

# Обратная матрица. $(A^{-1})$

1) Свойства обратной матрицы

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} ; (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} ; (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

2) Нахождение обратной матрицы

① 1. Находим значение определителя т.е. при  $\det A \neq 0$   $\nexists A^{-1}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

2. Находим все алгебраические дополнения

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot |a_{22}| = a_{22}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot |a_{21}| = -a_{21}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot |a_{12}| = -a_{12}$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot |a_{11}| = a_{11}$$

3. Собираем матрицу из алгебраических дополнений

$$\tilde{A} (a_{ij})^T = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \leftarrow \tilde{A}$$

4. Находим обратную матрицу по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A} = \frac{1}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

5. Анализируем и с матрицами больше порядка.

② Метод Гаусса.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 - 2 + 4 - 4 + 2 = 2 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$\Gamma = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} I \\ II - I \\ III - 2I \end{matrix} \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} \\ \\ III + II \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} \\ \\ III \cdot \frac{1}{2} \end{matrix} \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \begin{matrix} \\ \\ -I - III \end{matrix} \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -1 & -1,5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1,5 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$