Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Высшая школка интеллектуальных систем и суперкомпьютерных технологий

Отчет по лабораторной работе №1

Дисциплина: Вычислительная математика

Номер варианта: 8

Выполнил студент гр. 3530901/10001 Козырев Д. В.
Преподаватель Цыган В. Н.

«10» февраль 2023

Санкт-Петербург

2023

Задача.

Для таблично заданной функции $f(x)$:

x	1.0	1.2	1.5	1.6	1.8	2.0
$f(x)$	5.000	6.899	11.180	13.133	18.119	25.000

построить сплайн-функцию и полином Лагранжа, после чего использовать две полученные интерполирующие функции по отдельности для нахождения корня уравнения $f(x) = 6x + 3$ на промежутке $[1\,, 2]$ методом бисекции. Определить, насколько будут отличаться значения корней, найденные двумя способами.

С использованием программы **QUANC8** вычислить интегралы от двух интерполирующих функций на интервале $[1, 2]$ и сравнить их значения.

Ход работы.

Интерполяция.

Вызовом подпрограммы **lagrange** для всех $x: x \in [1, 2]$ с шагом 0.1 найдем значения интерполяционного полинома в форме Лагранжа, построенного по 6 точкам из таблицы выше. На основе полученных данных (рис.1) изобразим график этого полинома (рис.2).

```
//----LAGRANGE----
x =      1 |     f(x) =  5
x =      1.1 |   f(x) =  5.87491
x =      1.2 |   f(x) =  6.899
x =      1.3 |   f(x) =  8.10233
x =      1.4 |   f(x) =  9.5172
x =      1.5 |   f(x) =  11.18
x =      1.6 |   f(x) =  13.133
x =      1.7 |   f(x) =  15.4262
x =      1.8 |   f(x) =  18.119
x =      1.9 |   f(x) =  21.2823
x =      2 |     f(x) =  25
```

Рис.1. Таблица значений полинома Лагранжа для данной таблицы узлов интерполирования.

Пользуясь единственным вызовам подпрограммы **spline** с последующим множественным вызовом подпрограммы **seval** найдем значения сплайн-функции, построенной для заданных узлов интерполирования, во всех $x: x \in [1, 2]$ с шагом 0.1 (рис.3). Изобразим график функции на рис. 4.

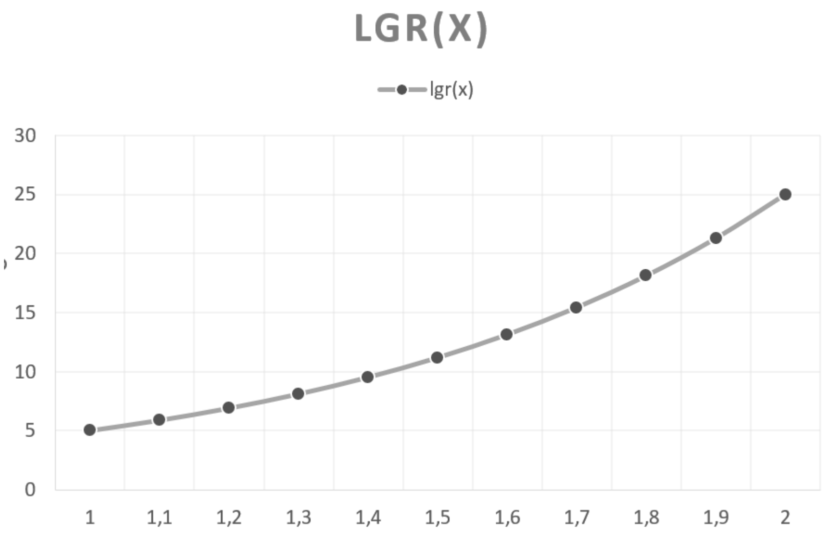
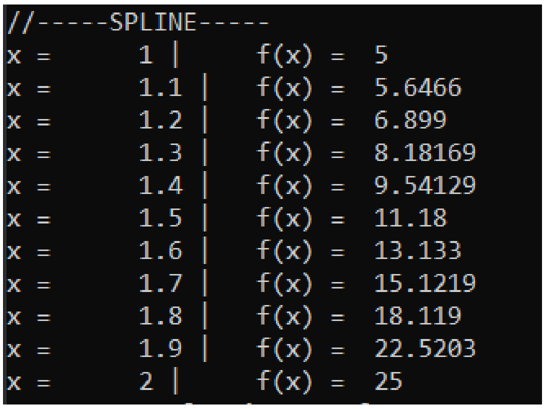


Рис.2. Полином в форме Лагранжа.



```
//-----SPLINE-----
x =      1 |     f(x) =  5
x =      1.1 |   f(x) =  5.6466
x =      1.2 |   f(x) =  6.899
x =      1.3 |   f(x) =  8.18169
x =      1.4 |   f(x) =  9.54129
x =      1.5 |   f(x) =  11.18
x =      1.6 |   f(x) =  13.133
x =      1.7 |   f(x) =  15.1219
x =      1.8 |   f(x) =  18.119
x =      1.9 |   f(x) =  22.5203
x =      2 |     f(x) =  25
```

Рис.3. Таблица значений сплайн-функции для данной таблицы узлов интерполирования.

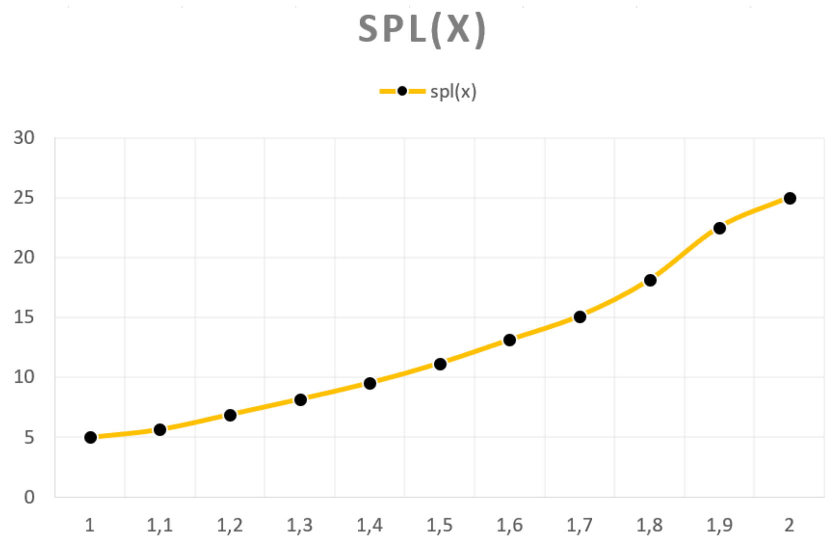


Рис.4. Сплайн-функция.

График функции абсолютного отклонения представлен на рис. 5. По графику видно, что разница значений двух аппроксимирующих функций во всех точках, кроме $x = 1.9$ колеблется в диапазоне $[0, 0.0304]$. Максимальный разброс $\sigma = 1.238$ функции абсолютного отклонения достигается в точке $x = 1.9$, что может быть связано с резким ростом функции $f(x)$ на границах отрезка $[1.8, 2.0]$ и отсутствием узла интерполирования на данном промежутке.

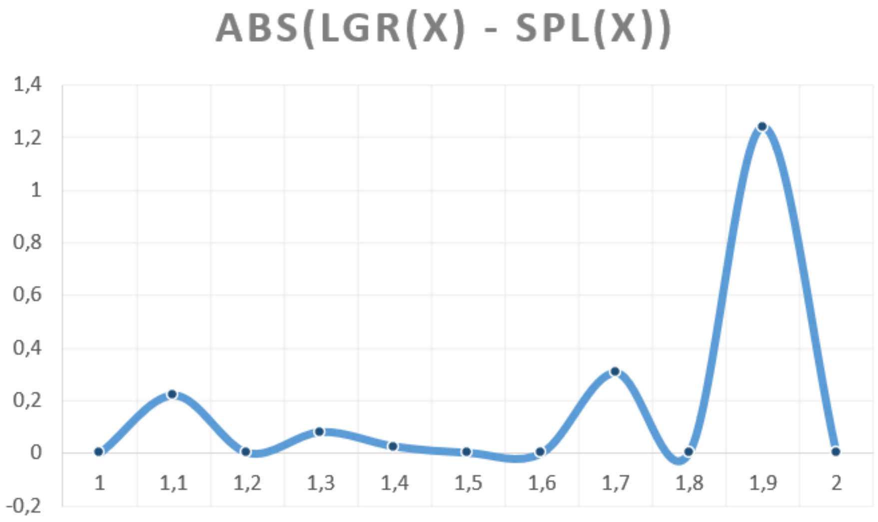
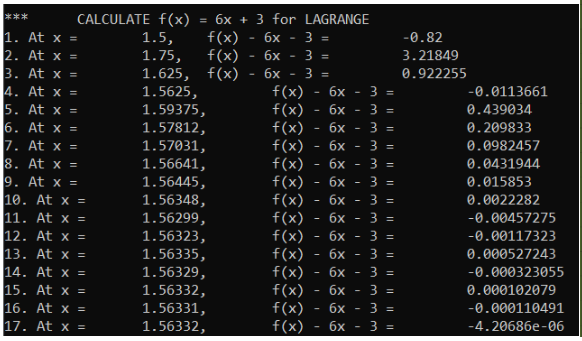


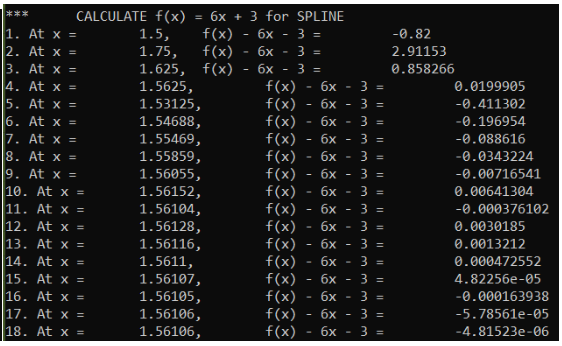
Рис. 5. График абсолютного отклонения полинома в форме Лагранжа от сплайн-функции.

Поиск корня уравнения.

Произведем поиск корня уравнения $f(x) = 6x + 3$, для полинома Лагранжа и сплайн функции методом половинного деления с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$ (рис.6).



```
***      CALCULATE f(x) = 6x + 3 for LAGRANGE
1. At x =       1.5,    f(x) - 6x - 3 =         -0.82
2. At x =       1.75,   f(x) - 6x - 3 =         3.21849
3. At x =       1.625,  f(x) - 6x - 3 =         0.922255
4. At x =       1.5625,         f(x) - 6x - 3 =         -0.0113661
5. At x =       1.59375,        f(x) - 6x - 3 =         0.439034
6. At x =       1.57812,        f(x) - 6x - 3 =         0.209833
7. At x =       1.57031,        f(x) - 6x - 3 =         0.0982457
8. At x =       1.56641,        f(x) - 6x - 3 =         0.0431944
9. At x =       1.56445,        f(x) - 6x - 3 =         0.015853
10. At x =      1.56348,        f(x) - 6x - 3 =         0.0022282
11. At x =      1.56299,        f(x) - 6x - 3 =         -0.00457275
12. At x =      1.56323,        f(x) - 6x - 3 =         -0.00117323
13. At x =      1.56335,        f(x) - 6x - 3 =         0.000527243
14. At x =      1.56329,        f(x) - 6x - 3 =         -0.000323055
15. At x =      1.56332,        f(x) - 6x - 3 =         0.000102079
16. At x =      1.56331,        f(x) - 6x - 3 =         -0.000110491
17. At x =      1.56332,        f(x) - 6x - 3 =         -4.20686e-06
```



```
***      CALCULATE f(x) = 6x + 3 for SPLINE
1. At x =       1.5,    f(x) - 6x - 3 =         -0.82
2. At x =       1.75,   f(x) - 6x - 3 =         2.91153
3. At x =       1.625,  f(x) - 6x - 3 =         0.858266
4. At x =       1.5625,         f(x) - 6x - 3 =         0.0199905
5. At x =       1.53125,        f(x) - 6x - 3 =         -0.411302
6. At x =       1.54688,        f(x) - 6x - 3 =         -0.196954
7. At x =       1.55469,        f(x) - 6x - 3 =         -0.088616
8. At x =       1.55859,        f(x) - 6x - 3 =         -0.0343224
9. At x =       1.56055,        f(x) - 6x - 3 =         -0.00716541
10. At x =      1.56152,        f(x) - 6x - 3 =         0.00641304
11. At x =      1.56104,        f(x) - 6x - 3 =         -0.000376102
12. At x =      1.56128,        f(x) - 6x - 3 =         0.0030185
13. At x =      1.56116,        f(x) - 6x - 3 =         0.0013212
14. At x =      1.5611,         f(x) - 6x - 3 =         0.000472552
15. At x =      1.56107,        f(x) - 6x - 3 =         4.82256e-05
16. At x =      1.56105,        f(x) - 6x - 3 =         -0.000163938
17. At x =      1.56106,        f(x) - 6x - 3 =         -5.78561e-05
18. At x =      1.56106,        f(x) - 6x - 3 =         -4.81523e-06
```

а) б)

Рис. 6. Итерации рабочего цикла метода бисекции. а) для полинома в форме Лагранжа; б) для сплайн-функции.

На 17-м шаге метода бисекции для полинома Лагранжа было достигнуто требование по точности, значение $x = 1.56332$ – искомое для поставленной задачи. Аналогично на 18-м шаге алгоритма для сплайн-функции было получено значение $x = 1.56106$ с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-5}$. Разница корней равна $\delta_{abs} = |1.56332 - 1.56106| = 0.00226$. Погрешность имеется из-за разной природы аппроксимирующих функций. Разница значений мала в сравнении с разбросом функции абсолютного отклонения σ, из-за того, что сам корень находится вблизи узла интерполирования.

Интегрирование.

Используя подпрограмму **quanc8** найдем значения определенных интегралов от интерполяционного полинома в форме Лагранжа и сплайн функции. Результаты выполнения программы и разница значений приведены ниже.

```
Lagrange polynome integral =     12.4266
Lagrange polynome error estimation =     1.33357e-15
Spline-function integral =       12.5345
Spline-function error estimation =       4.05925e-06
Absolute difference =    0.107856
```

Рис.7. Результаты работы подпрограммы ***quanc8****, абсолютная разница результатов, а также оценка глобальной погрешности результата.*

Вывод.

В ходе работы были построены две аппроксимирующие функции, произведен сравнительный анализ их поведения на отрезке $[1, 2]$, оценены значения корней уравнения $f(x) = 6x + 3$ для построенных функций, а также их интегралов на том же отрезке. Исследование показало, что две аппроксимирующие функции имеют максимальный абсолютный разброс $\sigma = 1.238$, значения корней, вычисленные с погрешностью $\varepsilon = 10^{-5}$ отстоят друг от друга на $\delta_{abs} = 0.00226$, определенные интегралы, вычисленные одним и тем же методом, различны на величину порядка 10^{-1}, при использовании контроля абсолютной и относительной погрешностей на величину, равную 10^{-5}. Расчетные глобальные погрешности интегрирования отличаются на семь порядков, в пользу интерполяционного полинома в форме Лагранжа, значит он обладает большей степень точности, для данной таблицы значений, чем сплайн-функция.