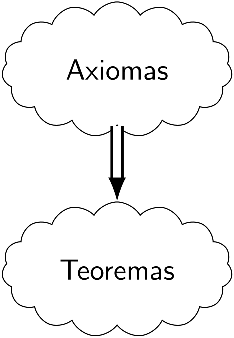
Consequencias lógicas

Matemáticas



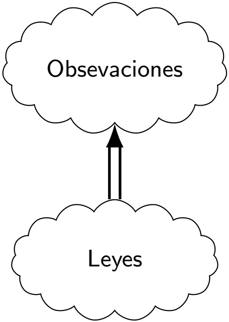
Consequencias lógicas

Matemáticas



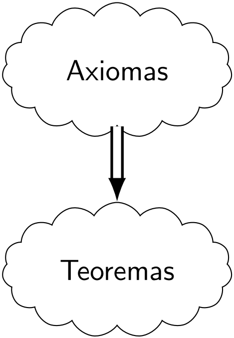
Ciencias naturales

https://es.wikipedia.org/wiki/Leyes_de_Kepler



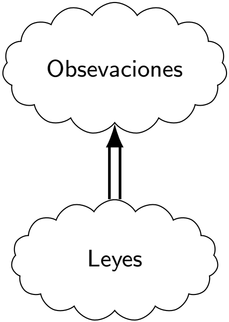
Consequencias lógicas

Matemáticas



Ciencias naturales

`https://es.wikipedia.org/wiki/Leyes_de_Kepler`



Definición (Consecuencia lógica)

Sea Φ un conjunto de fórmulas. La fórmula ψ es una **consecuencia lógica** *de Φ (se denota eso $\Phi \models \psi$) si para cada asignación de las variables a 0s y 1s tal que todas las fórmulas en Φ toman valor 1, la fórmula ψ también toma valor 1.*

Ejemplos

φ

¿Es consecuencia lógica? $\{\underbrace{\neg A \to B}_{1}, \underbrace{\neg A \to \neg B}_{1}\} \models \underbrace{A}_{1}$

Sí. ¿Porque no puede ser $\neg A \to B = 1$, $\neg A \to \neg B = 1$,

$A = 0$? $\therefore$ $\underline{1} \to B = \underline{1}$

$\underline{1} \to \neg B = 1$

$B = 1$, $\neg B = \underline{1}$ $\div$

$B = 0$

Ejemplos

¿Es consecuencia lógica? $\{\neg A \to B, \neg A \to \neg B\} \models A$

¿Es consecuencia lógica? $\{A \to B, \neg A \to B\} \models B$

Ejemplos

¿Es consecuencia lógica? $\{\neg A \to B, \neg A \to \neg B\} \models A$

¿Es consecuencia lógica? $\{A \to B, \neg A \to B\} \models B$

$0 \to 1 \quad 1 \to 1$

¿Es consecuencia lógica? $\{\underbrace{A \to B}_{1}, \underbrace{\neg A \to B}_{1}\} \models \underbrace{A}_{0}$

$A=0$, $B=1$. no.

Ejemplos

¿Es consecuencia lógica? $\{\neg A \to B, \neg A \to \neg B\} \models A$

¿Es consecuencia lógica? $\{A \to B, \neg A \to B\} \models B$

¿Es consecuencia lógica? $\{A \to B, \neg A \to B\} \models A$

no

1 0

¿Es consecuencia lógica? $\{\neg A \to \neg B\} \models A \to B$

$\forall$ Para cada n $4 \mid n \to 2 \mid n$ | $A=1, B=0$

$4 \nmid n \to 2 \nmid n$

Ejemplos

¿Es consecuencia lógica? $\{\neg A \rightarrow B, \neg A \rightarrow \neg B\} \models A$

¿Es consecuencia lógica? $\{A \rightarrow B, \neg A \rightarrow B\} \models B$

¿Es consecuencia lógica? $\{A \rightarrow B, \neg A \rightarrow B\} \models A$

¿Es consecuencia lógica? $\{\neg A \rightarrow \neg B\} \models A \rightarrow B$

¿Es consecuencia lógica? $\{\neg B \rightarrow \neg A\} \models A \rightarrow B$

Métodos de demostración

Ejercicio: dar ejemplos de demostraciones matemáticas que usan estas consecuencias lógicas.

$$\{\neg A \to B, \neg A \to \neg B\} \models A$$

$$\{A_1 \vee A_2 \vee \ldots A_n, A_1 \to B, \ldots, A_n \to B\} \models B$$

$$\{\neg B \to \neg A\} \models A \to B$$

Tautologías, consecuencias, satisfacibilidad

Definición (Satisfacibilidad)

Sea Φ *un conjunto de fórmulas. Entonces,* Φ *es* **satisfacible** *si existe una asignación de las variables a 0s y 1s tal que todas las fórmulas en* Φ *toma valor 1.*

Tautologías, consequencias, satisfacibilidad

Definición (Satisfacibilidad)

Sea Φ *un conjunto de fórmulas. Entonces,* Φ *es* **satisfacible** *si existe una asignación de las variables a 0s y 1s tal que todas las fórmulas en* Φ *toma valor 1.*

Teorema

Sea Φ *un conjunto de fórmulas proposicionales y* ψ *una fórmula proposicional. Entonces, la siguientes condiciones son equivalentes:*

- $\Phi \models \psi$
- $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ *no es satisfacible.*

Tautologías, consequencias, satisfacibilidad

Definición (Satisfacibilidad)

Sea Φ *un conjunto de fórmulas. Entonces,* Φ *es* **satisfacible** *si existe una asignación de las variables a 0s y 1s tal que todas las fórmulas en* Φ *toma valor 1.*

Teorema

Sea Φ *un conjunto de fórmulas proposicionales y* ψ *una fórmula proposicional. Entonces, la siguientes condiciones son equivalentes:*

- $\Phi \models \psi$
- $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ *no es satisfacible.*

Si Φ *es* **finito**, *dos condiciones anteriores son equivalentes a:*

- $(\bigwedge_{\phi\in\Phi} \phi) \to \psi$ *es una tautología.*

compacidad

¿Qué hacer cuando Φ es *infinito*? ¿Se puede reducir a las tautologías?

compacidad

¿Qué hacer cuando Φ es *infinito*? ¿Se puede reducir a las tautologías?

Teorema (Compacidad)

Sean Φ un conjunto de fórmulas proposicionales (posiblemente, **infinito***) y ψ una fórmula proposicional tal que $\Sigma \models \cancel{\varphi}\,\psi$. Entonces, existe un* **subconjunto finito** $\Sigma' \subseteq \Sigma$ *tal que* $\Sigma' \models \cancel{\varphi}\,\psi$.

¡Gracias!