1.4.9

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ① $\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

если $\det A \neq 0 \Rightarrow$ обр. A^{-1} существ., тогда

② $A_{11} = a_{22}$, $A_{12} = -a_{21}$, $A_{21} = -a_{12}$, $A_{22} = a_{11}$

③ $\tilde{A} = (A_{ij})^T = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

④ $A^{-1} = \dfrac{1}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

1.4.14 (Методом Гаусса)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\Gamma = (A \mid E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II - I \\ III - 2I \end{array} \sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)_{III:2} =$ [следующим шагом сделаем на главной диагонали единицы] $\sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)_{II + 2 III}$ — слева от верт. линии над главн. диагональю получим нули.

$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)^{I - II - III} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -1 & -1{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$

$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1{,}5 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Матричные уравнения

Дано: A, B, C — матрицы

Найти: X — матрица.

1) $AX = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$ — обратную матрицу ставим слева или справа от матрицы B в
2) $XA = B \Rightarrow X = B \cdot A^{-1}$ зависимости от того как она
3) $AXC = B \quad X = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$ стоит относ. X.

1.4.27

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}}_{A} X = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}}_{B}$$

① $A^{-1} = \det A = 3 - 4 = -1 \neq 0$ $\det A$ - существует

② $A^{-1} = (A \mid E) = \left(\begin{matrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right) \underset{\text{II}+2\text{I}}{=} \left(\begin{matrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{matrix}\right)^{\text{I}\cdot(-1)} =$

$= \left(\begin{matrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{matrix}\right)^{\text{I}+2\text{II}} = \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix}\right)$

$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot(-2) + 2\cdot 1 & 3\cdot 3 + 2\cdot(-4) \\ 2\cdot(-2) + 1 & 2\cdot 3 + 1\cdot(-4) \end{pmatrix} =$

Ответ: $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

1.4.27

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \cdot X \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}_{C} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}}_{B} \qquad X - ?$$

$\det A = 2 - 0 = 2 \neq 0$ $\det A$ - сущ.

$\det C = -3 + 4 = 1 \neq 0$ $\det C$ - сущ.

$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$C^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} c_{22} & -c_{12} \\ c_{21} & c_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

$X = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$

$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 0\cdot 5 & 1\cdot(-2) + 0(-4) \\ -\frac{1}{2}\cdot 3 + \frac{1}{2}\cdot 5 & -\frac{1}{2}\cdot(-2) + \frac{1}{2}\cdot(-4) \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 3 + (-2)(-2) & 3\cdot 2 + (-2)\cdot(-1) \\ 3 + 2 & 2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

Системы линейных алгебраических уравнений
Теорема Кронекера Капелли. Метод Гаусса

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Всего x уравнений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — неизвестные их „n" штук

a_{ij} — коэффициенты системы $(i \in [1; m]; j \in [1; n])$

$[b_1; b_n]$ — свободные члены

Решить систему 1.1 значит найти такой набор чисел $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ что при подстановке его в систему вместо соответствующих неизвестных каждое из уравнений системы обращается в тождество

Если система 1.1 имеет хотябы одно решение, то она называется совместной.

Если система не имеет ни одного решения, то она называется несовместной.

Если система имеет единственное решение, то система называется определенной

Если система имеет более 1 решения, то она называется неопределенной

2 системы (СЛАУ) с одинаковым числом неизвестных называются эквивалентными, если множества всех решений этих систем совпадают