РАНГОМ СИСТЕМЫ СТРОК НАЗЫВАЕТСЯ МАКСИМАЛЬНОЕ КОЛИЧЕСТВО ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫХ СТРОК ЭТОЙ СИСТЕМЫ.

В КАЖДОЙ МАТРИЦЕ МОЖНО СВЯЗАТЬ ДВА РАНГА: СТРОЧНЫЙ РАНГ (РАНГ СИСТЕМЫ СТРОК) И СТОЛБЦОВЫЙ РАНГ (РАНГ СИСТЕМЫ СТОЛБЦОВ).

kozyrkov.i@yandex.ru
kozyrkov.ig@gmail.com
Санкт - Петербург 2020

РАНГ МАТРИЦЫ

Буклет создан студентом 1 курса ИВТ(1) Игорем Козырьковым

Рангом матрицы A называется ранг её системы строк или столбцов.

Обозначается rangA или r(A)

На практике для нахождения ранга матрицы используют следующее утверждение: ранг матрицы равен количеству ненулевых строк после приведения матрицы к ступенчатому виду методом элементарных преобразований

Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие:

1) перестановка строк (столбцов);

2) умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля;

3) прибавление к элементам строки (столбца) соответсвующих элементов другой строки (столбца), предварительно умноженных на некоторое число.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(5)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ранг данной матрицы равен четырем (r(A) = 4)) так как количество ненулевых строк = 4.

Метод окаймляющих миноров. Пусть в матрице найден минор k-го порядка M, отличный от нуля. Рассмотрим лишь те миноры (k+1)− го порядка, которые содержат в себе (окаймляют) минор M: если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k. В противном случае среди окаймляющих миноров найдется ненулевой минор (k+1)−го порядка, и вся процедура повторяется.

3.150. Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Фиксируем минор отличный от нуля второго порядка $M_2 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 6 = 1$.

Рассмотрим окаймляющие миноры третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 12 - 10 + 12 + 10 + 4 = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = -32 + 8 - 2 - 8 + 2 + 32 = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -8 - 16 - 14 + 16 + 14 + 8 = 0;$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -40 + 4 - 3 - 10 + 1 + 48 = 0;$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -10 - 8 - 21 + 20 + 7 + 12 = 0;$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 7 \\ -1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 64 + 14 + 4 + 56 - 8 = 0.$$

Таким образом, ранг матрицы A равен двум.